NOTIONS DE LOGIQUE

I) LES PROPOSITIONS ; LES FONCTIONS PROPOSITIONNELLES

1) Activité et définition

1.1 Activités :

Activité 1 :

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

p_1 " -6 est un entier relatif "

p_2 "$\sqrt{2} \leq 2$"

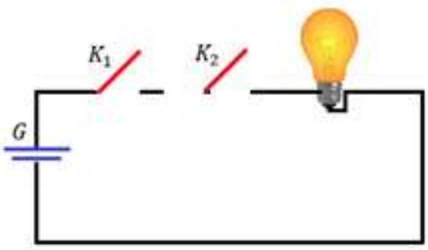
p_3 " $\frac{2}{3}$ est nombre décimale "

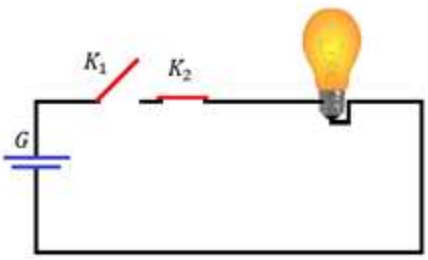
p_3 "$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} > \frac{19}{10}$ "

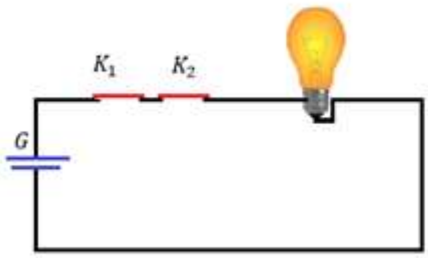
Activité 2 :

Voici 2 montages :

Montage en série :

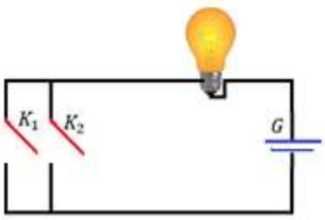


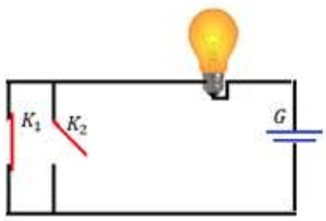


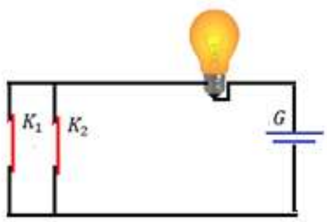


❶ ❷ ❸

Montage en parallèle :







① ② ③

1- Si la lampe représente une lampe allumée, parmi les six images, déterminer celle qui sont valables.

2- Exprimer dans une phrase les conditions pour qu'une lampe soit allumée. (Pour les deux montages)

Activité 3 :

Soit $P(x)$ " $x \in \mathbb{R}$; $3x^2 - 2x - 1 = 0$" (**$P(x)$ s'appelle une fonction propositionnelle**)

1- donner une valeur a_1 qui vérifie $P(a_1)$ est fausse.

2- donner une valeur a_2 qui vérifie $P(a_2)$ est vraie.

3- Que pouvez-vous dire de la proposition Q " ***pour tout x dans*** $\mathbb{R}$ *on a* ; $3x^2 - 2x - 1 = 0$"

4- Que pouvez-vous dire de la proposition R " ***il existe au moin x dans*** $\mathbb{R}$ *tel que* ; $3x^2 - 2x - 1 = 0$"

Activité 4 :

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle sur un ensemble E et $\mathcal{V}_{P(x)} = \{x \in E \ / \ P(x) \text{ est vraie}\}$

Déterminer $\mathcal{V}_{P(x)}$ dans les cas suivants :

1- $P(x)$ " $x \in \mathbb{R}$; $4x^2 + x - 5 \leq 0$ "

2- $P(x)$ " $x \in \mathbb{R}$; $|3x^2 + x| + x = 0$ "

1.2 Définitions

Définition 1 :

Une **proposition** est un énoncé formé d'un assemblage de symboles et de mots, auquel une valeur de vérité *vrai* ou *faux* peut être attribuée

Exemple :

Les énoncés suivants sont des propositions :

p_1 " 3 est un entier pair "

p_2 " $\sqrt{2}$ est nombre positif "

p_3 " Un carrée est un parallélogramme "

p_4 " Dans l'espace si deux droites sont perpendiculaire toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre.

Déterminer la valeur de vérité de chaque proposition.

Définition 2 :

Une fonction propositionnelle sur un ensemble E est une expression contenant une ou plusieurs variables libres dans E et qui est susceptible de devenir une proposition vraie ou fausse si l'on attribue à ces variables certaines valeurs particulières de l'ensemble E.

2) Les quantificateurs

2.1 Quantificateur universel

Activité 1 :

Soit la fonction propositionnelle

$P(x)$: " $x \in \mathbb{R}^{*+}$; $x + \frac{1}{x} \geq 2$ "

Vérifier que $\mathcal{V}_{P(x)} = \mathbb{R}^{*+}$

On peut dire que : "**Quel que soit** $x \in \mathbb{R}^{*+}$; $x + \frac{1}{x} \geq 2$ "

L'expression " Quel que soit " s'appelle **le quantificateur universel** et se note $\forall$

Remarque :

- ✓ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par **le quantificateur universel** on obtient une proposition.
- ✓ La proposition " $(\forall x \in E)(P(x))$ est de valeur vraie si et seulement si $\mathcal{V}_{P(x)} = E$.

Exercice :

Etudier la vérité des propositions suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(2x^2 + x + 3 > 0)$
2. $(\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^{*2})(a\sqrt{2} + b \neq 0)$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(\frac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}\right)$

2.2 Quantificateur existentiel

Activité 1 :

Considérons l'équation (E) : $3x^2 + x - 2 = 0$

1. Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
2. Que peut-on dire de l'énoncé '' il existe au moins un réel tel que : $3x^2 + x - 2 = 0$
3. Déterminer $\boldsymbol{\mathcal{V}_{Q(x)}}$.

L'expression '' il existe au moins '' s'appelle **le quantificateur existentiel** et se note $\exists$

Remarque :

- ✓ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par **le quantificateur existentiel** on obtient une proposition.
- ✓ La proposition '' $(\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$ est de valeur vraie si et seulement si $\boldsymbol{\mathcal{V}_{P(x)} \neq \emptyset}$.

Exercice :

Etudier la vérité des propositions suivantes :

1. $(\exists x \in \mathbb{R})(|x^2 - x| + 3x = 0)$
2. $(\exists x > 0)(x^2 + 3x = 0)$

2.3 Proposition avec plusieurs quantificateurs.

Considérons sur $\mathbb{R}^2$ la fonction propositionnelle $P_{(x,y)}$ '' $3x + y - 1 = 0$ ''

Les expressions :

1. $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(\ 3x + y - 1 = 0)$
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\ 3x + y - 1 = 0)$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(\ 3x + y - 1 = 0)$
4. $(\forall \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\ 3x + y - 1 = 0)$

Sont des propositions

Exercice

Déterminer les valeurs de vérité des propositions 1. 2. 3.

Remarque :

On admet que toute proposition et soit vraie soit fausse ; c'est ***le principe de tiers exclus***

Une proposition vraie se note par 1 ou V ; une proposition fausse se note par 0 ou F

II) OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS.

1. La négation

Définition

La négation d'une proposition P et la proposition qui vraie si P est fausse ; et qui est fausse si P est vraie on la note : $\overline{P}$ ou $\urcorner P$

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

Ce tableau s'appelle le tableau de vérité de la négation

2. La conjonction

Définition :

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps on la note $(\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{Q})$ ou $(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q})$.

On peut résumer la définition précédente sur un tableau comme suite :

P	Q	$P \wedge Q$
1	**1**	**1**
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ce tableau s'appelle le tableau de vérité de la conjonction

Exercice :

Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1. (3 est un nombre impair) et (6 est un nombre premier)
2. ($\sqrt{2}$ est un nombre irrationnelle) et [($\forall x \in \mathbb{R})(1 + 2x < x^2)$]
3. (5 est positif) et (3 divise 18)

3 La disjonction

Définition :

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie on la note $(\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{Q})$ ou $(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q})$.

On peut résumer la définition précédente sur un tableau comme suite :

P	Q	$P \vee Q$
1	**1**	**1**
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	0	0

Tableau de vérité de la disjonction.

Exercice :

Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1. (3 est un nombre impair) ou (6 est un nombre premier)
2. ($\sqrt{2}$ est un nombre irrationnelle) ou [($\forall x \in \mathbb{R})(1 + 2x < x^2)$]
3. (5 est positif) ou (3 divise 18)

Un nombre irrationnelle est réel qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

4. L'implication

Exercice : Déterminer le tableau de vérité de la proposition $(\bar{P} ou\ Q)$.

Définition :

A partir de deux propositions P et Q on obtient la proposition $(\bar{P} ou\ Q)$ qui est fausse si P est vrai et Q est fausse et vraie dans les autre cas. La proposition $(\bar{P} ou\ Q)$ s'appelle $\boldsymbol{P\ implque\ Q}$ et se note $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tableau de vérité de l'implication.

Exemple :

Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1. (3 est un nombre impair) ⇒ (6 est un nombre premier)
2. ($\sqrt{2}$ est un nombre irrationnelle) ⇒ [($\forall x \in \mathbb{R})(1 + 2x < x^2)$]
3. (5 est positif) ⇒ (3 divise 18)

Remarque :

Les propositions suivantes ont la même signification :

- **si** $ABCD$ est un carrée **alors** $ABCD$ est un parallélogramme.
- $ABCD$ est un carrée **implique** $ABCD$ est un parallélogramme.
- Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme **il suffit** qu'il soit un carrée.
- Pour que $ABCD$ soit un carrée **il faut** qu'il soit un parallélogramme

En générale : si on a : $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ on peut dire que :

Q est une condition nécessaire pour P — $ABCD$ un parallélogramme est nécessaire pour que $ABCD$ soit un carrée

P est une condition suffisante pour P — $ABCD$ un carrée est suffisante pour que $ABCD$ soit un parallélogramme

Applications :

Donner une condition nécessaire et pas suffisante pour :

1. $x \in [1,2]$
2. n divise 6

Donner une condition suffisante et pas nécessaire pour :

1. $x \in [1,2]$
2. n divise 6.

5 l'équivalence

Activité :

1- Dresser le tableau de vérité de $[(\boldsymbol{P \Rightarrow Q})\boldsymbol{et}(\boldsymbol{Q \Rightarrow P})]$

2- Quand est ce que la proposition $[(\boldsymbol{P \Rightarrow Q})\boldsymbol{et}(\boldsymbol{Q \Rightarrow P})]$ est vraie ?

Définition :

> L'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition qu'on note $(P \Leftrightarrow Q)$ est qui est vraie si P et Q ont la même valeur de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	**1**	**1**
1	0	0
0	1	0
0	**0**	**1**

Tableau de vérité de l'équivalence.

Remarques :

1- Les propositions $(P \Leftrightarrow Q)$ et $[(P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P)]$ ont les même valeurs de vérité, on dit que les deux propositions sont équivalente.

L'implication $(Q \Rightarrow P)$ s'appelle l'implication inverse de l'implication $(P \Rightarrow Q)$

2- $(P \Leftrightarrow Q)$ se lit P équivalent à Q elle se lit encore P si et selement si Q

6) Opérations sur les fonctions propositionnelles.

Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux fonctions propositionnelles sur un ensemble E alors :

$(P(x) * Q(x))$ est une fonction propositionnelle sur E et sa valeur de vérité pour tout élément a de E est la valeur de vérité de $(P(a) * Q(a))$

Où $*$ peut-être replacer par l'une des connexions logiques : et ; ou ; $\Rightarrow$; $\Leftrightarrow$

Application :

Soient $P(x): 2x^2 + 1 \leq 5 \quad Q(x): x \in [1,3]$ deux fonctions propositionnelles sur $\mathbb{R}$

Déterminer les valeurs de vérités des propositions suivantes :

1- $P(0)\ et\ Q(0)$.

2- $P(3) \Rightarrow Q(3)$.

3- pour que $P(2)$ il suffit $Q(2)$

4- pour que $P(1)$ il faut $Q(1)$

Remarque : Pour montrer qu'une implication $(\forall x \in E)(P(x) \Rightarrow Q(x))$ est vraie on suppose que $P(x)$ est vraie et on montre que $Q(x)$ est vraie.

III) LES LOIS LOGIQUES

1 Activités

Activité 1 :

En utilisant les tableaux de vérité ; déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1- $\left([(P \Rightarrow Q) et (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q) \right)$

2- $\left[\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \end{cases} \Rightarrow (P \Rightarrow R)\right]$ où l'accolade "{" représente la conjonction et.

Définition :

On appelle une loi logique toute proposition constitué par des propositions liées entre elles par des connexions logiques est qui est toujours vraie quel que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.

Une loi logique s'appelle aussi une ***tautologie***.

2. Quelques lois logique

La commutativité

- $(P \; et \; Q) \Leftrightarrow (Q \; et \; P)$
- $(P \; ou \; Q) \Leftrightarrow (Q \; ou \; P)$
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$

La distributivité

- $[P \; et \; (Q \; ou \; R)] \Leftrightarrow [(P \; et \; Q) \; ou \; (P \; et \; R)]$
- $[P \; ou \; (Q \; et \; R)] \Leftrightarrow [(P \; ou \; Q) \; et \; (P \; ou \; R)]$

Application : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ (x+y)(5x+4y-3) = 0 \end{cases}$$

Loi de Morgan

- $\overline{(P \; et \; Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \; ou \; \bar{Q})$
- $\overline{(P \; ou \; Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \; et \; \bar{Q})$

Application : Déterminer $\overline{(P \Rightarrow Q)}$.

3. lois logiques et raisonnement :

Les lois logiques servent à déterminer la valeur de vérité d'une proposition :

Activité :

Montrer que : $\left[(x \neq y \; et \; xy \neq 1) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}\right]$

La contraposition

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$

Application : Si x est un nombre réel tel que $x^3 + x^2 - 2x < 0$ alors $x < 1$.

La transitivité

- $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \end{cases} \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Cette loi est la base du raisonnement **par déduction** ; en générale

$$\left[\begin{array}{l} P \Rightarrow Q_1 \\ Q_1 \Rightarrow Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \Rightarrow Q \end{array}\right. \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \quad \text{On écrit} \quad \begin{array}{l} P \Rightarrow Q_1 \\ \quad \Rightarrow Q_2 \\ \quad \vdots \\ \quad \Rightarrow Q \end{array}$$

Application :

Montrer que : $|x| < 1 \Rightarrow |2x^2 - x - 1| < 2$

- $\begin{cases} P \Leftrightarrow Q \\ Q \Leftrightarrow R \end{cases} \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$

Cette loi est la base du raisonnement par les **équivalences successives** ; en générale

$$\begin{cases} P \Leftrightarrow Q_1 \\ Q_1 \Leftrightarrow Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \Leftrightarrow Q \end{cases} \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q) \quad \text{On écrit} \quad \begin{array}{l} P \Leftrightarrow Q_1 \\ \Leftrightarrow Q_2 \\ \vdots \\ \Leftrightarrow Q \end{array}$$

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x^2+1} = 2x$

Raisonnement par disjonction des cas :

- $\begin{cases} \bar{P} \Rightarrow Q \\ P \Rightarrow Q \end{cases} \Rightarrow Q$

Si on montre que les deux applications $\bar{P} \Rightarrow Q$ et $P \Rightarrow Q$ sont vraies (et puisque la dernière proposition est une loi logique) on peut conclure que Q est vraie.

Application :

Montrer que le reste de la division de n^2 par 3 ne peut jamais être égale à 2.

Raisonnement par absurde.

- $\begin{cases} \bar{P} \Rightarrow Q \\ \bar{P} \Rightarrow \bar{Q} \end{cases} \Rightarrow P$

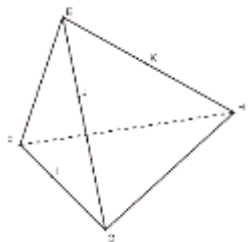
Si on veut montrer qu'une proposition P est vraie. On suppose que c'est sa négation $\bar{P}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse. On en conclut que P est vraie (puisque ***Q* est fausse****, l'implication $(\bar{P} \Rightarrow Q)$ ne peut être vraie que si $\bar{P}$ est fausse ou encore si P est vraie).

**Si Q est vraie ; puisque on a une loi logique donc les deux propositions : $\bar{P} \Rightarrow Q$ et $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ doivent être vraie en même temps d'où (puisque $\bar{P}$ est vraie) Q et $\bar{Q}$ doivent être vraie en même temps d'où Q est fausse

Application :

1- Sachant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ Montrer que $(\forall (h,k) \in \mathbb{Q}^{*2})(h\sqrt{2} + k \notin \mathbb{Q})$.

2- Soit $EFGH$ un tétraèdre ; I un point de $]FG[$; J un point de $]EG[$ et K un point de $]EH[$. Montrer que les droites (EI) et (JK) ne sont pas concourantes.



Raisonnement par récurrence

Principe de récurrence :

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle sur $\mathbb{N}$.

- S'il existe n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie
- et si pour tout $n \geq n_0$ on a : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors on peut conclure que : $(\forall n \geq n_0)(P(n))$ est vraie.

En pratique pour montrer que $(\forall n \geq n_0)(P(n))$ est vraie ; On suit les étapes suivante :

- On montre que $P(n_0)$ est vraie
- On suppose que $P(n)$ est vraie (ça s'appelle l'hypothèse de récurrence : HR)
- On montre que $P(n+1)$ est vraie.

Application :

Montrer par récurrence les assertions suivantes :

1- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

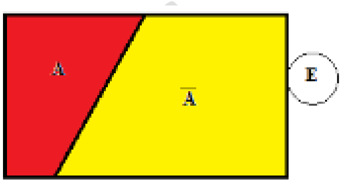
2- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(3|\ (3^n + 4^n - 1)$.

IV) NEGATION D'UNE PROPOSITION QUANTIFIEE.

1) Complémentaire d'un ensemble.

Définition :

Soit E un ensemble et $A \subset E$ on appelle complémentaire de A l'ensemble noté $\bar{A}$ et qui vérifie : $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$.



Exemple :

$\bar{E} = \emptyset$ et $\bar{\emptyset} = E$

2) Négation d'une proposition quantifiée.

On sait que si $P(x)$ est une fonction propositionnelle sur E alors et si $\mathcal{V}_{P(x)} = \{x \in E /\ P(x)\ \text{ est vraie}\}$ alors :

$\overline{\mathcal{V}_{P(x)}} = \{x \in E /\ P(x)\ \text{ est fausse}\} = \{x \in E /\ \overline{P(x)}\ \text{ est vraie}\} = \mathcal{V}_{\overline{P(x)}}$

Or on sait que : $(\forall x \in E)(P(x)$ est vraie$) \Leftrightarrow \mathcal{V}_{P(x)} = E$ et $(\exists x \in E)(P(x)$ est vraie$) \Leftrightarrow \mathcal{V}_{P(x)} \neq \emptyset$

et que $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q})$

donc :

$$\begin{aligned}
\neg[(\forall x \in E)(P(x)\ \text{ est vraie})] &\Leftrightarrow \neg[\mathcal{V}_{P(x)} = E] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{V}_{P(x)} \neq E \\
&\Leftrightarrow \overline{\mathcal{V}_{P(x)}} \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \mathcal{V}_{\overline{P(x)}} \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in E)(\overline{P(x)}\ \text{est vraie})
\end{aligned}$$

Théorème :

Si $P(x)$ est une fonction propositionnelle sur un ensemble E alors :

❶ $\neg[(\forall x \in E)(P(x)\ \text{ est vraie})] \Leftrightarrow [(\exists x \in E)(\overline{P(x)}\ \text{est vraie})]$

❷ $\neg[(\exists x \in E)(P(x)\ \text{ est vraie})] \Leftrightarrow [(\forall x \in E)(\overline{P(x)}\ \text{est vraie})]$

Applications

Donner les négations des propositions suivantes :

1-P_1: $(\forall x \in \mathbb{R})[(3x^2 + 1 > 0$ et $\frac{x^2}{x+1} \leq 7)]$

2-P_2: $(\exists x \in [1,2])(x + 1 < x^2 \Rightarrow x \in [2,3])$

3- P_3 $(\forall x > 1)$(pour que x soit positif il suffit que $x^2 + x + 1$ soit positif)

3-P_4: $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(2x + y + 1 = 0)$

Montrer que $\overline{P_4}$ est vraie en déduire la valeur de vérité de P_4

Exercice1 :

Après avoir déterminer la valeur de vérité de P_4 ; déterminer la valeur de vérité de

$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(2x + y + 1 = 0)$

Que remarquiez-vous.

Exercice 2 :

Montrer que $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2)(a = b \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0)(|a - b| < \epsilon)]$.

Propriété :

❶ $[(\forall x \in E)(P(x)\,]et[(\forall x \in E)(Q(x)] \Leftrightarrow (\forall x \in E)(P(x)\ et\ Q(x))$

❷ $[(\exists x \in E)(P(x)\,]ou[(\exists x \in E)(Q(x)] \Leftrightarrow (\exists x \in E)(P(x)\ ou\ Q(x))$

Propriété :

❸ $[(\forall x \in E)(P(x)\,]ou[(\forall x \in E)(Q(x) \Rightarrow (\forall x \in E)(P(x)\ ou\ Q(x)])$

❹ $[(\exists x \in E)(P(x)\ et\ Q(x) \Rightarrow (\exists x \in E)(P(x)\,]et[(\exists x \in E)(Q(x)])$

Remarque :

L'implication inverse de ❸ n'est pas vraie

$(\forall n \in \mathbb{N})(n \text{ est pair } ou\ n \text{ est impair})$ (cette proposition est vraie) ceci n'implique pas que

$(\forall n \in \mathbb{N})(n \text{ pair})$ ou $(\forall n \in \mathbb{N})(n \text{ impair})$ (cette proposition est fausse).

L'implication inverse de ❹ n'est pas vraie.

$[(\exists x \in \mathbb{R})(x > 0\,]et[(\exists x \in \mathbb{R})(x < 0]$ (cette proposition est vraie) ceci n'implique pas que

$(\exists x \in \mathbb{R})(x > 0 \text{ et } x < 0)$ (cette proposition est fausse).

LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

Quelques motivations

• Il est important d'avoir un langage rigoureux. La langue française est souvent ambigüe. Prenons l'exemple de la conjonction « ou » ; au restaurant « fromage ou dessert » signifie l'un ou l'autre mais pas les deux. Par contre si dans un jeu de carte on cherche « les as ou les cœurs » alors il ne faut pas exclure l'as de cœur. Autre exemple : que répondre à la question « As-tu 10 DH en poche ?» si l'on dispose de 15 DH ? • Il y a des notions difficiles à expliquer. C'est le but de ce chapitre de rendre cette ligne plus claire ! C'est la logique.
Enfin les mathématiques tentent de distinguer le vrai du faux. Par exemple « Est-ce qu'une augmentation de 20%, puis de 30% est plus intéressante qu'une augmentation de 50% ?». Vous pouvez penser « oui » ou « non », mais pour en être sûr il faut suivre une démarche logique qui mène à la conclusion. Cette démarche doit être convaincante pour vous mais aussi pour les autres. On parle de raisonnement.
Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et véritables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer.

1. PROPOSITION :

Une proposition est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemples :

– « Je suis plus grand que toi. »

– « $2+2=4$ »

– « $2\times3=7$ »

– «Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $x^2\geq0$ »

2. OPERATIONS LOGIQUES :

Si P est une proposition et Q est une autre proposition, nous allons définir de nouvelles propositions construites à partir de P et de Q.

2-1) L'opérateur logique «et »

La proposition « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. La proposition « P et Q » est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

FIGURE 1 – Table de vérité de « *P et Q* »

Exemple1 : soient les propositions P"$\left(\sqrt{3}\geq1\right)$ et Q"$\left(\left|-\sqrt{3}\right|=-\sqrt{3}\right)$La proposition P est vraie si Q est fausse Donc La proposition "$PetQ$" est fausse

Exemple2 :si P est la proposition « Cette carte est un as » et Q La proposition « Cette carte est cœur » alors La proposition « P et Q » est vraie si la carte est l'as de cœur et est fausse pour toute autre carte.

2-2) L'opérateur logique « ou »

La proposition « P ou Q » est vraie si l'une (au moins) des deux proposition s P ou Q est vraie. La proposition « P ou Q » est fausse si les deux proposition s P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

FIGURE 2 – Table de vérité de « P *ou* Q »

Exemple : soient les propositions $P"\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ et $Q"\left(\left|-\sqrt{3}\right|=-\sqrt{3}\right)$

La proposition P est vraie si Q est fausse

Donc La proposition $"PouQ"$ est vraie

2-3) La négation « non »

La proposition « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

On note $\overline{P}$ la négation de La proposition P

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

FIGURE 1.3 – Table de vérité de « non P »

2-3) L'implication ⇒

La proposition « (non P) ou Q » est notée « P ⇒ Q ». Sa table de vérité est donc la suivante :

p	q	$(p \Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

FIGURE 1.4 – Table de vérité de « P ⇒ Q »

La proposition « P ⇒ Q » se lit en français « P implique Q ». Elle se lit souvent aussi «si P est vraie alors Q est vraie » ou «si P alors Q ».

Par exemple :

1)$"0\leq 1"\Rightarrow"\sqrt{2}=1"$ est fausse

2)$"1+2=4"\Rightarrow"\sqrt{2}=-1"$ est vraie Eh oui, si P est fausse alors La proposition « P ⇒ Q » est toujours vraie.

3)$0\leq x\leq 100\Rightarrow\sqrt{x}\leq 10$ est vraie (prendre la racine carrée).

3) $x\in\left]-\infty;-4\right]\Rightarrow x^2+3x-4\succ 0$ est vraie (étudier le binôme).

4) $"\sin x=0\Rightarrow x=0"$est fausse (regarder pour x =2π par exemple).

Remarque :

Les propositions suivantes ont la même signification :

- si $ABCD$ est un carrée alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- $ABCD$ est un carrée implique $ABCD$ est un parallélogramme.
- Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme il suffit qu'il soit un carrée.

□ Pour que $ABCD$ soit un carrée il faut qu'il soit un parallélogramme
En générale : si on a : $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$ on peut dire que :
Q est une condition nécessaire pour que $ABCD$ un parallélogramme est nécessaire pour que $ABCD$ soit un carrée
P est une condition suffisante pour que $ABCD$ un carrée est suffisante pour que $ABCD$ soit un parallélogramme

2-4) L'équivalence ⇔

⇔ L'équivalence est définit par : « P ⇔ Q » est La proposition «(P ⇒ Q) et (Q ⇒ P)». On dira « P est équivalent à Q » ou « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ». Cette proposition est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité est :

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

FIGURE 1.5 – Table de vérité de « P ⇔ Q »

Exemples :

1) $"0 \leq -1" \Leftrightarrow "\sqrt{2} = 1"$ est vraie
2) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$ l'équivalence $x \times x' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x' = 0$ est vraie.
3)Voici une équivalence toujours fausse
(quelle que soit La proposition P) : « P ⇔ non(P)».

2-5) Loi logique ou une tautologie.

Activité : En utilisant les tableaux de vérité ; déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1- $([(P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q))$
2-$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R \Rightarrow (P \Rightarrow R$

Définition : On appelle une loi logique toute proposition constitué par des propositions liées entre elles par des connexions logiques est qui est toujours vraie quel que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.
Une loi logique s'appelle aussi une tautologie.

Proposition 1 : Soient P, Q, R trois proposition s. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1) P ⇔ non(non(P))
2. (P et Q) ⇔ (Q et P)
3. (P ou Q) ⇔ (Q ou P)
4. non(P et Q) ⇔ (non P) ou (non Q)
5. non(P ou Q) ⇔ (non P) et (non Q)
6.P et (Q ou R) ⇔ (P et Q) ou (P et R)
7.P ou (Q et R) ⇔ (P ou Q) et (P ou R)
8. « P ⇒ Q » ⇔ «non(Q) ⇒ non(P)»

<u>Démonstration :</u> Voici la démarche de démonstrations : Il suffit de dresser les tables de vérités de et comme elles sont égales les deux propositions sont équivalentes

3. Quantificateurs et fonction propositionnelle

Si une proposition P dépend d'un paramètre x on l'appelle fonction propositionnelle

Définition : Une fonction propositionnelle sur un ensemble E est une expression contenant une ou plusieurs variables Libres dans E et qui est susceptible de devenir une proposition vraie ou fausse si l'on attribue à ces variables certaines valeurs particulières de l'ensemble E

Par exemple « $x^2 \geq 0$ », La fonction propositionnelle P(x) est vraie ou fausse selon la valeur de x.

La proposition « $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ » est une proposition vraie

Lorsque les propositions P(x) sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E

3.1 Le Quantificateurs ∀: «pour tout» :

On lit « Pour tout x appartenant à E, P(x) »

Sous-entendu « Pour tout x appartenant à E, P(x) est vraie ».

Exemples :

«$\forall x \in [1;+\infty[: x^2 \geq 1$)» est une proposition vraie.

«$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$)»est une proposition fausse.

«$\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$)»est divisible par 2» est vraie.

3.2 Le Quantificateurs ∃: «il existe»

La proposition $\exists x \in E / P(x)$est une proposition vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel P(x) est vraie. On lit «il existe x appartenant à E tel que P(x) (soit vraie)».

Exemples :

1) «$\exists x \in \mathbb{R} : x(x-1) \geq 0$)» est vraie (par exemple x = 1 (1 vérifie bien la propriété).

2)«$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 - n \geq n$)»est vraie (il y a plein de choix, par exemple n=3 convient, mais aussi n=10 ou même n=100, un seul suffit pour dire que La proposition est vraie)

3) «$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)» est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif)

3.3 La négation des Quantificateurs :

La négation de «$\forall x \in E : P(x)$)»est «$\exists x \in E : \overline{P(x)}$».

La négation de «$\exists x \in E : P(x)$)»est «$\forall x \in E : \overline{P(x)}$».

Exemples :

1)La négation de «$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$)»est La proposition $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \prec 1$

En effet la négation de $x^2 \geq 1$ est non($x^2 \geq 1$) mais s'écrit plus simplement $x^2 \prec 1$.

2)La négation de «$\forall x \in \mathbb{R} : x+1 \in \mathbb{Z}$)»est «$\exists x \in \mathbb{R} : x+1 \notin \mathbb{Z}$)»

3)La négation de «$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)»est «$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1$)»

4) La négation de P :«$\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \succ 0 : x + y \geq 10$» sa négation est :

$\overline{P}$:«$\exists x \in \mathbb{R}; \forall y \succ 0 : x + y \prec 10$»

Remarques

L'ordre des Quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques :

«$\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R} : x + y \geq 0$» et $\exists x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R} : x + y \geq 0$ sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse. En effet une phrase logique se lit de gauche à droite, ainsi la première phrase affirme « Pour tout réel x, il existe un réel y
(qui peut donc dépendre de x) tel que x + y > 0.» (Par exemple on peut prendre y =|x|+1). C'est donc une phrase vraie. Par contre la deuxième se lit :

« Il existe un réel y, tel que pour tout réel x, x + y > 0.»

Cette phrase est fausse, cela ne peut pas être le même y qui Convient pour tous les x !

On retrouve la même différence dans les phrases en français suivantes. Voici une phrase vraie « Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone », bien sûr le numéro dépend de la personne. Par contre cette phrase est fausse : « Il existe un numéro, pour toutes les personnes ». Ce serait le même numéro pour tout le monde !

Remarques :

1)Quand on écrit « $\exists x\in\mathbb{R}: f(x)=0$ »cela signifie juste qu'il existe au moins un réel pour lequel f s'annule. Rien ne dit que ce x est unique. Afin de préciser que f s'annule en une unique valeur, on rajoute un point d'exclamation : $\exists! x\in\mathbb{R}: f(x)=0$

2)Pour la négation d'une phrase logique, il n'est pas nécessaire de savoir si la phrase est fausse ou vraie. Le procédé est algorithmique : on change le « pour tout » en «il existe » et inversement,

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1) $P:"\forall x\in\mathbb{R} / x^2>0"$

2) $P:$ $"\exists x\in\mathbb{R} / x^2-2=0"$

3) $P: x\in[1;2[$

4) $P:"$ $\forall n\in\mathbb{N} / \frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$

5) $P:(\forall x\in\mathbb{R});-1\leq\cos x\leq 1$

6) $P:(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}): n\prec m$

7) $P:(\exists n\in\mathbb{N})$ $2n+1$ est pair

8) $P:(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$

9) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}): y-x>0$

10) $P:(\exists! x\in\mathbb{R}); 2x+4=0$

11) $P:(\exists! x\in\mathbb{R}); x^2=2$

12) $P:(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$

13) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}): y^2=x$

Solution :

1) $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R} / x^2\leq 0"$ et on a P:est fausse

2) $\overline{P}$ $"\forall x\in\mathbb{R} / x^2-2\neq 0"$ et on a P:est vraie

3) $\overline{P}$: $x\notin[1;2[$

4) $\overline{P}$ $\exists n\in\mathbb{N} / \frac{n}{2}\notin\mathbb{N}"$ et on a P:est fausse

5) $\overline{P}$ $(\exists x\in\mathbb{R});\cos x\succ 1$ ou $\cos x\prec -1$ et on a P:est vraie

6) $\overline{P}$ $(\exists n\in\mathbb{N});(\forall m\in\mathbb{N}): n\geq m$ et on a P:est vraie

7) $\overline{P}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ $2n+1$ est impair P:est fausse

8) $\overline{P}$ $(\exists n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\notin\mathbb{N}$ et on a P:est vraie

$\overline{P}$ 9) $(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}): y-x\leq 0$ et on a P:est fausse

10) $P:(\exists! x\in\mathbb{R}); 2x+4=0$ on a P:est vraie

11) $P:$ $(\exists! x\in\mathbb{R}); x^2=2$ on a P:est fausse

12) $\overline{P}$ $(\forall x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\notin\mathbb{Z}$ et on a P:est vraie

13) $\overline{P}$ $(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}): y^2=x$ et on a P:est fausse

Exercice 2 Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.
6; Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Solution :

1. "$\forall x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 0$"
2. "$\exists x \in \mathbb{R} , x \succ x^2$ "
3. $(\forall n \in \mathbb{N});(\exists m \in \mathbb{N}): n \prec m$
4. $(\exists x \in \mathbb{R}):(\forall n \in \mathbb{Z});(\forall m \in \mathbb{N}^*): x \neq \frac{n}{m}$
5. $(\exists n \in \mathbb{N});(\forall m \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}): n = m \times k$
6. $(\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}) / x \prec y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} / x \prec z \prec y$

4. RAISONNEMENTS

Voici des méthodes classiques de raisonnements.

4.1. <u>Raisonnement direct</u> : On veut montrer que La proposition « P ⇒ Q » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie

Exemple1 : $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $\begin{cases} 0 \leq x \prec 2 \\ 0 \leq y \prec 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ 1$

Solution : $\begin{cases} 0 \leq x \prec 2 \\ 0 \leq y \prec 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \succ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} \succ \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ 1$

Exemple2 : $x \in \mathbb{R}^+$ Montrer que : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$

Solution : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) = 1$

$\Rightarrow 1 + (\sqrt{x})^2 = 1 \Rightarrow 1 + x = 1 \Rightarrow x = 0$

Exemple3 : 1) Montrer que :$(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2): a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

2) $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ Montrer que: $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

Solution : 1) $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = -b^2 \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^-$

Or on sait que $a^2 \in \mathbb{R}^+$ donc $a^2 \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$ donc $a^2 = 0$ donc $a = 0$

Et puisque $a^2 + b^2 = 0$ alors $b = 0$

2) $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 + y - 2\sqrt{y} + 1 = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0$ et $\sqrt{y} - 1 = 0$ d'apres1)

$\Rightarrow \sqrt{x} = 1$ et $\sqrt{y} = 1 \Rightarrow x = 1$ et $y = 1$

Donc : $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

Exemple4 : Montrer que :$(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2): a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}$

Solution : 1)supposons que : $a^2+b^2=1$

Or on sait que $\forall(a;b)\in\mathbb{R}:(a-b)^2\geq 0$

Donc : $a^2-2ab+b^2\geq 0$ et puisque : $a^2+b^2=1$ alors :

$1-2ab\geq 0$ Donc $2ab\leq 1$ et $a^2+b^2=1$

Par suite : $a^2+b^2+2ab\leq 2$ donc $(a+b)^2\leq 2$

donc $\sqrt{(a+b)^2}\leq\sqrt{2}$ donc $|a+b|\leq\sqrt{2}$

Or on sait que $a^2\in\mathbb{R}^+$ donc $a^2\in\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-$ donc $a^2=0$ donc $a=0$

Et puisque $a^2+b^2=0$ alors $b=0$

2) $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y}+1=0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{x}-1=0$ et $\sqrt{y}-1=0$ d'apres1)

$\Rightarrow\sqrt{x}=1$ et $\sqrt{y}=1\Rightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

Exemple5 : Montrer que si $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$ alors $a+b\in\mathbb{Q}$

Solution : Prenons $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.

Alors $a=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$; De même $b=\frac{p'}{q'}$ avec $p'\in\mathbb{Z}$ et $q'\in\mathbb{N}^*$ donc

$a+b=\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{p\times q'+q\times p'}{q\times q'}$. Or le numérateur $p\times q'+q\times p'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur $q\times q'$ est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b=\frac{p''}{q''}$ avec $p''\in\mathbb{Z}$ et $q''\in\mathbb{N}^*$ Ainsi $a+b\in\mathbb{Q}$

Exemple6 : on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par :

$f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ Montrer que : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq|f(x)-f(1)|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Solution : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\prec x-1\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}$

On a : $f(x)-f(1)=\frac{x+2}{2x+1}-1=\frac{x+2-2x-1}{2x+1}=\frac{1-x}{2x+1}$

Donc : $|f(x)-f(1)|=\left|\frac{1-x}{2x+1}\right|=|1-x|\times\frac{1}{|2x+1|}$

Et on a : $|x-1|\prec\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}\Rightarrow 2\prec 2x+1\prec 4$

$\Rightarrow\frac{1}{4}\prec\frac{1}{|2x+1|}\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq|f(x)-f(1)|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Donc : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq|f(x)-f(1)|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Exemple7 : Montrer que : $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

Solution :
On a : $n \in \mathbb{N}$ donc $n+1 \prec n+2$
donc $0 \prec \frac{n+1}{n+2} \prec 1$ donc $\frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

Exemple8 : Montrer que pour tout $\forall x \in [-2;2] : 2\sqrt{2} \succ \sqrt{4-x^2}$.

Solution : l'inéquation est définie ssi voici le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_I = [-2;2]$

Soit $x \in [-2;2]$.

$$2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}} = \frac{8-4+x^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}$$

$$2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2} = \frac{4+x^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}} \succ 0$$

donc $\forall x \in [-2;2] : 2\sqrt{2} \succ \sqrt{4-x^2}$

4.2. <u>Raisonnement par</u> <u>disjonction des cas :</u>

Si l'on souhaite verrier une proposition P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre La proposition pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de disjonction des cas ou méthode cas par cas.

Donc : Si on montre que les deux proposition $\overline{P} \Rightarrow Q$ et $P \Rightarrow Q$ sont vraies (et puisque la dernière proposition est une loi logique) on peut conclure que Q est vraie.
Exemple1 : Montrer que pour tout $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \le x^2-x+1$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.
Premier cas : x >1 Alors|x−1|= x−1.
Calculons alors $(x^2-x+1)-(x-1) = x^2-x+1-x+1$

$(x^2-x+1)-(x-1) = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1 \ge 0$ Ainsi $x^2-x+1 \ge |x-1|$
Deuxième cas : x < 1. Alors|x−1|=−(x−1).

Nous obtenons $(x^2-x+1)+(x-1) = x^2-x+1+x-1 = x^2 \ge 0$.

Et donc $x^2-x+1 \ge |x-1|$

Conclusion : Dans tous les cas $x^2-x+1 \ge |x-1|$.

Exemple2 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(E) : 1-\frac{x}{4} \succ \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (E)

et $x \in]-1;+\infty[$ **on a :** $x \in S \Leftrightarrow \frac{4-x}{4} \succ \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

1 cas : si $x \in [4;+\infty[$ alors $4-x \le 0$ donc $S = \varnothing$

2 cas : si $x \in \left]-1;4\right[$ alors $4-x \geq 0$ donc

$$\frac{4-x}{4} \succ \frac{1}{\sqrt{1+x}} \Leftrightarrow \left(\frac{4-x}{4}\right)^2 \succ \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2 \Leftrightarrow x\left(x^2-7x+8\right) \succ 0$$

$\Leftrightarrow x \in \left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$ donc $S_2 = \left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Donc $S = S_1 \cup S_2 = \left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Exemple3 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) : $|x-1|+2x-3 \geq 0$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (1)

soit $x \in \mathbb{R}$ **:** on va déterminer le signe de : $x-1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

si $x \in \left[1;+\infty\right[$ alors $|x-1| = x-1$

donc l'inéquation (1) devient : $x-1+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow 3x-4 \geq 0$

$3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$ donc : $S_1 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[\cap \left[1;+\infty\right[= \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

si $x \in \left]-\infty;1\right]$ alors $|x-1| = -(x-1) = -x+1$

donc l'inéquation (1) devient : $-x+1+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

donc $S_2 = \left[2;+\infty\right[\cap \left]-\infty;1\right] = \varnothing$

finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Exemple4 : Montrer que pour tout $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+x \succ 0$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

<u>Premier cas :</u> $x \geq 0$ Alors $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 1 \succ 0$

donc $\sqrt{x^2+1} \succ 0$ et on a $x \geq 0$ donc $\sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

<u>Deuxième cas :</u> $x \leq 0$. on a $x^2+1 \succ x^2$

donc $\sqrt{x^2+1} \succ \sqrt{x^2}$ donc $\sqrt{x^2+1} \succ |x|$ or $x \leq 0$

alors on a : $\sqrt{x^2+1} \succ -x$ donc $\sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

finalement : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

Exemple5 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) : $x^2-|x-2|+5=0$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (1)

soit $x \in \mathbb{R}$ **:** étudions le signe de : $x-2$

<u>Premier cas :</u> si $x \in \left[2;+\infty\right[$ alors $|x-2| = x-2$

donc l'équation (1) devient : $x^2-(x-2)+5=0 \Leftrightarrow x^2-x+7=0$

$\Delta = 1-28 = -27 \prec 0$ donc : $S_1 = \varnothing$

Deuxième cas : si $x \in]-\infty;2[$ alors $|x-2| = -(x-2) = -x+2$

donc l'équation (1) devient : $x^2+(x-2)+5=0 \Leftrightarrow x^2+x+3=0$

$\Delta = 1-12 = -11 \prec 0$ donc $S_2 = \varnothing$

finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \varnothing$

Exemple 6 :Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : soit $n \in \mathbb{N}$ on a 3 cas possibles seulement pour n

$n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

1cas : $n = 3k$

$n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2) = 3k'$ Avec $k' = k(3k+1)(3k+2)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

2cas : $n = 3k+1$

$n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3(3k+1)(3k+2)(k+1) = 3k'$

Avec $k' = (3k+1)(3k+2)(k+1)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

3cas : $n = 3k+2$

$n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4) = 3k'$

Avec $k' = (3k+2)(k+1)(3k+4)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

4.3. Raisonnement par contraposition :

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :
La proposition « P ⇒ Q » est équivalente à « non(Q) ⇒ non(P) ».
Donc si l'on souhaite montrer La proposition « P ⇒ Q »
On montre en fait que non(Q) ⇒ non(P) est vraie.

Exemple 1 : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-2 \neq 2$

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $2x+2y-xy-2 = 2 \Rightarrow x = 2$ ou $y = 2$

On a : $2x+2y-xy-2 = 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-4 = 0$

$\Rightarrow x(2-y)-2(2-y) = 0 \Rightarrow (2-y)(x-2) = 0$

$\Rightarrow 2-y = 0$ ou $x-2 = 0$ $\Rightarrow y = 2$ ou $x = 2$

Donc : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-2 \neq 2$

Exemple 2 : $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$

Montrer que : $x \neq -8 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x+5} \neq 2$

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow\ x=-8$

On a : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow\ x+2=2(x+5)$

$\Rightarrow x+2=2x+10\Rightarrow x=-8$

Donc : $x\neq-8\ \Rightarrow\frac{x+2}{x+5}\neq 2$

Exemple 3 : Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Solution : Nous supposons que n n'est pas pair

Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair

Comme n n'est pas pair il est impair et donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$.

Alors $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$avec $k'=2k^2+2k\in\mathbb{N}$.

Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

Exemple4 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$??

On a : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow xy-x+y-1=xy+x-y-1$

$\Rightarrow -2x=-2y\Rightarrow x=y$

Donc : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Exemple 5 : Soit $n\in\mathbb{N}$et $p\in\mathbb{N}$

Montrer que $n\times p$ est pair ou n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Solution :

- Si n ou p sont pairs alors $n\times p$ est pair
- Si n ou p sont impairs alors

$n=2k+1$ et $p=2k'+1$ avec $k\in\mathbb{N};k'\in\mathbb{N}$

Donc $n^2-p^2=(2k+1)^2-(2k'+1)^2$

$n^2-p^2==4\left(k(k+1)-k'(k'+1)\right)$ et on a : $m(m+1)$ est pair

$n^2-p^2=4(2\alpha-2\beta)=8(\alpha-\beta)=8k''$ donc n^2-p^2 est un multiple de 8 .

4.4. <u>Raisonnement par l'absurde :</u>

Le raisonnement par l'absurde repose sur le principe suivant : pour montrer « P ⇒ Q » on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « P ⇒ Q » est vraie.

Exemple1 : Soient $a\succ 0$ et $b\succ 0$ Montrer que si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ et $a\neq b$.

Comme $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a)=b(1+b)$donc $a+a^2=b+b^2$ d'où $a^2-b^2=b-a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b)=-(a-b)$Comme $a\neq b$alors $a-b\neq 0$et donc en divisant par a−b on obtient :

a+ b =−1. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Conclusion : si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Exemple2 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

$$f(x)\leq M \Rightarrow x^2+2x\leq M \Rightarrow x^2+2x+1\leq M+1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2\leq M+1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2}\leq\sqrt{M+1} \Rightarrow |x+1|\leq\sqrt{M+1}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{M+1}\leq x+1\leq\sqrt{M+1} \Rightarrow -\sqrt{M+1}-1\leq x\leq\sqrt{M+1}-1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Nous obtenons une contradiction car il suffit de prendre : $x=\sqrt{M+1}$

Donc notre supposition est fausse donc : il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

Exemple3 : Montrer que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

Donc il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$; tel que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec $a\wedge b=1$

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow a=b\sqrt{2}\Rightarrow a^2=\left(b\sqrt{2}\right)^2$$

$\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow a^2$ est pair $\Rightarrow a$ est pair

Et on a : $\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow 4k^2=2b^2\Rightarrow 2k^2=b^2$

$\Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair

Donc on a : $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec a est pair et b est pair

Cad : $a\wedge b\neq 1$ Nous obtenons une contradiction

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exemple4 (Contraposée ou absurde)

Soient $a;b\in\mathbb{Q}$

1)Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=b=0$

2)en déduire que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}\Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Solution :1) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $b\neq 0$

$$a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow b\sqrt{2}=-a\Rightarrow -\frac{a}{b}=\sqrt{2}$$

Or $a;b\in\mathbb{Q}$ donc $-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ mais on sait que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ Nous obtenons donc une contradiction

Donc $b=0$ et puisque : $a+b\sqrt{2}=0$ alors $a=0$

2) supposons que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$ donc $a-a'+b\sqrt{2}-b'\sqrt{2}=0$

donc $a-a'+\sqrt{2}(b-b')=0$ et d'après **1) on aura :** $a-a'=0$ et $b-b'=0$

donc $a=a'$ et $b=b'$

Exemple5 (absurde)

On considère l'ensemble : $A=\{1;2;3;4;...;n\}$ avec n un nombre entier impair

Et soient x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ;… ; x_n des éléments de l'ensemble A distincts deux a deux

Montrer que : $\exists i \in A /\ \ x_i - i$ est pair

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que :
$\forall i \in A /\ \ x_i - i$ est impair

On a donc : $S=(x_1-1)+(x_2-2)+(x_3-3)+...+(x_n-n)$ un nombre entier impair
Car c'est la somme d'un nombre impair de nombres impairs
Or : $S=(x_1+x_2+x_3+...+x_n)-(1+2+3+...+n)=0$ est 0 est pair
Nous obtenons donc une contradiction donc :
$\exists i \in A /\ \ x_i - i$ est pair

4.5. Raisonnement par Contre-exemple :

Si l'on veut montrer qu'une proposition du type $\forall x \in E : P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que P(x) est vraie. Par contre pour montrer que cette proposition est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que P(x) soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à La proposition $\forall x \in E : P(x)$

Exemple1 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in [0;1]) : x^2 \geq x$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists\, x \in [0;1]) : x^2 \prec x$

On posant : $x=\frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \prec \frac{1}{2}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple2 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2+y^2 \geq x+y$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2+y^2 \prec x+y$

On posant : $x=1$ et $y=\frac{1}{2}$ on aura : $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \prec 1+\frac{1}{2}$ c a d $\frac{5}{4} \prec \frac{6}{4}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple3 : Montrer que La proposition $P:(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) : \sqrt{a^2+b^2}=a+b$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2) : \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$

On posant : $a=4$ et $b=3$ on aura : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $a+b=4+3=7$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple4 : Montrer que La proposition suivante est fausse :
« Tout entier positif est somme de trois carrés »
(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple $6=1^2+1^2+2^2$.)
Démonstration. Un contre exemples : les carrés inférieurs à7 sont 0,1,4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

Exemple5 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in \mathbb{R}^*) : x+\frac{1}{x} \geq 2$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x \in \mathbb{R}^*) : x+\frac{1}{x} \prec 2$

On posant : $x=-1$ on aura : $-1+\frac{1}{-1}=-2 \prec 2$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple6 : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=2x^2-x+3$ Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Solution : f est n'est pas pair ssi $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq f(x)$

f est n'est pas impair ssi $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq -f(x)$

On a en effet : $f(1)=4$ et $f(-1)=6$ donc

$f(-1)\neq -f(1)$ et $f(-1)\neq f(1)$

Donc f n'est ni pair ni impair

Exempl7 : Montrer que La proposition $P:\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\ c\neq d\end{cases}\Rightarrow a+c\neq b+d$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:\exists(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\ c\neq d\end{cases}$ et $a+c=b+d$

On a : $2\neq 3$ et $1\neq 0$ et $2+1=3+0$

donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple8 : Montrer que La proposition $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): x^2-xy+y^2=0$ est fausse

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}): x^2-xy+y^2\neq 0$

On posant : $x=1$ on aura : $1-y+y^2$ c a d y^2-y+1

$\Delta=(-1)^2-4=-3\prec 0$ donc : $y^2-y+1\succ 0$ donc : $y^2-y+1\neq 0$

donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

4.6. <u>Raisonnement par équivalence :</u>

Le raisonnement par équivalence repose sur le principe suivant : pour montrer que P est vraie on montre que « P $\Leftrightarrow$ Q » est vraie et Q est vraie donc on déduit que P est vraie.

Exemple1 : $\forall x>0 \quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Solution : $x+\frac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$

et puisque on a : $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ donc $\forall x>0 \quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Exemple2 : soit $x\in\mathbb{R}$ Montrer que : $|x-1|\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{2}{3}$

Solution : $|x-1|\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\leq x-1\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}+2\leq x-1+2\leq\frac{1}{2}+2$

$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\leq x+1\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{2}{3}$

Exemple3 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\sqrt{x^2+1}=2x$

soit S l'ensemble des solution de l'équation (E)

Solution :

Methode1 : $x\in S\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=2x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}^2=(2x)^2$

$\Rightarrow x^2+1=4x^2\Rightarrow 3x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3} ou x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Remarque : on ne peut pas affirmer que :

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ sont les solutions de l'équation

Et inversement on a : $\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\neq-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Donc : $-\frac{\sqrt{3}}{3}\notin S$ et on a : $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Methode2 : $x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=2x$ et $x\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}^2=(2x)^2$

$\Leftrightarrow x^2+1=4x^2$ et $x\geq 0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}$ et $x\geq 0$

$\Leftrightarrow$ ($x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$) et $x\geq 0$

Donc : $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Exemple4 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $|x-y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Solution : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$|x-y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}\Leftrightarrow|x-y|^2\leq\left(2\sqrt{x^2+y^2+xy}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\leq 4x^2+4y^2+4xy\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+6xy\geq 0$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2+2xy+y^2\right)\geq 0\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\geq 0\Leftrightarrow(x+y)^2\geq 0$

On sait que $(x+y)^2\geq 0$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$: $|x-y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Exemple5 : 1) Montrer que :$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ Montrer que: $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow x=y=0$

<u>Démonstration</u> : 1)a) $\Rightarrow$:$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0\Rightarrow a=0$ et $b=0$

Supposons que ; $a+b=0$ et ($a\neq 0$ ou $b\neq 0$) et $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2$

Donc $a+b\succ 0$ contradiction par suite $a=0$ et $b=0$

b) $\Leftarrow$ inversement si $a=0$ et $b=0$ alors on aura $a+b=0$

donc : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}-2=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=0$ or $\sqrt{x^2+1}-1\geq 0$ et $\sqrt{y^2+1}-1\geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1=0$ et $\sqrt{y^2+1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=1$ et $\sqrt{y^2+1}=1$

$\Leftrightarrow x^2+1=1$ et $y^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0$ et $y^2=0 \Leftrightarrow x=0$ et $y=0$

Donc : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

4.7. <u>Raisonnement par récurrence :</u>

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une proposition P(n), dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1étapes : l'initialisation on prouve P (0) est vraie

2étapes : d'hérédité : on suppose n > 0 donné avec P(n) vraie

3étapes : on démontre alors que La proposition P(n+1) au rang suivant est vraie

Enfin dans la conclusion : P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour expliquer ce principe assez intuitivement, prenons l'exemple suivant :
La file de dominos : Si l'on pousse le premier domino de la file (Initialisation).
Et si les dominos sont posés l'un après l'autre d'une manière `a ce que la chute d'un domino entraine la chute De son suivant (hérédité).
Alors : Tous les dominos de la file tombent. (La conclusion)

Exemple 1: Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$.

Solution : notons P(n) La proposition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$. Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $3^0 \geq 1+2\times 0$ donc $1 \geq 1$.

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $3^n \geq 1+2n$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $3^{n+1} \geq 1+2(n+1)$?? c'est-à-dire Montrons que $3^{n+1} \geq 2n+3$??

On a : $3^n \geq 1+2n$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $3^n \times 3 \geq 3\times(1+2n)$

donc : $3^{n+1} \geq 6n+3$

Or on remarque que : $6n+3 \geq 2n+3$(on pourra faire la différence $(6n+3)-(2n+3)=4n \geq 0$)

donc : on a $6n+3 \geq 2n+3$ et $3^{n+1} \geq 6n+3$ donc $3^{n+1} \geq 2n+3$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n > 0, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$.

Exemple 2: (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1=\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$ donc $1=1$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$??

On a : $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$

donc $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*;1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

Exemple 3: Montrer par récurrence que :pour tout entier $n\geq 5$: $2^n\geq 6n$

Solution : notons P(n) La proposition : « $2^n\geq 6n$ »

1étapes : Initialisation : Pour $n=5:2^5=32$ et $6\times 5=30$ donc $2^5\geq 6\times 5$
Donc P(5) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $2^n\geq 6n$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $2^{n+1}\geq 6(n+1)$??

Or, puisque $2^n\geq 6n$ (d'après l'hypothèse de récurrence)
Donc : $2^n\times 2\geq 6n\times 2$ donc $2^{n+1}\geq 12n$ **(1)**
Or on remarque que : $12n\geq 6(n+1)$ **(2)**

En effet : $12n-6(n+1)=6n-6\geq 0$

Car : $n\geq 5$donc $6n\geq 30$ donc $6n-6\geq 24\geq 0$

On conclut par récurrence que : Pour tout $n\geq 5$: $2^n\geq 6n$

Exemple 4: Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};n^3+2n$ est divisible par 3

Solution :montrons $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $0^3+2\times 0=0$ est un multiple de3
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$??

$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$

$=(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ avec $k'=k+n^2+n+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N};n^3+2n$ est divisible par 3

Exemple 5: (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=\frac{1\times 2\times 3}{6}=1$

donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$??

On a : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 = (1^2+2^2+3^2+...+n^2)+(n+1)^2$

et on a : $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$$

Et on remarque que : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

Donc : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

Exemple 6: (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}.$$

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1^3 = \frac{1^2\times(1+1)^2}{4}=1$

donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2\times(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$

et on a : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$$=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{2^2}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$.

Exemple 7: (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1+3=4$ et $(1+1)^2=4$ donc $4=4$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=(n+1)^2$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)+(2n+3)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=(n+1)^2$

donc $\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=(n+1)^2+(2n+3)=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4$

donc $\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=(n+2)^2$ donc P(n+1) est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence on a : $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=(n+1)^2\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

Exemple 8: Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};4^n+6n-1$ est divisible par 9

Solution :montrons que : $\exists k\in\mathbb{N}/\,4^n+6n-1=9k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $4^0+6\times0-1=0$ est un multiple de 9

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/\,4^n+6n-1=9k$ donc $4^n=9k-6n+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/\,4^{n+1}+6(n+1)-1=9k'$??

$4^{n+1}+6(n+1)-1=4\times4^n+6n+6-1$

$=4\times(9k-6n+1)+6n+6-1=36k+4-24n+6n+6-1$

$=36k+9-18n=9(4k+1-2n)=9k'$ avec $k'=4k+1-2n$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N};4^n+6n-1$ est divisible par 9

Exemple 9: Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6

Solution : 1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $7^0-1=0$ est un multiple de 6
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,7^n-1=6k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}\,/\,7^{n+1}-1=6k'$??

$$7^{n+1}-1=7\times7^n-1=7^n\times(6+1)-1=6\times7^n+7^n-1=6\times7^n+6k$$

$$7^{n+1}-1=6\left(7^n+k\right)=6k' \quad \text{avec } k'=7^n+k$$

Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6

Erreur classique dans les récurrences

Exemple 10 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :
P (n) : 10^n-1est divisible par 9
Q (n) : 10n + 1 est divisible par 9
1) Démontrer que si P (n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.
2) Démontrer que si Q (n) est vraie alors Q (n + 1) est vraie.
3) Un élève affirme : " Donc P (n) et Q (n) sont vraies pour tout entier naturel n.
Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.
4) Démontrer que P (n) est vraie pour tout entier naturel n.
5) Démontrer que Q (n) est fausse pour tout entier naturel n.
On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exemple 11 : Soit P(n) la propriété dénie sur $\mathbb{N}$ par :
7^n-1Est divisible par 3
1) Démontrer que si P(n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.
2) Que peut-on conclure

Remarques : La rédaction d'une récurrence est assez rigide.
Respectez scrupuleusement la rédaction proposée : donnez un nom à La proposition que vous souhaitez montrer (ici P(n)), respectez les trois étapes (même si souvent l'étape d'initialisation est très facile

Exercice : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tel que : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[$

Montrer que : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec1$

Solution : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec1\Leftrightarrow\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|\prec1\Leftrightarrow|a+b|\prec|1+ab|$

$\Leftrightarrow|a+b|^2\prec|1+ab|^2\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\prec1+a^2b^2+2ab$

Donc : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec1\Leftrightarrow\left(a^2-1\right)\left(1-b^2\right)\prec0$

Donc : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[\Rightarrow-1\prec a\prec1$ et $-1\prec b\prec1$

$\Rightarrow|a|\prec1$ et $|b|\prec1\Rightarrow a^2\prec1$ et $b^2\prec1\Rightarrow a^2-1\prec0$ et $1-b^2\succ0$

$\Rightarrow\left(a^2-1\right)\left(1-b^2\right)\prec0$

Donc : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[\Rightarrow-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec1$

Exercice 4 Traduisez les propositions suivantes en langage courant puis déterminer sa négation et la valeur de vérité :

1) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x>y$

2) $P:(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):x>y$

3) $P:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 4\Rightarrow x\geq 2$

4) $P:(\exists x\in\mathbb{R});x^2=4$

5) $P:(\forall \varepsilon\succ 0);\left(\exists x\in\left\{1+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\prec\varepsilon+10$

Solution :

1)Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x est supérieur strictement a y et $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):x\leq y$

$P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x>y$ Est une proposition vraie car l'lorsque je prends x je peux trouver y il suffit de prendre : $y=x-1$

2) il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ on a x est supérieur strictement a y et $\overline{P}:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x\leq y$

P est une proposition fausse car l'lorsque je prends x je peux toujours donner à y la valeur: $y=x+1$

3) $P:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 4\Rightarrow x\geq 2$

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ si x^2 est supérieur ou égal à 4 alors x est supérieur ou égal à 2

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});x^2\geq 4$ et $x\prec 2$

P est une proposition fausse car l'lorsque je prends $x=-2$ on a $(-2)^2\geq 4$ et $-2\prec 2$

4) $P:(\exists x\in\mathbb{R});x^2=4$

il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x^2 est égal à 4

$\overline{P}:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\neq 4$

P une proposition vraie car il suffit de prendre : $x=2$

5) $P:(\forall \varepsilon\succ 0);\left(\exists x\in\left\{1+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\prec\varepsilon+10$

Pour tout ε supérieur strictement a 0 il existe au moins un x qui s'écrit sous la forme $1+\frac{1}{n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ tel que x est inferieur strictement a $\varepsilon+10$

$\overline{P}:(\exists \varepsilon\succ 0);\left(\forall x\in\left\{1+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\geq\varepsilon+10$

Soit $\varepsilon\succ 0$ $\quad x\prec\varepsilon+10\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n}\prec\varepsilon+10\Leftrightarrow\frac{1}{n}\prec\varepsilon+9\Leftrightarrow n\succ\frac{1}{\varepsilon+9}$

Donc pour $n=E\left(\frac{1}{\varepsilon+9}\right)+1$ on prend $x=1+\frac{1}{n}$ et on a $x\prec\varepsilon+10$

P Est donc une proposition vraie

Exercice 5 A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formules $P ou \overline{P}$ est une tautologies.

Solution :

P	$\overline{P}$	$P ou \overline{P}$
0	1	1
1	0	1

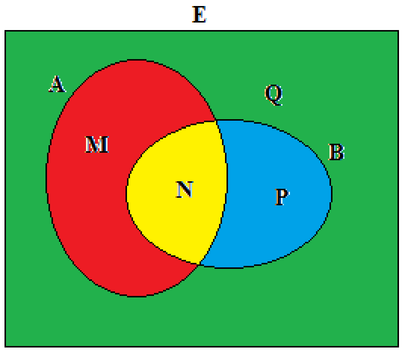
ENSEMBLES ET APPLICATIONS

I) LES ENSEMBLES

1) Activité et définition

1.1 Activités :

Activité 1 :



Le diagramme ci-contre s'appelle le diagramme de Venn.

On a : $M = \{x \in E / \, x \in A \; et \; x \notin B\}$

1- Définir de la même façon les ensembles N, P et Qen fonction de A et B.

2- Déterminer les ensembles A et B en fonction des ensembles M, N, P et Q

3- Que pouvez-vous dire des ensembles P et M.

Activité 2 :

Soient les ensembles : $H = \{y \in \mathbb{R}/ \; y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \; ; où \; x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{y \in \mathbb{R}/ \; y = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} \; ; où \; x \in \mathbb{R}\}$

1-On se propose de montrer que : $H =]0,1]$.

a- Considérer un élément $y_0 \in H$ et montrer que $y_0 \in]0,1]$

b- Considérer un élément $y_0 \in]0,1]$ et montrer que $y_0 \in H$

2- Monter que $G \subset H$

3- Est-ce que $G = H$?

Activité 3 :

Soient $A = \{\frac{5n+8}{8n-1} / \; n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{\frac{2n+4}{2n+1} / \; n \in \mathbb{N}\}$

1- Est ce que : $\frac{17}{3} \in A$? ; $\frac{43}{25} \in B$? ; $\frac{38}{47} \in B$?

2- Déterminer les éléments communs entre A et B.

3- Déterminer tous les entiers naturels qui appartiennent à B.

1.2 Vocabulaires

- Un ensemble E est une **collection** ou un **groupement** d'objets distincts ; ces objets s'appellent les **éléments** de cet ensemble.
- Si x est élément d'un ensemble E, on dit que x **appartient** à E et on écrit : $x \in E$,
- $\emptyset$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément, on peut le définir comme suite :$\{x \in E \; et \; x \notin E\}$.
- Un ensemble peut être défini
  - **En extension**, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades.

    Par exemple : $E = \{a, b, n, p\}$
  - **En compréhension** c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments.

    Par exemple : $E = \{x \in \mathbb{Z}/ \; |3k + 1| \leq 5 \}$

2) Egalité ; inclusion ; ensemble des partie d'un ensemble

Définition :

On dit que deux ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments ; on écrit $E = F$

$$(E = F) \Leftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

Exemple :

$A = \{k \in \mathbb{Z}/|2k+1| \leq 3\}$ $\quad B = \{-2,-1,0,1\}$; $A = B$

Définition :

Soient E et F deux ensembles quelconques. E est dit **inclus** dans F si tout élément de E est un élément de F. On dit aussi que E est un **sous-ensemble** de F ou encore que E est une **partie** de . On note $E \subset F$

$$(E \subset F) \Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F).$$

Activité :

Soit $E = \{1,2,3\}$ déterminer tous les ensembles inclus dans E.

Définition :

Soit E un ensemble, les partie de E, constituent un ensemble qui s'appelle ensemble des partie de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

$$\mathcal{P}(E) = \{X/\ X \subset E\}$$

Remarque :

A est une partie de E ($A \subset E$) si et seulement si A est un élément de $\mathcal{P}(E)$

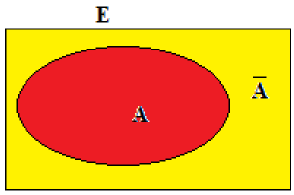
Exercice : Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})$

3) Complémentaire d'un ensemble

Définition :

Soit A une partie de E, le complémentaire de A est l'ensemble constitué par tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A, on le note $\bar{A}$ ou $C_E A$.

$$\bar{A} = \{x \in E/\ x \notin A\}$$



Exemples :

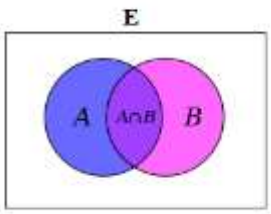
- Si E un ensemble quelconque : $\bar{E} = \emptyset$ et $\bar{\emptyset} = E$
- $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{I}$ (ensembles des irrationnelles).

4) Intersection ; réunion , différence de deux ensembles.

Définition :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; **l'intersection** de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. On le note par $A \cap B$.

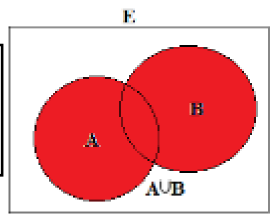
$$A \cap B = \{x \in E/\ x \in A \textbf{ et } x \in B\}$$



Définition :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; **la réunion** de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A ou à B. On le note par $A \cup B$.

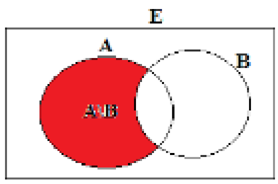
$$A \cup B = \{x \in E/\ x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$$



Définition :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; **la différence** de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B. On le note par $A \backslash B$ ou $A - B$

$$A \backslash B = \{x \in E/\ x \in A \textbf{ et } x \notin B\}$$



5) Propriétés

5.1 Propriétés d'inclusion.

Soient E, un ensemble, A, B et C des parties de E.

- $(A = B) \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$
- $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow (A \subset C)$ *la transitivité*

5.2 Intersection et réunion

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$
- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *L'associativité*
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *L'associativité*
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *la distributivité*
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *la distributivité*

5.3 Le complémentaire

- $\bar{A} = E/A$
- $\bar{\bar{A}} = A$
- $\bar{\emptyset} = E \quad \bar{E} = \emptyset$
- $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ *loi de Morgan*
- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ *loi de Morgan*
- $(A \subset B) \Leftrightarrow (\bar{B} \subset \bar{A})$

Exercice : Démontrer les deux dernières assertions.

5.4 La différence

- $A/B = A/(A \cap B)$
- $A/B = (A \cap \bar{B})$

6) Notations généralisées.

Soient $A_1, A_2 \dots A_n$ une famille de parties d'un ensemble E, (qu'on peut noté $(A_i)_{1\le i\le n}$)

L'ensemble : $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ se note : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

L'ensemble : $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ se note : $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

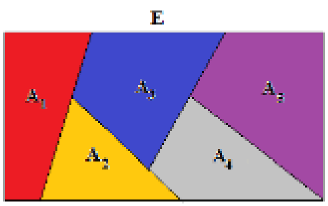
Définition :

Une famille $(A_i)_{1\le i\le n}$ de parties d'un ensemble E s'appelle **une partition** de l'ensemble E si elle vérifie :

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$
- $(i \neq j) \Rightarrow \left(A_i \cap A_j = \emptyset\right)$ on dit que les ensembles sont disjoints deux à deux.

Exemple :

- Les $(A_i)_{1\le i\le 5})$ dans le diagramme ci-contre, forment une partition de E
- Les intervalles $]k, k+1]$ où $k \in \mathbb{Z}$ forment une partition de $\mathbb{R}$



7) Produit cartésien

Définition :

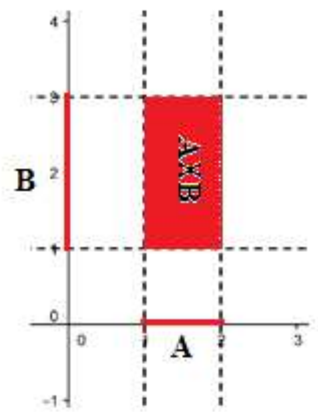
Soient A et B deux ensembles ; **le produit cartésien de A et B** est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$, On le note par $A \times B$.

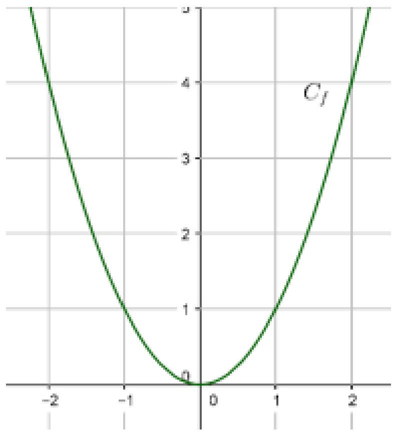
$$A \times B = \{(x, y)/x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Le carrée cartésien d'un ensemble A est l'ensemble $A \times A$ noté A^2

Exemples

$A = [1,2]$; $B = [1,3]$





C_f est la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$

$C_f = \{M(x, y)/x \in \mathbb{R} \text{ et } y = x^2\}$

Généralisation :

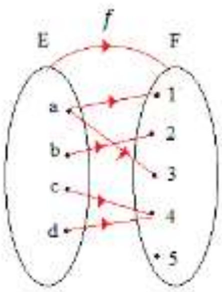
- Soit $(A_i)_{1\le i\le n}$ une famille d'ensembles ; $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ se note $\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/x_i \in A_i\}$.
- $A \times A \times \dots \times A = A^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/x_i \in A\}$.

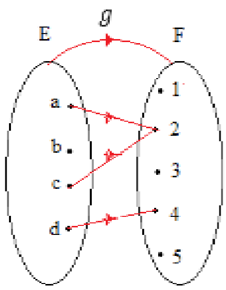
II) LES APPLICATIONS

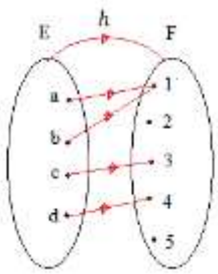
1) Activités

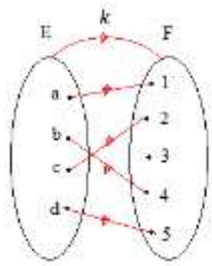
Activité 1 :

Considérons les ensembles $E=\{a,b,c,d\}$ et $F=\{1,2,3,4,5\}$, f,g,h et k sont des relations de E dans F.









Que pouvez-vous dire des relations ci-dessus ?

Activité 2 :

Soit la fonction f définie par : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\longmapsto \frac{x}{1+x^2}\end{array}$

1-Montrer que chaque élément de $\mathbb{R}$ à une image.

2- l'implication suivante est-elle vraie :(P) $(a\neq b)\Rightarrow(f(a)\neq f(b))$

3-Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\left(f(x)\in\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$

4- Montrer que $(\forall y\in\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right])(\exists x\in\mathbb{R})(f(x)=y)$

2) Définitions et vocabulaires

2.1 Application

Définition :

Soient E et F deux ensembles non vides, on appelle application toute relation f de E dans F tel que : tout élément x de E est relié à un unique élément y de F.

Vocabulaire :

$$\begin{array}{l} f:\quad E\to F \\ \qquad x\longmapsto y=f(x)\end{array}$$

- L'ensemble E s'appelle **ensemble de départ** de l'application f.
- L'ensemble F s'appelle **ensemble d'arrivée** de l'application f.
- $y=f(x)$ s'appelle **l'image de** x par l'application f.
- x s'appelle **l'antécédent** de y par l'application f.

2.2 Egalité de deux applications

Activité :

Soient les deux applications suivantes:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad n \longmapsto (-1)^n . n$$

$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad n \longmapsto \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})(f(n) = g(n))$

Définition :

On dit que deux applications f et g sont égales si :

- Elles ont le même ensemble de départ E
- Elles ont le même ensemble d'arrivée F
- $(\forall x \in E)(f(x) = g(x))$.

Remarque :

Les 3 applications :

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 \qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \longmapsto x^2 \qquad h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \longmapsto x^2$$

Sont différentes.

Définition :(injection)

Soit f une application de E dans F, on dit que f est **injective** de E dans F si :
$(\forall (x_1, x_2) \in E^2)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ (P)

Par contraposition on peut dire que :

$$\boldsymbol{(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow (\forall (x_1, x_2) \in E^2)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)}$$

Exemples :

❶ $f: \mathbb{R}/\{2\} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{3x+1}{x-2}$ Montrer que f est injective

❷ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 + 4$ g est-elle injective ?

❸ $h: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}, \quad n \longmapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3

2- Montrer que $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$

3- En déduire que h est injective.

Définition :(surjection)

Soit f une application de E dans F, on dit que f est **surjective** de E dans F si tout élément y de F admet un antécédent dans E.

$$\boldsymbol{(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)}$$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans E.

Exercices :

❶ $$f: \mathbb{R}/\{2\} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{3x+1}{x-2}$$

1- f est-elle surjective de $\mathbb{R}/\{2\}$ vers $\mathbb{R}$.

2- Modifier l'ensemble d'arrivée pour définir une application surjective.

❷ $$g: \mathbb{R} \to [2,+\infty[$$
$$x \longmapsto x^2 - 2x + 3$$

1- Montrer que la fonction g est surjective.

2- g est-elle injective ?

❸ $$h: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q} \cap [1,+\infty[$$
$$n \longmapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

h est-elle surjective ?

Définition :(bijection)

Soit f une application de E dans F, on dit que f est une **bijection** de E dans F si elle **injective et surjective**

Propriété :

Une application est une bijection de E dans F si et seulement si :

$$(\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F})(\exists!\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y})$$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans E.

Exercice :

$$f: [1,+\infty[\to [2,+\infty[$$
$$x \longmapsto x^2 - 2x + 3$$

1- Montrer que f est une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

2- Soit y un élément de $[2,+\infty[$, déterminer (en fonction de y) l'élément x dans $[1,+\infty[$ tel que $f(x) = y$

L'application qui lie l'élément y de $[2,+\infty[$, à l'élément unique x de $[1,+\infty[$ et solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle : **la bijection réciproque de la bijection f** et se note : f^{-1}

Définition :

Si f est une bijection de E dans F; L'application de F dans E qui lie chaque élément y par l'élément x de E qui est solution unique de l'équation $f(x) = y$ s'appelle la bijection réciproque de la bijection f et se note f^{-1}.

f bijection de E dans F ; f^{-1} sa bijection réciproque on a : $\begin{cases} \boldsymbol{f^{-1}(y) = x} \\ \boldsymbol{y \in F} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{f(x) = y} \\ \boldsymbol{x \in E} \end{cases}$

Exercice 1:

Déterminer la fonction réciproque de la fonction

$$f: [1,+\infty[\to [2,+\infty[$$
$$x \longmapsto x^2 - 2x + 3$$

Exercice 2 :

Soit la fonction : $g: \ [1,+\infty[\to \left]0,\frac{1}{2}\right]$
$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$

Montrer que g est une application

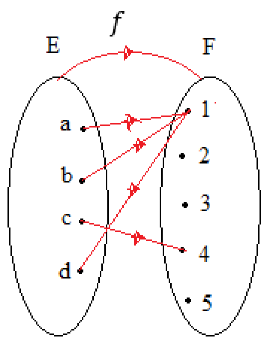
Montrer que l'application g est une bijection de $[1,+\infty[$ vers $]0,\frac{1}{2}]$ puis déterminer sa bijection réciproque.

3) L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application

3.1 Activité

Activité 1 :

Soit f l'application dont le diagramme sagittal est représenté ci-contre



1- Déterminer les images directe des ensemble $\{a,b,c\}$ $\{b,c\}$ et E

2- Déterminer les antécédents des éléments qui appartiennent aux ensembles :

{1} ; {1,3} ; {2,3} {1,4}

Activité 2 :

Soit $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x^2 - x$

1- Montrer que : $(\forall x \in [-1,1])(f(x) \in [\frac{-3}{16},3])$

2- Montrer que : $(\forall y \in [\frac{-3}{16},3])(\exists x \in [-1,1])(f(x) = y)$

on dit que l'image de l'intervalle $[-1,1]$ par l'application f est l'intervalle $[\frac{-3}{16},3]$ et on écrit : $f([-1,1]) = [\frac{-3}{16},3]$

Activité 3 :

Soit $h: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$

1- Déterminer les couples (x,y) qui vérifient $h\big((x,y)\big) = 1$

2- Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points $M(x,y)$ qui vérifient $h\big((x,y)\big) = 1$.

Définition :

Soit f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

- L'image directe de l'ensemble A est l'ensemble $f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}$
- L'image réciproque de l'ensemble B est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

Remarque :

❶Soit f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

$$f(A) = B \iff \begin{cases} f(A) \subset B \\ B \subset f(A) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\forall x \in A)(f(x) \in B) \\ (\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y) \end{cases}$$

❷ $f(A)=\emptyset \Leftrightarrow A=\emptyset$ mais si $f^{-1}(B)=\emptyset$,on ne peut pas dire que $B=\emptyset$

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x^2+1 \end{array}$$ on a : $f^{-1}(\mathbb{R}^-)=\emptyset$

❸ Pour parler de l'image réciproque **d'un élément** par une application, il faut que f soit **bijective**

mais on peut considérer l'image réciproque d'un ensemble quel que soit la nature de l'application f.

Propriété :

> Soit f une application de E dans F.
>
> f est surjective de E dans F ,si et seulement si $f(E)=F$.

Preuve :

On a : f une application de E dans F donc : $f(E)\subset F$;si de plus f est surjective alors :

$(\forall y\in F)(\exists x\in E)(f(x)=y)$ et donc $F\subset f(E)$. D'où $f(E)=F$

Réciproquement si $f(E)=F$ alors $F\subset f(E)$ et par suite : $(\forall y\in F)(\exists x\in E)(f(x)=y)$ donc f est surjective.

Exercice

Soit $$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{3}{1+x^2} \end{array}$$ déterminer $f^{-1}([1,2])$

4) Restriction ; Prolongement d'une application

Activité 1:

Soit l'application $$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3|1-x^2|+x \end{array}$$

Ecrire l'expression de f sur $[-1,1]$

Activité 2 :

Soit l'application $$g: \begin{array}{l} \mathbb{R}/\{1\} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{3x+1}{x-1} \end{array}$$

1- g est-elle bijective ?

2- A partir de g, définir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Définition :

> Soit f une application de E dans F
>
> - Soit A une partie de E, l'application définie de A vers F, qui associe à tout élément x de A l'élément $f(x)$, s'appelle **la restriction de f sur l'ensemble A.**
> - Soit Γ un ensemble tel que $E\subset\Gamma$, l'application définie de Γ vers F, qui associe à tout élément x de E l'élément $f(x)$, s'appelle **un prolongement de f sur l'ensemble Γ.**

7) La partie entière d'un réel.

Théorème :

> On admet la proposition suivante : $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists! k\in\mathbb{Z})(k\le x<k+1)$.

Définition :

> L'entier relatif k qui vérifie le théorème précédent s'appelle **la partie entière du réel x ;** on le note $[x]$ ou $E(x)$.
> L'application qui lie chaque élément x de $\mathbb{R}$ à $E(x)$ dans $\mathbb{Z}$ s'appelle l'application partie entière.

Exemple :

$$E(\sqrt{2}) = 1\ ;\quad E(\pi) = 3\ ;\quad E(-\pi) = -4\ ;\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(E\left(\frac{1}{n}\right) = 0\right)\ ;\ (\forall k \in \mathbb{Z})(E(k) = k)$$

Exercices :

❶ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{Z})(E(m+x) = m + E(x))$.

❷ Vérifier par un contre-exemple que : $E(x+y) \neq E(x) + E(y)$

❸ Soit l'application $\begin{aligned} h:\ &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \longmapsto E\left(3x + \frac{1}{2}\right) + 1 \end{aligned}$

1- Vérifier que h n'est pas injective.

2- Donner la restriction de h sur l'intervalle $[0, \frac{1}{3}[$.

3- Déterminer : $h^{-1}\{4\}$ et $h^{-1}\{2\}$; h est-elle surjective ?.

8) Composition de deux applications.

Activité :

Soient les deux applications :

$\begin{aligned} f:\ &\mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ &x \longmapsto \frac{1}{x^2} \end{aligned}$ et $\begin{aligned} g:\ &\mathbb{R}/\{1\} \to \mathbb{R} \\ &x \longmapsto \frac{x}{x-1} \end{aligned}$

1- Déterminer $f(g(3))$; $f(g(-1))$ $g(f(3))$

2- Donner la condition sur x pour que le réel $g(f(x))$ existe.

3- Donner la condition sur x pour que le réel $f(g(x))$ existe.

4- Déterminer les application fog et gof.

Définition :

> Soient f une application de E dans F et g une application de G dans H tel que : $\boldsymbol{f(E) \subset G}$, l'application h définie de E vers H par : pour tout x dans E, $h(x) = g(f(x))$ s'appelle la composition des deux applications f et g et se note gof.
>
> $$(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})((\boldsymbol{gof})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})))$$

On peut représenter la composition par :

$$\boldsymbol{f(E) \subset G}$$

$$\begin{array}{llll} E \xrightarrow{\ f\ } F & G \xrightarrow{\ g\ } H \\ x \longmapsto f(x) & X \longmapsto g(X) \\ x \longmapsto \boldsymbol{gof(x) = g(f(x))} \end{array}$$

Propriété :

- La composition de deux applications injectives est une application injective
- Si $F = G$ alors La composition de deux applications surjectives est une application surjective
- La composition de deux bijections f et g est une bijection et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

Preuves : En exercice.

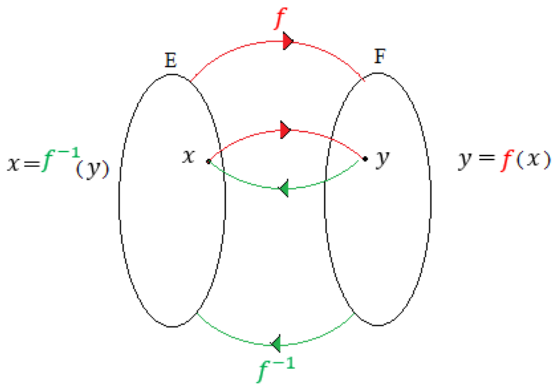
Propriété :

- La composition des applications est associative : $(fog)oh = fo(goh)$
- La composition des applications n'est pas commutative : $fog \neq gof$

Propriété :

Si f est une bijection de E dans F et f^{-1} sa bijection réciproque :

- $(\forall x \in E)((f^{-1}of)(x) = x)$, $f^{-1}of$ s'appelle **l'identité de E** et s note $\mathcal{I}d_E$
- $(\forall x \in F)((fof^{-1})(x) = x)$,fof^{-1} s'appelle **l'identité de F** et s note $\mathcal{I}d_F$
- Si $E = F$ alors : $f^{-1}of = fof^{-1} = \mathcal{I}d_E$



ENSEMBLES ET APPLICATIONS

1)LES ENSEMBLES :

1-1) Activités :

Activité 1 : Soient les ensembles :

$E=\left\{x\in\left]-\pi;2\pi\right[/ \tan x=\sqrt{3} : x\in\mathbb{R}\right\}$

$F=\left\{x\in\left]-\pi;2\pi\right[/ x=\frac{\pi}{6}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$

$G=\left\{x\in\left]-\pi;2\pi\right[/ x=\frac{\pi}{6}+\frac{k}{2}\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$

$S=\left\{\frac{-5\pi}{3};\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{3}\right\}$

Vérifier que : $S\subseteq E$ et $E\subseteq S$ et que $E=S$ et $E=G$

Vérifier que: $\frac{\pi}{8}$ n'est pas un élément de E

et que $E\neq F$

Activité 2 :

Soient $A=\left\{\frac{5n+8}{8n-1} / n\in\mathbb{N}\right\}$ et $B=\left\{\frac{2n+4}{2n-1} / n\in\mathbb{N}\right\}$

1- Est ce que : $\frac{17}{3}\in A$? $\frac{43}{25}\in B$? $\frac{42}{37}\in B$?

2- montrer que $\frac{6}{5}$ est un élément commun entre A et B.

1-2) VOCABULAIRES :

- Un ensemble E est une collection d'objets mathématiques. Les objets que l'ensemble Contient sont appelés éléments de E.
- Si x est un élément de E on dit que x appartient a E et on écrit : $x\in E$
- ∅ est l'ensemble qui ne contient aucun élément, on peut le définir comme suite :$\{x\in E \text{ et } x\notin E\}$.
- Un ensemble peut être défini **en extension**, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades.

Par exemple : L'ensemble V des voyelles de l'alphabet français en extension est :
V = {a, e, i, o, u, y}

- En compréhension c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments.

Par exemple : $E=\{k\in\mathbb{Z}/ |3k+1|\leq 5\}$

Exemples :

1)L'ensemble des diviseurs de 3 en extension est : $D_3=\{1;3\}$

L'ensemble des diviseurs de 3 en compréhension est : $D_3=\{n\in\mathbb{N}/ \ n/3\}$

2)L'ensemble A des entiers naturels dont les carrés sont inférieurs ou égaux à 40 :

$A=\{n\in\mathbb{N}/ n^2\leq 40\}$ (en compréhension

$A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ (en extension)

Exercice1 :1)Ecrire en extension les ensembles suivants : $D_{180}=\{n\in\mathbb{N}/ n/180\}$

$A=\left\{n\in\mathbb{Z}/ \frac{-5}{2}\leq n^2\leq\frac{3}{2}\right\}$;

$B=\{x\in\mathbb{R}/ x^2+x+1=0\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des nombres pairs

Solution : 1) $180=2^2\times3^2\times5$

$D_{180}=\{1;2;3;4;5;6;9;10;12;15;18;20;30;36;45;60;90;180\}$

$A=\{-1;0;1\}$

$x^2+x+1=0 \quad \Delta=-3\prec 0$ donc : $B=\varnothing$

2) $P=\{2k / k\in\mathbb{N}\}$

Exercice2 :1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$E_1=\{k\in\mathbb{Z}/ |k+1|\leq 2\}$

$E_2=\{x\in\mathbb{Z}/ k^2\leq 7\}$

$E_3=\{k\in\mathbb{Z}/ 7\leq k^2\leq 35\}$

$E_4=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/ (x+y)(x-y)=32\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans $\mathbb{N}$

Solution : 1) $k\in E_1 \Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $|k+1|\leq 2\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-2\leq k+1\leq 2\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-3\leq k\leq 1\Leftrightarrow$

Donc : $E_1=\{-3;-2;-1;0;1\}$

$k\in E_2 \Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et

$k^2\leq 7\Leftrightarrow |k|\leq\sqrt{7}\Leftrightarrow -\sqrt{7}\leq k\leq\sqrt{7}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $E_2=\{-2;-1;0;1;2\}$

$k\in E_3 \Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $7\leq k^2\leq 35$

$\Leftrightarrow\sqrt{7}\leq |k|\leq\sqrt{35}\Leftrightarrow |k|\in\{3;4;5\}\Leftrightarrow k\in\{-5;-4;-3;3;4;5\}$

Donc : $E_3=\{-5;-4;-3;3;4;5\}$

$E_4 = \{(x;y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 32\}$?

Et $(x-y)+(x+y) = 2x$ est u nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité et

$x+y \geq x-y \quad 32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$E_4 = \{(6;2);(9;7)\}$

$E_5 = \{(x;y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - y^2 = 15\}$?

$x^2 - y^2 = 15 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 15$

De même que : E_4 on a : les diviseurs de 15 sont 1 ;3 ;5 ;15 et $x+y \geq x-y$

On dresse un tableau :

$x-y$	1	3
$x+y$	15	5
x	8	4
y	7	1

2) $P = \{5k / k \in \mathbb{N}\}$

Exercice3 : Ecrire en extension les ensembles suivants : $A = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{n\pi}{6}\right) : n \in \mathbb{Z}\right\}$

$B = \left\{\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6}\right) : n \in \mathbb{Z}\right\}$

Solution : on sait que la fonction cos est périodique de période 2π et $\frac{n\pi}{6} = 2\pi \Leftrightarrow n = 12$

$n \in \{0;1;2;3;..;11\}$

$A = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{n\pi}{6}\right) / n \in [0;11]\right\}$

En tenant compte des relations :

$\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$ on en deduit :

$A = \left\{\cos\left(\frac{6\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{11\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{16\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{21\pi}{30}\right)\right.$

$;\cos\left(\frac{26\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{31\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{36\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{41\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{46\pi}{30}\right)$

$\left.;\cos\left(\frac{51\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{56\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{61\pi}{30}\right)\right\}$

De même pour sin on a : $B = \left\{\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6}\right) : n \in [0;11]\right\}$

En tenant compte des relations :

$\sin(\pi - x) = \sin x = -\sin(\pi + x) = -\sin(-x)$

on en deduit :

$B = \left\{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right);\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right);\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right);-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right);-\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right);-\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right\}$

2) Egalité ; inclusion ; ensemble des partie d'un ensemble

Définition : On dit que deux ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments ; on écrit $E = F$

$(E = F) \Leftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$

Exemple : $A = \{k \in \mathbb{Z} / |2k+1| \leq 3\}$ et $B = \{-2,-1,0,1\}$

Montrons que : $A = B$

Solution : $k \in A \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$ et $|2k+1| \leq 3 \Leftrightarrow$

$k \in \mathbb{Z}$ et $-3 \leq 2k+1 \leq 3 \Leftrightarrow$

$k \in \mathbb{Z}$ et $-4 \leq 2k \leq 2 \Leftrightarrow$

$k \in \mathbb{Z}$ et $-2 \leq k \leq 1 \Leftrightarrow k \in \{-2;-1;0;1\} \Leftrightarrow k \in B$

Donc on a : $k \in A \Leftrightarrow k \in B$

Donc : $A = B$

Définition : Soient E et F deux ensembles quelconques. E est dit inclus dans F si tout élément de E est un élément de F.

On dit aussi que E est un sous-ensemble de F ou encore que E est une partie de. F On note $E \subset F$

$(E \subset F) \Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F)$.

Exemple : Soit $E = \{0;1;2\}$ } déterminer tous les ensembles inclus dans E. Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

$P(E) = \{\varnothing;\{0\};\{1\};\{2\};\{0;1\};\{0;2\};\{1;2\};E\}$

Définition : Soit E un ensemble, les partie de E, constituent un ensemble qui s'appelle ensemble des partie de E et se note $P(E)$.

$P(E)) = \{X / X \subset E\}$

Remarques : 1)A est une partie de E ($A \subset E$) si et seulement si A est un élément de $P(E)$

$A \subseteq E \Leftrightarrow A \in P(E)$

2) $\varnothing \in P(E)$ et $\emptyset \subset E$ 3) $E \in P(E)$ et $E \subset E$

Exercice4 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

1) $P(P(\varnothing))$ 2) $P(P(\{a;b\}))$

Solution :1) Il est aisé de voire que $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

donc : $P(P(\varnothing)) = \{\varnothing;\{\varnothing\}\}$

2) $P(P(\{a;b\}))$:

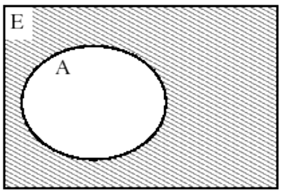
$P(\{a;b\}) = \{\varnothing;\{a\};\{b\};\{a;b\}\}$ Donc :

$P(P(\{a,b\}))=\{\varnothing;\{\varnothing\};\{\{a\}\};\{\{b\}\};\{\{a,b\}\};\{\varnothing,\{a\}\};\{\varnothing,\{b\}\};\{\varnothing,\{a,b\}\};\{\{a\};\{b\}\};$

$;\{\{a\};\{a,b\}\};\{\{b\};\{a,b\}\};\{\{a,b\}\};\{\varnothing,\{a\};\{b\}\};\{\varnothing;\{a\};\{a,b\}\};\{\varnothing;\{b\};\{a,b\}\}\}$

3) Complémentaire d'un ensemble

complémentaire



Définition :

Soit A une partie de E, le complémentaire de A est l'ensemble constitué par tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A, on le note $\overline{A}$ ou C_E^A.

$\overline{A}=\{x\in E\,/\,x\notin A\}$

Exemples : Si E un ensemble quelconque :

$\overline{E}=\emptyset$ et $\overline{\varnothing}=E$

$C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}=I$ (Ensembles des irrationnelles).

Exercice5 : donner Complémentaire des ensembles suivants : $[a;b[$ l'ensemble $\mathbb{Q}$

2) l'intervalle $[a;b[$ $a\prec b$

Solution : 1) le complémentaire de $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels et se note $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

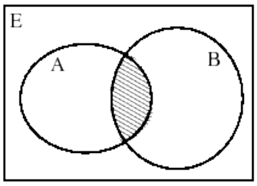
2) $\overline{[a;b[}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\notin[a;b[\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq b ou x\prec a\}$

$\overline{[a;b[}=]-\infty;a[\cup[b;+\infty[$

4) Intersection ; réunion, différence de deux ensembles.

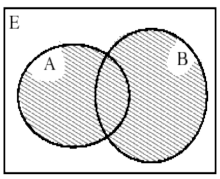
Définition : Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; l'intersection de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. On le note par $A\cap B$. $A\cap B=\{x\in E/\ x\in A\ \textbf{et}\ x\in B\}$

intersection



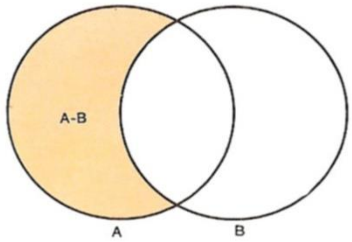
Définition : Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; la réunion de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A ou à B. On le note par $A\cup B$.

réunion



$A\cup B=\{x\in E/\ x\in A\ \textbf{ou}\ x\in B\}$

Définition : Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; la différence de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B.



On le note par $A\backslash B$ ou $A-B$

$A\backslash B=\{x\in E/\ x\in A\ \textbf{et}\ x\notin B\}$

5) Propriétés

5.1 Propriétés d'inclusion.

Soient E, un ensemble, A, B et C des parties de E.

$(A=B)\Leftrightarrow A\subset B$ et $B\subset A$

$A\subset B$ et $B\subset C\Rightarrow(A\subset C)$ la transitivité

5.2 Intersection et réunion

$A\cap A=A$ et $A\cup A=A$

Si $A\subset B$ alors $A\cap B=A$ et $A\cup B=B$

$A\cap B\subset A\subset A\cup B$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ L'associativité

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ L'associativité

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ la distributivité

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ la distributivité

5.3 Le complémentaire

$\overline{A}=E/A$ et $\overline{\overline{A}}=A$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ lois de Morgan

$(A\subset B)\Leftrightarrow(\overline{B}\subset\overline{A})$

5.4 La différence

$A-B=A-(A\cap B)$ $A-B=A\cap\overline{B}$

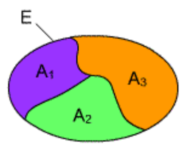
6) Notations généralisées.

Soient $A_1, A_2\ \dots A_n$ une famille de parties d'un ensemble E, (qu'on peut noter $(A_i)_{1\leq i\leq n}$)

L'ensemble : $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$ se note : $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$

L'ensemble $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$ se note : $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$

Définition : Une famille $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ de parties d'un ensemble E s'appelle une partition de l'ensemble E si elle vérifie :



$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=E$ et $i\neq j)\Rightarrow(Ai\cap Aj=\emptyset)$

on dit que les ensembles sont disjoints deux à deux.

Exercice6:Soient les ensembles :

$A=\left\{\frac{\pi}{4}+2\frac{k\pi}{5}:k\in\mathbb{Z}\right\}$ $B=\left\{\frac{\pi}{2}+2\frac{k\pi}{5}:k\in\mathbb{Z}\right\}$

Monter que : $A\cap B=\varnothing$

Solution : On suppose que : $A\cap B\neq\varnothing$

Donc : $\exists x_0\in\mathbb{R}\quad x_0\in A$ et $x_0\in B$

$\Leftrightarrow\exists(k_1;k_2)\in\mathbb{Z}^2:\ x_0=\frac{\pi}{2}+2\frac{k_1\pi}{5}$ et $x_0=\frac{\pi}{4}+2\frac{k_2\pi}{5}$

Donc $\Leftrightarrow\exists(k_1;k_2)\in\mathbb{Z}^2:\ \frac{\pi}{2}+2\frac{k_1\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+2\frac{k_2\pi}{5}$

Donc : $\frac{2}{5}(k_1-k_2)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow k_1-k_2=-\frac{5}{8}$ contradiction

avec le faite que $k_1-k_2\in\mathbb{Z}$ et $-\frac{5}{8}\notin\mathbb{Z}$ Donc : $A\cap B=\varnothing$

Exercice7 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

Monter que : $\begin{cases}(\overline{B-C})\cup A=E\\(\overline{C-D})\cup A=E\end{cases}\Rightarrow(B-D)\subset A$

Solution : On suppose que :

$(\overline{B-C})\cup A=E$ et $(\overline{C-D})\cup A=E$

Remarquer que : $A\cup B=E\Rightarrow\overline{A}\subset B$

Donc : $B-C\subset A$ et $C-D\subset A$ cad

$B\cap\overline{C}\subset A$ et $C\cap\overline{D}\subset A$

Montrons que : $B-D\subset A$ cad $B\cap\overline{D}\subset A$?

Soit $x\in B\cap\overline{D}$

$x\in B\cap\overline{D}\Leftrightarrow x\in B$ et $x\in\overline{D}$

- Si $x\in C$ alors $x\in C\cap\overline{D}$ donc $x\in A$ car $C\cap\overline{D}\subset A$
- Si $x\notin C$ alors $x\in B\cap\overline{C}$ donc $x\in A$ car $B\cap\overline{C}\subset A$

Dans tous les cas : $(B-D)\subset A$

Exercice8 : Soient A ; B ; C des ensembles

Monter que : $A\subset B\subset C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C$

Solution : On suppose que : $A\subset B\subset C$

On a : $A\subset B\subset C\Rightarrow A\subset B$ et $B\subset C$

$\Rightarrow A\cup B=B$ et $B\cap C=B\Rightarrow A\cup B=B\cap C$

On suppose que : $A\cup B=B\cap C$

On a : $A\cup B=B\cap C\Rightarrow A\cup B\subset B$ et $A\cup B\subset C$

$\Rightarrow A\subset B$ et $B\subset C$

$\Rightarrow A\subset B\subset C$

Donc : $A\subset B\subset C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C$

Exercice9 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

Monter que :

1) $A=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap\overline{C})$

2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$

3) $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Leftrightarrow A\cap B=A\cap C$

Solution :1)

$(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)$

$=\left[(A\cap B)\cap(C\cup\overline{C})\right]\cup\left[(A\cap\overline{B})\cap(C\cup\overline{C})\right]$

$=\left[(A\cap B)\cap E\right]\cup\left[(A\cap\overline{B})\cap E\right]=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

$=A\cap(B\cup\overline{B})=A\cap E=A$

2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=\left[B\cup(A\cap C)\right]\cap(C\cup A)$

$=(B\cap(C\cup A))\cup((A\cap C)\cap(C\cup A))$

$=(B\cap C)\cup(B\cap A)\cup(A\cap C)$

3) Montrons que :

$\begin{cases}A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Rightarrow A\cap B=A\cap C\\A\cap B=A\cap C\Rightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\end{cases}$

$A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Rightarrow\overline{A\cap\overline{B}}=\overline{A\cap\overline{C}}\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{C}}$

$\Rightarrow\overline{A}\cup B=\overline{A}\cup C\Rightarrow A\cap(\overline{A}\cup B)=A\cap(\overline{A}\cup C)$

$\Rightarrow(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap C)$

$\Rightarrow A\cap B=A\cap C$

Inversement :

$A\cap B=A\cap C\Rightarrow A\cap\overline{\overline{B}}=A\cap\overline{\overline{C}}\Rightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

D'après l'implication directe

Donc : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Leftrightarrow A\cap B=A\cap C$

Exercice10 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

Monter que : $\begin{cases}A\cup B\subset A\cup C\\A\cap B\subset A\cap C\end{cases}\Rightarrow B\subset C$

Solution : On suppose que :

$\begin{cases}A\cup B\subset A\cup C\\A\cap B\subset A\cap C\end{cases}$ Montrons que :

$(\forall x\in E)(x\in B\Rightarrow x\in C)$?

$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cup C\Rightarrow x\in A$ ou $x\in C$

- Si $x\in A$ alors $x\in A\cap B$ donc $x\in A\cap C$ car $A\cap B\subset A\cap C$ donc $B\subset C$
- Si $x\notin A$ et puisque $x\in C$ ou $x\in A$ est vraie alors $B\subset C$

Conclusion : $(\forall x\in E)(x\in B\Rightarrow x\in C)$

Donc $B\subset C$

Exercice11 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

La différence symétrique de A et B c'est l'ensemble Qu'on note : $A\Delta B$ tel que : $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

1)Monter que : $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

2)Monter que : $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$

3)Monter que : $\forall C\in P(E)$: $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$

Solution : 1)

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)$$

$$=\left[\left(A\cap\overline{B}\right)\cup B\right]\cap\left[\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\overline{A}\right]$$

$$=(A\cup B)\cap\left(B\cup\overline{B}\right)\cap\left(A\cup\overline{A}\right)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{A}\right)$$

$$=(A\cup B)\cap E\cap E\cap\left(\overline{A\cap B}\right)$$

$$=(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

2)Monter que :

$$\overline{A}\Delta\overline{B}=\left(\overline{A}-\overline{B}\right)\cup\left(\overline{B}-\overline{A}\right)=\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(\overline{B}\cap A\right)$$

$$=(A-B)\cup(B-A)=A\Delta B$$

3)soit $C\in P(E)$

- Si on a : $B=C$ alors $A\Delta B=A\Delta C$
- Supposons que : $A\Delta B=A\Delta C$ et montrons que $B=C$?

✓ Soit $x\in B$ montrons que $x\in C$?

Si $x\in A$:

$(x\in A$ et $x\in B)\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow x\notin A\Delta B\Rightarrow x\notin A\Delta C$

(Car $A\Delta B=A\Delta C$)

$$\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow x\in C$$

Donc $A\cap B\subset C$ **(1)**

Si $x\notin A$:

$(x\notin A$ et $x\in B)\Rightarrow x\in B-A\Rightarrow x\in A\Delta B\Rightarrow x\in A\Delta C$

(Car $A\Delta B=A\Delta C$)

$$\Rightarrow x\in C-A\Rightarrow x\in C$$

Donc $\overline{A}\cap B\subset C$ **(2)**

De **(1) et (2)** en deduit que : $(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\subset C$

Et puisque : $(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=\left(A\cup\overline{A}\right)\cap B=E\cap B=B$

Alors $B\subset C$

De même on montre que : $C\subset B$

Donc : $A\Delta B=A\Delta C\Rightarrow B=C$

Finalement : $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$

7) Produit cartésien

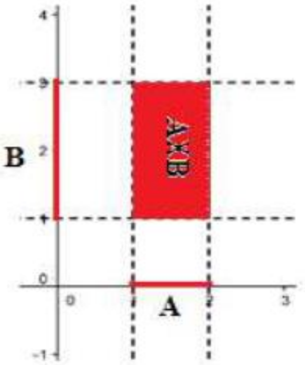
Définition : Soient A et B deux ensembles ; le produit cartésien de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x\in A$ et $y\in B$, On le note par $A\times B$.

$A\times B=\{(x,y)\ /x\in A\ et\ y\in B\}$ Le carrée cartésien d'un ensemble A

Est l'ensemble $A\times A$ noté A^2

Exemples :

$A=[1,2]\ ;\ B=[1,3]$



Exercice12 :Soit l'ensemble :

$$E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+xy-2y^2+5=0\right\}$$

1) a)vérifier que :

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2: x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$$

b) Ecrire en extension l'ensemble $E\cap\mathbb{Z}^2$

c) montrer que : $E=\left\{\left(\dfrac{2t^2-5}{3t};\dfrac{-t^2-5}{3t}\right)/\ t\in\mathbb{R}^*\right\}$

4) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$A=\{0;1;4;9;16;...\}$ et $B=\left\{-1;\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{4};...\right\}$

$C=\{...;-5;-2;1;4;7;...\}$

Solution : 1) a)

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2:(x-y)(x+2y)=x^2+2xy-xy-2y^2$$

$$=x^2+xy-2y^2$$

b) $(x;y)\in E\cap\mathbb{Z}^2\Leftrightarrow(x;y)\in E$ et $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow(x-y)(x+2y)=-5$ et $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow(x;y)\in\mathbb{Z}^2\begin{cases}x-y=-5\\x+2y=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=5\\x+2y=-1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=-1\\x+2y=5\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=1\\x+2y=-5\end{cases}$

Donc : $E\cap\mathbb{Z}^2=\{(-3;2);(3;-2);(1;2);(-1;-2)\}$

c) $(x;y)\in E\Leftrightarrow(x-y)(x+2y)=-5\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=t\\x+2y=\dfrac{-5}{t}\end{cases}: t\in\mathbb{R}^*$

$$\Leftrightarrow\left(x=\frac{2t^2-5}{3t}\ et\ y=\frac{-t^2-5}{3t}\right): t\in\mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow(x;y)\in\left\{\left(\frac{2t^2-5}{3t};\frac{-t^2-5}{3t}\right)/\ t\in\mathbb{R}^*\right\}$$

Donc : $E=\left\{\left(\dfrac{2t^2-5}{3t};\dfrac{-t^2-5}{3t}\right)/\ t\in\mathbb{R}^*\right\}$

4) $A=\{k^2;k\in\mathbb{N}\}$ et $B=\left\{\dfrac{(-1)^k}{k};k\in\mathbb{N}^*\right\}$

$C=\{1+3n; n\in\mathbb{Z}\}$

Exercice13 :soient E et F deux ensembles et A et B deux parties respectives de E et F

1)déterminer le complémentaire de $A\times F$ dans $E\times F$

2)déterminer le complémentaire de $E\times F$ dans $E\times F$

3)déterminer le complémentaire de $A\times B$ dans $E\times F$

Solution : 1) le complémentaire de $A\times B$ dans $E\times F$ se note : $C_{E\times F}^{A\times B}$ ou $\overline{A\times B}$

$(x;y)\in\overline{A\times F}\Leftrightarrow(x;y)\notin A\times F\Leftrightarrow x\notin A ou y\notin F$

$\Leftrightarrow x\in\overline{A} ou y\in\overline{F}\Leftrightarrow(x;y)\in\overline{A}\times F$ ou $y\notin F$

$\Leftrightarrow(x;y)\in\overline{A}\times F$ Car : $y\notin F$ donne l'ensemble vide

Donc : $\overline{A\times F}=\overline{A}\times F$

$(x;y)\in\overline{E\times B}\Leftrightarrow(x;y)\notin E\times B\Leftrightarrow x\notin E ou y\notin B$

$\Leftrightarrow x\in\overline{E} ou y\in\overline{B}\Leftrightarrow(x;y)\in E\times\overline{B}$ ou $x\notin E$

$\Leftrightarrow(x;y)\in E\times\overline{B}$ Car : $x\notin E$ donne l'ensemble vide

Donc : $\overline{E\times B}=E\times\overline{B}$

3) $(x;y)\in\overline{A\times B}\Leftrightarrow(x;y)\notin A\times B\Leftrightarrow x\notin A ou y\notin B$

$\Leftrightarrow x\in\overline{A} ou y\in\overline{B}\Leftrightarrow(x;y)\in\overline{A}\times F$ ou $(x;y)\in E\times\overline{B}$

$\Leftrightarrow(x;y)\in(\overline{A}\times F)\cup(E\times\overline{B})$

Donc : $\overline{A\times B}=(\overline{A}\times F)\cup(E\times\overline{B})$

Exercice14 : soient l'ensemble :

$L=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 1\}$

Monter qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

Solution : On suppose: qu'il existe deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

On a : $(1;0)\in L$ et $(0;1)\in L$

Donc : $1\in A$ et $1\in B$ car $L=A\times B$

Donc : $(1;1)\in A\times B$ cad $(1;1)\in L$

Donc contradiction car : $1^2+1^2\succ 1$

Conclusion il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

Exercice15 : Soient les ensembles :

$$H=\left\{y\in\mathbb{R} / y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} : x\in\mathbb{R}\right\}$$

$$G=\left\{y\in\mathbb{R} / y=\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} : x\in\mathbb{R}\right\}$$

1- montrer que : $H=]0,1]$.

a- Considérer un élément $y_0\in H$ et montrer que $y_0\in]0,1]$

b- Considérer un élément $y_0\in]0,1]$ et montrer que $y_0\in H$

2- Monter que $G\subset H$

3- Est-ce que $G=H$?

Solution :

1- a- soit un élément $y_0\in H$ montrons que $y_0\in]0,1]$?

$$y_0\in H\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R} / y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}$$

On a $x_0^2\ge 0\Rightarrow x_0^2+1\ge 1\Rightarrow\sqrt{x_0^2+1}\ge 1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}\le 1\Rightarrow$

$y_0\in]0,1]$ Donc : $H\subset]0;1]$ **(1)**

b- Considérer un élément $y_0\in]0,1]$ et montrons que $y_0\in H$?

$$y_0\in]0;1]\quad\exists ? x_0\in\mathbb{R} / y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}$$

$$y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}\Leftrightarrow y_0^2=\frac{1}{x_0^2+1}\Leftrightarrow x_0^2=\frac{1}{y_0^2}-1$$

Or : $y_0\in]0;1]$ donc $0\prec y_0\le 1$ donc $\frac{1}{y_0^2}-1\ge 0$

Donc : il suffit de prendre : $x_0=\sqrt{\frac{1}{y_0^2}-1}$ Donc : $y_0\in H$

Donc : $]0;1]\subset H$ **(2)**

De : **(1) et (2)** en deduit que **:** $H=]0;1]$

2- montrons que $G\subset H$??

Montrons que : $G\subset]0;1]$?

soit un élément $y_0\in G$ montrons que $y_0\in]0,1]$?

$$y_0\in G\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R} / y_0=\frac{1}{1+\sqrt{x_0^2+1}}$$

On a $x_0^2\ge 0\Rightarrow x_0^2+1\ge 1$

$$\Rightarrow\sqrt{x_0^2+1}\ge 1\Rightarrow\sqrt{x_0^2+1}+1\ge 2\Rightarrow 0\prec\frac{1}{1+\sqrt{x_0^2+1}}\le\frac{1}{2}\le 1$$

Donc : $y_0\in]0,1]$ Donc : $G\subset H$

3)supposons : $G=H$

On a $1\in H\Rightarrow 1\in G$

$$\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R} / 1=\frac{1}{1+\sqrt{x_0^2+1}}$$

$$\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R} / 1+\sqrt{x_0^2+1}=1\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R} / \sqrt{x_0^2+1}=0$$

$\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R} / x_0^2=-1$ absurde donc : $H\neq G$

Exercice16 : on considère dans $\mathbb{Z}$ les deux parties suivantes :

$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\dfrac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/\dfrac{x+10}{x-5}\in\mathbb{Z}\right\}$

1)a) montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{Z}-\{5\}\right)\dfrac{x+10}{x-5}=1+\dfrac{15}{x-5}$

1)b) montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{Z}\right)\dfrac{4x^2-4x+10}{2x-1}=2x-1+\dfrac{9}{2x-1}$

2) déterminer : A ; B ; $A-B$; $B-A$ et $A\Delta B$ en extension

3)on admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de $\mathbb{Z}$: $P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans $P(\mathbb{Z})$ l'équation : $A\Delta X=B$

Solution : 1) a) il est aisé de voir que :

$\left(\forall x\in\mathbb{Z}-\{5\}\right)\dfrac{x+10}{x-5}=1+\dfrac{15}{x-5}$

1) b) il est aisé aussi de voir que

$\left(\forall x\in\mathbb{Z}\right)2x-1+\dfrac{9}{2x-1}=+\dfrac{(2x-1)^2+9}{2x-1}=\dfrac{4x^2-4x+10}{2x-1}$

2) détermination de : A ?

On a : $A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\dfrac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ et

$\left(\forall x\in\mathbb{Z}\right)2x-1\in\mathbb{Z}$ et $\dfrac{4x^2-4x+10}{2x-1}=2x-1+\dfrac{9}{2x-1}$

En deduit que : $\left(\forall x\in\mathbb{Z}\right)$; $x\in A\Leftrightarrow\dfrac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x-1+\dfrac{9}{2x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{9}{2x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2x-1 divise 9$

$\Leftrightarrow 2x-1\in\{-9;-3;-1;1;3;9\}\Leftrightarrow 2x\in\{-8;-2;0;2;4;10\}$

$\Leftrightarrow x\in\{-4;-1;0;1;2;5\}$ donc : $A=\{-4;-1;0;1;2;5\}$

détermination de : B ?

soit $x\in\mathbb{Z}$ de façon analogue nous pouvons écrire :

$x\in B\Leftrightarrow x\neq 5 et x-5 divise 15$

$\Leftrightarrow x-5\in\{-15;-5;-3;-1;1;3;5;15\}$

$\Leftrightarrow x\in\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}$ donc :

$B=\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}$

détermination de : $A-B$; $B-A$ et $A\Delta B$?

$A-B=\{-4;-1;0;1;2;5\}-\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}=\{-4;-1;1;5\}$

$A-B=\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}-\{-4;-1;0;1;2;5\}=\{-10;4;6;8;10;20\}$

$A\Delta B=(A-B)\cup(A-B)=\{-10;4;6;8;10;20;-4;-1;1;5\}$

3)Résolution dans $P(\mathbb{Z})$ de l'équation : $A\Delta X=B$

On trouve : $X=\{-10;4;6;8;10;20;-4;-1;1;5\}$

Exercice17 :Soient les ensembles :

$E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2-xy-2y^2=0\right\}$

$F=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x+y=0\right\}$

1) montrer que : $F\subset E$

2)déterminer y de $\mathbb{R}$ tel que : $(1;y)\in E$; est ce que on a $E\subset F$?

3) montrer que : $E=F\cup G$ ou G est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles :

$A=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/y=x+1+\sqrt{x^2+1}=0\right\}$

$B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/y=x+1-\sqrt{x^2+1}=0\right\}$

a) montrer que : $H=A\cup B$

b) déterminer : $H\cap F$

Solution : 1) montrons que : $F\subset E$?

On a : $(x;y)\in F\Leftrightarrow x+y=0\Leftrightarrow y=-x$

$\Rightarrow x^2-xy-2y^2=y^2+y^2-2y^2=0\Rightarrow(x;y)\in E$

Donc : $F\subset E$

2) $(1;y)\in E\Leftrightarrow 1-y-2y^2=0\Leftrightarrow(1+y)(1-2y)=0$

$\Leftrightarrow y=1$ ou $y=\dfrac{1}{2}$

Donc : $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)\in E$ ou $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)\notin F$

Donc : $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ (x;y)\notin F$ et $(x;y)\in E$

Donc : $E\not\subset F$

3) $(x;y)\in E\Leftrightarrow x^2-xy-2y^2=0\Leftrightarrow x^2-2xy+xy-2y^2=0$

$\Leftrightarrow x^2+xy-2xy-2y^2=0\Leftrightarrow x(x+y)-2y(x+y)=0$

$\Leftrightarrow(x+y)(x-2y)=0\Leftrightarrow x+y=0$ ou $x-2y=0$

$\Leftrightarrow(x;y)\in F$ ou $(x;y)\in G$

Avec : $G=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x-2y=0\right\}$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ $(x;y)\in E\Leftrightarrow(x;y)\in F$ ou $(x;y)\in G$

Donc : $E=F\cup G$

4) a)$(x;y)\in H\Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+2x=0$

$\Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+(x+1)^2-(x+1)^2+2x=0$

$\Leftrightarrow\left[y-(x+1)\right]^2=(x+1)^2-2x\Leftrightarrow\left[y-(x+1)\right]^2=x^2+1$

$\Leftrightarrow y=x+1+\sqrt{x^2+1}$ ou $\Leftrightarrow y=x+1-\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow(x;y)\in A$ ou $(x;y)\in B$ Donc : $H=A\cup B$

4) b)$(x;y)\in H\cap F\Leftrightarrow(x;y)\in H$ ou $(x;y)\in F$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+2x-2y=0$ et $x=-y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x^2+2x+2x=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+4x=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x+4)=0 \\ x=-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ou } x=-\frac{4}{3} \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=0 \text{ et } y=0 \text{ ou } x=-\frac{4}{3} \text{ et } y=\frac{4}{3}$$

Donc : $(x;y)\in H\cap F \Leftrightarrow (x;y)\in\left\{(0;0);\left(-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\right\}$

$$H\cap F=\left\{(0;0);\left(-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\right\}$$

Exercice18 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

1)a)déterminer une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$

b)résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

2) on suppose que $C\subset A\subset B$

résoudre dans $P(E)$ le système : $\begin{cases} A\cup X=B \\ A\cap X=C \end{cases}$

Solution : 1)si on a : $A\cup X=B$ alors : $X\subset B$ et $A\subset B$

Donc une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$ est $A\subset B$

b)résolution dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

$A\cup X=B \Rightarrow (A-B)\cap(A\cup X)=(B-A)\cap B$

$\Leftrightarrow[(B-A)\cap A]\cup[(B-A)\cap X]=B-A$

$\Leftrightarrow\varnothing\cup[(B-A)\cap X]=B-A$

$\Leftrightarrow(B-A)\cap X=B-A \Leftrightarrow B-A\subset X \Rightarrow B-A\subset X\subset B$

Inversement :

$\forall X\in P(E)$ tel que : $B-C\subset X\subset B$ est solution de l'équation : $A\cup X=B$

Et on a : $(B-A)\cup A=B \quad (B-A)\cap A=\varnothing$

Donc : $A\cup X=B \Leftrightarrow X=(B-A)\cup Y \quad Y\in P(E)$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$S=\{(B-A)\cup Y; Y\in P(E)\}$

2) $C\subset A\subset B$

$$\begin{cases} A\cup X=B \\ A\cap X=C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=(B-A)\cup Y / Y\in P(E) \\ A\cap[(B-A)\cup Y]=C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=(B-A)\cup Y / Y\in P(E) \\ [A\cap(B-A)]\cup[A\cap Y]=C \end{cases}$$

et puisque $A\cap(B-A)=\varnothing$ et $A\cap Y=Y$ car $Y\subset A$

alors : $X=(B-A)\cup C$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

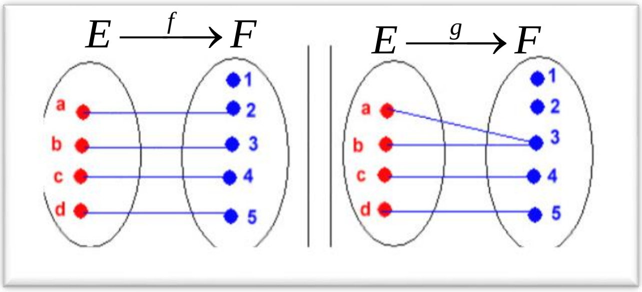
$S=\{(B-A)\cup C\}$

II) LES APPLICATIONS

1) Activités : Activité 1 :

Considérons les ensembles :

$E=\{a, b, c, d\}$ et $F=\{1,2,3,4,5\}$, f, g sont des relations de E dans F.



Que pouvez-vous dire des relations ci-dessus ?

Activité 2 : Soit la fonction f définie par :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{x}{1+x^2}$$

$\overline{A}=\{x\in E / x\notin A\}$

1-Montrer que chaque élément de $\mathbb{R}$ à une image.

2- l'implication suivante est-elle vraie :

(P) $(a\neq b)\Rightarrow(f(a)\neq f(b))$.

3-Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})$ $f(x)\in\left[\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right]$

4- Montrer que $\left(\forall y\in\left[\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right]\right)(\exists x\in\mathbb{R})(f(x)=y)$

2) Définitions et vocabulaires

2.1 Application Définition :

Soient E et F deux ensembles non vides, on appelle application toute relation f de E dans F tel que : tout élément x de E est relié à un unique élément y de F.

<u>Vocabulaire</u> :

$$f:E\to F$$
$$x\mapsto y=f(x)$$

1)L'ensemble E s'appelle ensemble de départ de l'application f.

2)L'ensemble F s'appelle ensemble d'arrivée de l'application f.

3)$y=f(x)$ s'appelle l'image de x par l'application f.

4) x s'appelle l'antécédent de y par l'application f.

Exemple1 : $\begin{aligned} f:\mathbb{R}-\{0\}&\to\mathbb{R} \\ x&\mapsto\frac{x+1}{x}\end{aligned}$ f est une l'application de $\mathbb{R}-\{0\}$ dans $\mathbb{R}$

Exemple2 : $\begin{aligned} g:\mathbb{R}&\to\mathbb{R} \\ x&\mapsto\frac{x+1}{x}\end{aligned}$ g n'est pas une l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car 0 n'admet pas d'images

2.2 Egalité de deux applications

Activité :

Soient les deux applications suivantes :

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, $n\mapsto(-1)^n\times n$ et $g:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, $n\mapsto\begin{cases} n.\text{si}.n.pair \\ -n.si.n.impair \end{cases}$

Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N})(f(n)=g(n))$

Définition : On dit que deux applications f et g sont égales si :

1) Elles ont le même ensemble de départ E

2) Elles ont le même ensemble d'arrivée F

3) $(\forall x\in E)(f(x)=g(x))$.

Exemple1 : Les 3 applications :

$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x^2$ et $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x^2$

Sont différentes.

Exemple2 : soit les 2 applications :

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto(-1)^n$ et $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$

que deux applications f et g ont le même ensemble de départ $\mathbb{Z}$ et le même ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$

Et on a :

$$g(n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\cos(n\pi)=(-1)^n=f(n)$$

Donc : $f=g$

Définition :(injection)

Soit f une application de E dans F, on dit que f est injective de E dans F si :

$$\forall(x_1;x_2)\in E^2\quad x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

Par contraposition on peut dire que :

(f est injective) $\Leftrightarrow$ $\forall(x_1;x_2)\in E^2$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

Exemples :

Exemple1 : soit l'application : $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x+\sqrt{x}$

f est-elle injective ?

Solution : soient $x_1\in\mathbb{R}^+$ et $x_2\in\mathbb{R}^+$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+\sqrt{x_1}=x_2+\sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1\right)=0$$

$\Rightarrow\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$ ou $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1=0$

Or $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1\neq0\Rightarrow\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$

$\Rightarrow\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$ donc f est injective

Exemple2 : soit l'application : $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2-1$

g est-elle injective ?

Solution : on a : $g(1)=g(-1)=0$ mais $1\neq-1$

Donc g n'est pas injective

Exercice19 :1) $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{3x+1}{x-2}$

Montrer que f est injective

2) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2+4$ — g est-elle injective ?

2) $h:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q}$, $n\mapsto1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$

1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3

2- Montrer que $n>m\Rightarrow h(n)>h(m)$

3- En déduire que h est injective.

Définition :(surjection)

Soit f une application de E dans F, on dit que f est surjective de E dans F si tout élément y de F admet un antécédent dans E.

$(\forall \boldsymbol{y}\in \boldsymbol{F})(\exists \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{E})(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y})$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x)=y$ admet au moins une solution dans E.

Exemples :

Exemple1 : soit l'application : $f:\mathbb{R}^+\to]-\infty;3]$, $x\mapsto3-x^2$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty;3]$.

Solution : soient $y\in]-\infty;3]$

Resolvons l'équation: $f(x)=y$

$$f(x)=y\Leftrightarrow3-x^2=y\Leftrightarrow x^2=3-y$$

Or $y\in]-\infty;3]$ donc $y\leq3$ donc $0\leq3-y$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{3-y}$ car $x\in\mathbb{R}^+$

Donc : $(\forall \boldsymbol{y}\in]-\infty;3])(\exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^+)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y})$

Donc :f est surjective

Exemple2 : soit l'application : $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto3-x^2$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$. ?

Solution : on remarque que :

$\forall x\in\mathbb{R}^+$ on a : $f(x)\leq3$

Donc par exemple l'équation: $f(x)=4$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$ donc : f est non surjective

Exercice 20: 1) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{3x+1}{x-2}\end{array}$

a- f est-elle surjective de $\mathbb{R}/\{2\}$ vers $\mathbb{R}$.

b- Modifier l'ensemble d'arrivé pour définir une application surjective.

2) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x^2-2x+3\end{array}$

a- Montrer que la fonction g est surjective.

b- g est-elle injective ?

3) $\begin{array}{l} h:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q}\cap[1;+\infty[\\ n\mapsto 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}\end{array}$

h est-elle surjective ?

Définition :(bijection) Soit f une application de E dans F, on dit que f est une bijection de E dans F si elle injective et surjective

Propriété : Une application est une bijection de E dans F si et seulement si :

$(\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F})$ $(\exists\, !\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})$ $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y})$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans E.

Exemple1 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2-5x\end{array}$

f est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. ?

Solution : soient $y\in\mathbb{R}$

Resolvons l'équation : $f(x) = y$

$$f(x)=y \Leftrightarrow 2-5x=y \Leftrightarrow x=\frac{2-y}{5}$$

Puisque l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ $(\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R})$

Donc :f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice21 :

$\begin{array}{l} f:[1;+\infty[\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x^2-2x+3\end{array}$

1- Montrer que f est une bijection de [1,+∞[vers [2,+∞[.

2- Soit y un élément de [2,+∞[, déterminer (en fonction de y) l'élément x dans [1,+∞[tel que $f(x) = y$

L'application qui lie l'élément y de [2,+∞[, à l'élément unique x de [1,+∞[et solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle : la bijection réciproque de la bijection $\boldsymbol{f}$ et se note : $f-1$

Définition : Si f est une bijection de E dans F; L'application de F dans E qui lie chaque élément y par l'élément x de E qui est solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle la bijection réciproque de la bijection f et se note f^{-1}. f bijection de E dans F ; f^{-1} sa bijection réciproque on a :

$$\begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in F\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=y \\ x\in E\end{cases}$$

Exemple : soit l'application : $\begin{array}{l} f:]1;+\infty[\to]0;+\infty[\\ x\mapsto \dfrac{2}{x-1}\end{array}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Solution soient $y\in]0;+\infty[$

Resolvons l'équation : $f(x) = y$

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x-1}=y \\ x\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{2}{y} \\ x\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{2}{y}+1$$

$(\forall\, y\in]0;+\infty[)$ $(\exists\, !\, \boldsymbol{x} \in\,]1;+\infty[)$ $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y})$

Donc :f est une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in]0;+\infty[\end{cases}$$

$\forall y\in]0;+\infty[$ $f^{-1}(y)=\dfrac{2}{y}+1$ Donc : $\begin{array}{l} f^{-1}:]0;+\infty[\to]1;+\infty[\\ x\mapsto \dfrac{2}{x}+1\end{array}$

Exercice 22: Déterminer la fonction réciproque de la fonction $\begin{array}{l} f:[1;+\infty[\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x^2-2x+3\end{array}$

Exercice 23 : Soit la fonction g définie par :

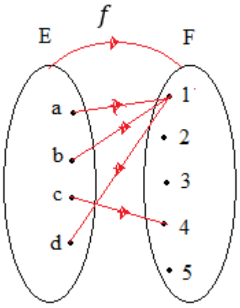
$\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{x}{1+x^2}\end{array}$

Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

3) L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application

3.1 Activité /Activité 1 :

Soit f dont le diagramme sagittal est représenté ci-contre



1- Déterminer les images directes des ensemble $\{a, b, c\}$ Et $\{b,c\}$ et E

2- Déterminer les antécédents des éléments qui appartiennent aux ensembles : {1} ; {1,3} ; {2,3} et {1,4}

Activité 2 : Soit $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x^2-x \end{array}$

1- Montrer que $\forall x\in[-1;1]\quad f(x)\in\left[\frac{-3}{16};3\right]$

2- Montrer que : $\forall y\in\left[\frac{-3}{16};3\right]\ \exists x\in[-1;1]\,/\,(f(x)=y)$

on dit que l'image de l'intervalle $[-1;1]$ par l'application f est l'intervalle $\left[\frac{-3}{16};3\right]$ et on écrit :

$$f([-1;1])=\left[\frac{-3}{16};3\right]$$

Activité 3 : Soit $\begin{array}{l} h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (x;y)\mapsto \dfrac{1}{x^2+y^2} \end{array}$

1- Déterminer les couples (x,y) qui vérifient $h((x,y))=1$

2- Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points $M\ (x, y)$ qui vérifient $h\ ((x, y)) = 1$.

Définition : Soit f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

L'image directe de l'ensemble A est l'ensemble $f(A)=\{f(x)\in F/x\in A\}$

L'image réciproque de l'ensemble B est l'ensemble $f^{-1}(B)=\{x\in E/\ f(x)\in B\}$

Remarques : 1) Soit f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

$$f(A)=B\Leftrightarrow\begin{cases} f(A)\subset B \\ B\subset f(A)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (\forall x\in A)(f(x)\in B) \\ (\forall y\in B)(\exists x\in A)(f(x)=y)\end{cases}$$

2) $f(A)=\emptyset \Leftrightarrow A=\emptyset$ mais si $f^{-1}(B)=\emptyset$ on ne peut pas dire que $B=\emptyset$ *exemple :*

$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x^2+1 \end{array}$ on a : $f^{-1}(\mathbb{R}^-)=\emptyset$

3) Pour parler de l'image réciproque d'un élément par une fonction, il faut que f soit bijective

Mais on peut considérer l'image réciproque d'un ensemble quel que soit la nature de l'application f

Propriété : Soit f une application de E dans F.

f est surjective de E dans F ,si et seulement si $f(E)=F$.

Preuve : On a : f une application de E dans F donc : $f(E)\subset F$;si de plus f est surjective alors : $(\forall y\in F)(\exists x\in E)(f(x)=y)$ et donc $F\subset f(E)$.

D'où $f(E)=F$

Réciproquement si $f(E)=F$ alors $F\subset f(E)$ et par suite : $(\forall y\in F)(\exists x\in E)(f(x)=y)$ donc f est surjective.

Exemple1 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{3x-1}{x+1} \end{array}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\quad f(x)=3-\dfrac{4}{x+1}$

2)Déterminer : $f(K)$ avec $K=]-\infty;-1[$

Solution : 1) $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$3-\frac{4}{x+1}=\frac{3x+3-4}{x+1}=\frac{3x-1}{x+1}=f(x)$$

2) $x\in K\Leftrightarrow x\prec -1\Leftrightarrow x+1\prec 0\Leftrightarrow -\dfrac{4}{x+1}\succ 0$

$\Leftrightarrow 3-\dfrac{4}{x+1}\succ 3\Leftrightarrow g(x)\in]3;+\infty[$ donc $f(K)=]3;+\infty[$

Exemple2 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2 \end{array}$

Déterminer : $f^{-1}(B)$ avec $B=[-1;4]$

Solution :

$f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}/\ f(x)\in B\}=\{x\in\mathbb{R}/-1\le f(x)\le 4\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/-1\le x^2\le 4\}=\{x\in\mathbb{R}/\,0\le x^2\le 4\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/-2\le x\le 2\}=[-2;2]$ donc $f^{-1}(B)=[-2;2]$

Exemple3 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \cos x \end{array}$

Déterminer : $f^{-1}(D)$ avec $D=]1;2]$

Solution :

$f^{-1}(D)=\{x\in\mathbb{R}/\ f(x)\in D\}=\{x\in\mathbb{R}/1\prec f(x)\le 2\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/1\prec\cos x\le 2\}=\varnothing$ car

$\forall x\in\mathbb{R}/-1\le\cos x\le 1$ donc $f^{-1}(D)=\varnothing$

Exercice 24:

Soit g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{3}{1+x^2}$ déterminer $f-1([1,2])$ $f^{-1}([1;2])$

4) Restriction ; Prolongement d'une application

Activité 1: Soit l'application :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 3|1-x^2|+x$ Ecrire l'expression de f sur $[-1,1]$

Activité 2 : Soit l'application

$g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto \dfrac{3x+1}{x-1}$

1- g est-elle bijective ?

2- A partir de g, définir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Définition : Soit f une application de E dans F

Soit A une partie de E, l'application définie de A vers F, qui associe à tout élément x de A l'élément $f(x)$, s'appelle la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'ensemble $\boldsymbol{A}$.

Soit Γ un ensemble tel que $E\subset\Gamma$, l'application définie de Γ vers F, qui associe à tout élément x de E l'élément $f(x)$, s'appelle un prolongement de $\boldsymbol{f}$ sur l'ensemble $\boldsymbol{\Gamma}$.

Exemple1 : soit l'application : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{x^2-2x+1}$

Déterminer la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;1]$

Solution : $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

Si $x\in]-\infty;1]$ alors : $f(x)=-(x-1)=-x+1$

Donc : la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;1]$ est l'application $g:]-\infty;1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -x+1$

Exemple2 : soit l'application : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2x-|x|+3$

Déterminer la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;0]$

Solution : $f(x)=2x-|x|+3$

Si $x\in]-\infty;0]$ alors : $f(x)=2x+x+3=3x+3$

Donc : la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;0]$ est l'application $g:]-\infty;0]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 3x+3$

Exemple3 : soit les applications :

$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2|x|-x$

Est-ce que g est un prolongement de $\boldsymbol{f}$?

Solution : $g(x)=2|x|-x=x$ Si $x\in\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+\subset\mathbb{R}$

Donc : g est un prolongement de $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbb{R}$

7) La partie entière d'un réel.

Théorème : On admet la proposition suivante :

$(\forall x\in\mathbb{R})(\exists!k\in\mathbb{Z})(k\le x<k+1)$.

Définition : L'entier relatif k qui vérifie le théorème précédent

S'appelle la partie entière du réel $\boldsymbol{x}$

on le note $[x]$ ou $E(x)$.

L'application qui lie chaque élément x de $\mathbb{R}$ par $E(x)$ dans $\mathbb{Z}$ s'appelle l'application partie entière.

Exemple : $E(\sqrt{2})=1$ $E(\sqrt{2})=1$; $E(\pi)=3$

$E(-\pi)=-4$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\left(E\left(\dfrac{1}{n}\right)=0\right)$

et $(\forall k\in\mathbb{Z})(E(k)=k)$

Exercices25 : 1) Montrer que :

$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall m\in\mathbb{Z})(E(m+x)=m+E(x))$.

2) Vérifier par un contre-exemple que :

$E(x+y)\neq E(x)+E(y)$

3) Soit l'application $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto E(3x+1)+x$

1- Vérifier que h n'est pas injective.

2- Donner la restriction de h sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{1}{3}\right[$.

3- Déterminer : $h^{-1}\{4\}$ et $h^{-1}\{2\}$; h est-elle surjective ?.

8) Composition de deux applications.

Activité : Soient les deux applications :

$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ et $g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{x}{x-1}$

1- Déterminer $f(g(3))$; $f(g(-1))$ $g(f(3))$

2- Donner la condition sur x pour que le réel $g(f(x))$ existe.

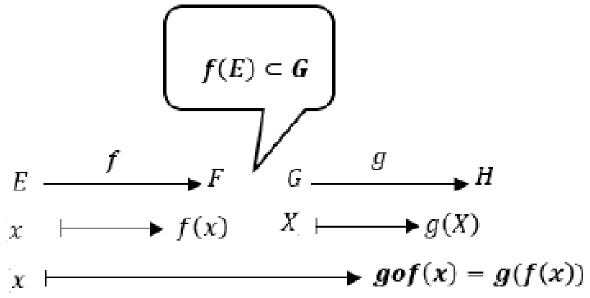
3- Donner la condition sur x pour que le réel $f(g(x))$ existe.

4- Déterminer les application fog et gof.

Définition : Soient f une application de E dans F et g une application de G dans H tel que : $\boldsymbol{f(E)\subset G}$, l'application h définie de E vers H par pour tout x dans E, $h(x)=g(f(x))$ s'appelle la composition des deux applications f et g et se note gof.

$(\forall \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{E})\ (\boldsymbol{gof(x)=g(f(x))})$

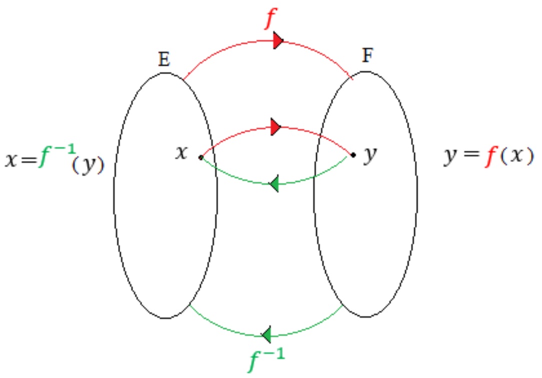
On peut représenter la composition par :



Propriété :
1) La composition de deux applications injectives est une application injective
2) La composition de deux applications surjectives est une application surjective
3)La composition de deux bijections f et g est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Propriété : 1)La composition des applications est associative : $(fog)oh = fo(goh)$
2) La composition des applications n'est pas commutative : $fog \neq gof$

Propriété :
Si f est une bijection de E dans F et $f-1$ sa bijection réciproque :
1) $(\forall x \in E)$ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ $f^{-1} \circ f$ s'appelle l'identité de $\boldsymbol{E}$ et s note Id_E
2° $(\forall x \in F)$ $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $f \circ f^{-1}$ s'appelle l'identité de $\boldsymbol{F}$ et s note Id_F
Si $E = F$ alors : $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_E$



Exemple : soit l'application : $h : \mathbb{R}^+ \to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[$
$x \mapsto x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$

1)Ecrire l'application h comme La composée de deux applications f et g : $h = g \circ f$
2)a) Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque
b) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque
c) en déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) $h(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} = x - \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2$

Donc : $h = g \circ f$ avec :

$f : \mathbb{R}^+ \to \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $g : \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[$
$x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{2}$ $\quad x \mapsto x^2$

2)a) f est une bijection en effet :
soient $y \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$
Resolvons l'équation : $f(x) = y$
$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2y-1}{2}$$
Or $y \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ donc $2y - 1 \geq 0$ donc $x = \left(\frac{2y-1}{2}\right)^2$
donc $x = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$ Puisque l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution
donc :f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ .et

$f^{-1} : \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

2)b) g est une bijection de $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ vers $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ en et
: $g^{-1} : \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[$
$x \mapsto \sqrt{x}$

c) h est la composée de deux bijections f et g
donc h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

Et $\forall x \in \mathbb{R}^+$:
$$h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2$$

Donc : la bijection réciproque h^{-1} de h est
$h^{-1} : \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2$

Exercice26 : soient les applications :

$f:]1;+\infty[\to]1;+\infty[$ et $g:]1;+\infty[\to]1;+\infty[$

$x\mapsto 1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}$ et $x\mapsto\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2$

1)Déterminer : $f([2;4[)$ et $g^{-1}(\{9\})$

2)Montrer que f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

3)a)vérifier que : $\forall x\in]1;+\infty[: g(x)=(f(x))^2$

3)b)en déduire que : g est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1)

$f([2;4[)=\{f(x)/x\in[2;4[\}=\{f(x)/2\le x\prec 4\}$

$=\{f(x)/\sqrt{2}-1\le\sqrt{x}-1\prec 1\}=\left\{f(x)/1\prec\frac{1}{\sqrt{x}-1}\le\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}$

$=\{f(x)/3\prec f(x)\le 3+2\sqrt{2}\}$

Donc : $f([2;4[)=]3;3+2\sqrt{2}]$

$g^{-1}(\{9\})=\{x\in]1;+\infty[/g(x)\in\{9\}\}=\{x\in]1;+\infty[/g(x)=9\}$

$g^{-1}(\{9\})=\{x\succ 1/\sqrt{x}=2\}=\{4\}$

2)montrons que f est injective ?

soient $x_1\in]1;+\infty[$ et $x_2\in]1;+\infty[$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 1+\frac{2}{\sqrt{x_1}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{x_2}-1}$

$\Rightarrow\sqrt{x_1}-1=\sqrt{x_2}-1\Rightarrow\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$

donc f est injective

Montrons que f est surjective ?

$\forall y\in]1;+\infty[\ y=f(x)\Leftrightarrow x=\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$

Et on a :

$\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2-1=\left(\frac{y+1}{y-1}-1\right)\left(\frac{y+1}{y-1}+1\right)=\frac{4y}{(y-1)^2}$

Donc : $\forall y\in]1;+\infty[\ \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2\succ 1$ donc :

$(\forall y\in]1;+\infty[)(\exists x\in]1;+\infty[)/\ x=\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$ et $y=f(x)$

Donc : que f est surjective de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$

Détermination de sa bijection réciproque ?

$\begin{cases}f(y)=x\\ y\in]1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f^{-1}(x)=y\\ y\in]1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

$f^{-1}:]1;+\infty[\to]1;+\infty[$

Donc : $x\mapsto\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

3)a)vérifier que : $\forall x\in]1;+\infty[$:

$(f(x))^2=\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)^2=g(x)$

3)b)on a : $g=h\circ f$ avec $h(x)=x^2\ \forall x\in]1;+\infty[$:

Et puisque les applications f et h sont des bijections de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ alors $g=h\circ f$ est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$

et on a :

$g^{-1}(x)=(h\circ f)^{-1}(x)=f^{-1}\circ h^{-1}(x)$

$=f^{-1}(h^{-1}(x))=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2=g(x)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

I) ACTIVITES ET RAPPELLES

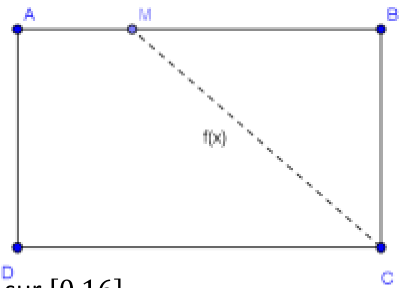
1.1 Ensemble de définition

Activités 1:

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes définies de ℝ dans ℝ :

1. $f(x) = \frac{2\sqrt{x+1}}{3x^2+x-4}$
2. $g(x) = \frac{\sqrt{2x+1}+3x}{\sqrt{x-x^2}}$
3. $h(x) = \frac{tanx}{2sinx+1}$
4. $k(x) = \frac{3x+1}{x-E(x)}$
5. $u(x) = \sqrt{E(x) - x}$
6. $v(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}$.

Activité 2 :



Soit $ABCD$ un rectangle tel que : $AB = 5cm$ et $BC = 3cm$

M un point qui part de A et se déplace sans arrêt sur $ABCD$; considérons $f(x)$ la distance MC.

1- Calculer : $f(0), f(5), f(13)$ et $f(16)$.

2- a) Déterminer graphiquement les variation de f sur $[0,16]$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,16]$.

c) Déterminer –suivant le tableau de variation- les extremums de la fonction f sur $[0,16]$.

3- Montrer que la restriction de f sur des intervalles de $[0,16]$, sont des fonctions affines et déterminer ses expressions.

4- Ecrire les expressions de $[0,5]$ et sur $[13,16]$.

5- a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(f(x+16) = f(x)$

b) Déterminer $f(100), f(1000)$ et $f(2017)$.

Activité 3 :

Soit $$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2+1}{|x|-1} \end{aligned}$$

1- Déterminer $\mathcal{D}_f$.

2- Etudier la parité de f.

3- Donner la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$.

4- Déterminer les variations de f sur $[0,1[$ sur $]1;\ \ 1+\sqrt{2}]$ et sur $[1+\sqrt{2}, +\infty[$.

5- Dresser le tableau de variation de f sur ℝ.

II) NOTIONS DE BASE

1) Ensemble de définition

Définition :(fonction)

> On appelle **fonction numérique à variable réel** toute relation d'une partie E de ℝ vers ℝ tel que chaque élément x de E à **au plus une image dans ℝ.**
> Si $f(x) = y$ alors :
> - y est l'image de x par la fonction f
> - x est l'antécédent de y par la fonction f.

<u>Définition :</u>(Ensemble de définition d'une fonction)

Soit f une fonction numérique à variable réel de E dans $\mathbb{R}$, les éléments de E qui ont une image par f forment un ensemble qu'on appelle ensemble de définition de f et on le note :$\mathcal{D}_f$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_f = \{x \in E / f(x) \in \mathbb{R}\}}$$

<u>Exercice :</u>

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x - \sqrt{x+1}}) \end{aligned}$$

<u>Remarque :</u>

Si f est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f$, l'application définie de $\mathcal{D}_f$ vers $\mathbb{R}$ s'appelle **l'application associée à la fonction f.**

2) Représentation graphique d'une fonction.

<u>Définition :</u>(Graphe d'une fonction)

Soit f une fonction numérique à variable réel, **le graphe de la fonction f** est l'ensemble des couples $(x, f(x))$ tels que $x \in D_f$; on le note : $\mathcal{G}_f$.

$$\boldsymbol{\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) / \ x \in D_f\}}$$

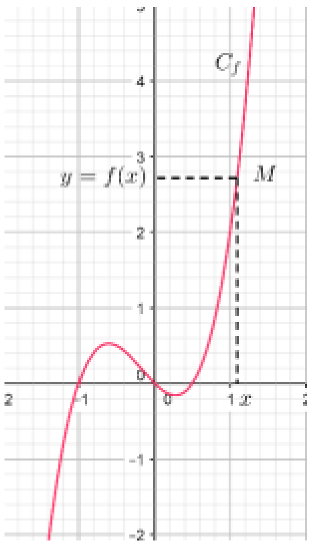
Si le plan est rapporté à un repère (souvent orthogonal), chaque couple du graphe de f peut être représenté par un point M, l'ensemble des points ainsi définie forme une **courbe** dans le plan qu'on appelle **la courbe représentative de la fonction f,** ou encore **la représentation graphique de la fonction f** on la note par **:$\mathcal{C}_f$**

<u>Définition :</u>

Le plan étant rapporté à un repère $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la représentation graphique de la fonction f est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ tels que $x \in D_f$.

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_f = \{M(x, f(x)) / \ x \in D_f\}}$$

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

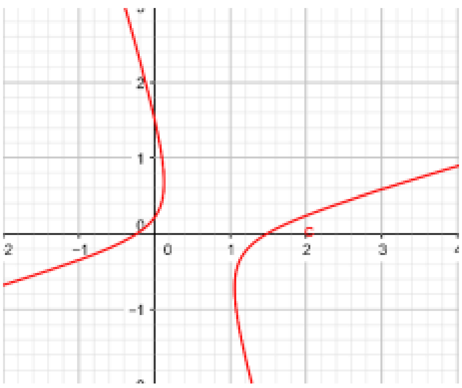


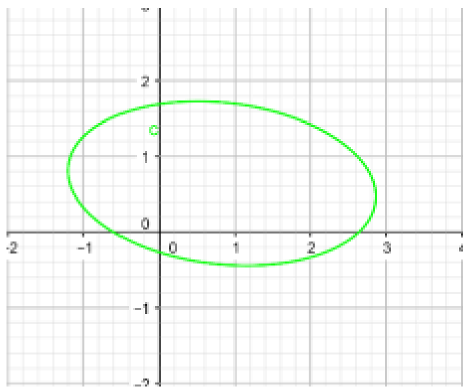
<u>Remarque :</u>

Pour qu'une courbe dans le plan soit une courbe d'une fonction numérique à variable réelle il faut et il suffit que **chaque parallèle à l'axe des ordonnées coupe cette courbe en au plus un point.**

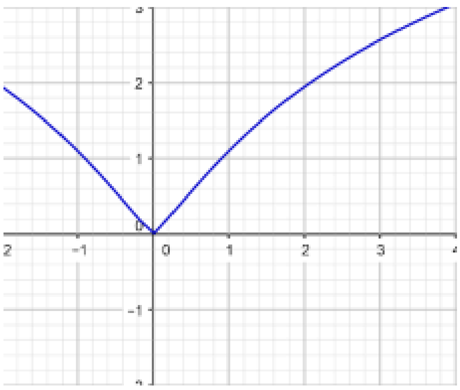
Exemples :

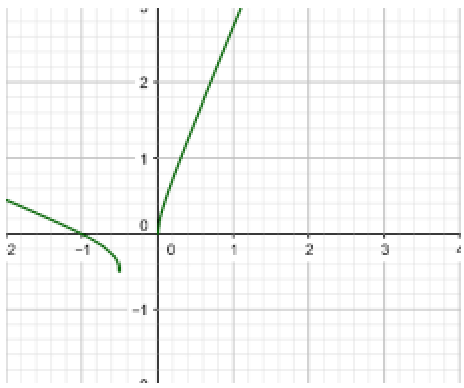
Les courbes suivantes ne sont pas les courbes des fonctions numériques à variable réelle.





Les courbes suivantes sont les courbes des fonctions numériques à variable réelle.





III) FONCTIONS : PAIRE ; IMPAIRE ; PERIODIQUE

1)Activités :

Activité :

Soit $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\longmapsto 3x-E\left(3x+\frac{1}{2}\right)\end{array}$ où E désigne la partie entière.

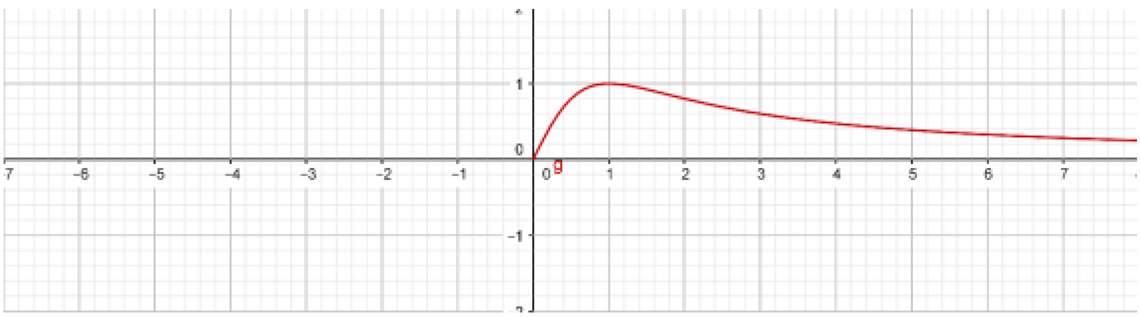
1- a) Supposons qu'il existe un réel T qui vérifie (P): $(\forall x\in\mathbb{R})(f(x+T)=f(x)$; montrer que $3T\in\mathbb{Z}$.

b) En déduire la valeur p du plus petit réel strictement positif qui vérifie (P)

2- Inversement pour la valeur p trouvée en 1-b) : montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})(f(x+p)=f(x))$

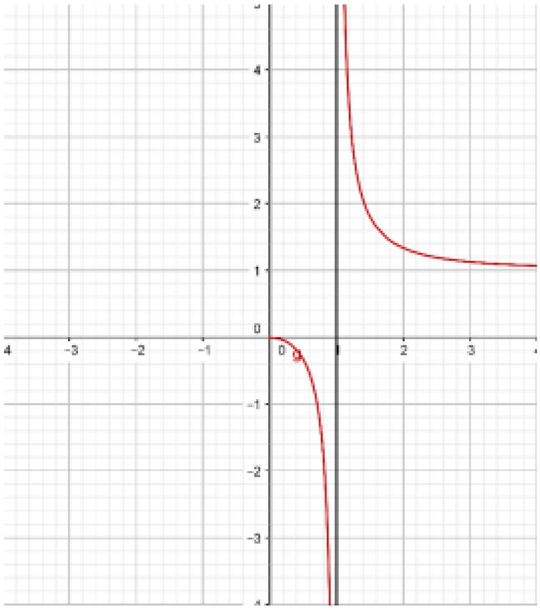
Activité 2 :

Compléter la courbe ci-dessous de la fonction$h$ sachant que : $h(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.



Activité 3 :

La courbe ci-contre est une partie de la courbe de la fonction définie par : $h(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$



1- Déterminer l'ensemble définition de la fonction h

2- Déterminer la nature de h.

3- Compléter la courbe C_h

2) Fonction paires, fonctions impaires

2.1 Fonction paire :

Définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f, on dit que la fonction f est paire si :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$
- $(\forall x \in D_f)(f(-x) = f(x))$

Propriété :

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**

Preuve : (en exercice)

2.2 Fonctions impaire :

Définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f, on dit que la fonction f est impaire si :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$
- $(\forall x \in D_f)(f(-x) = -f(x))$

Propriété :

La courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'origine du repère.**

Preuve : (en exercice).

3) Fonctions périodiques :

Définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f, on dit que la fonction f est **périodique** s'il existe un réel T non nul qui vérifie :

- $(\forall x \in \mathbb{R})\left(x \in D_f \Rightarrow \begin{cases} x+T \in D_f \\ x-T \in D_f \end{cases}\right)$
- $(\forall x \in D_f)(f(x+T) = f(x))$

Tout réel T qui vérifie la définition s'appelle **une période de la fonction f.**

Le plus petit réel p **strictement positif** qui vérifie la définition s'appelle **la période de la fonction f.**

Exemples :

- Dans l'activité précédente : $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x - E\left(3x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$ f est périodique de période $\frac{1}{3}$
- Soit la fonction $\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{sin(2x)}{cos(2x)+1} \end{aligned}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

2- Montrer que la fonction g est périodique et déterminer sa période.

Propriété :

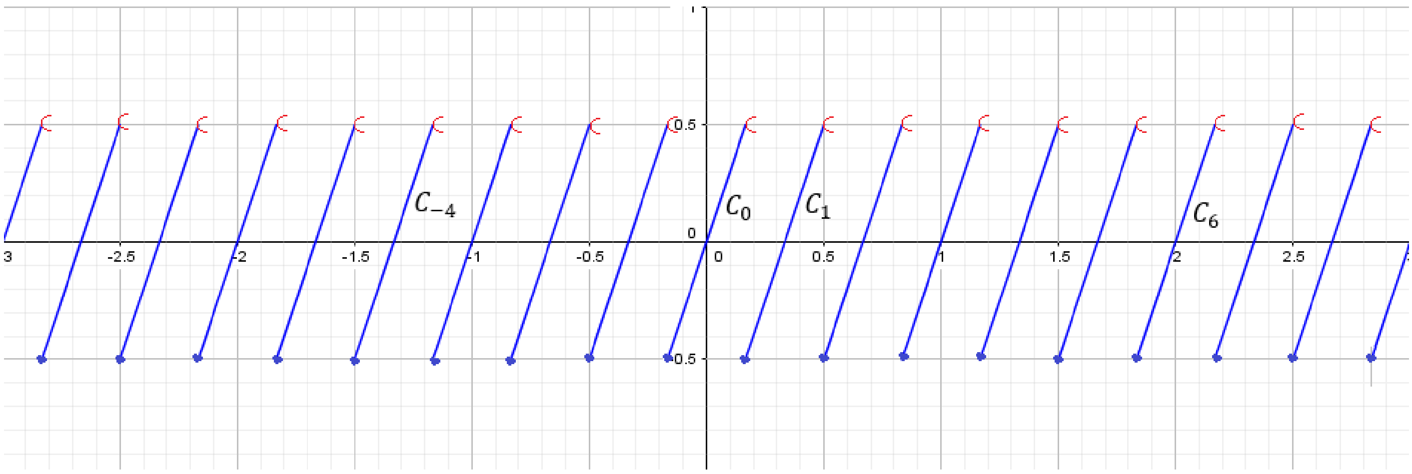
Si f est une fonction périodique de période T alors pour tout k dans $\mathbb{Z}$, kT est une période de f.

Exercice : Démontrer par récurrence sur k la propriété précédente.

Envisager deux cas : $k = n$ et $k = -n$ où n est un entier naturel.

Courbe d'une fonction périodique :

Activité : La courbe ci-dessous est la courbe de la fonction $f(x) = 3x - E\left(3x + \frac{1}{2}\right)$ qui est périodique de période $\frac{1}{3}$



C_k est la courbe représentative de la restriction de la fonction f sur $D_k = [\frac{-1}{6} + k \times \frac{1}{3} ; \frac{1}{6} + k \times \frac{1}{3}[$

1- Quelle est la longueur de D_k.

2- Déterminer graphiquement les transformations qui transforment C_0 en C_1, en C_6 et $C_{(-4)}$

3- Conjecturer la transformation qui transforme C_0 en C_k.

Théorème :

Soit f une fonction périodique de période p et dont l'ensemble de définition D_f. On pose :

$D_k = [a_0 + kT, a_0 + (k+1)T[\cap D_f$ où a_0 est un élément de D_f et C_k la courbe de la restriction de f sur D_k.

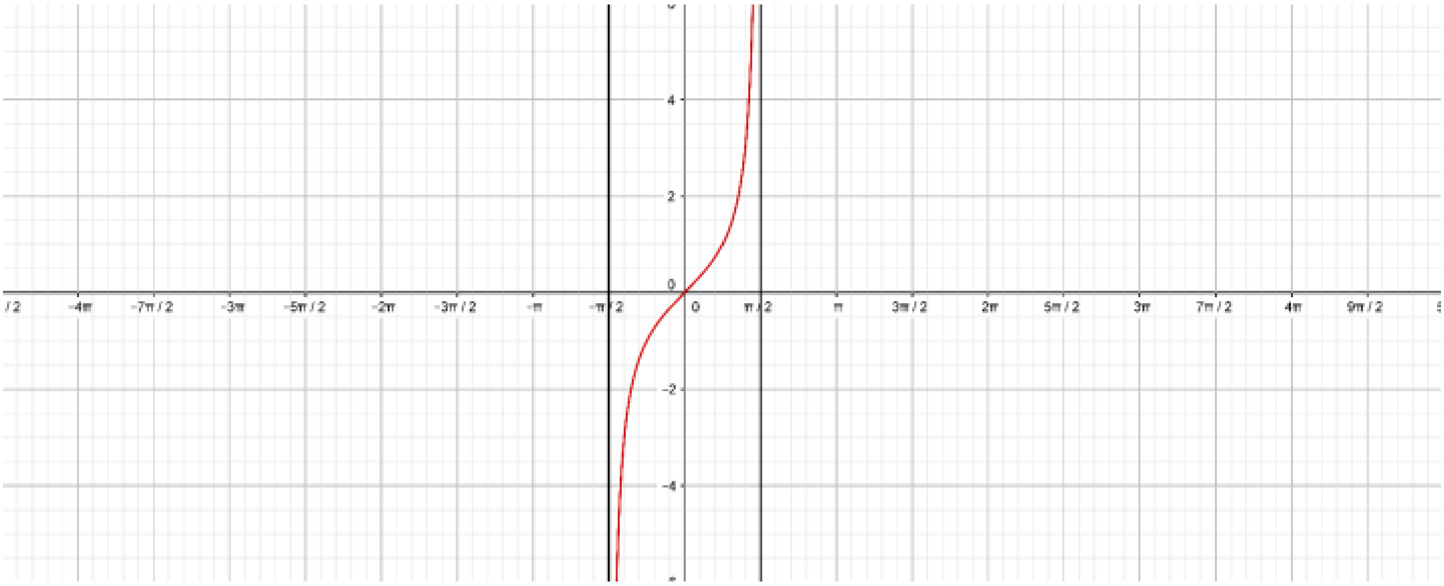
C_k est l'image de C_0 par la translation t_k de vecteur $\vec{u}_k \binom{kT}{0}$

Preuve : En exercice.

Remarque :

La courbe C_f est la réunion de toutes les courbes C_k où $k \in \mathbb{Z}$, $C_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} C_k$

Exercice :



La courbe ci-dessus est la courbe de la restriction de la fonction $\begin{array}{l} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin(2x)}{cos(2x)+1} \end{array}$ sur l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On a montré que cette fonction est périodique de période π, continuer à tracer la courbe C_f sur $[-2\pi, 2\pi]$

IV) FONCTION MAJOREE, MINOREE, BORNEE

1) Activité

Activité 1 : Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

En utilisant la forme canonique du trinôme f, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \geq -1)$

Activité 2 :

Soit la fonction h définie par : $\begin{array}{l} h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{1+|x|} \end{array}$

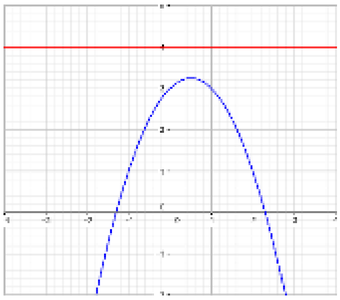
1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h et étudier sa parité.
2- Construire la courbe de la restriction de h sur $[0, +\infty[$, puis construire C_f
3-Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) < 1)$ et que $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) > -1)$
4- La fonction h admet-elle un maximum absolu ?

Définitions

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f, et D une partie de D_f.

- On dit que : f est **majorée** sur D si $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in D)(f(x) \leq M)$
- On dit que : f est **minorée** sur D si $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in D)(f(x) \geq m)$
- On dit que f est **bornée** sur D si elle est majorée et minorée sur D.

Remarque :



- Quand une fonction est majorée sur son ensemble de définition, on se contente de dire qu'elle est majorée.
- Un majorant M d'une fonction f sur D_f n'est pas nécessairement extremum absolu. Dans la courbe ci-contre 4 est un majorant de f mais pas un extremum absolu (Il n' y a pas de réel α qui vérifie que $f(\alpha) = 4$)

Exemple :

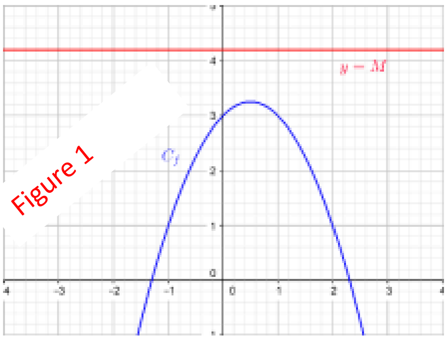
- La fonction h dans l'activité 2 est majorée par 1 et minorée par -1.
- La fonction f dans l'activité 1 est minorée.
  Montrer par absurde que f ne peut pas être majorée.

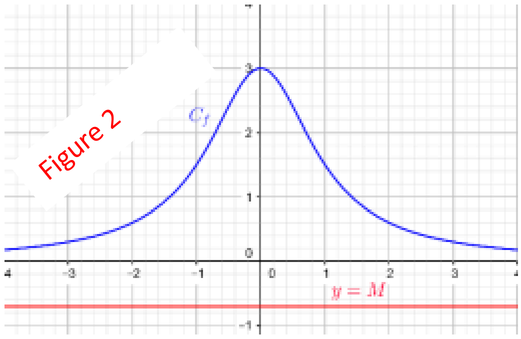
Propriété :

- Si f est une fonction majorée par M alors elle majorée par tout nombre M' tel que : $M' \geq M$.
- Si f est une fonction minorée par m alors elle majorée par tout nombre m' tel que : $m' \leq m$.

Interprétations géométriques :

- La courbe d'une fonction majorée par M est au-dessous de la droite $D: y = M$ (figure 1)
- La courbe d'une fonction minorée par m est au-dessus de la droite $D: y = m$ (figure 2)





Propriété :

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f ; f est bornée si et seulement si : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D_f)(|f(x)| \leq \alpha)$

Preuve : (en exercice)

V) COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS

1) Signe d'une fonction

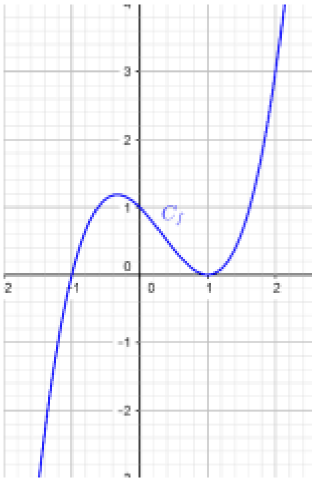
Activité :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 1$
Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \geq 0)$

Définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f, et D une partie de D_f.

- On dit que : f est positive sur D si $(\forall x \in D)(f(x) \geq 0)$.
- On dit que : f est négative sur D si $(\forall x \in D)(f(x) \leq 0)$.



Remarque :

- Si f est positive sur D_f on dit que f est positive et on écrit : $f \geq 0$
- Si f est négative sur D_f on dit que f est négative et on écrit : $f \leq 0$
- Une fonction positive est minorée par 0, par contre une fonction négative est majorée par 0.

Exemple :

Sur la courbe ci-contre la fonction f change de signe :
f est négative sur $]-\infty,-1]$ et positive sur $[-1,+\infty[$

Définition :

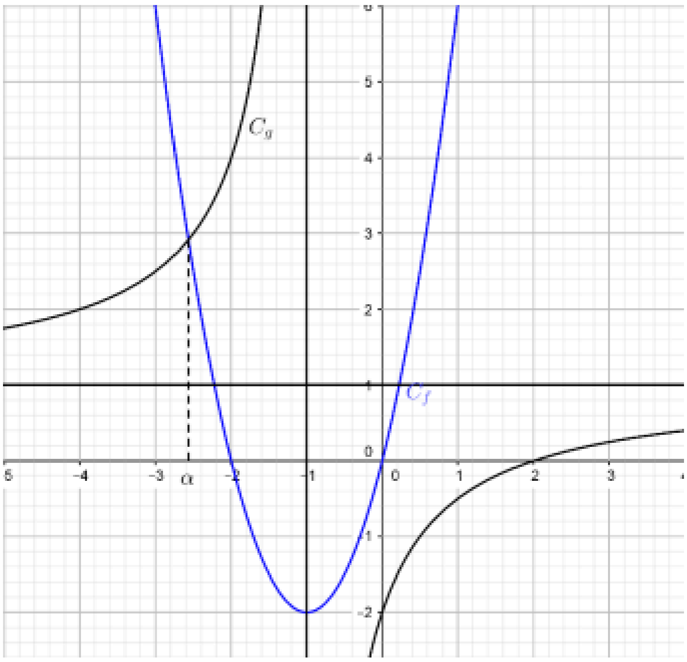
Soient f et g deux fonctions dont les domaines de définitions sont respectivement D_f et D_g et D une partie commune entre D_f et D_g $(D \subset D_f \cap D_g)$

On dit que f et plus grande que g sur D si $(\forall x \in D)(f(x) \geq g(x))$ et on écrit $f \geq g$ sur D

Interprétation géométrique :

Si $f \geq g$ sur D alors C_f est au-dessus de C_g

Exemple :



Sur la figure ci-contre C_f est la courbe de la fonction

$f(x) = 2x^2 + 4x$ et C_g est la courbe représentative de

la fonction $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$

- Sur $[\alpha,-1[$ on a : $g \geq f$.
- Sur $]-\infty,\alpha] \cup]-1,+\infty[$ on a $f \geq g$

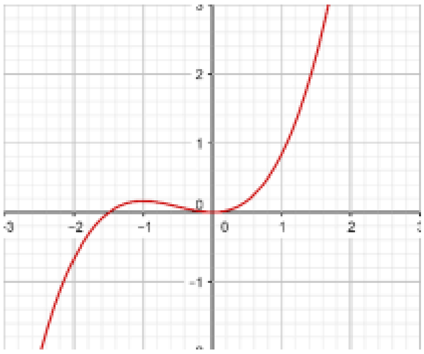
Exercice :

Considérons les fonctions $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \frac{2x}{x-1}$
1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$
2- Construire les courbes C_f et C_g
3- Nous définissons le réel $Sup(a,b)$ par : $Sup(a,b) = a \; si \; a \geq b$.
Soit la fonction h définie par :
$h(x) = \sup(f(x), g(x))$
a) Donner une expression de h en fonction de x
b) Construire la courbe représentative de h.

VI) VARIATION D'UNE FONCTION ET EXTREMUMS

1) Activités et définition.

Activité1 :



A partir de la courbe ci-contre d'une fonction f,

1-Déterminer la monotonie de f sur les intervalles $]-\infty,-1]$; $[-1,0]$ et sur $[0,+\infty[$

2-Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3-Déterminer les extremums de la fonction f et leurs natures.

Activité 2 :

Soit la fonction $\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x^2+x-2| \end{aligned}$

1- Ecrire des expressions de la fonction g sans la valeur absolue.

2- Etudier la monotonie de la fonction g

3- Dresser le tableau de variation de la fonction g.

4- Déterminer les extremums de la fonction f et leurs natures.

Activité 3 :

Soit la fonction $\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2+4x+1 \end{aligned}$

Montrer que la fonction h n'admet pas de maximum absolu.

Définitions :(Monotonie d'une fonction)

Soit f une fonction numérique à variable réelle dont l'ensemble de définition est D_f. I un intervalle de D_f.

- On dit que : f est **croissante** sur I si : $(\forall(a,b)\in I^2)(a\leq b\Rightarrow f(a)\leq f(b))$
- On dit que : f est **strictement croissante** sur I si : $(\forall(a,b)\in I^2)(a< b\Rightarrow f(a)< f(b))$
- On dit que : f est **décroissante** sur I si : $(\forall(a,b)\in I^2)(a\leq b\Rightarrow f(a)\geq f(b))$
- On dit que : f est **strictement décroissante** sur I si : $(\forall(a,b)\in I^2)(a< b\Rightarrow f(a)> f(b))$
- On dit que f est **monotone** sur l'intervalle I s'il est croissante ou bien décroissante sur I.
- On dit que f est **strictement monotone** sur l'intervalle I s'il est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur I.

2) Taux de variation d'une fonction

2.1 Définition

Définition :

Soit f une fonction dont D_f est son ensemble de définition ; I un intervalle inclus dans D_f. a et b deux éléments distincts de I ; le nombre $T_{(a,b)}=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ s'appelle **le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b.**

Théorème :

Soit f une fonction dont D_f est son ensemble de définition ; I un intervalle inclus dans D_f.

- la fonction f est **croissante sur I** si et seulement si $(\forall(a,b)\in I^2)(a\neq b\Rightarrow T_{(a,b)}\geq 0)$
- la fonction f est **décroissante sur I** si et seulement si $(\forall(a,b)\in I^2)(a\neq b\Rightarrow T_{(a,b)}\leq 0)$

Preuve : En exercice

Exercices :

1- Etudier la monotonie de la fonction $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}$.
2- Etudier la monotonie de la fonction $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$

2.2 Monotonie et parité :

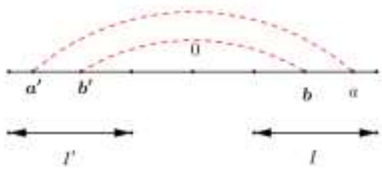
Propriété :

- Soit f une fonction **paire** dont le domaine de définition est D_f, I un intervalle dans $D_f \cap \mathbb{R}^+$, et I' son symétrique par rapport à 0.
  - si f est croissante sur I alors elle est décroissante sur I'
  - si f est décroissante sur I alors elle est croissante sur I'
- Soit f une fonction **impaire** dont le domaine de définition est D_f, I un intervalle dans $D_f \cap \mathbb{R}^+$, et I' son symétrique par rapport à 0.
  - si f est croissante sur I alors elle est croissante sur I'
  - si f est décroissante sur I alors elle est décroissante sur I'

Preuve :

On suppose que f est paire : soit I un intervalle dans $D_f \cap \mathbb{R}^+$, et I' son symétrique par rapport à 0.

Soient a' et b' deux éléments de I' alors il existe a et b dans I tels que $a' = -a$ et $b' = -b$



$$T_{f_{I'}} = \frac{f(a')-f(b')}{a'-b'} = \frac{f(-a)-f(-b)}{(-a)-(-b)}$$

$$= \frac{f(a)-f(b)}{-(a-b)} \qquad \text{(car } f \text{ est paire)}$$

$$= -T_{f_I}$$

3) Extremums

3.1 Extremums absolues

Activité : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$; Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \leq f(0))$

Définition :

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définitions est D_f

- On dit que f admet un maximum absolu en α si : $(\forall x \in D_f)(f(x) \leq f(\alpha))$. On écrit : $\max\limits_{x \in D_f} f(x) = f(\alpha)$
- On dit que f admet un minimum absolu en α si : $(\forall x \in D_f)(f(x) \geq f(\alpha))$. On écrit : $\min\limits_{x \in D_f} f(x) = f(\alpha)$

Remarque :

Si f admet un maximum absolu en α alors $f(\alpha)$ est un majorant de f.

Si f admet un minimum absolu en α alors $f(\alpha)$ est un minorant de f

3.2 Extremums relatifs

Activité : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$

1- Etudier la parité de la fonction g.
2- Etudier les variations de la fonction g sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$
3- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Définition :

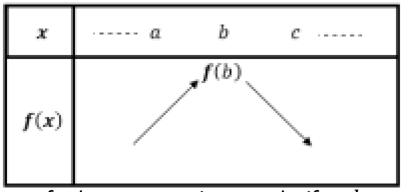
Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définitions est D_f

- On dit que f admet un **maximum relatif** en α s'il existe un **intervalle ouvert inclus dans D_f** et qui contient α tel que : $(\forall x \in I)(f(x) \leq f(\alpha))$.
- On dit que f admet un **minimum relatif** en α s'il existe un **intervalle ouvert inclus dans D_f** et qui contient α tel que : $(\forall x \in I)(f(x) \geq f(\alpha))$.

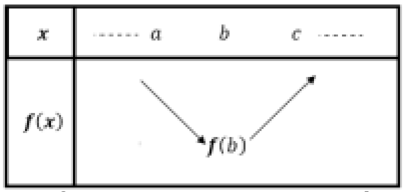
Propriété :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f , a , b et c trois éléments de D_f tels que $a < b < c$ et $[a, c] \subset D_f$

- Si f est croissante sur $[a, b]$ et décroissante sur $[b, c]$ alors f admet **un maximum relatif en b**
- Si f est décroissante sur $[a, b]$ et croissante sur $[b, c]$ alors f admet **un minimum relatif en b**



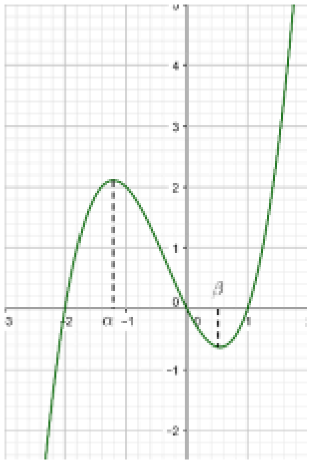
f admet un maximum relatif en b



f admet un minimum relatif en b

Interprétation géométrique :

Sur la figure ci-contre on a :
f admet un maximum relatif en α
et admet un minimum relatif en β



VII) ETUDE DES FONCTIONS USUELLES (RAPPELLES)

1) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Propriété :

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme $(a \neq 0)$

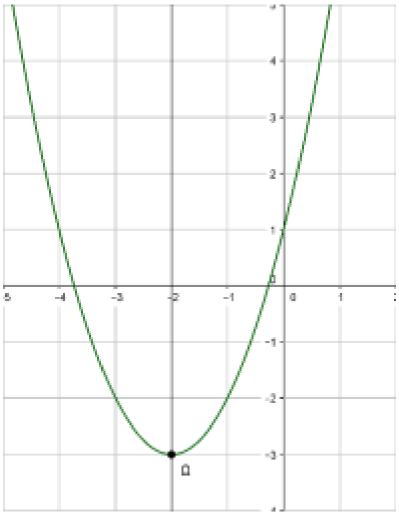
- En posant $\boldsymbol{\alpha = \frac{-b}{2a}}$ et $\boldsymbol{\beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right)}$ on obtient pour tout réel x ; $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ c'est la forme canonique du trinôme $f(x)$.
- La courbe C_f est l'image de la courbe de la fonction $g(x) = ax^2$ par la translation t de vecteur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.
- La courbe C_f dans un repère orthogonal est **une parabole de sommet $\boldsymbol{\Omega(\alpha, \beta)}$ et d'axe la droite $(\boldsymbol{\Delta}) : \boldsymbol{x = \alpha}$**

Les variations de f et sa représentation graphique peut être définies suivant le signe de a comme suite :

En posant $\boldsymbol{\alpha = \frac{-b}{2a}}$ et $\boldsymbol{\beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right)}$

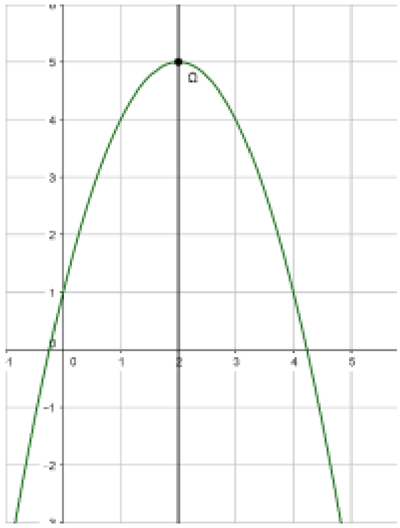
Si $a > 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$



Si $a < 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$



2) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Propriété :

Soit f la fonction homographique définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{-d}{c}\}$ par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

Ils existent trois réels α , β et γ tels que pour tout x dans D_f on a : $f(x) = \beta + \frac{\gamma}{x-\alpha}$

La courbe C_f est l'image de la courbe (Γ) représentative de la fonction $x \to \frac{\gamma}{x}$ par la translation t de vecteur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$. La courbe C_f dans un repère orthogonal est une hyperbole de centre $\Omega(\alpha, \beta)$ et d'asymptotes les droites $(\Delta): x = \frac{-d}{c}$ et $(\Delta'): y = \frac{a}{c}$.

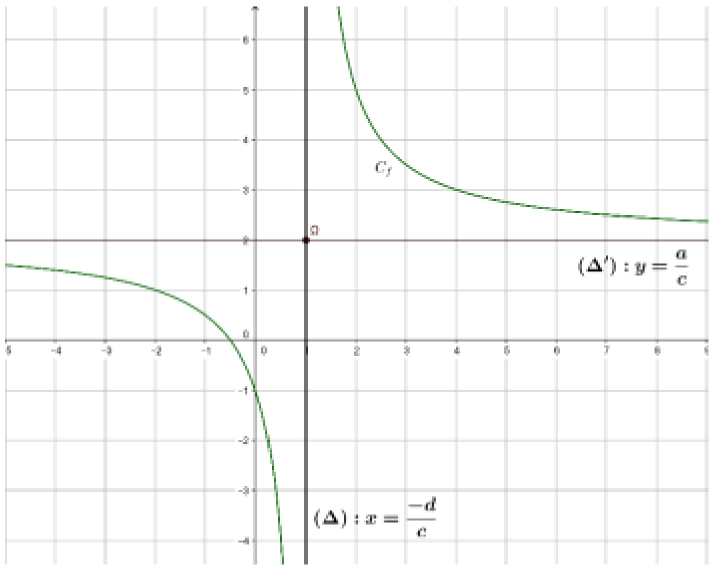
Pour les variations de f on envisage les deux cas suivants :

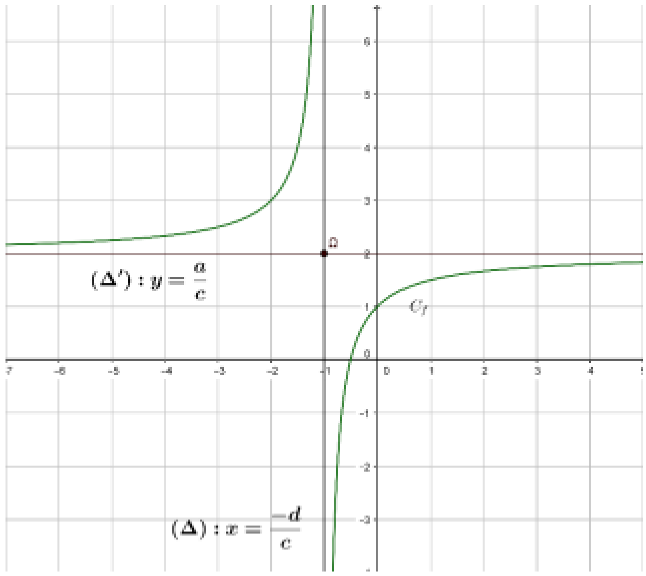
Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{a}{c}$

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{a}{c}$





3) $f(x) = \sqrt{ax+b}$

Activité :

Soit g la fonction définie par : $\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{ax+b} \end{aligned}$ où $a \neq 0$

1- Déterminer suivant les valeurs de a l'ensemble de définition de g.

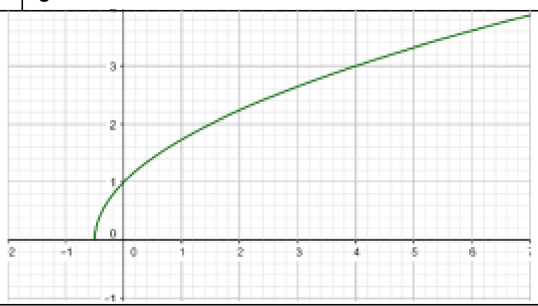
2- Déterminer le taux d'accroissement de la fonction g en deux réels x_1 et x_2 de D_g

3- Dresser suivant les valeurs de a le tableau de variation de la fonction g.

Propriété :

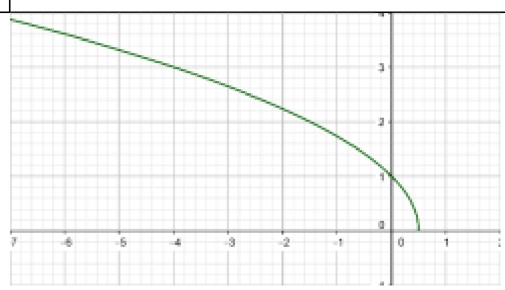
$a > 0$

x	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$h(x)$	0 ↗	$+\infty$



$a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$
$h(x)$	0 ↘	$-\infty$



4) $f(x) = ax^3$

Activité :

Soit h la fonction définie par : $\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^3 \end{aligned}$ où $a \neq 0$

1- Montrer que h est une fonction impaire.

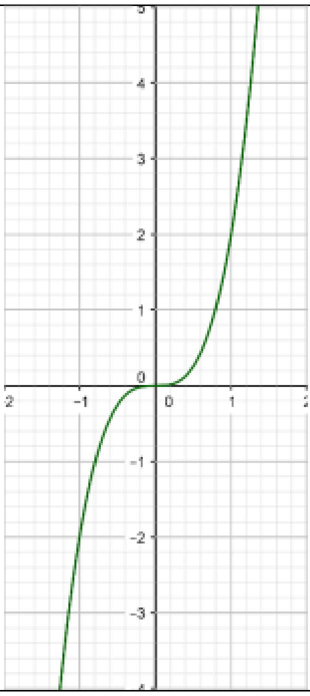
2- Montrer que le signe du taux d'accroissement de h sur $\mathbb{R}^+$ est le signe de a

3- Dresser suivant les valeurs de a le tableau de variation de h

Propriété :

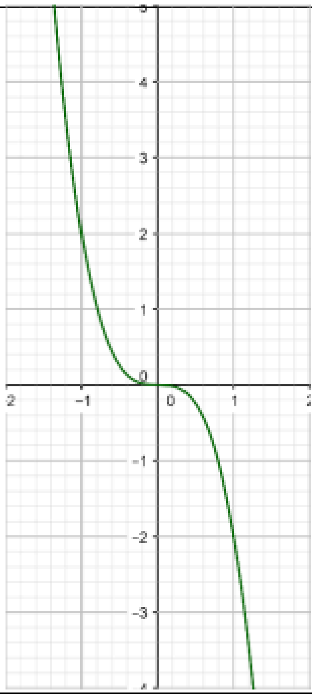
$a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$



$a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$



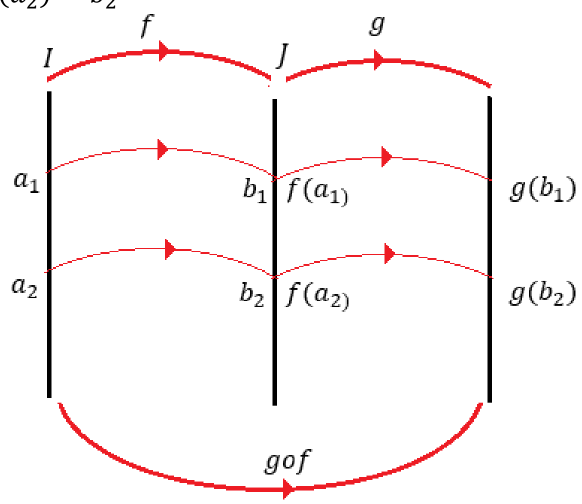
VIII) MONOTONIE DE LA COMPOSITION DE DEUX FONCTION.

Soient f et g deux fonctions dons les ensembles des définitions respectifs D_f et D_g ; I une intervalle de D_f et J un intervalles de D_g tels que : $f(I) = J$

Soient a_1 et a_2 deux éléments de I tels que : $f(a_1) = b_1$ et $f(a_2) = b_2$

On a :

$$\begin{aligned} T_{gof} &= \frac{(gof)(a_1)-(gof)(a_2)}{a_1-a_2} \\ &= \frac{g(f(a_1))-g(f(a_2))}{a_1-a_2} \\ &= \frac{g(b_1)-g(b_2)}{b_1-b_2} \times \frac{b_1-b_2}{a_1-a_2} \\ &= \frac{g(b_1)-g(b_2)}{b_1-b_2} \times \frac{f(a_1)-f(a_2)}{a_1-a_2} \\ &= T_g \times T_f \end{aligned}$$



Propriété :

Soient f et g deux fonctions dons les ensembles des définitions respectifs D_f et D_g ; I un intervalle de D_f et J un intervalles de D_g tels que $f(I) = J$

- Si f est **croissante** sur I et g est **croissante** sur $J = f(I)$ alors gof est **croissante** sur I.
- Si f est **décroissante** sur I et g est **décroissante** sur $J = f(I)$ alors gof est **croissante** sur I.
- Si f est **croissante** sur I et g est **décroissante** sur $J = f(I)$ alors gof est **décroissante** sur I.
- Si f est **décroissante** sur I et g est **croissante** sur $J = f(I)$ alors gof est dé**croissante** sur I.

Exercice 1 :

Soients les fonctions : $\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x+1}{x+1} \end{array}$ et $\begin{array}{l} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{2x+1} \end{array}$ et $h = fog$

1- Exprimer $h(x)$ en fonction de x.

2- Déterminer D_h ensemble de définition de h.

3- Dresser les tableaux de variation de f et g.

4- En déduire les variations de h.

Exercice 2 :

Soit la fonction $\begin{array}{l} u: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \end{array}$

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(u(x) = (vot)(x))$ où $t(x) = -x^2 + 2x$ et $v(x) = x^2 + 2x + 3$

2- Dresser les tableaux de variation de v et t

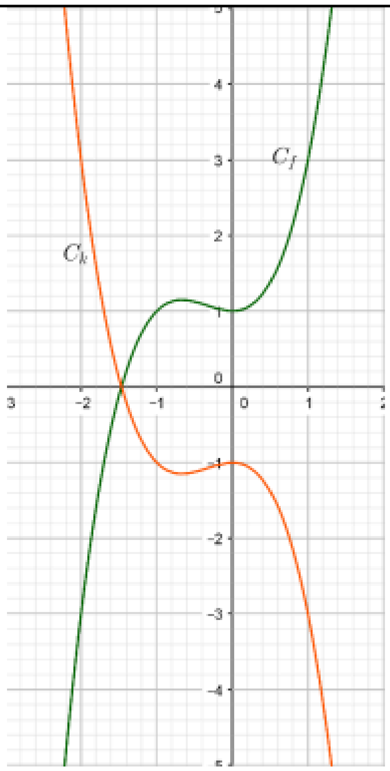
3- En déduire les variations de u.

IX) REMARQUES SUR LES GRAPHES.

1) Nombre de solution de l'équation $f(x) = k$

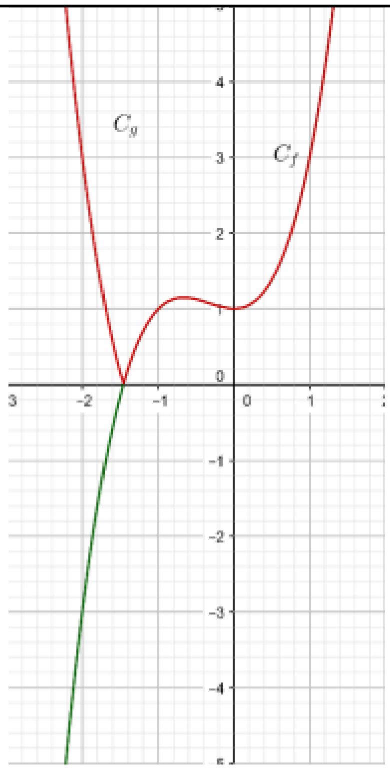
Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f . Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ est le nombre de points d'intersection de la courbe C_f avec la droite $(\Delta): y = k$.

Soit f une fonction numérique dont la courbe représentative C_f



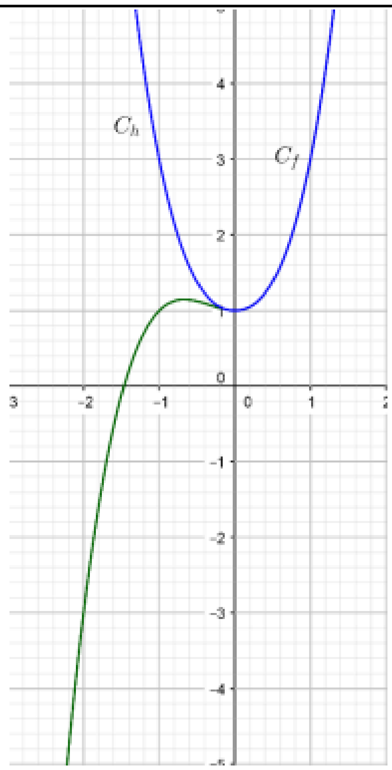
$k(x) = -f(x)$

C_k et C_f sont symétrique par rapport à l'axe (Ox)



$g(x) = |f(x)|$

- Si $f(x) \geq 0$ alors $g(x) = f(x)$ et dans ce cas C_g et C_f seront confondues.
- Si $f(x) \leq 0$ alors $g(x) = -f(x)$ et dans ce cas C_g et C_f seront symétriques par rapport à l'axe (Ox)



$h(x) = f(|x|)$

Si $x \geq 0$ alors

$h(x) = f(x)$ et dans ce cas C_h et C_f sont confondues.

La fonction h etant paire alors C_h est symétrique par rapport à l'axe (Oy)

I. Introduction générale:

Les fonctions usuelles sont des fonctions simples et typiques dont les propriétés géométriques dépendent de leur formes et des leurs paramètres . Dans ce cours nous allons voir quelques unes de ces fonctions , nous citons les fonctions affines , les fonctions polynômes de second degré , les fonctions homographiques, quelques fonctions irrationnellles simples et les fonctions trigonométriques de base.

Pour chacune de ces fonctions f ; on pose : $T_f = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ **tels que x et y deux élèments différents du domaine de définition** D_f **de f .**

On désigne par (C_f) **la coure de la fonction f dans un repère orthonormé** $(O,\ \vec{i},\vec{j})$ **.**

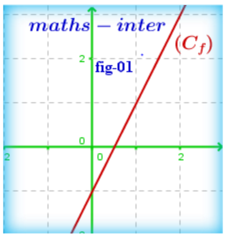
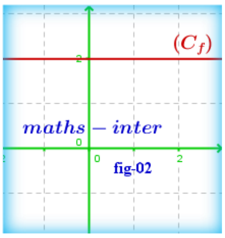
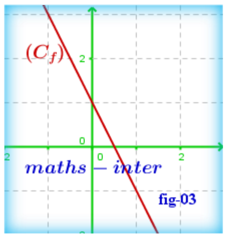
II. La fonction Affine : Cette fonction s'écrit : $f(x)=ax+b$

f étant une fonction polynôme donc son domaine définition est $D_f = IR$ **.**

Le taux d'accroissement est :

$$T_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(ax+b)-(ay+b)}{x-y} = \frac{ax+b-ay-b}{x-y} = \frac{a(x-y)}{x-y} = a$$

Les variations de f dépendent de a , coefficient de la fonction de f , d'où le résumé suivant :

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
Tableau de Variations De La fonction f	$T_f>0$ f croissante sur IR $\begin{array}{c\|c} x & -\infty \qquad +\infty \\ \hline f(x) & \nearrow \end{array}$	$T_f=0$ f constante sur IR $\begin{array}{c\|c} x & -\infty \qquad +\infty \\ \hline f(x) & \rightarrow \end{array}$	$T_f>0$ f décroissante sur IR $\begin{array}{c\|c} x & -\infty \qquad +\infty \\ \hline f(x) & \searrow \end{array}$
Exemple De Représentation graphique	$f(x)=2x-1$ $f(0)=-1$ et $f(1)=1$  	$f(x)=0x+2$ $f(0)=2$ et $f(1)=2$  	$f(x)=-2x+1$ $f(0)=1$ et $f(1)=-1$ 

III. Fonction polynôme de second degré :la fonction s'écrit : $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$

f étant une fonction polynôme donc son domaine définition est $D_f = IR$ **.**

Le taux d'accroissement est :

$$T_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(ax^2+bx+c)-(ay^2+by+c)}{x-y} = \frac{a(x^2-y^2)+b(x-y)}{x-y} = a(x+y)+b$$

d'où $: T_f = a(x+y)+b = a(x+y+\frac{b}{a}) = a\left((x+\frac{b}{2a})+(y+\frac{b}{2a})\right)$

On en déduit que l'expression $\left((x+\frac{b}{2a})+(y+\frac{b}{2a})\right)$ **est négative sur** $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right[$ **et positive sur** $\left]-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[$

Les variations de f dépendent de a , d'où le résumé suivant :

Tableau de Variations De La fonction f

a > 0

$T_f < 0$ sur $\left]-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

$T_f > 0$ sur $\left]-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

D'où le tableau de variations de f sur IR

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↘	$f(-\dfrac{b}{2a})$	↗

(C_f) est une parabole de sommet $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a};f(-\dfrac{b}{2a})\right)$ et orientée vers le haut

a < 0

$T_f < 0$ sur $\left]-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

$T_f > 0$ sur $\left]-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

D'où le tableau de variations de f sur IR

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↗	$f(-\dfrac{b}{2a})$	↘

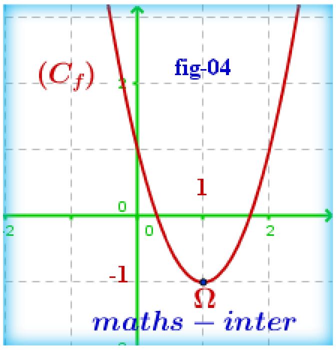
(C_f) est une parabole de sommet $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a};f(-\dfrac{b}{2a})\right)$ et orientée vers le bas

Exemple De Représentation graphique

a > 0

$f(x)=2x^2-4x+1$

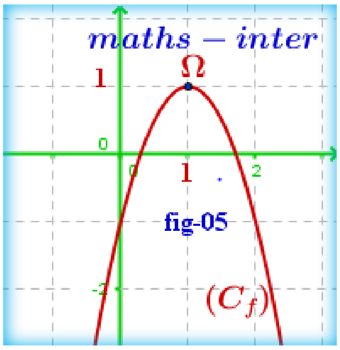
$f(1)=-1$ et $f(0)=1$ et $f(-1)=7$



a < 0

$f(x)=-2x^2+4x-1$

$f(1)=-1$ et $f(0)=1$ et $f(-1)=7$



IV. Fonction homographique :

la fonction s'écrit : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $\Delta=ad-bc\neq 0$

On a $D_f=IR-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}=\left]-\infty;-\dfrac{d}{c}\right[\cup\left]-\dfrac{d}{c};+\infty\right[$

Le taux d'accroissement est : $T_f=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{\dfrac{ax+b}{cx+d}-\dfrac{ay+b}{cy+d}}{x-y}$

Après simplifiactions de calcul, on trouve : $T_f=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)(cy+d)}=\dfrac{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}{(cx+d)(cy+d)}=\dfrac{\Delta}{(cx+d)(cy+d)}$

L'expression $(cx+d)(cy+d)$ est positive sur chacun des intervalles $\left]-\infty;-\dfrac{d}{c}\right[$ et $\left]-\dfrac{d}{c};+\infty\right[$

D'où les variations de f dépendent de $\Delta=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$

Donc si $\Delta>0$, alors f est croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty;-\dfrac{d}{c}\right[$ et $\left]-\dfrac{d}{c};+\infty\right[$

et si $\Delta<0$, alors f est décroissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty;-\dfrac{d}{c}\right[$ et $\left]-\dfrac{d}{c};+\infty\right[$

d'où le résumé :

	$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$	$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$
Tableau de Variations De La fonction f	$T_f > 0$ sur les deux intervalles: $\left]-\infty ; -\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c} ; +\infty\right[$ D'où le tableau de variations de f sur IR	$T_f < 0$ sur les deux intervalles: $\left]-\infty ; -\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c} ; +\infty\right[$ D'où le tableau de variations de f sur IR

Tableau ($\Delta > 0$) :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)	↗	‖	↗

Tableau ($\Delta < 0$) :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

(C_f) est un e hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c} ; \frac{a}{c}\right)$

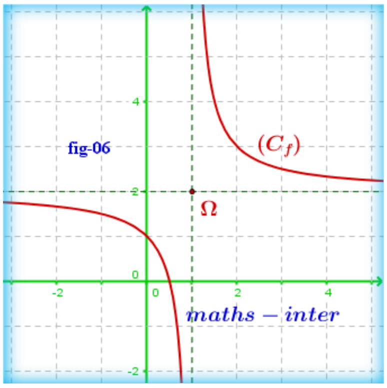
Et d'asymptôtes: $(\Delta_1) : x = \frac{a}{c}$ et $(\Delta_2) : y = -\frac{d}{c}$

Exemple De Représentation graphique

$\Delta > 0$:

$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

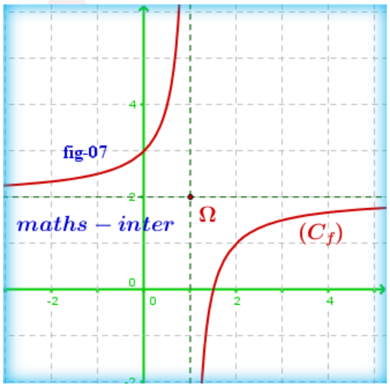
$f(3) = 5/2$ et $f(2) = 3$ et $f(0) = 1$ et $f(-1) = 3/2$



$\Delta < 0$:

$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

$f(3) = 3/2$ et $f(2) = 1$ et $f(0) = 3$ et $f(-1) = 5/2$



V. La fonction polynôme de 3ème degré ax^3 : f s'écrit : $f(x) = ax^3$ a $a \neq 0$

f étant une fonction polynôme donc son domaine définition est $D_f = IR$.
Le taux d'accroissement est :

$$T_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{ax^3 - ay^3}{x-y} = \frac{a(x^3-y^3)}{x-y} = \frac{a(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y}$$

d'où $: T_f = a(x^2+xy+y^2)$

On en déduit que l'expression x^2+xy+y^2 est positive sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$
Les variations de f dépendent de a , d'où le résumé suivant :

	$a > 0$	$a < 0$
Tableau de Variations De	$T_f > 0$ sur IR D'où le tableau de variations de f sur IR	$T_f > 0$ sur IR ومنه جدول تغيرات الدالة f على IR

x	$-\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$

La fonction f

$f(x)$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$

On remarque que (C_f) est sumétrique Par rapport à l'origine du repère car f est une fonction impaire

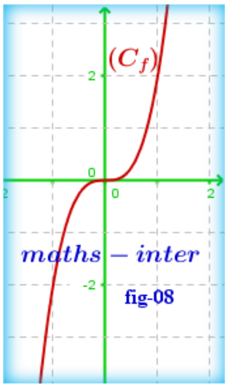
$f(x)$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$

On remarque que (C_f) est sumétrique Par rapport à l'origine du repère car f est une fonction impaire

Exemple De Représentation graphique

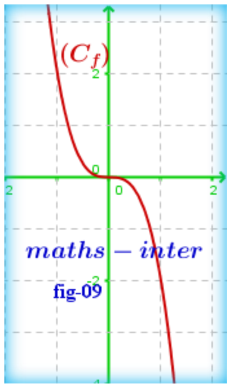
$f(x) = 2x^3$

$f(1) = 2$ et $f(0) = 0$ et $f(-1) = -2$



$f(x) = -2x^3$

$f(1) = -2$ et $f(0) = 0$ et $f(-1) = 2$



VI. Fonctions irrationnelles simples : $\pm\sqrt{x-a}$ و $\pm\sqrt{a-x}$:

1) Considèrons les fonctions : $f_1(x) = \sqrt{x-a}$ **et** $f_2(x) = -\sqrt{x-a}$ **avec** $a \in IR$

On a $D_{f_1} = D_{f_2} = [a;\ +\infty[$

Le taux d'accroissement de f_1 **est:**

$$T_{f_1} = \frac{f_1(x)-f_1(y)}{x-y} = \frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{y-a}}{x-y} = \frac{(x-y)}{(x-y)(\sqrt{x-a}+\sqrt{y-a})} = \frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{y-a}} > 0$$

d'où :

f_1 **est croissante sur** $[a;\ +\infty[$ **, et puisque** $f_2(x) = -f_1(x)$ **alors** f_2 **est décroissante sur** $[a;\ +\infty[$

2) Considèrons les fonctions : $g_1(x) = \sqrt{a-x}$ **et** $g_2(x) = -\sqrt{a-x}$ **avec** $a \in IR$

On a $D_{g_1} = D_{g_2} =]-\infty;\ a]$

Le taux d'accroissement de g_1 **est:**

$$T_{g_1} = \frac{g_1(x)-g_1(y)}{x-y} = \frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{a-y}}{x-y} = \frac{-(x-y)}{(x-y)(\sqrt{a-x}+\sqrt{a-y})} = \frac{-1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{y-a}} < 0$$

d'où :

g_1 **est décroissante sur** $]-\infty;\ a]$ **, et puisque** $g_2(x) = -g_1(x)$ **alors** g_2 **est croissante sur** $]-\infty;\ a]$

D'où le résumé suivant :

$f_1(x) = \sqrt{x-a}$ **et** $f_2(x) = -\sqrt{x-a}$

Tableau de Variations

Le tableau de variations de f_1 **sur** $[a;\ +\infty[$

x	a $\quad$ $+\infty$
$f_1(x)$	$\nearrow$

Le tableau de variations de f_2 **sur** $[a;\ +\infty[$

$g_1(x) = \sqrt{a-x}$ **et** $g_2(x) = -\sqrt{a-x}$

Le tableau de variations de g_1 **sur** $[a;\ +\infty[$

x	$-\infty$ $\quad$ a
$g_1(x)$	$\searrow$

Le tableau de variations de g_2 **sur** $[a;\ +\infty[$

De La fonction f

x	a	$+\infty$
$f_2(x)$	$\searrow$	

On remarque $(C_{f_1}) \cup (C_{f_2})$ est une parabole de sommet $A(a\,;\,0)$
D'axe (Ox) et orientée vers la droite

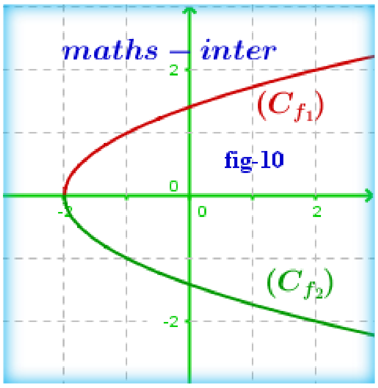
x	$-\infty$	a
$g_2(x)$	$\nearrow$	

On remarque $(C_{g_1}) \cup (C_{g_2})$ est une parabole de sommet $A(a\,;\,0)$
D'axe (Ox) et orientée vers la gauche

Exemple De Représentation graphique

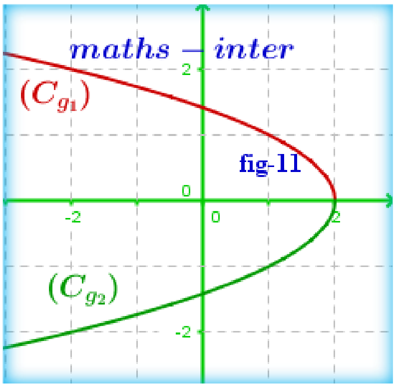
$f_1(x) = \sqrt{x-a}$ et $f_2(x) = -\sqrt{x-a}$

$f(1) = 2$ et $f(0) = 0$ et $f(-1) = -2$



$g_1(x) = \sqrt{a-x}$ et $g_2(x) = -\sqrt{a-x}$

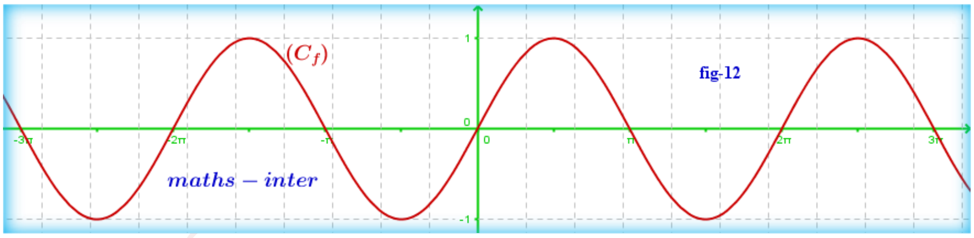
$f(1) = -2$ et $f(0) = 0$ et $f(-1) = 2$



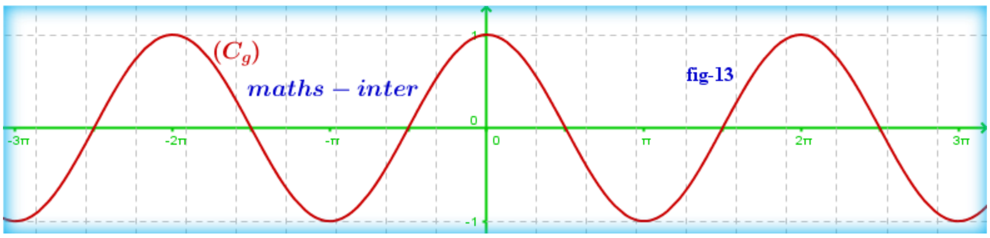
VII. Les fonctions trigonométriques :

Considérons les fonctions f ; g et h tels que : $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos x$ et $h(x) = \tan x$
Les courbes de ces fonctions sont tracées, en se basant sur le cercle trigonométrique :

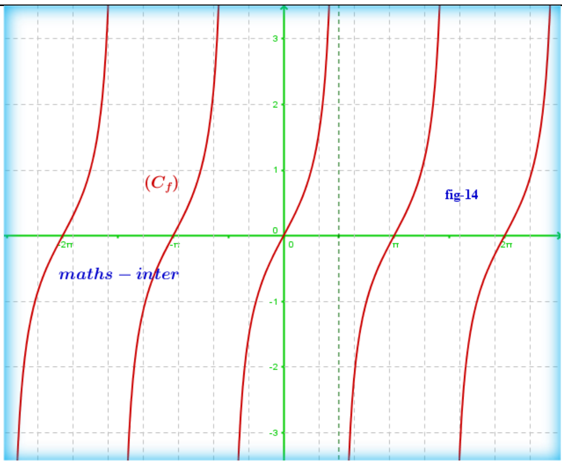
$f(x) = \sin x$



$g(x) = \cos x$



$h(x) = \tan x$



Bonne Chance

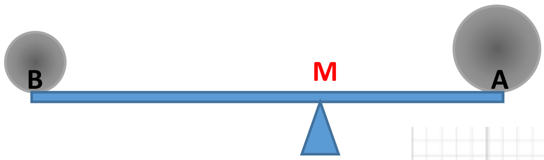
BARYCENTRE

I) ACTIVITES

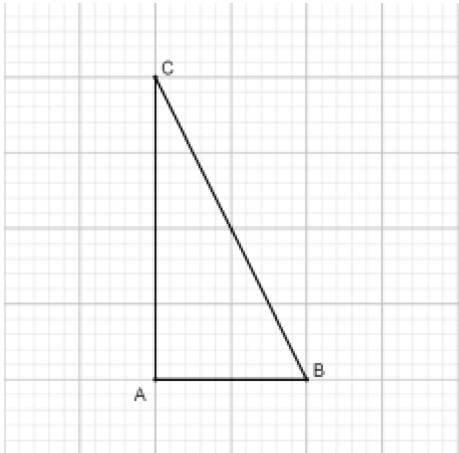
Activité 1 :

Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur $1m$ on considère deux boules métalliques de $500\ g$ en A et de $350\ g$ en B. M un point sur la barre.

Déterminer la position de M sachant que le système et e équilibre.



Activité 2 :



Soit ABC un triangle rectangle en A et $AC = 2AB$.

1- Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que : $2\,\overrightarrow{AG} - 3\,\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{CG} = \vec{0}$

2- Tracer le point G.

3- Si le plan est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$ où I est milieu de $[AC]$, quels seront les coordonnées du point G.

Activité 3 :

Soit $(A_i)_{i\leq 4}$ une famille de 4 points, et $(\alpha_i)_{i\leq 4}$ 4 réels dont la somme est non nulle.
Montrer que l'application :

$$\varphi:\ \mathcal{P} \to \mathcal{V}_2$$
$$M \mapsto \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

est une bijection. L'application φ s'appelle **l'application de Leibniz** (Wilhelm Leibniz 1646-1716)

II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

1) Vocabulaires

Définitions :

- Soit A un point et α un réel non nul ; le couple (A, α) s'appelle un **point pondéré**.
- Plusieurs points pondérés constituent un **système pondéré**

2) Barycentre de deux points pondérés.

2.1 Définitions.

Propriété :

Soit $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$ l'application $\varphi_2:\ \mathcal{P} \to \mathcal{V}_2$, $M \mapsto \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\,\overrightarrow{BM}$ est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $\varphi_2(G) = \vec{0}$

Preuve : φ_2 est l'application de Leibniz pour deux points

Définition :

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$; le barycentre du système pondéré Σ est le point G qui vérifie : $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$.

On écrit : $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

On a donc $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$ et par suite : pour tout réel k non nul on a : $k\alpha\overrightarrow{AG} + k\beta\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

et donc $G = Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$.

Propriété :

Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

- Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'appelle **l'isobarycentre de A et B** qui n'est que la milieu du segment $[AB]$.
- **Construction :**

Construire $G = Bar\{(A, 3); (B, 2)\}$

- Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

  On a donc : $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

  par suite : $\alpha\overrightarrow{AO} + \alpha\overrightarrow{OG} + \beta\,\overrightarrow{BO} + \beta\,\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ où O est un pont quelconque dans le plan $(\mathcal{P})$

  d'où : $(\alpha + \beta)\overrightarrow{OG} + \alpha\overrightarrow{AO} + \beta\,\overrightarrow{BO} = \vec{0}$

  on conclut que : $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{OB}$. (car $\alpha + \beta \neq 0$)

Propriété :

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.

Pour tout point O du plan $(\mathcal{P})$ on a : $\boldsymbol{\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{OB}}$.

Cette propriété s'appelle **la propriété caractéristique** du barycentre.

Propriété :

Si $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors les points A, B et G sont alignés.

Preuve :

Il suffit d'utiliser la propriété précédente en posant $A = O$ dans la propriété ; On aura $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{AB}$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et par suite : les points A, B et G sont alignés.

Propriété :

Le plan $(\mathcal{P})$ et rapporté à un repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) x_A + \left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right) x_B \\ y_G = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) y_A + \left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right) y_B \end{cases}$$

Preuve : Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre.

Exercice :

Considérons les applications $f(x) = x^2+1$ et $g(x) = 2x$ définies sur $\mathbb{R}$ soient C_f et C_g leurs courbes respectives dans un repère orthonormé. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on pose M_x le point de C_f d'affixe x et N_x le point d'affixe x de C_g.

1- Déterminer les coordonnées du point G_x isobarycentre de M_x et N_x.

2- Déterminer et tracer l'ensemble dans lequel varie G_x quand x varie dans $\mathbb{R}$.

3) Barycentre de trois points pondérés

3.1 Définition

Propriété :

Soit $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ l'application :

$$\varphi_3 : \mathcal{P} \to \mathcal{V}_2$$
$$M \mapsto \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\,\overrightarrow{BM} + \gamma\,\overrightarrow{CM}$$

est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $\varphi_3(G) = \vec{0}$

c est à dire : $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\,\overrightarrow{BG} + \gamma\,\overrightarrow{CG} = \vec{0}$

Preuve : φ_3 est l'application de Leibniz pour trois points

Propriété :

Soit $\Sigma = \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

On a pour tout point O du plan $(\mathcal{P})$: $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\overrightarrow{OC}$

Preuve : Même démonstration que dans le cas précèdent.

Propriété :

Le plan $(\mathcal{P})$ et rapporté à un repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, Soient $A(x_A,y_A)$; $B(x_B,y_B)$ $C(x_C,y_C)$

et $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right) x_A + \left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right) x_B + \left(\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right) x_C \\ y_G = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right) y_A + \left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right) y_B + \left(\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right) y_C \end{cases}$$

Propriété :

Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul : $Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} = Bar\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$ pour $k \neq 0$

Exercice :

Soit $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ où $\alpha+\beta \neq 0$ et $G' = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

Montrer que $G = Bar\{(G', (\alpha+\beta)); (C, \gamma)\}$

Propriété :

> Si $G = Bar\{(A,\alpha); (B,\beta); (C,\gamma)\}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$ et $G' = Bar\{(A,\alpha); (B,\beta)\}$
> Alors : $G = Bar\{(G', (\alpha+\beta)); (C, \gamma)\}$

Remarque :

La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

Application :

Construire le barycentre du système pondéré $\{(A,-2); (B,3); (C,1)\}$

Cas particulier

Si les poids $\alpha; \beta$ et γ sont égaux le barycentre de $\{(A,\alpha); (B,\alpha); (C,\alpha)\}$ s'appelle **le centre de gravité** du triangle ABC.

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\,\overrightarrow{CM} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} - 2\,\overrightarrow{CM} \end{cases}$$

1- Réduire l'écriture de $\vec{u}$.
2- Montrer que le vecteur $\vec{v}$ est constant.
3- Déterminer l'ensemble des points M tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Exercice 2 :

Déterminer les ensembles suivants :

$\Delta = \{M \in (\mathcal{P}) / \|4\,\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\|\}$

$\Gamma = \{M \in (\mathcal{P}) / \|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\| = \|3\,\overrightarrow{AM} - 2\,\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|\}$

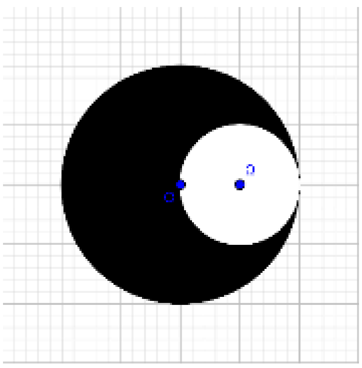
Exercice 3 :

Le solide (S) est constitué d'un disque $(\mathcal{D})$ dont on a enlevé le disque $(\mathcal{D}')$

$(\mathcal{D})$ est le disque de centre O et de rayon $2R$

$(\mathcal{D}')$ est le disque de centre Ω et de rayon R

Déterminer et tracer le centre de gravité du solide.



5) Barycentre de quatre points pondérés

3.1 Définition

Propriété :

Soit $\{(A,\alpha); (B,\beta); (C,\gamma); (D,\delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$ l'application :

$$\varphi_4 : \mathcal{P} \to \mathcal{V}_2$$
$$M \mapsto \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\,\overrightarrow{BM} + \gamma\,\overrightarrow{CM} + \delta\,\overrightarrow{DM}$$

est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $\varphi_4(G) = \vec{0}$

Preuve : φ_4 est l'application de Leibniz pour quatre points

Propriété :

Soit $\Sigma = \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$ et

$G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ On a pour tout point O du plan $(\mathcal{P})$:

$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{S}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{S}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{\gamma}{S}\right)\overrightarrow{OC} + \left(\frac{\delta}{S}\right)\overrightarrow{OD}$ **où** $S = \alpha+\beta+\gamma+\delta$

Preuve : Même démonstration que dans les cas précédents.

Propriété :

Le plan $(\mathcal{P})$ et rapporté à un repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, Soient $A(x_A,y_A)$; $B(x_B,y_B)$; $C(x_C,y_C)$ et $D(x_D,y_D)$

et $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\frac{\alpha}{S}\right)x_A + \left(\frac{\beta}{S}\right)x_B + \left(\frac{\gamma}{S}\right)x_C + \left(\frac{\delta}{S}\right)x_D \\ y_G = \left(\frac{\alpha}{S}\right)y_A + \left(\frac{\beta}{S}\right)y_B + \left(\frac{\gamma}{S}\right)y_C + \left(\frac{\delta}{S}\right)y_D \end{cases}$$ Où $S = \alpha+\beta+\gamma+\delta$

Propriété :

Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul : $Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\} = Bar\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma);(D,k\delta)\}$ pour $k \neq 0$

Exercice :

Soit $G = Bar\{Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ où $\alpha+\beta \neq 0$ et $\gamma+\delta \neq 0$

Si $G' = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ et $G" = Bar\{(C,\gamma);(D,\delta)\}$

Montrer que : $G = Bar\{\big(G',(\alpha+\beta)\big);(G",\gamma+\delta)\}$

Propriété :

Si $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$ et $\gamma+\delta \neq 0$

Si $G' = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ et $G" = Bar\{(C,\gamma);(D,\delta)\}$
Alors $G = Bar\{\big(G',(\alpha+\beta)\big);(G",\gamma+\delta)\}$

Remarque :

La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

Application :

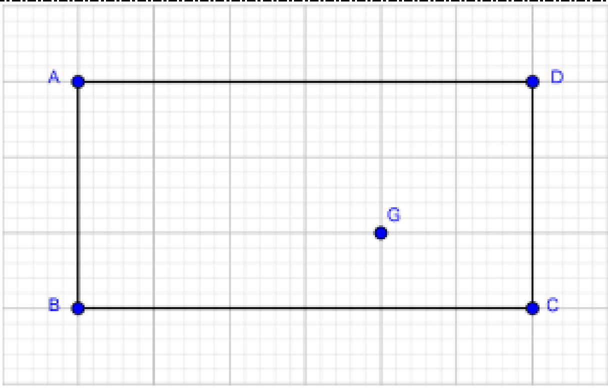
$ABCD$ un rectangle tel que : $AB = 2BC$ Construire le barycentre du système pondéré $\{(A,-2);(B,3);(C,1);(D,1)\}$

Cas particulier

Si les poids α; β et γ sont égaux le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\alpha);(C,\alpha);(D,\delta)\}$ s'appelle **le centre de gravité** du quadrilatère $ABCD$.

Exercice :

Déterminer des poids α,β,γ et δ pour les points A,B,C et D pour que $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ dans le figure ci-dessous


A
D
G
B
C

BARYCENTRE

I) ACTIVITES

Activité 1 : Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur $1m$ on considère deux boules métalliques de 500 g en A et de 350 g en B. M un point sur la barre. Déterminer la position de M sachant que le système et en équilibre.

Activité 2 : Soit ABC un triangle rectangle en A et $AC = 2AB$.

1- Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que : $2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

2- Tracer le point G.

3- Si le plan est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)$ où I est milieu de $[AC]$, quels seront les coordonnées du point G.

Activité 3 : Soit $\left(A_i\right)_{1\le i\le 4}$ une famille de 4 points, et $\left(\alpha_i\right)_{1\le i\le 4}$ 4 réels dont la somme est non nulle.

Montrer que l'application :

$f:P\to V_2$ tel que : $f\left(M\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$

Est une bijection

(L'application f s'appelle l'application de Leibniz)

(Wilhelm Leibniz 1646-1716)

II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

1) Vocabulaires

Définitions : Soit A un point et α un réel non nul ; le couple (A, α) s'appelle un point pondéré. Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

2) Barycentre de deux points pondérés.

2.1 Définitions.

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

l'application $f_2 : P\to V_2$ tel que :

$f_2\left(M\right)=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ est une bijection et il existe un et un seul point G qui vérifie $f_2\left(G\right)=\vec{0}$

Preuve : f_2 est l'application de Leibniz pour deux points

Définition : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré tel que $\alpha + \beta \neq 0$; le barycentre du système pondéré Σ est le point G qui vérifie :

$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

On écrit : $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ On a donc :

$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

et par suite : pour tout réel k non nul on a :

$k\alpha\overrightarrow{AG}+k\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

et donc $G = Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$.

Propriété :

a)Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

b)Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'appelle l'isobarycentre de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ qui n'est que le milieu du segment $[AB]$.

Construction :

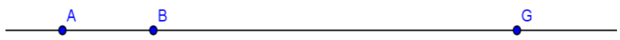
• **Exemple1 :** Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$

$G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$ donc : $4\overrightarrow{AG}-5\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

$4\overrightarrow{AG}+5\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow -4\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AB}$

Donc le point $G\in\left(AB\right)$



• **Exemple2 :**

Construire $G = Bar\{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

$G = Bar\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(-\sqrt{2}\right))\}$

donc : $G = Bar\{(A, 2); (B, -1)\}$

• Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ On a donc par suite :

$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

soit M est un pont quelconque dans le plan $\left(P\right)$

on a donc :

$\alpha\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MG}\right)+\beta\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MG}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\alpha+\beta\right)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

d'où : on conclut que : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.Pour tout point M du plan (P) on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

ou $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$

Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre.

Propriété : Si $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors les points A, B et G sont alignés.

Preuve : Il suffit d'utiliser la propriété précédente en posant A = M dans la propriété :

On aura : $\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et par suite : les points A, B et G sont alignés.

Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ des points du plan et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a :

$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{a+b} \end{cases}$$

Preuve : (Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre en posant A = O)

Exemples : 1)Dans le plan (P) rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(3;2)$ et $B(4;1)$

Et soit $G = Bar\ \{(A, 1); (B, -5)\}$

Solution : on a : $\begin{cases} x_G = \dfrac{-x_A+5x_B}{4} \\ y_G = \dfrac{-y_A+5y_B}{4} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_G = \dfrac{17}{4} \\ y_G = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Donc : $G\left(\frac{17}{4};\frac{3}{4}\right)$

Exercice1 : soit ABC un triangle et soit :
$I = Bar\ \{(B, 4); (C, -3)\}$
Déterminer les coordonnées du point I dans le repère $R(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Solution : on a : donc $(4+(-3))\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ donc dans le repère $R(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ $I(4;-3)$

Exercice2 : E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$ et $E \notin (AB)$ et G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$

1)Montrer que G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) en déduire que les droites (EF) et (AB) se coupent et déterminer le point d'intersection

solution : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\left(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{GF} \Leftrightarrow -1\overrightarrow{EG} - 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

$-\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$ donc G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) on a G le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$ donc $G \in (EF)$ et on a G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$ donc $G \in (AB)$

Donc les droites (EF) et (AB) se coupent en G

Exercice3 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(0;5)$ et $B(3;2)$

Et soit $G = Bar\ \{(A, 1); (B, 2)\}$

1)Déterminer les coordonnées de G

2)Déterminer et dessiner l'ensemble suivant :

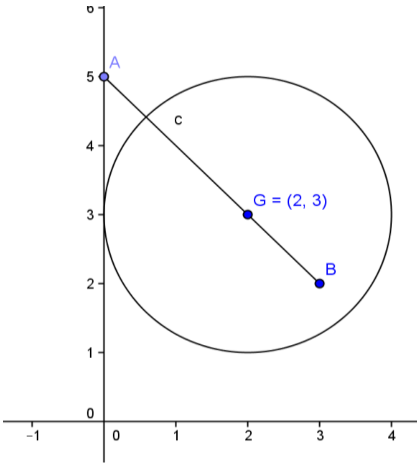
$(C) = \left\{M \in (P) / \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 6\right\}$

Solution : $\begin{cases} x_G = \dfrac{0+6}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{5+4}{3} = 3 \end{cases}$ donc $G(2;3)$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 6cm \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 6cm$

$\Leftrightarrow |3|\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 6cm \Leftrightarrow 3MG = 6cm \Leftrightarrow MG = 2cm$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r = 2cm$



3) Barycentre de trois points pondérés

Propriété :

Soit $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ l'application :

$f_3 : P \to V_2$ tel que : $f_3(M) = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$

est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $f_3(G)=\vec{0}$

c'est à dire : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Preuve : f_3 est l'application de Leibniz pour trois points

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

si M est un pont quelconque dans le plan (P)

on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$

donc : $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$

Preuve : Même démonstration que dans le cas précèdent.

Construction :

• **Exemple :**

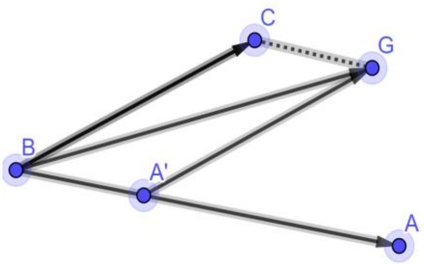
1°Construire $G = Bar\{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)\}$

$G = Bar\{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)\}$ donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$(1+(-1)+3)\overrightarrow{MG}=1\overrightarrow{MA}+(-1)\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$

On pose : $M=B$ on aura :

$3\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$



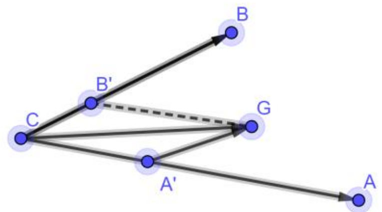
2°Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, 1/2) ; (C, -3)\}$

Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$(4+1/2-3)\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MA}+1/2\,\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

On pose : $M=C$ on aura :

$\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}=4\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG}=\frac{8}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$



Exercice 4 : Soit ABC un triangle et G point tel que : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$

1)montrer que G le barycentre de :

$\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$ et construire le point G

Solution : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

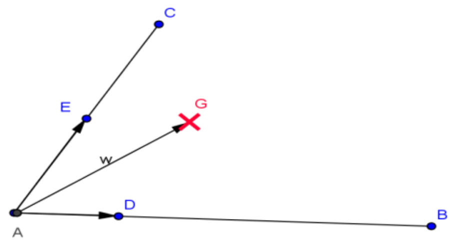
$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC})-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Donc G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

On a :® $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: donc $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$



Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ des points du plan

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

on a : $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$

et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

Propriété :

Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :

$Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} =$

$Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$ pour $k \neq 0$

Exercice :

Soit $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ où $\alpha + \beta \neq 0$ et $G' = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Montrer que $G = Bar\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

Propriété :

Si $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $G' = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Alors : $G = Bar\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

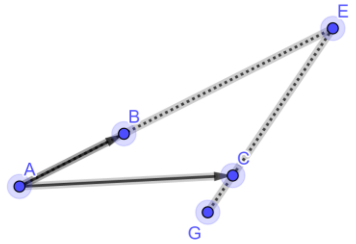
Exercice 5 : on utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre G du système pondéré $\{(A, 2); (B, -3); (C, 5)\}$

Solution : soit E = $Bar\{(A, 2); (B, -3)\}$

d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $-\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$

On pose : $M=A$ on aura : $-\overrightarrow{AE}=-3\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}$
d'après la Propriété d'associativité on a :
G = Bar{(E, -1); (C, 5)}
d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $4\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MC}$
On pose : $M=E$ on aura :
$4\overrightarrow{EG}=5\overrightarrow{EC}\Leftrightarrow\overrightarrow{EG}=\frac{5}{4}\overrightarrow{EC}$



Cas particulier
Si les poids α; β et γ sont égaux le barycentre de {(A, α); (B, α); (C, α)}
S'appelle **le centre de gravité** du triangle ABC.

Exercice 6 : Soit ABC un triangle.et G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment $[BC]$. Monter que G est le centre de gravité de $(A;1)$ et $(I;2)$

Solution : G le centre de gravité du triangle ABC
Donc G est le barycentre de :
{(A, 1); (B, 1); (C, 1)}
I le milieu du segment $[BC]$ Donc I est le barycentre de : { (B, 1); (C, 1)}
D'après la Propriété d'associativité on a :
G est le barycentre de : { (I, 2); (A, 1)}

Exercice7 : Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose : $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$
1) Réduire l'écriture de $\vec{V}$ et monter que $\vec{V}$ ne dépend pas du point M
2) soit K = Bar{(C, -3); (B, 1)} montrer que : $\vec{V}=2\overrightarrow{KA}$
3) soit G= Bar{(A, 2); (B, -1); (C, -3)}
montrer que : Pour tout point M on a :
$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{GM}$
4) en déduire l'ensemble des points M tel que
$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : 1)
$\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$
$\vec{V}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{V}$ ne dépend pas du point M
2)on a : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ Pour tout point M donc si $M=K$ on aura :
$2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

Et on a : K = Bar{(C, -3); (B, 1)} donc : $\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc : $2\overrightarrow{KA}=\vec{V}$

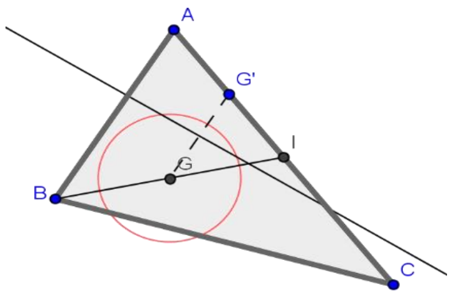
3) d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\left(2+(-1)+(-3)\right)\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GM}$

4) $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$
$\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{GM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{KA}\right\|\Leftrightarrow 2GM=2KA\Leftrightarrow GM=KA$
Donc l'ensemble des points est le cercle (C) de centre G et de rayon $r=KA$

Exercice 8 : Soit ABC un triangle tel que :
$AC=6cm$ et $AB=5cm$ et $BC=4cm$
a) Construire G le barycentre de :
{(A, 1); (B, 2); (C, 1)}
b) Déterminer et Construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AC$
c) Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que :
$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : G est le barycentre de :
{(A, 1); (B, 2); (C, 1)} donc G est le barycentre de : {(B, 2); (I, 2} d'après La propriété d'associativité du barycentre
Donc G est le milieu du segment $[BI]$
b) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=AC\Leftrightarrow GM=\frac{AC}{4}=1.5$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r=1.5cm$

b) Soit G' est le barycentre de :
{(A, 3); (C, 1)} Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\forall M\in(P)$
$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$ et $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG'}$
Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow 4MG=4MG'\Leftrightarrow MG=MG'$
Donc : (F) est la médiatrice du segment $[GG']$
Et pour construire le point G' on a : $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



5) Barycentre de quatre points pondérés

Propriété :
Soit $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ l'application : $f_4 : P \to V_2$ tel que :
$$f_4(M) = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD}$$
Est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $f_4(G) = \vec{0}$
c'est à dire : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$
Preuve : f_4 est l'application de Leibniz pour quatre points
Propriété :
Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ et
$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$
si M est un point quelconque dans le plan (P)
on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{s}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{s}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{s}\overrightarrow{MC} + \frac{\delta}{s}\overrightarrow{MD}$
où $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$
Preuve : Même démonstration que dans les cas précédents.
Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$ et $D(x_D; y_D)$ des points du plan
$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$
on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{s}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{s}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{s}\overrightarrow{OC} + \frac{\delta}{s}\overrightarrow{OC}$
Et donc on a les coordonnées de G :
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{s} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{s} \end{cases}$$
où $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$
Propriété : Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre
Non nul : $Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\} = Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma); (D, k\delta)\}$
pour $k \neq 0$
Propriété : Si $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta \neq 0$
Si $G' = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
et $G'' = Bar\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$
Alors $G = Bar\{(G', (\alpha + \beta)); (G'', \gamma + \delta)\}$
Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

Exercice9 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(-1;1)$ et $B(0;2)$ et $C(1;-1)$ et $D(1;0)$ Et soit $G = Bar\{(A, 1); (B, 2)\}$
1) Déterminer les coordonnées de
K = $Bar\{(A, 2); (B, 3)\}$
2) Déterminer les coordonnées de L le centre de gravité du triangle ABC
3) Déterminer les coordonnées de Barycentre des points $(A;2)$ et $(B;3)$ et $(C;1)$ et $(D;-1)$

Solution :1) $\begin{cases} x_K = \dfrac{-2+0}{5} == \dfrac{-2}{5} \\ y_K = \dfrac{2+6}{5} = \dfrac{8}{5} \end{cases}$ donc $K\left(-\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)$

2) les coordonnées de L sont :
$$\begin{cases} x_L = \dfrac{1x_A + 1x_B + 1x_C}{1+1+1} \\ y_L = \dfrac{1y_A + 1y_B + 1y_C}{1+1+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = \dfrac{1\times(-1) + 1\times 0 + 1\times 1}{1+1+1} = 0 \\ y_L = \dfrac{1\times 1 + 1\times 2 + 1\times(-1)}{1+1+1} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Donc $L\left(0; \frac{2}{3}\right)$
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G = \dfrac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2\times x_A + 3\times x_B + 1\times x_C + (-1)\times x_D}{5} = \dfrac{-2}{5} \\ y_G = \dfrac{2\times y_A + 3\times y_B + 1\times y_C + (-1)\times y_D}{5} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$
$G\left(-\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right)$

Application : $ABCD$ un rectangle tel que : $AB = 2BC$ Construire le barycentre du système pondéré $\{(A, -2) ; (B, 3) ; (C, 1) ; (D, 1)\}$
Cas particulier : Si les poids α ; β et γ sont égaux le barycentre de :
$\{(A, \alpha) ; (B, \alpha) ; (C, \alpha) ; (D, \delta)\}$ s'appelle **le centre de gravité** du quadrilatère convexe $ABCD$

Exercice10 : soit $ABCD$ un quadrilatère convexe
Soit H le barycentre du système pondéré $\{(A, 2) ; (B, 5); (C, -1)\}$
Soit K le barycentre du système pondéré {(B, 5) ; (C, -1) ; (D, 6)}
Soit E = Bar {(C, -1) ; $(B, 5)$}
1) Montrer que $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et Construire E
2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré $\{(A, 1)$; (E, 2)} et Construire H
3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}
b) en déduire que $(AK) \parallel (DH)$

Solution :1)on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a : $\overrightarrow{ME}=\frac{1}{4}(5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})$

Pour : M=B on a : $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et on peut

Construire E

2) on a : E = Bar {(C, -1) ; $(B$, 5)} et

$5+(-1)=4$

D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré {$(A$, 2); (E, 4) } et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré

{$(A$, 1) ; (E, 2)}

on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overrightarrow{MH}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MA}\right)$$

Pour : M=A on a : $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et on peut Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système

Pondéré {(D, -6); (E, 4) }

Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré

{(D, -3) ; (E, 2)}

4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)} ?

Puisque K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}

Pour tout point M du plan (P) on a :

$-\overrightarrow{MK}=-3\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{ME}$

Donc : $3\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{ME}$

Donc : D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}

4) b) Pour tout point M du plan (P) on a :

$3\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MA}$ et $3\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MK}$

Donc : : $3\overrightarrow{DH}=3\overrightarrow{MH}-3\overrightarrow{MD}$

$3\overrightarrow{DH}=3\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MD}\right)$

Donc : $3\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MK}$

Donc : $(AK)\parallel(DH)$: Donc $3\overrightarrow{DH}=-\overrightarrow{AK}$

Exercice11 : ABC un triangle

I et J et K points tels que : $2\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{BC}$

Et $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ et $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) le plan (P) est rapporté au repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

a)Déterminer les coordonnées du point J

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)

c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{BI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\vec{0}$ par suite : I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ on a : $A(0;0)$ et $B(1;0)$ et $C(0;1)$

a)on a : $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ donc : $8\overrightarrow{CA}+8\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{CA}$

donc : $8\overrightarrow{AJ}=-7\overrightarrow{CA}$ donc : $\overrightarrow{AJ}=\frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$ donc : $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

b) la droite (IK) passe par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{IK}$ et on a : I est le barycentre de $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$ donc : $\begin{cases} x_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times1-\frac{3}{2}\times0}{-1}=-\dfrac{1}{2} \\ y_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times0-\frac{3}{2}\times1}{-1}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Donc : $I\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Et on a : $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$ Donc : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : $K\left(\frac{2}{5};0\right)$ Donc : $\overrightarrow{IK}\left(\frac{9}{10};\frac{3}{2}\right)$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est :

$$\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+c=0$$

$I\in(IK)$: donc : $\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right)+c=0$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}-\frac{27}{20}+c=0 \Leftrightarrow c=\frac{21}{10}$

donc : (IK): $\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+\frac{21}{10}=0$

$(IK):15x-9y+21=0$

c) pour Montrer que les points I et J et K sont alignés il suffit de montrer que $J\in(IK)$

on a : $(IK):15x-9y+21=0$ et $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

et on a : $15\times0-9\frac{7}{8}+21=-21+21=0$

par suite : $J \in (IK)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice12 : ABC un triangle et I un point tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et K le symétrique de A par rapport a C et J le milieu du segment $[BC]$

1) exprimer I et J et K comme le barycentre de points pondérés a déterminer

2)quelle est le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;2)$; $(B;-2)$ et $(C;-2)$?

3)Monter que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

• on a J le milieu du segment $[BC]$

Donc : J est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$

• on a : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ Donc : I est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$

• on a : K le symétrique de A par rapport a C

Donc : $2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KA}$

Donc : $\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$

2) on a : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$ donc :

$1\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$ et $(B;-2)$ et $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre des points pondéré $(J;-4)$ et $(I;3)$ par suite : $K \in (IJ)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice13: ABCD un carré et I et J les milieux respectivement des segments $[BC]$et$[CD]$et M et N deux points tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1determiner le barycentre des points pondérés {(A, 3) ; (B, 1)} et {(A, 3) ; (D, 1)}

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$

3)Monter que les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G

Solution :1)on a : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$

donc : $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Donc : M est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(B;1)$

De même on a : $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND}$

donc : $3\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

Donc : N est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(D;1)$

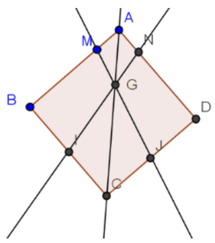
2) soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$ et puisque J le milieu du segment $[DC]$ alors J est le barycentre des points pondéré $(C;1)$ et $(D;1)$

D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(M;4)$ et $(J;2)$ par suite : $G \in (JM)$

De même on a : I le milieu du segment $[BC]$ alors I est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et d'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(N;4)$ et $(I;2)$ par suite : $G \in (NI)$

Soit H le centre de gravité du triangle BCD donc H est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$ par suite D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(H;3)$ donc : G le milieu du segment $[AH]$ et puisque ABCD est un carré alors : $H \in [AC]$ donc $G \in (AC)$

Conclusion : les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G



Exercice14: A et B deux points tel que : $AB = 4cm$ et soit :(F) l'ensemble des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 3$

1)montrer que : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$ et K le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;-3)$

a) Montrer que : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$

b) En déduire l'ensemble (F) et le tracer

Solution :1) $M \in (F) \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA = 3MB$

$M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$

2)a) $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0$

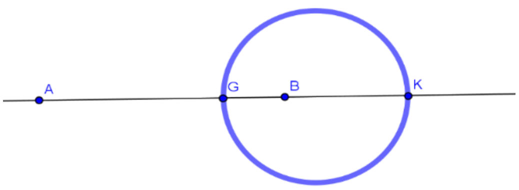
et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura :

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MK}$

Donc : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow -8\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$

Donc : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$

2)b) d'après a) en déduit que (F) est le cercle de dont un diamètre est $[GK]$



Exercice15: A et B deux points tel que : $AB = 4cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit : (E) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$

a)montrer que : $H \in (E)$

b)vérifier que : $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

c)déterminer la nature de l'ensemble (E)

2)soit : (F) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 - MB^2 = 8$

a) Montrer que : $\forall M \in (P)$ on a : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

b) En déduire que $(F) = (E)$ et le tracer

Solution :1)on a : H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$ donc : $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{IH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ par suite $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}AB^2 = 4$

Donc $H \in (E)$

b) $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

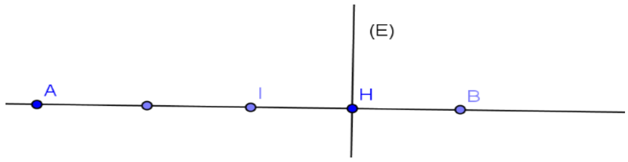
c)de b) on déduit que (E) est la droite perpendiculaire a (AB) en H

2)a) $MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

2)b) $M \in (F) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow M \in (E)$

Donc $(F) = (E)$ par suite (F) est la droite perpendiculaire a (AB) en H



Solution16 : A et B deux points tel que : $AB = 3cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit : (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 9$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$

a)monter que : $M \in (C) \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$

b)déterminer la nature et tracer l'ensemble (C)

2)soit : (C') l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{-5}{4}$

a)Montrer que : $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

b)déterminer la nature et tracer l'ensemble (C')

Solution :1)on a :

$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$= 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

Car : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$

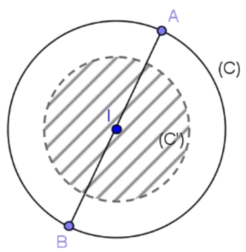
$M \in (C) \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 9 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$

b)en déduit que (C) est le cercle de centre I et de rayon $r = \frac{3}{2}$

2) a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

Donc : $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

2) b) en déduit que (C') est le cercle de centre I et de rayon $r = 1$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

CALCUL TRIGONOMETRIQUE

Formules de transformations

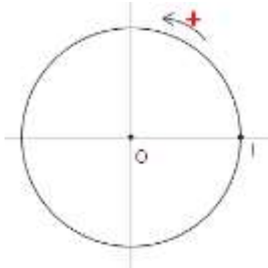
I) RAPPELLES

1) Cercle trigonométrique

Définition:

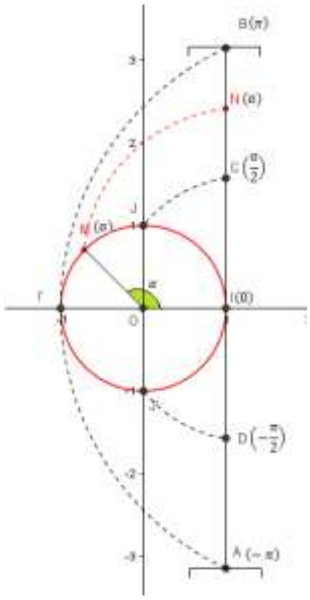
Le cercle trigonométrique est un cercle:

- de centre O l'origine du plan
- de rayon $R = 1$
- orienté une orientation positive.
- et admet une origine I



2) Les abscisses curvilignes

1.1 L'abscisse curviligne principale d'un point sur le C.T



Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique d'origine I; considérons l'intervalle $]-\pi,\pi]$

tel que 0 l'abscisse de I sur l'axe perpendiculaire sur (OI). Si on fait enrouler

le segment qui représente $]-\pi,\pi]$ au tour du cercle $(\mathcal{C})$ on remarque que

chaque point N d'abscisse α de l'intervalle $]-\pi,\pi]$ s'associe avec un point unique

M du cercle trigonométrique.

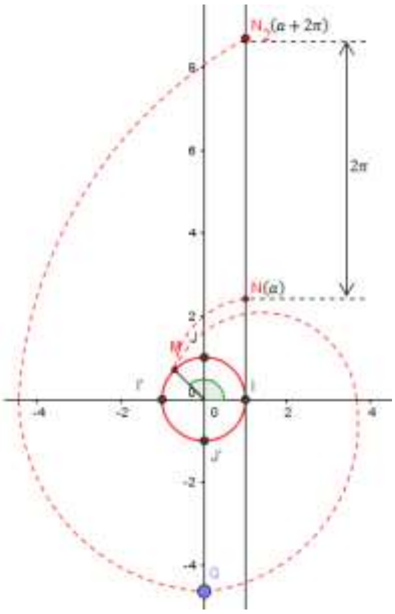
Le réel α s'appelle l'abscisse curviligne principale du point M

et inversement si α est un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi]$, alors il existe un point M unique

de $(\mathcal{C})$ qui s'associe avec le point $N(\alpha)$.

Le réel α représente aussi la mesure de l'angle géométrique centrique $[\widehat{IOM}]$.

1.2 Les abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique



Considérons le cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ d'origine I. (Δ) est la droite

passante par I et perpendiculaire à (OI) et d'unité égale à OJ.

Soit M un point sur le cercle $(\mathcal{C})$ et d'abscisse curviligne principale α.

Si on suppose que la droite (Δ) est un file qu'on peut enrouler autour du cercle $(\mathcal{C})$

on remarque que la point M du cercle $(\mathcal{C})$ coïncide avec une infinité de points de

la droite (Δ); et qui ont pour abscisses

$\ldots..(\alpha-6\pi),(\alpha-4\pi),(\alpha-2\pi),(\alpha),(\alpha+2\pi)\ldots..$

En générale: chaque point N_k de la droite (Δ) qui coïncidera avec le point M

aura pour abscisse $\alpha + k\mathbf{2\pi}$

Ces réels s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

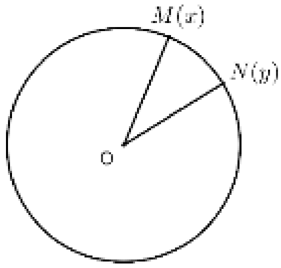
Définition :

Soit M un point sur le cercle $(\mathcal{C})$ et d'abscisse curviligne principale α. Les réels qui s'écrivent de la forme $\alpha + 2k\pi$ où **k est un entier relatif** s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

II) TRANSFORMATION DE $\cos(x-y)$ ET CONSEQUENCES.

1) Formules de l'addition :

Exercice :



Soit M et N deux points sur le cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectifs x et y.

1- Calculer $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ de deux façons différentes.

2- En déduire $\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$

3- Calculer $\cos(x+y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y.

4- Calculer $\sin(x+y)$ et $\sin(x-y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y.

Propriété :

❶

Pour tous réels x et y on a :

$\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$ (1)

$\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$ (2)

$\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$ (3)

$\sin(x-y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$ (4)

Applications :

Calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

2) Formules d'angle double.

D'après ❶ ligne (2) on a :

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x. \end{aligned}$$

et on sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

D'après ❶ ligne (3) on a :

$$\sin(2x) = 2\sin x.\cos y$$

Propriété :

❷

Pour tous réels x et y on a :

$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ (1)

$= 1 - 2\sin^2 x$ (2)

$\sin(2x) = 2\sin x.\cos y$ (3)

3) Formules du demi-angle.

D'après ❷ ligne (1) et (2) on a :

Propriété :

❸ Pour tous réels x et y on a :

$$cos^2x = \frac{1+cos(2x)}{2} \quad (1)$$

$$sin^2x = \frac{1-cos(2x)}{2} \quad (2)$$

Application :

Calculer $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

D'après ❷

Propriété :

❹

$$cos(x) = 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \quad (1)$$

$$= 1 - 2sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2)$$

$$sin(x) = 2sin\left(\frac{x}{2}\right).cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3)$$

4) Formules du tangente.

Soient x et y deux réels tels que : $(x+y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ on a :

- $tan(x+y) = \frac{sin(x+y)}{cos(x+y)}$

$$= \frac{sinx.cosy+cosx.siny}{cosx.cosy-sinx.siny}$$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors : $cosx.cosy \neq 0$

$$= \frac{\frac{sinx.cosy}{cosx.cosy}+\frac{cosx.siny}{cosx.cosy}}{\frac{cosx.cosy}{cosx.cosy}-\frac{sinx.siny}{cosx.cosy}}$$

$$= \frac{tanx+tany}{1-tanx.tany}$$

- On en déduit que : si $x \neq \frac{\pi}{4} + k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$tan(2x) = \frac{2tanx}{1-tan^2x}$$

- Si $(x-y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$tan(x-y) = \frac{tanx-tany}{1+tanx.tany}$$

Propriété :

5

Soient x et y deux réels tels que : $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ on a :

- Si $(x+y) \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ alors : $tan(x+y)=\frac{tanx+tany}{1-tanx.tany}$ (1)
- Si $x \neq \frac{\pi}{4}+k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ alors : $tan(2x)=\frac{2tanx}{1-tan^2x}$ (2)
- Si $(x-y) \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ alors : $tan(x-y)=\frac{tanx-tany}{1+tanx.tany}$ (3)

Exercice :

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+2x-1=0$

2- En déduire $tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

5) Les valeurs trigonométrique en fonction de : $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$

➢ D'après ❺ (2) et si $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x \neq \pi+2k\pi$

$tan(x)=\frac{2tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ On posant : $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on en déduit : $tan(x)=\frac{2t}{1-t^2}$

➢ D'après ❹ (1) on a : $cos(x)=2cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1$ et on sait : $tan^2\alpha+1=\frac{1}{cos^2\alpha}$
par suite :

$\cos(x)=\frac{2}{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}-1$ si $x \neq \pi+2k\pi$ alors : on peut conclure que : $\cos(x)=\frac{1-tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

On posant : $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on en déduit : $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

➢ D'après ❹ (3) on a : $sin(x)=2sin\left(\frac{x}{2}\right).cos\left(\frac{x}{2}\right)$ si $x \neq \pi+2k\pi$

alors on peut conclure que : $sin(x)=2tan\left(\frac{x}{2}\right).cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

d'où : $sin(x)=\frac{2tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ On posant : $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on en déduit : $sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$

Propriété :

6

Soit x un réel tel que : $x \neq \pi+2k\pi$ on a :

- $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ (1)
- $sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$ (2)

Si de $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x \neq \pi+2k\pi$

- $tan(x)=\frac{2t}{1-t^2}$ (3)

Exercice :

1- Montrer que $tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :(E): $2cosx-2sinx-1-\sqrt{3}=0$

a) Vérifier que $\pi+2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant : $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$, résoudre l'équation (E) (remarquer que $4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$)

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

6) Transformations des sommes en produits

De la propriété ❶ et de (1)+(2) on peut conclure que : $cos(x-y)+cos(x+y)=2cosx.cosy$

Si on pose : $\begin{cases} x-y=p \\ x+y=q \end{cases}$ alors on peut déduire : $\begin{cases} x=\frac{p+q}{2} \\ y=\frac{p-q}{2} \end{cases}$

On peut conclure que : $cos\,p+cos\,q=2cos\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De la propriété ❶ et de (1)-(2) on peut conclure que : $cos(x-y)-cos(x+y)=-2sinx.siny$

Si on pose : $\begin{cases} x-y=p \\ x+y=q \end{cases}$ alors : $cos\,p-cos\,q=-2sin\left(\frac{p+q}{2}\right).sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De la même façon on peut montrer les autres propriétés :

Propriété :

Pour tous réels p,q, on a :

$sin\,p+sin\,q=2sin\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$sin\,p-sin\,q=2cos\left(\frac{p+q}{2}\right).sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$cos\,p+cos\,q=2cos\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$cos\,p-cos\,q=-2sin\left(\frac{p+q}{2}\right).sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

❼

Application :

Résoudre dans ℝ l'équation : $sinx+sin3x+sin5x+sin7x=0$

8) Transformations des produits en sommes.

De la propriété ❶ et de (1)+ (2) on peut conclure que : $cos(x-y)+cos(x+y)=2cosx.cosy$ d'où :

$cosx.cosy=\frac{1}{2}[cos(x-y)+cos(x+y)]$

De la même façon on peut montrer les autres égalités :

Propriété :

Pour tous réels x,y on a :

$cosx.cosy=\frac{1}{2}[cos(x+y)+cos(x-y)]$

$sinx.siny=-\frac{1}{2}[cos(x+y)-cos(x-y)]$

$sinx.cosy=\frac{1}{2}[sin(x+y)+sin(x-y)]$

❽

La linéarisation d'une expression c'est de l'écrire sous la forme d'une somme.

Exercices :

1- Linéariser : $2cos^2x.sin(2x)$

2- Linéariser : $cos^3 x$

III) LES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

1) Rappelles

1.1 $cosx = a$

Propriété :

Considérons l'équation (E) $\boldsymbol{cosx = a}$ où a est un réel :

- si $a < 1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions.
- les solutions de l'équation $cosx = 1$ sont les réels $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- les solutions de l'équation $cosx = -1$ sont les réels $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $]0,\pi[$ qui vérifie $cos\alpha = a$ et l'ensemble de solutions de l'équation (E) sera : $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- En générale : les réels qui vérifient l'équation $cos\big(A(x)\big) = cos(B(x))$ sont les solutions des équations :

$$\text{ou}\left|\begin{array}{l} A(x) = B(x) + 2k\pi \ \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ A(x) = -B(x) + 2k\pi \ \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Exercices :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$
   Déterminer les solutions dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$

1.2 $sin\,x = a$

Propriété :

Considérons l'équation (E') $\boldsymbol{sinx = a}$ où a est un réel :

- si $a < 1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E') n'admet pas de solutions.
- les solutions de l'équation $sinx = 1$ sont les réels $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- les solutions de l'équation $sinx = -1$ sont les réels $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ qui vérifie $sin\alpha = a$ et l'ensemble des solutions de l'équation (E') sera : $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- En générale : les réels qui vérifient l'équation $sin\big(A(x)\big) = sin(B(x))$ sont les solutions des équations :

$$\text{ou}\left|\begin{array}{l} A(x) = B(x) + 2k\pi \ \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ A(x) = \pi - B(x) + 2k\pi \ \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Exercices :

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
   Déterminer les solutions dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$

1.3 $tanx = a$

Propriété :

Pour tout réel a, il existe un et un seul réel α dans l'intervalle $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ qui vérifie $tan\alpha = a$,

et l'équation $tanx = a$ aura comme ensemble de solutions $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

En général l'équation : $\tan(A(x)) = \tan(B(x))$ est définie pour les réel x tels que :

$A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $B(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et a pour solution l'ensemble des réels x solution de l'équation :

$A(x) = B(x) + k\pi$

Exercices :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $cosx - \sqrt{3}sinx = 0$

2) L'équation : (E): $acosx + bsinx + c = 0$

Si $abc = 0$ l'équation (E) se ramène à une équation usuelle.

2.1 Transformation de $acosx + bsinx$

Soient a et b deux réels non nuls on a :

$$acosx + bsinx = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx\right)$$

Or : $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ donc :

Il existe un réel φ tel que :

$$\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Par suite :

$acosx + bsinx = \sqrt{a^2 + b^2}\,(cos\varphi.cosx + sin\varphi.sinx)$ et d'après la formule d'addition

$= \sqrt{a^2 + b^2}(cos(x - \varphi))$

2.2 L'équation : (E): $acosx + bsinx + c = 0$

Soit a, b et c trois réels non nuls :

$acosx + bsinx + c = 0 \Leftrightarrow acosx + bsinx = -c$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2}(cos(x - \varphi)) = -c$ où : $\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ça revient à l'étude d'une équation usuelle.

Propriété :

Soient a et b deux réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$ on a :

Pour tout réel x : $acosx + bsinx = \sqrt{a^2+b^2}(cos(x-\varphi))$ où le réel φ est déterminer par : $\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

L'équation $acosx + bsinx + c = 0$ se ramène à : $cos(x-\varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Application :

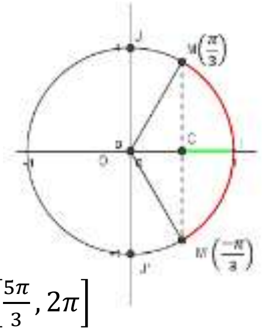
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{3}\,cos(3x) + sin(3x) + 2 = 0$

IV) LES INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1) Rappelles

1.1) Inéquations avec cos

Considérons l'inéquation cosx $\geq \frac{1}{2}$.



Tout d'abord il faut résoudre l'équation cosx $= \frac{1}{2}$ les images des solutions de cette équation sont $M_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ et $M'_{\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$ et on constate que les réels qui vérifient l'inéquation cosx $\geq \frac{1}{2}$ sont les abscisse curvilignes des points qui se situent sur l'arc $\overparen{[M'IM]}$ (en rouge sur la figure)

et par suite on peut conclure que $S_{[-\pi,\pi]} = [\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ les solutions dans $[0,2\pi]$ sont $S_{[0,2\pi]} = \left[0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

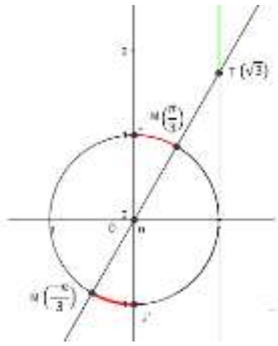
Exercice : Résoudre dans $[0,3\pi]$ l'inéquation $2cosx + \sqrt{3} \leq 0$

1.2) Inéquations avec sin

En utilisant les démarches du paragraphe précèdent résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'inéquation $sinx \leq \frac{-\sqrt{3}}{2}$

puis déterminer les solution dans $[0,3\pi]$.

1.3) Inéquation avec tan



Pour résoudre l'inéquation (E_3) $tanx \geq \sqrt{3}$ on suit les étapes suivantes :

- Il faut remarquer que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$
- résoudre l'équation $tanx = \sqrt{3}$:
  l'ensemble de cette équation est $S_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{3} + k\pi \,; k \in \mathbb{Z}\ \}$
- On place le point $M_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ sur le cercle trigonométrique.
- On trace la droite (OM)
- On détermine sur le cercle les arcs qui contient les points dont les abscisses curvilignes vérifient l'inéquation (E_3)

L'ensemble de solutions de l'inéquation (E_3) dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$ est $S_{[-\pi,\pi]} = [\frac{-\pi}{3}, \frac{-\pi}{2}[\cup [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice : déterminer les solutions de (E_3) dans l'intervalle $[0,4\pi]$.

Exercice : Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ puis dans $[0,3\pi]$ l'inéquation $tanx \leq -1$

1.4) Inéquations dont la solution se ramène à la résolution d'une inéquation usuelle.

1. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation $sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{-1}{2}$
2. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $4cos^2x - 2(1+\sqrt{2})cosx + \sqrt{2} \leq 0$
3. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $\frac{1+tanx}{sin2x} \geq 0$

Exercice :

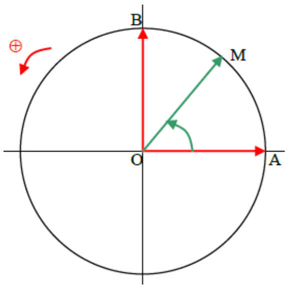
Résoudre dans $[\frac{-11\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}]$ l'équation $sin3x \geq \frac{1}{2}$

CALCUL TRIGONOMETRIQUE

Formules de transformations

I) RAPPELLES

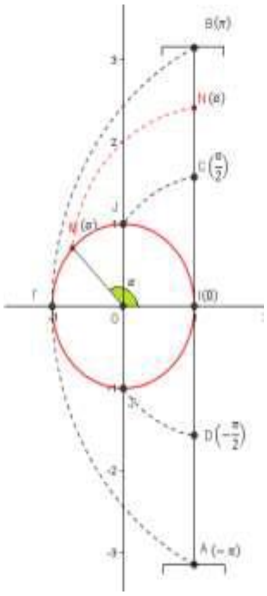
1) Cercle trigonométrique



Définition : Le cercle trigonométrique est un cercle de centre O l'origine du plan de rayon $R = 1$ orienté une orientation ositive. et admet une origine I

2) Les abscisses curvilignes

1.1 L'abscisse curviligne principale d'un point sur le C.T



Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique d'origine I; considérons l'intervalle $]-\pi, \pi]$ tel que 0 l'abscisse de I sur l'axe perpendiculaire sur (OI). Si on fait enrouler le segment qui représente $]-\pi, \pi]$ au tour du cercle $(\mathcal{C})$ on remarque que chaque point N d'abscisse α de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ s'associe avec un point unique M du cercle trigonométrique.

Le réel α s'appelle l'abscisse curviligne principale du point M

et inversement si α est un réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$, alors il existe un point M unique de $(\mathcal{C})$ qui s'associe avec le point $N(\alpha)$. Le réel α représente aussi la mesure de l'angle géométrique centrique $\left[\widehat{IOM}\right]$

1.2 Les abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique

Considérons le cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ d'origine I. (Δ) est la droite Passant par I et perpendiculaire à (OI) et d'unité égale à OJ.

Soit M un point sur le cercle $(\mathcal{C})$ et d'abscisse curviligne principale α.

Si on suppose que la droite (Δ) est un file qu'on peut enrouler autour du cercle $(\mathcal{C})$

on remarque que la point M du cercle $(\mathcal{C})$ coïncide avec une infinité de points de la droite (Δ); et qui ont pour abscisses

$\ldots..(\alpha-6\pi), (\alpha-4\pi), (\alpha-2\pi), (\alpha), (\alpha+2\pi) \ldots..$

En générale : chaque point Nk de la droite (Δ) qui coïncidera avec le point M aura pour abscisse $\alpha + k\mathbf{2\pi}$

Ces réels s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

Définition : Soit M un point sur le cercle $(\mathcal{C})$ et d'abscisse curviligne principale $\boldsymbol{\alpha}$. Les réels qui s'écrivent de la forme : $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi}$ où $\boldsymbol{k}$ est un entier relatif s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

II) TRANSFORMATION DE $\cos(x-y)$ ET CONSEQUENCES.

1) Formules de l'addition :

Activité : Soit M et N deux points sur le cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes Respectifs x et y.

1- Calculer $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ de deux façons différentes.

2- En déduire $\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$

3- Calculer $\cos(x+y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y.

4- Calculer $\sin(x+y)$ et $\sin(x-y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y.

Propriété1 : Pour tous réels x et y on a :

$\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$ (1)

$\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$ (2)

$\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$ (3)

$\sin(x-y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$ (4)

Exemple : 1)Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

2)Calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

3) monter que : $\cos x = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

4) monter que : $\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x = 0$

Solution :

1) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2) $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3)($\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos x$ ؟؟

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=2\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$$

4) $\sin(x+\frac{2\pi}{3})=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$

$$\sin(x+\frac{2\pi}{3})=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$$

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

$$\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x=-2\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x=-\sin x+\sin x=0$$

Exercice1 :

Soient : $0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$ et $0\prec b\prec\frac{\pi}{2}$ et $\cos a=\sin b=\frac{1}{2}$

1)Calculer : $\sin a$ et $\cos b$

2) Calculer : $\sin(a+b)$

Solution : calcul de $\cos b$:

on a $\cos^2 b+\sin^2 b=1\Leftrightarrow\cos^2 b=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\cos^2 b=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Or : $0\prec b\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

calcul de : $\sin a$

on a : $\cos^2 b+\sin^2 b=1\Leftrightarrow\sin^2 a=1-\cos^2 a\Leftrightarrow\sin^2 a=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

donc : $\sin^2 a=\frac{3}{4}$ donc

$\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

or $0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) on a : $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

Donc : $\sin(a+b)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

Exercice2 : Calculer $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

2) Formules d'angle double.

D'après propriété1 ligne (2) on a :

$cos(2x)=cos^2x-sin^2x$ et on sait que $cos^2x+sin^2x=1$

$cos(2x)==2cos^2x-1$

$cos(2x)==1-2sin^2x$.

D'après Propriété1 ligne (3) on a :

$sin(2x)=2sinx.\,cosy$

Propriété2 : Pour tout réel x on a :

$cos(2x)=2cos^2x-1$ (1)

$cos(2x)=1-2sin^2x$ (2)

$sin(2x)=2sinx.\,cosx$ (3)

Exemple :calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Solution : on a $\frac{\pi}{4}=2\frac{\pi}{8}$ donc $\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)$

D'après : $cos(2x)=2cos^2x-1$ (1)

On a Donc : $\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$ donc :

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ ou $\cos\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

Or $0\prec\frac{\pi}{8}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos\frac{\pi}{8}\succ 0$ donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

D'après : $cos(2x)=1-2sin^2x$ (2)

On a Donc : $\cos\frac{\pi}{4}=1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$ donc :

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

donc : $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ ou $\sin\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

Or $0\prec\frac{\pi}{8}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\sin\frac{\pi}{8}\succ 0$ donc : $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice3 : Sachant que $\sin x=\frac{1}{2}$ et $0\prec x\prec\frac{\pi}{2}$

calculer : $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$

Solution : on a : $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$

Donc : $\cos(2x)=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

Et on a : $\sin(2x)=2\sin x\times\cos x$ il faut Calculer $\cos x$?

on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

Donc : $\cos^2 x=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$ donc : $\cos^2 x=\frac{8}{9}$

donc : $\cos x=\frac{\sqrt{8}}{3}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{8}}{3}$

or $0\prec x\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x=\frac{\sqrt{8}}{3}$

donc : $\sin(2x)=2\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{8}}{9}$

Exercice4 : Montrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2\ \forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Solution :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{\sin 3x\cos x-\sin x\cos 3x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}$$

$$=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=2$$

3) Formules du demi-angle.

D'après : propriété2 ligne (1) et (2) on a :

Propriété3 : Pour tous réels x et y on a :

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\quad(1)$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\quad(2)$$

D'après propriété2

Propriété4 : $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$ (1)

$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ (2) $\qquad\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ (3)

Exemple : montrer que :

1) $1-\cos x+\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$

2)si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\sin\alpha\neq-1$ alors

$$\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Solution :

1)on a : $1-\cos x+\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

Car : $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ (2) et $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ (3)

Donc : $1-\cos x+\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$

2) on a : $1-\sin\alpha=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ et $1+\sin\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Donc : $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$ et $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$

Donc : $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ et $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Donc : $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Exercice5 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=-2\cos^2 x\times\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=5\cos 2x+7$

Solution :

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=(2\cos x\sin x)^2-2\cos^2 x+1-1$

$4\cos^2 x\sin^2 x-2\cos^2 x=-2\cos^2 x\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=2\sin^2 x+12\left(1-\sin^2 x\right)=-10\sin^2 x+12$

$=\frac{-10}{2}(1-\cos 2x)+12=-5(1-\cos 2x)+12=5\cos 2x+7$

4) Formules de la tangente.

Soient x et y deux réels tels que: $(x+y)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ on a

$$\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}$$

si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ alors : $\cos x.\cos y\neq 0$

$$\tan(x+y)=\frac{\dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\times\tan y}$$

si $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

On en déduit que : si $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Si $(x-y)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\times\tan y}$$

Propriété 5: Soient x et y deux réels tels que :

$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ on a :

1) Si $(x+y)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ alors $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\times\tan y}$ (1)

2) si $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ alors : $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ (2)

3) Si $(x-y)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ alors :

$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\times\tan y}$ (3)

Applications : Calculer $\tan\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{5\pi}{12}$

Solution :

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$

Exercice6 : Calculer $\tan\frac{11\pi}{12}$

Exercice7 :

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+2x-1=0$

2- En déduire $tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution : 1) utiliser le déterminent Δ

2) utiliser : $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ (2) on remplaçant : $x=\frac{\pi}{8}$

5) Les valeurs trigonométrique en fonction de :

$t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$

1) D'après Propriété 5 (2) et si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x\neq\pi+2k\pi$

$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$ On posant : $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$

on en déduit : $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

2) D'après Propriété 4 (1) on a : $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$

et on sait : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

par suite : $\cos x=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1$

si $x\neq\pi+2k\pi$ alors : on peut conclure que :

$$\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

On posant $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on en déduit : $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

D'après Propriété 4 (3) on a : $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

si $x\neq\pi+2k\pi$

Alors on peut conclure que : $\sin x=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$

d'où : $\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ On posant : $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on en déduit : $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

Propriété 6: Soit x un réel tel que : $x\neq\pi+2k\pi$ on a :

1) $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ (1)

2) $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ (2)

Si de $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x\neq\pi+2k\pi$

3) $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$ (3)

Application: soit $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\tan\frac{a}{2} = \sqrt{2}$

Calculer $\cos a$ et $\sin a$ et $\tan a$

Solution : on a $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\sqrt{2}^2}{1+\sqrt{2}^2} = -\frac{1}{3}$

$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan a = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}^2} = -2\sqrt{2}$

Exercice8 :1- Montrer que $tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :

(E): $2cosx - 2sinx - 1 - \sqrt{3} = 0$

a) Vérifier que $\pi + 2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant : $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$, résoudre l'équation (E)

(remarquer que $4-2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}-1\right)^2$

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

6) Transformations des sommes en produits

De la propriété 1 et de (1)+(2) on peut conclure que :

$cos(x-y) + cos(x+y) = 2cosx.\,cosy$

Si on pose : $x - y = p$ et $x + y = q$ alors on peut déduire : $x = \frac{p+q}{2}$ et $y = \frac{p-q}{2}$

On peut conclure que :

$cos\,p + cos\,q = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\,cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De la propriété 1 et de (1)-(2) on peut conclure que :

$cos(x-y) - cos(x+y) = -2sinx.\,siny$

Si on pose : $x - y = p$ et $x + y = q$ alors on peut déduire : $x = \frac{p+q}{2}$ et $y = \frac{p-q}{2}$

$cos\,p - cos\,q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De la même façon on peut montrer les autres propriétés :

Propriété 7: Pour tous réels p , q, on a :

$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\,cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$cos\,p + cos\,q = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\,cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$cos\,p - cos\,q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Application : *Transformer en produits les expressions suivantes :*

1) $A(x) = \sin 2x + \sin 4x$

2) $B(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$

Solution :1)

$A(x) = \sin 2x + \sin 4x = 2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)$

$\sin 2x + \sin 4x = 2\sin 3x\cos(-2x) = 2\sin 3x\cos 2x$

2)on a :

$\cos x + \cos 3x = 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2\cos 2x\cos x$

$\cos 2x + \cos 4x = 2\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right) = 2\cos 3x\cos x$

Donc : $B(x) = 2\cos 2x\cos x + 2\cos 3x\cos x = 2\cos x(\cos 2x + \cos 3x)$

Et on a : $\cos 2x + \cos 3x = 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$

Donc : $B(x) = 4\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$

Exercice9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$sinx + sin3x + sin5x + sin7x = 0$

8) Transformations des produits en sommes.

De la propriété 1 et de (1)+ (2) on peut conclure que :

$cos(x-y) + cos(x+y) = 2cosx.\,cosy$ d'où :

$cosx.\,cosy = \frac{1}{2}\,[cos(x-y) + cos(x+y)]$

De la même façon on peut montrer les autres égalités :

Propriété : Pour tous réels x, y on a :

$cosx.\,cosy = \frac{1}{2}[cos(x+y) + cos(x-y)]$

$sinx.\,siny = -\frac{1}{2}[cos(x+y) - cos(x-y)]$

$sinx.\,cosy = \frac{1}{2}[sin(x+y) + sin(x-y)]$

La linéarisation d'une expression c'est de l'écrire sous la forme d'une somme.

Application : écrire sous la forme d'une somme

1) $\cos 2x \times \sin 4x$ 2) $\sin x \times \sin 3x$ 3) $\cos 4x \times \cos 6x$

Solution :

1) $\cos 2x \times \sin 4x = \frac{1}{2}\left(\sin(2x+4x) - \sin(2x-4x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 6x - \sin(-2x)\right)$

$= \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x) = \frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 2x$

2) $\sin x \times \sin 3x = \frac{1}{2}\left(\cos(x+3x) - \cos(x-3x)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 4x - \cos(-2x)\right)$

$\sin x \times \sin 3x = \frac{1}{2}\left(\cos 4x - \cos(2x)\right) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos(2x)$

3) $\cos 4x\times\cos 6x=\frac{1}{2}\left(\cos(4x+6x)+\cos(4x-6x)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cos(-2x)\right)$

$\cos 4x\times\cos 6x=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$

Exercice10 : calculer

1) $\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$ 2) $\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$

Solution :

1) $\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\cos\pi+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-2}{4}$

2) $\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\sin\pi+\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Exercice11 : Montrer que

1) $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

2) $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

3) en déduire que: $\frac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

Solution :

1) $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}$

2) $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=-2\cos\frac{5\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}$

3) $\frac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\frac{2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

$=-\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}\times\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)\times\frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

Exercice12 : Montrer que $\frac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\tan 3x\times\tan x$

Solution : on a :

$\cos 2x-\cos 4x=-2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\sin(3x)\sin x$

et $\cos 2x+\cos 4x=-2\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\cos 3x\cos x$

donc : $\frac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\frac{2\sin 3x\sin x}{2\cos 3x\cos x}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=\tan 3x\times\tan x$

car : $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$

Exercice 13: Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$

$\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=-\sin 4x\times\sin x$

Solution :

$\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=\left(\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)\left(\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)$

$\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}=2\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=-2\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Donc : $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$=-2\cos(2x)\times\sin(2x)2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\sin(4x)\sin x$

Exercice 14: Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin 3x=\sin x\times\left(3-4\sin^2 x\right)$

2) $\cos 3x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$

3) $\cos(4x)=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

4) $\sin(4x)=4\sin x\left(2\cos^3 x-\cos x\right)$

5) $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

Solution :1) $\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x$

$=2\sin x\cos^2 x+\left(1-2\sin^2 x\right)\sin x=2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)+\left(1-2\sin^2 x\right)\sin x$

$=2\sin x-2\sin^3 x+\sin x-2\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x=\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)$

2) $\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos x\cos 2x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)+\sin x\times 2\cos x\sin x=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\sin^2 x$

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\left(1-\cos^2 x\right)=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^2 x$

$=4\cos^3 x-3\cos x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$

3) $\cos(4x)=\cos(2\times 2x)=2\cos^2 2x-1=2\left(2\cos^2 x-1\right)^2-1$

$=2\left(4\cos^4 x-4\cos^2 x+1\right)-1=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

4) $\sin(4x)=4\sin x\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)=4\sin x\left(2\cos^3 x-\cos x\right)$

$\sin(4x)=\sin(2\times 2x)=2\sin 2x\cos 2x=2\times 2\sin x\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)$

5) $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$??

Methode1:

$\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos(x+2x))=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x)$

$=\frac{1}{4}\left(3\cos x+\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)-2\sin x\sin x\cos x\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^3 x+3\cos x\right)=\frac{1}{4}\left(4\cos^3 x\right)=\cos^3 x$$

Methode2: $\cos^3 x=\cos^2 x\times\cos x=\frac{1+\cos 2x}{2}\times\cos x=\frac{1}{2}\left(\cos x+\cos 2x\times\cos x\right)$

$$\cos^3 x=\frac{1}{2}\left(\cos x+\frac{1}{2}\left(\cos 3x+\cos x\right)\right)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$$

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}\left(3\cos x+\cos 3x\right)$$

Exercice 15: $P(x)=\sin 2x-\sin x$ et $Q(x)=1+\cos x+\cos 2x$

Montrer que : $P(x)=\sin x\left(2\cos x-1\right)$ et $Q(x)=\cos x\left(2\cos x+1\right)$

Solution :

$Q(x)=1+\cos x+\cos 2x=1+\cos x+2\cos^2 x-1=\cos x+2\cos^2 x=\cos x\left(1+2\cos x\right)$

$P(x)=\sin 2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x\left(2\cos x-1\right)$

Exercices 16:

1- Linéariser : $2\cos^2 x.\ \sin(2x)$

2- Linéariser : $\cos^3 x$

III) LES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

1) Rappelles

1.1 $\boldsymbol{\cos x = a}$

Propriété :Considérons l'équation (E) $\boldsymbol{\cos x = a}$ où a est un réel :

1) si $a < 1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions.

2) les solutions de l'équation $\cos x = 1$ sont les réels $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

3) les solutions de l'équation $\cos x = -1$ sont les réels $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

4) Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $]0, \pi[$ qui vérifie $\cos\alpha = a$ et l'ensemble de solutions de l'équation (E) sera :

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

5) En générale : les réels qui vérifient l'équation $\cos(A(x)) = \cos(B(x))$ sont les solutions des équations $A(x) = B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $A(x) = -B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercices17 :1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle$]-\pi, \pi]$

1.2 $\boldsymbol{\sin x = a}$

Propriété :

Considérons l'équation (E') $\boldsymbol{\sin x = a}$ où a est un réel :

1) si $a < 1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E') n'admet pas de solutions.

2) les solutions de l'équation $\sin x = 1$ sont les réels : $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

3) les solutions de l'équation $\sin x = -1$ sont les réels $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

4) Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui vérifie $\sin\alpha = a$ et l'ensemble des solutions de l'équation (E') sera :

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

5) En générale : les réels qui vérifient l'équation $\sin(A(x)) = \sin(B(x))$ sont les solutions des équations : $A(x) = B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ Ou $A(x) = \pi - B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercices18 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$-\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle$]-\pi, \pi]$

1.3 $\boldsymbol{\tan x = a}$

Propriété : Pour tout réel a, il existe un et un seul réel α dans l'intervalle$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui vérifie $\tan\alpha = a$,

et l'équation $\boldsymbol{\tan x = a}$ aura comme ensemble de solutions $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

En général l'équation : $\tan(A(x)) = \tan(B(x))$ est définie pour les réel x tels que :

$A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $B(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et a pour solution l'ensemble des réels x solution de l'équation : $A(x) = B(x) + k\pi$

Exercices19 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

Exercices20 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0\,;\pi]$ l'équations suivantes :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'équations suivantes :

$\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$

Solution : 1) on a $\cos 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ssi

$2x=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi$

Ssi $2x-x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x+x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ Ssi

$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) on a $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ ssi

$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi$ ou $2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+x+2k\pi$

ssi $3x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Donc $x=\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$: $0\leq\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\leq\frac{7}{36}+\frac{2k}{3}\leq 1$ donc $-\frac{7}{24}\leq k\leq\frac{29}{36}$ Donc

$-0,29\leq k\leq 1,2$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1=\frac{7\pi}{36}$

Pour $k=1$ on trouve $x_2=\frac{7\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}=\frac{31\pi}{36}$

- Encadrement de $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

$0\leq\frac{13\pi}{12}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\leq\frac{13}{12}+2k\leq 1$ Donc $-\frac{13}{24}\leq k\leq-\frac{1}{24}$ Donc

$-0,54\leq k\leq 0,04$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc k n'existe pas

- Donc $S_{[0.\pi]}=\left\{\frac{7\pi}{36};\frac{31\pi}{36}\right\}$

3) on a $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$ est définie ssi

$2x-\frac{\pi}{5}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ ssi $2x\neq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+k\pi$

ssi $2x\neq\frac{7\pi}{10}+k\pi$ ssi $x\neq\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}$ Donc

$D=\mathbb{R}-\left\{\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ Donc

$\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ssi $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+k\pi$ ssi

$2x=\frac{9\pi}{20}+k\pi$ ssi $x=\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\leq\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}\leq\frac{\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$ donc

$-\frac{1}{2}\leq\frac{9}{40}+\frac{k}{2}\leq\frac{1}{2}$ donc $-\frac{29}{40}\leq\frac{k}{2}\leq\frac{11}{40}$

donc $-\frac{29}{40}\leq\frac{k}{2}\leq\frac{11}{40}$ donc $-\frac{29}{20}\leq k\leq\frac{11}{20}$ Donc

$-1,45\leq k\leq 0,55$ et $k\in\mathbb{Z}$ donc $k=0$ ou $k=-1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1=\frac{9\pi}{40}$

Pour $k=-1$ on trouve $x_2=\frac{9\pi}{40}-\frac{\pi}{2}=-\frac{11\pi}{40}$

Donc $S=\left\{-\frac{11\pi}{40};\frac{9\pi}{40}\right\}$

2) L'équation : (E): $a\cos x+b\sin x+c=0$

Si $abc=0$ l'équation (E) se ramène à une équation usuelle.

2.1 Transformation de $a\cos x+b\sin x$

Soient a et b deux réels non nuls on a :

$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

Or : $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$

donc :Il existe un réel φ tel que :

$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Par suite :

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x\right)$

et d'après la formule d'addition

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\varphi\right)$

2.2 L'équation : (E): $acosx + bsinx + c = 0$

Soit a, b et c trois réels non nuls :

$acosx + bsinx + c = 0 \Leftrightarrow acosx + bsinx = -c$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\varphi\right) = -c$

où $cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow cos(x-\varphi) = \dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ça revient à l'étude d'une équation usuelle.

Propriété : Soient a et b deux réels tels que : $(a, b) \neq (0,0)$ on a pour tout réel x :

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\varphi\right)$ où le réel φ est déterminer par : $cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

L'équation $acosx + bsinx + c = 0$ se ramène à :

$cos(x-\varphi) = \dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exemple1 : $\cos x - \sin x$ $a=1$ et $b=-1$

calculons : $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

Exemple2 : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation :

$\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$

Solution : *Transformation de :* $\sqrt{3}\cos x + \sin x$

$b=1$ et $a=\sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$$

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x-\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

Donc : $S = \left\{0; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}$

Exercices21 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\sqrt{3}\,cos(3x) + sin(3x) + 2 = 0$

IV) LES INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1) Rappelles

1.1) Inéquations avec cos

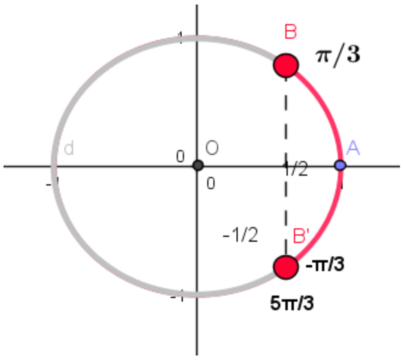
Exemple : Considérons l'inéquation $cosx \geq \frac{1}{2}$

Tout d'abord il faut résoudre l'équation $cosx = \frac{1}{2}$

les images des solutions de cette équation sont :

$M(\frac{\pi}{3})$ et $M'(-\frac{\pi}{3})$ et on constate que les réels qui vérifient l'inéquation $cosx \geq \frac{1}{2}$

sont les abscisse curvilignes des points qui se situent sur l'arc $M'IM$ (en rouge sur la figure)



et par suite on peut conclure que $S_{[-\pi,\pi]} = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

les solutions dans $[0,2\pi]$ sont :

$S_{[0,2\pi]} = [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$

Exercices22 : Résoudre dans $[0,3\pi]$ l'inéquation :

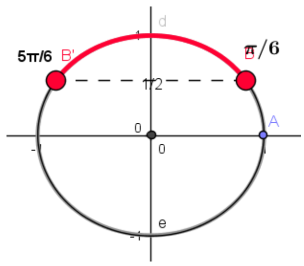
$2cosx + \sqrt{3} \leq 0$

1.2) Inéquations avec sin

Exemple : Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'inéquation suivante : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$\sin x \geq \frac{1}{2}$ ssi $\sin x \geq \sin\frac{\pi}{6}$

donc $S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$



1.3) Inéquation avec tan

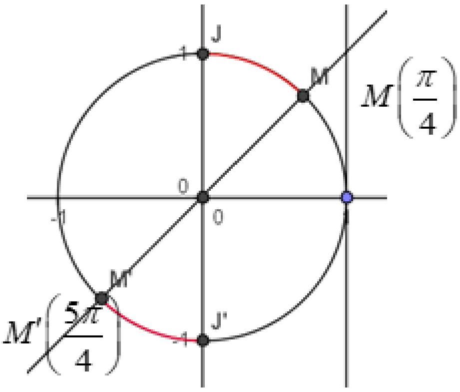
Exemple1 : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x - 1 \geq 0$

On a $\tan x - 1 \geq 0$ ssi $\tan x \geq 1$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{4}=1$ Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq x vérifie

$\tan x-1\geq 0$ Donc

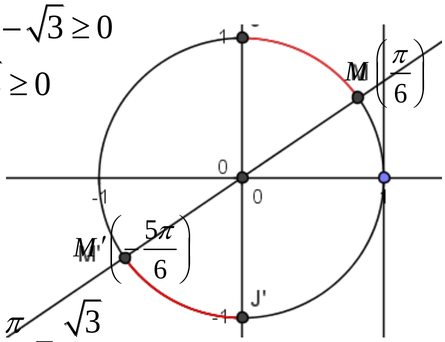
$S=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[$



Exemple2 : Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$

On a $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$

ssi $\tan x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$



On sait que : $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq x vérifie $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$ Donc

$S=\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

Exercices23 : 1)Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation :

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$

2)Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation :

$\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1$

Solution : *Transformation de :* $\sqrt{3}\cos x+\sin x$

$b=-1$ et $a=\sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$:

$-\pi\leq-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1\leq-\frac{1}{2}+2k\leq 1$

Donc $-\frac{1}{4}\leq k\leq\frac{3}{4}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on trouve $x_1=-\frac{\pi}{2}$

- Encadrement de $\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$-\pi\leq\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$

Donc $-1\leq\frac{1}{6}+2k\leq 1$

Donc $-\frac{7}{6}\leq 2k\leq\frac{5}{6}$ Donc $-\frac{7}{12}\leq k\leq\frac{5}{12}$

Donc $k=0$ on trouve $x_2=\frac{\pi}{6}$

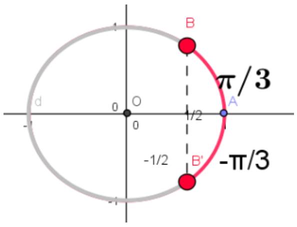
Donc $S_{[-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right\}$

2) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation :

$\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1$?

$\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geq 1\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geq\frac{1}{2}$

On pose : $X=x+\frac{\pi}{6}$ donc $\cos X\geq\frac{1}{2}$



$\cos X\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{3}\leq X\leq\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{3}\leq x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{6}$

$S_{[-\pi,\pi]} = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right]$

Exercices24 : 1) a)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$ et en déduire les solutions dans $[0\,;2\pi]$

b) résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante :

$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \le 0$

2)Résoudre dans $[0\,;\pi]$ l'inéquation suivante :

$(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \ge 0$

solution: 1) a)on pose $t = \sin x$

$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \le 0$ ssi $2t^2 - 9t - 5 \le 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 9t - 5$:

Calcul du discriminant : Δ = (-9) ² – 4 x 2 x (-5) = 121

Les racines sont : $t_1 = \frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$ et

$t_2 = \frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2} = 5$ Donc $\sin x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x = 5$

Or on sait que $-1 \le \sin x \le 1$ donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ ssi $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ssi $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

ssi $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \le -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$

et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le -\frac{1}{6} + 2k \le 2$ Donc $\frac{1}{12} \le k \le \frac{13}{12}$ Donc

$0,08 \le k \le 1,02$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 1$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve

$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \le \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$

et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le \frac{7}{6} + 2k \le 2$ Donc $-\frac{7}{12} \le k \le \frac{5}{12}$ Donc

$-0,5 \le k \le 0,41$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve $x_2 = \frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0\,;2\pi]} = \left\{\frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$

1) b) $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \le 0$ ssi

$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \le 0$

Or on sait que $-1 \le \sin x \le 1$ donc $-1 \le \sin x \le 1 < 5$

Donc $\sin x - 5 < 0$

Puisque $\sin x - 5 < 0$ et $2 > 0$ alors

$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \le 0$ ssi $\sin x + \frac{1}{2} \ge 0$

ssi $\sin x \ge -\frac{1}{2}$ ssi $\sin x \ge \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

L'arc en rouge correspond a tous les points $M(x)$

tq x vérifie $\sin x \ge -\frac{1}{2}$

donc $S = \left[0; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$

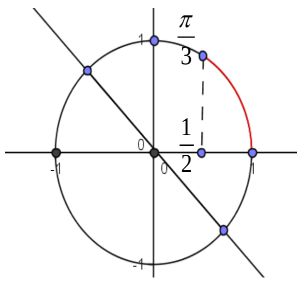
2) l'inéquation $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \ge 0$ est définie

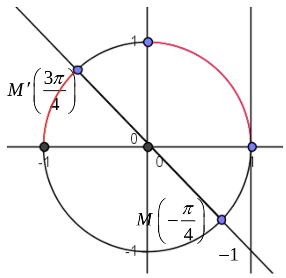
dans $[0\,;\pi]$ ssi $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$

Donc $D = [0\,;\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$2\cos x - 1 \ge 0$ ssi $\cos x = \frac{1}{2}$ ssi $\cos x \ge \cos\frac{\pi}{3}$

$\tan x + 1 \ge 0$ ssi $\tan x \ge -1$ ssi $\tan x \ge \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$





x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos x - 1$		+	0	−		−		−	
$\tan x + 1$		+	‖	+	‖	−	0	+	
$(2\cos x - 1)(\tan x + 1)$		+		−	‖	+	0	−	

donc $S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice25 :

1. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \le -\frac{1}{2}$

2. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \le 0$

3. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $\frac{1+\tan x}{\sin 2x} \ge 0$

Exercice26 :

Résoudre dans $\left[-\frac{11\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}\right]$ l'équation $\sin 3x \ge \frac{1}{2}$

Exercice27 :: soit $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$

Et calculer $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2) en déduire une écriture simple de $A(x)$

3)a)Résoudre dans $I = [-\pi; \pi]$ l'équations: $A(x) = \frac{1}{2}$

3)b) Résoudre dans I l'inéquations: $A(x) \le \frac{1}{2}$

Solution : 1)

$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos x\cos 2x - \sin 2x\sin x$

$= \cos x(2\cos^2 x - 1) + \sin x \times 2\cos x\sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\sin^2 x$

$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^2 x$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$

2) $A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x - 3\sin x + 3(\sin x + \cos x) = 4\cos^3 x$

3)a) $A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\cos^3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^3 x - \frac{1}{8} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) = 0$

Car : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} = 0 \\ X = \cos x \end{cases}$

Puisque : $\Delta \prec 0$ alors cette équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ donc :

$A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

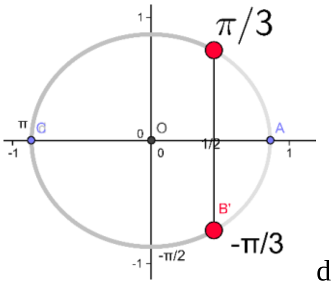
$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $S_{[-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$

3)b) $A(x) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) \le 0$

Puisque : $\Delta \prec 0$ alors $\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} \succ 0$

Donc : $A(x) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \le \cos\frac{\pi}{3}$



donc $S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice28 : on pose :

$A = \sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{2\pi}{9} \times \sin\frac{3\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9}$

1) monter que : $\sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) monter que : $\cos\frac{5\pi}{9} \times \sin\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) en déduire que : $A = \frac{3}{16}$

Solution :

On a : $\sin a \times \sin b = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$

1): $\sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9} = -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) - \cos\left(-\frac{3\pi}{9}\right)\right)$

$\sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{9}\right)$

Donc : $\sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) On a : $\cos a \times \sin b = -\frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$

$\cos\frac{5\pi}{9} \times \sin\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\cos\frac{5\pi}{9} \times \sin\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) déduction : $A=\frac{3}{16}$?

$$A=\left(\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{9}\right)-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{3}{16}$$ Donc : $A=\frac{3}{16}$

Exercice 29: soit : $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $3\sin\theta+5\cos\theta=5$

1) monter que : $5\sin\theta-3\cos\theta=3$

2) déduire la valeur de : $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Solution :1) $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 3\sin\theta=5-5\cos\theta$

$$\Leftrightarrow 3\sin\theta=5(1-\cos\theta)\Leftrightarrow 3\sin\theta=5\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Car : $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$

Donc: $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 3\sin\theta=10\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=10\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Car : $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 6\cos\frac{\theta}{2}=10\sin\frac{\theta}{2}\quad\text{car }\sin\frac{\theta}{2}\neq 0$$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow\tan\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$

Or on sait que : $\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ et $\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta=\frac{5\left(2\tan\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}-\frac{3\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$$3\sin\theta+5\cos\theta=\frac{10\times\frac{3}{5}}{1+\frac{9}{25}}-\frac{3\left(1-\frac{9}{25}\right)}{1+\frac{9}{25}}=\frac{102}{34}=3$$

2)on a le systeme: $\begin{cases}3\sin\theta+5\cos\theta=5\\5\sin\theta-3\cos\theta=3\end{cases}$ on le résolvant on trouve: $\cos\theta=\frac{8}{17}$ et $\sin\theta=\frac{15}{10}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

I) RAPPELLE

1) Définition du produit scalaire.

1.1 Mesure algébrique :

Définition :

Soit $(D)_{(O,I)}$ une droite graduée ; M et N deux points sur la droite (D) d'abscisses respectifs x_M et x_N le réel $x_N - x_M$ s'appelle la mesure algébrique entre les points M et N et se note : $\overline{MN}$

Propriétés :

Sur une droite graduée on a:

- $\overline{NM} = -\overline{MN}$
- $\overline{MM} = 0$
- $\overline{MN} + \overline{NM'} = \overline{MM'}$ (Relation de Shales)
- $|\overline{MN}| = MN$

1.2 Définition du produit scalaire dans $\mathcal{V}_2$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs

➢ On suppose que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Posons $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et soit α la mesure en radian de l'angle $[\widehat{AOB}]$; on a deux cas de figure qui se représentent : $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$;

Soient H la projection orthogonale de B sur (OA) et K la projection orthogonale de A sur (OB) on a :

$$\mathbf{0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}}$$

On a $\overline{OH}$ et $\overline{OA}$ ont même signe donc $\overline{OA} \times \overline{OH} \geq 0$

D'où : $\overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OH$

D'autre part : $cos\alpha = \frac{OH}{OB}$ on conclut que

$OH = OB \cos\alpha$

Et par suite :

$\overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OH = OA \times OB \times \cos\alpha$

De même : $\overline{OK}$ et $\overline{OB}$ ont même signe donc

$\overline{OB} \times \overline{OK} \geq 0$ D'où : $\overline{OB} \times \overline{OK} = OB \times OK$

D'autre part : $cos\alpha = \frac{OK}{OA}$ on conclut que

$OK = OA \cos\alpha$

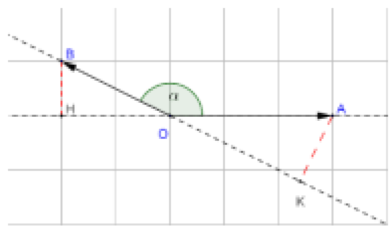
Et par suite :

$\overline{OB} \times \overline{OK} = OB \times OK = OA \times OB \times \cos\alpha$

Finalement :

$$\mathbf{\overline{OB} \times \overline{OK} = \overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OB \times \cos\alpha \geq 0}$$

$$\mathbf{\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi}$$



On a $\overline{OH}$ et $\overline{OA}$ ont des signes opposés donc

$\overline{OA} \times \overline{OH} \leq 0$ D'où : $\overline{OA} \times \overline{OH} = -\, OA \times OH$

D'autre part : $\cos(\pi - \alpha) = \frac{OH}{OB}$ on conclut que

$OH = OB \cos(\pi - \alpha)$

Et par suite et comme $\cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$ on a :

$\overline{OA} \times \overline{OH} = -OA \times OH = OA \times OB \times \cos\alpha$

De même : $\overline{OK}$ et $\overline{OB}$ ont des signes opposés ; donc

$\overline{OB} \times \overline{OK} \leq 0$ D'où : $\overline{OB} \times \overline{OK} = -OB \times OK$

D'autre part : $\cos(\pi - \alpha) = \frac{OK}{OA}$ on conclut que :

$OK = OA \cos(\pi - \alpha)$

Et par suite :

$\overline{OB} \times \overline{OK} = -OB \times OK = OA \times OB \times \cos\alpha$

Finalement :

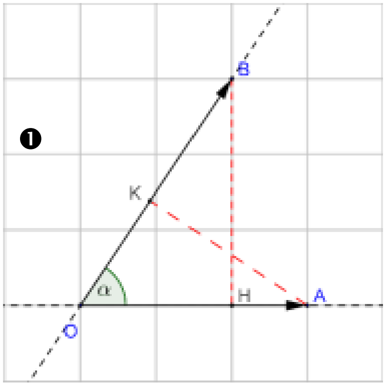
$$\mathbf{\overline{OB} \times \overline{OK} = \overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OB \times \cos\alpha \leq 0}$$

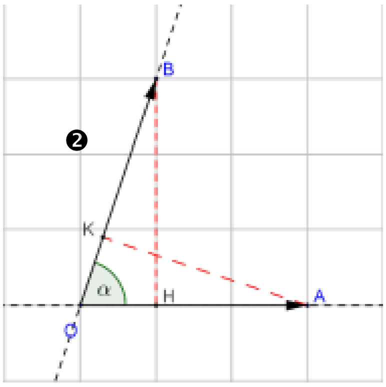
Le réel $\mathbf{\overline{OB} \times \overline{OK} = \overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OB \times \cos\alpha}$ **s'appelle le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et se note $\vec{u} \cdot \vec{v}$**

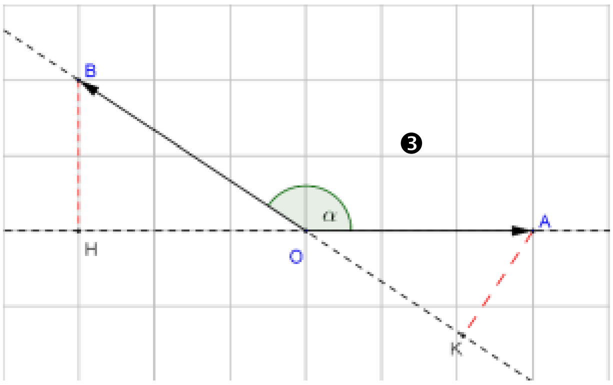
➢ Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ on pose $\mathbf{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

Exercice 1 :

1- Calculer $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ pour chaque figure







2- Calculer $cos\alpha$ dans la figure ❷

3- Calculer OK dans la figure ❸

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle équilatérale tel que : $AB = 6$; calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Cas particuliers :

Soient O, A et B trois ponts du plan et α la mesure de l'angle géométrique $[\widehat{AOB}]$

- Si $\alpha = 0$ on aura : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(0) = OA \times OB$ car $\cos(0) = 1$
- Si $\alpha = \pi$ on aura : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\pi) = -OA \times OB$ car $\cos(\pi) = -1$
- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on aura : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

1.3 Propriétés du produit scalaire

Propriété :

Le produit scalaire est :

- **Symétrique :** Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- **Bilinéaire :** Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel k on a :

  $\vec{u}\cdot\overrightarrow{(v+w)} = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\overrightarrow{(u+v)}\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

  $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k \times (\vec{u}\cdot\vec{v}) = (k\vec{u})\cdot\vec{v}$
- **Le carrée scalaire est positif :** Pour tout vecteurs $\vec{u}$ on a : $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0$ et $(\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0})$

1.4 Norme d'un vecteur

D'parés la propriété précédente on a : Pour tout vecteurs $\vec{u}$ on a : $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0$ $\vec{u}\cdot\vec{u}$ se note $\vec{u}^2$ et s'appelle le carré scalaire

Définition :

Le réel positif $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ s'appelle la norme du vecteur $\vec{u}$ on la note : $||\vec{u}||$

1.5 Une autre définition du produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ on a $OA = ||\vec{u}||$ et $OB = ||\vec{v}||$

et on sait que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\alpha)$

$$= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\alpha)$$

Définition :

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que : $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \alpha[2\pi]$; on a $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos(\alpha)}$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ on pose $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$

1.6 Identités remarquables

Propriétés :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs on a :

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

1.7 Orthogonalité de deux vecteurs

Définition :

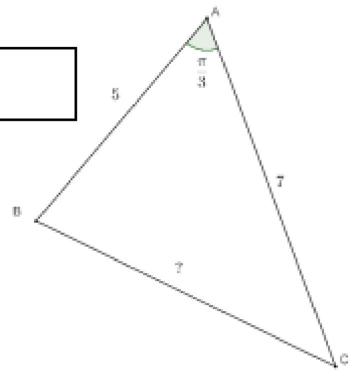
On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul et on écrit $\vec{u}\perp\vec{v}$

Remarques.

- Le vecteur nul est orthogonal avec tous les vecteurs de $\mathcal{V}_2$.
- Si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$ on a : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $(AB)\perp(CD)$.

1.8 Les applications :

Théorème : d'Al-Kashi (1380-1429)

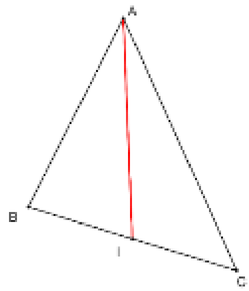


Dans un triangle ABC on a : $\boldsymbol{BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,AB \times AC\cos(\widehat{BAC})}$

Ce théorème est connu sous le nom d'Al-Khasi ; c'est une généralisation du théorème de Pythagore. Il nous permet de déterminer la longueur du troisième côté si on connait la longueur de deux côté et l'angle qu'ils définissent.

Théorème : de la médiane

Soit ABC un triangle et I milieu de $[BC]$; on a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$



Le théorème de la médiane nous permet de calculer la longueur du médiane dans un triangle si on connait les longueurs des trois côtés.

II) INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ

Activité 1:

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et le trinôme $f(x) = (x\,\vec{u}+\vec{v})^2$

1- Développer $f(x)$.

2- Déterminer le signe de $f(x)$.

3- Déterminer le discriminant de $f(x)$.

4- En déduire que : $(\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}_2^2)(\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|)$

5- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Activité 2 :

On sait que pour trois points donnés dans le plan on a : $MA + MB \geq AB$ le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

1- Développer $(\vec{u} + \vec{v})^2$

2- En utilisant l'inégalité précédente montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

3- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Propriété : L'inégalité de Cauchy Schwarz

- Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.
- l'égalité est vérifiée ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété : L'inégalité triangulaire.

- Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
- l'égalité est vérifiée ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

III) ENSEMBLE DES POINTS.

1) $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point fixe dans le plan $(\mathcal{P})$ et $(\Delta_k) = \{M \in (\mathcal{P}) / \vec{u}.\overrightarrow{AM} = k\}$ où k un nombre réel.

Posons : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned} M \in (\Delta_k) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = k \\ &\Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{AH} = k \quad \text{où } H \text{ est la projection orthogonale de } M \text{ sur la droite } (AB) \\ &\Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{k}{AB} \quad \text{qui est constant} \end{aligned}$$

Donc (Δ_k) est la droite qui passe par H définie par $\overline{AH} = \frac{k}{AB}$ et qui est perpendiculaire à (AB)

Application : Soit ABC un triangle équilatérale tel que $AB = 2$

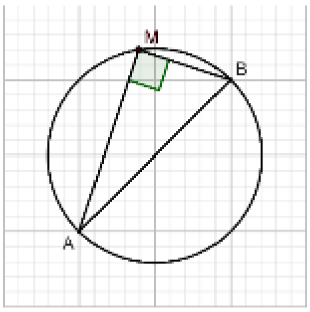
Déterminer est construire l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = -2$.

2) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$

Soient A et B deux points distincts et k un réel $(\Gamma_k) = \{M \in (\mathcal{P}) / \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k\}$

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma_k) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}).(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = k \quad \text{où } I \text{ milieu de } [AB] \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}.\underbrace{(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI})}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IM}^2 = k \qquad \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BI} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}^2 = k + \frac{AB^2}{4} \end{aligned}$$

- Si $k + \frac{AB^2}{4} < 0$ alors : $(\Gamma_k) = \emptyset$
- Si $k + \frac{AB^2}{4} = 0$ alors : $(\Gamma_k) = \{I\}$
- Si $k + \frac{AB^2}{4} > 0$ alors : (Γ_k) est le cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$



Cas particulier : Si $k = 0$ (Γ_0) est le cercle de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon

$R = \sqrt{\frac{AB^2}{4}} = \frac{AB}{2}$ donc (Γ_0) est le cercle de diamètre $[AB]$

Propriété :

Soient A et B deux points distincts dans le plan l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

3) $MA^2 + MB^2 = k$

Exercice :

Soient A et B deux points distincts et k un réel positif $(\Sigma_k) = \{M \in (\mathcal{P}) / MA^2 + MB^2 = k\}$

1- Montrer que $M \in (\Sigma_k) \Leftrightarrow MI^2 = \frac{2k - AB^2}{4}$ où I est le milieu de $[AB]$

2- Discuter suivant les valeurs de k la nature de l'ensemble (Σ_k).

Application :

Soit ABC un triangle rectangle en A et $(\mathcal{C}) = \{M \in (\mathcal{P}) / MB^2 + MC^2 = BC^2\}$.

1- Vérifier que $A \in (\mathcal{C})$

2- Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C})$.

4) $MA^2 - MB^2 = k$

Exercice :

Soient A et B deux points distincts et k un réel $(\Delta_k) = \{M \in (\mathcal{P}) / MA^2 - MB^2 = k\}$

1- Montrer que $M \in (\Delta_k) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = \frac{k}{2}$ où I est le milieu de $[AB]$

2- Déterminer la nature de l'ensemble (Δ_k).

Application.

Soit $ABCD$ un carrée, déterminer et construire l'ensemble des points M qui vérifient : $MA^2 - MB^2 = BD$

5) $\frac{MA}{MB} = k$

Soient A et B deux point distincts et k un réel strictement positive $(\Gamma_k) = \{M \in (\mathcal{P}) / \frac{MA}{MB} = k\}$

- Si $k = 1$ alors : $M \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow MA = MB$

  (Γ_k) est la médiatrice du segment $[AB]$

- Si $k \neq 1$ Montrer que

  $M \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$ où $I = bar\{(A,1),(B,k)\}$ et $J = bar\{(A,1),(B,-k)\}$

  Déterminer l'ensemble (Γ_k).

Application.

Soit $ABCD$ un carrée, déterminer et construire l'ensemble des points M qui vérifient : $\frac{MA}{MB} = 2$

6) $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$ $\quad\quad$ $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Exercice

Soient ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $AB = 1$ et D le point symétrique de A par rapport à B

Soit $(\mathcal{C}) = \{M \in (\mathcal{P}) / MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 15\}$

1- Montrer que $D \in (\mathcal{C})$

2- Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C})$

7) $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$ $\alpha + \beta + \gamma = 0$

Exercice

Soient ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $AB = 1$ et I le milieu de $[BC]$

Soit $(\Delta) = \{M \in (\mathcal{P}) / MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0\}$

1- Montrer que $I \in (\Delta)$

2- Déterminer et construire l'ensemble (Δ)

PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Etude analytique

I) BASE ET REPERE ORTHONORMES

Définitions :

Soit $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}_2$.

- La base β est dite **orthogonale** si $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$
- La base β est dite **normée si** $\|\vec{\imath}\| = \vec{\jmath} = 1$
- Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.

Soit $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan $(\mathcal{P})$

- On dit que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé si la base $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ associé à $\mathcal{R}$ est orthonormée.

II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

Soit $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormée de $\mathcal{V}_2$. et $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_2$; on a :

$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{u'} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath}$

$\vec{u}.\overrightarrow{u'} = (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}).(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})$

$= xx'\,\vec{\imath}^2 + xy'\ \ \vec{\imath}.\vec{\jmath} + y\,x'\ \ \vec{\jmath}.\ \ \vec{\imath} + yy'\,\vec{\jmath}^2$ d'après la bilinéarité du produit scalaire.

$= xx' + yy'$ $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base orthonormée

Propriété :

L'espace $\mathcal{V}_2$ est rapporté à une base orthonormée $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_2$ on a :

- $\vec{u}.\overrightarrow{u'} = xx' + yy'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\vec{u} \perp \overrightarrow{u'} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exercice :

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Considérons la droite (D): $2x - y + 1 = 0$ et N un point sur la droite (D) d'abscisse α.

1- Déterminer les coordonnées de N.

2- Déterminer la distance ON.

3- Déterminer pour quelle valeur de α la distance ON est minimale.

III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

1) L'expression de cos :

L'espace $\mathcal{V}_2$ est rapporté à une base orthonormée $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_2$ on a :

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

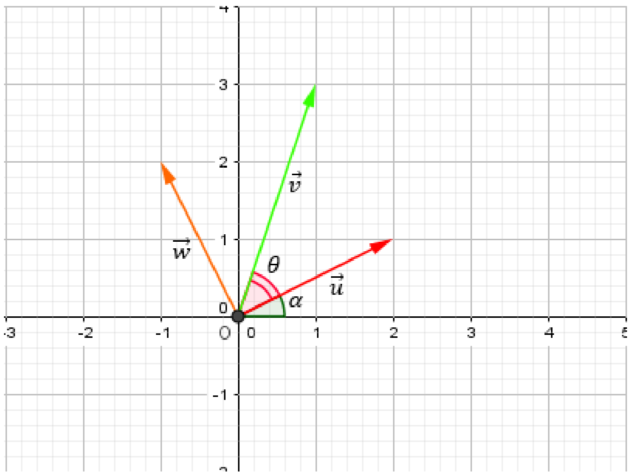
Par suite : $cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

2) L'expression de sin :

2.1 L'écriture trigonométrique d'un vecteur.

L'espace $\mathcal{V}_2$ est rapporté à une base orthonormée $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et α la mesure da l'angle **polaire** $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}})$



Puisque $\vec{\imath}\binom{1}{0}$ alors : $\vec{u}.\vec{\imath} = x$ et puisque $\vec{\jmath}\binom{0}{1}$ alors

$\vec{u}.\vec{\jmath} = y$

d'autre part : $\vec{u}.\vec{\imath} = \|\vec{u}\|cos\alpha$

$\vec{u}.\vec{\jmath} = \|\vec{u}\|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y$

$= \|\vec{u}\|sin\alpha$

On peut conclure que : $\begin{cases} x = \vec{u}.\vec{\imath} = \|\vec{u}\|cos\alpha \\ y = \vec{u}.\vec{\jmath} = \|\vec{u}\|sin\alpha \end{cases}$

Et par suite : $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = \|\vec{u}\|cos\alpha\,\vec{\imath} + \|\vec{u}\|sin\alpha\,\vec{\jmath}$

$= \|\vec{u}\|(cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath})$

Cette écriture s'appelle l'écriture **trigonométrique** du vecteur $\vec{u}$.

2.2 L'expression de sin

Soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ et α la mesure da l'angle polaire $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}})$ et $\vec{w}$ le vecteur tel que : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|$ et $(\overline{\vec{u},\vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

D'après l'écriture trigonométrique du vecteur $\vec{w}$ on a :

$\vec{w} = \|\vec{w}\|\ cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\,\vec{\imath} + \|\vec{w}\|sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\,\vec{\jmath}$

$= -\|\vec{u}\|\ sin\alpha\,\vec{\imath} + \|\vec{u}\|cos\alpha\,\vec{\jmath}.$ (car : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|$)

$= -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

Par suite $\vec{w}\binom{-y}{x}$

D'où on peut conclure que : $\vec{v}.\vec{w} = -x'y + xy'$ et on a : $\vec{v}.\vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|sin\theta$

où : $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \theta\ [2\pi]$

Ce qui nous permet de confirmer que : $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|sin\theta = -x'y + xy'$ et donc : $sin\theta = \frac{xy'-x'y}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

Théorème :

L'espace $\mathcal{V}_2$ est rapporté à une base orthonormée $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$; Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$.

$$cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}} \quad \text{et} \quad sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

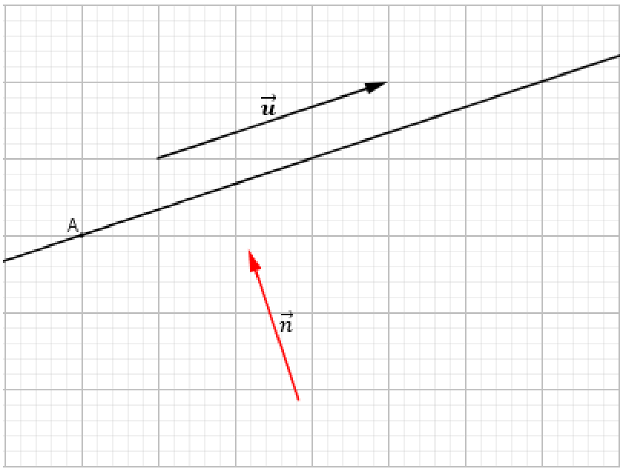
Application : Déterminer la mesure principale de l'angle définie par : $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

1) Vecteur normal sur une droite.

Définition :

Soit $D_{(A,\vec{u})}$ la droite passante par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; tout vecteur $\vec{n}$ **non nul et orthogonal à** $\vec{u}$ s'appelle un vecteur **normal sur la droite** (D).



Remarque :

- Si $\vec{n}$ est normal sur une droite (D) ; Tout vecteur non nul colinéaire avec $\vec{n}$ est aussi normal sur la droite (D).
- Si $(D): ax+by+c=0$ est une droite dans le plan alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D), l vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est non nul et orthogonal à $\vec{u}$ donc normal sur la droite (D).

2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Soient $A(x_A,y_A)$ un point donné, et $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul. Soit (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{v}$ comme vecteur normal.

$$M(x,y)\in(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{v}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$$

$$\Leftrightarrow ax+by-(ax_A+by_A)=0$$

Propriété :

Soient $A(x_A,y_A)$ un point donné, et $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul. La (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{v}$ comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :$(D): a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

Exercice :

Considérons le triangle ABC où $(2,1)$, $B(5,0)$ et $C(7,6)$

1- a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

b) En déduire les coordonnées du point Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

2) Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité de ABC.

3) Déterminer les coordonnées du point H, orthocentre du triangle ABC.

4) Vérifier que les points Ω , G et H sont alignés

3) Distance d'un point par rapport à une droite.

Définition :

Soient (D) une droite et M_0 un point dans le plan. La distance du point M_0 à la droite (D) est la distance M_0H où H est la projection orthogonal de M_0 sur (D).

On la note : $d(M_0,(D))$

Remarque

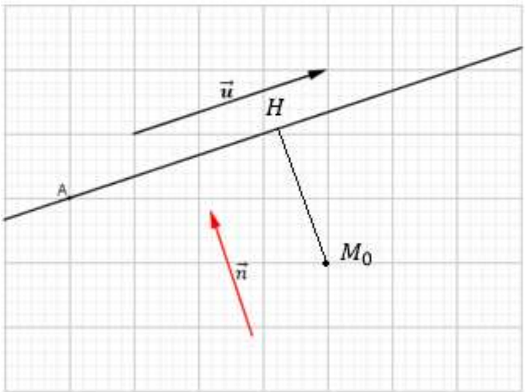
La distance d'un point M_0 à une droite (D) est la plus petite distance de M_0 à un point M de (D)

$d\big(M_0,(D)\big) = \min\limits_{M\in(D)} M_0M$

Preuve :

Soit la droite $(D): ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$;

Soit H la projection orthogonale de M_0 sur (D), $\vec{n}\binom{a}{b}$ est normal sur (D). On a pour tout point $A(x_A, y_A)$ de la droite (D) :



$\overrightarrow{M_0A}.\vec{n} = \big(\overrightarrow{M_0H} + \overrightarrow{HA}\big).\vec{n}$

$= \overrightarrow{M_0H}.\vec{n} + \overrightarrow{HA}.\vec{n}$

$= \overrightarrow{M_0H}.\vec{n}$

On conclue que $\big|\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}\big| = |\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}|$ par suite

$M_0H \times \|\vec{n}\| = |\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}|$

Et finalement : $M_0H = \frac{|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

En passant à l'expression analytique :

$\vec{n}\binom{a}{b}$ et $\overrightarrow{M_0A}\binom{x_A - x_0}{y_A - y_0}$ par suite : $M_0H = \frac{|a(x_A-x_0)+b(y_A-y_0)|}{\|\vec{n}\|}$

$= \frac{|ax_A+by_A-ax_0-by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad A \in (D) \Leftrightarrow ax_A + by_A = -c$

$= \frac{|-c-ax_0-by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Théorème :

Soient $(D): ax + by + c = 0$ une droite et $M_0(x_0, y_0)$ un point dans le plan. La distance du point M_0 à la droite (D) est : $\boldsymbol{d\big(M_0,(D)\big) = M_0H = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

Exercice :

Considérons la parabole d'équation : $(P): y = x^2$ et la droite $(D): y = x - 1$

1- Tracer la droite (D) et la parabole (P).

2- Soit N_α un point d'abscisse α et varie sur la parabole (P)

a) Déterminer en fonction de α la distance $d\big(N_\alpha,(D)\big)$.

b) Pour quelle valeur de α la distance $d\big(N_\alpha,(D)\big)$ est minimale.

V) L'INTERPRETATION ANALYTIQUE DE L'INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ

Rappelle :

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

- Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.
- l'égalité est vérifiée si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

L'inégalité triangulaire.

- Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
- l'égalité est vérifié si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

Propriétés :

L'espace vectoriel $\mathcal{V}_2$ est muni d'une base $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormée.

Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ on a :

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \boldsymbol{xx' + yy'} \leq |\boldsymbol{xx' + yy'}| \leq \sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2}} \times \sqrt{\boldsymbol{x'^2+y'^2}}$$

- L'inégalité triangulaire.

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \sqrt{\boldsymbol{(x+x')^2+(y+y')^2}} \leq \sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2}} + \sqrt{\boldsymbol{x'^2+y'^2}}$$

PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Etude analytique (1)

I) BASE ET REPERE ORTHONORMES

Définitions : Soit $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base de V_2.

1) La base B est dite **orthogonale** si $\vec{i}.\vec{j}=0$

2) La base B est dite **normée si** $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$

3) Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.

4)Soit O un point du plan

Soit $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ un repère du plan $(\mathcal{P})$

On dit que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé si la base $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$) associé à $\mathcal{R}$ est orthonormée.

On pose : $\vec{i}=\overrightarrow{0I}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{0J}$

II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

Soit $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base orthonormée de V_2.

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a : $\vec{u}.\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)$

Et d'après la bilinéarité du produit scalaire on a :

$\vec{u}.\vec{v}=xx'\vec{i}\vec{i}+yy'\vec{j}\vec{j}$ car $\vec{i}.\vec{j}=0$

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ puisque: $\left\|\vec{i}\right\|=1$ et $\left\|\vec{j}\right\|=1$

On a donc la propriété suivante :

Propriété : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a :

1) $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

2) $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$

3) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

Si $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$ alors

$$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

Exercice : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(1;-3)$ et $B(3;7)$ et $C(-3;1)$

1)Montrer que le triangle ABC est rectangle en C

2)Calculer la surface du triangle ABC

Solution : 1)

Methode1 **:** $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;4)$ et $\overrightarrow{AB}(2;10)$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2^2+10^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$

$AC=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

Puisque : $AC^2+BC^2=32+72=104$ et $AB^2=104$

Donc : $AC^2+BC^2=AB^2$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

Methode2 : $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;4)$

Donc : $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BC}=24-24+0$ Donc : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

2)puisque le triangle ABC est rectangle en C alors :

$S=\frac{1}{2}CA\times CB=\frac{1}{2}4\sqrt{2}\times6\sqrt{2}=24$

Exercice :

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Considérons la droite (D): $2x-y+1=0$ et N un point sur la droite (D) d'abscisse α.

1- Déterminer les coordonnées de N.

2- Déterminer la distance ON.

3- Déterminer pour quelle valeur de α la distance ON est minimale.

III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

1) L'expression de cos :

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

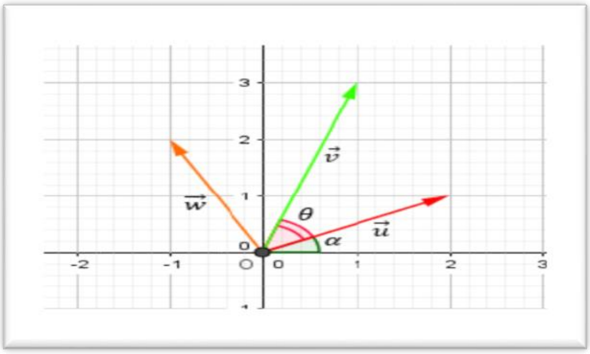
Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=xx'+yy'$

Par suite : $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

2) L'expression de sin :

2.1 L'écriture trigonométrique d'un vecteur.

L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$



$\vec{u}(x;y)$ et α la mesure da l'angle **polaire** $\left(\vec{i};\vec{u}\right)$

Puisque $\vec{i}(1;0)$ alors : $\vec{u}\cdot\vec{i}=x$ et puisque $\vec{j}(0;1)$ alors

$\vec{u}\cdot\vec{j}=y$ D'autre part: $\vec{u}\cdot\vec{i}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{i}\|\cos\left(\vec{u};\vec{i}\right)=\|\vec{u}\|\cos\alpha$

$$\vec{u}\cdot\vec{j}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{j}\|\cos\left(\vec{u};\vec{j}\right)=\|\vec{u}\|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{j}=\|\vec{u}\|\sin\alpha$$

On peut conclure que : $\begin{cases} x=\|\vec{u}\|\cos\alpha \\ y=\|\vec{u}\|\sin\alpha \end{cases}$

Et par suite: $\vec{u}=\|\vec{u}\|\cos\alpha\vec{i}+\|\vec{u}\|\sin\alpha\vec{j}=\|\vec{u}\|\left(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}\right)$

Cette écriture s'appelle l'écriture trigonométrique du vecteur $\vec{u}$.

2.2 L'expression de sin :

$\vec{u}(x;y)$ et α la mesure da l'angle polaire $\left(\vec{i};\vec{u}\right)$

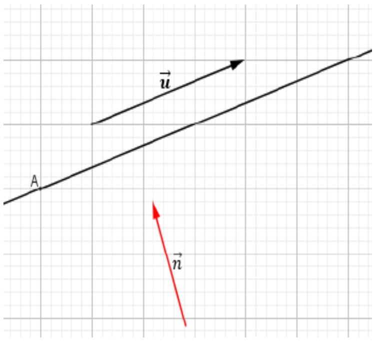
et $\vec{w}$ le vecteur tel que : $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$ et $\left(\vec{u};\vec{w}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'après l'écriture trigonométrique du vecteur $\vec{w}$

on a : $\vec{w}=\|\vec{w}\|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\|\vec{w}\|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$

$$\vec{w}=-\|\vec{w}\|\sin\alpha\vec{i}+\|\vec{w}\|\cos\alpha\vec{j}=-\|\vec{u}\|\sin\alpha\vec{i}+\|\vec{u}\|\cos\alpha\vec{j}$$

(car : $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$) $\vec{w}=-y\vec{i}+x\vec{j}$



Par suite $\vec{w}(-y;x)$

D'où on peut conclure que :

$\vec{v}\cdot\vec{w}=-x'y+xy'$

et on a :

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cos\theta$$

où : $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv\theta[2\pi]$ Ce qui nous permet de confirmer que : $\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin\theta=-x'y+xy'$

et donc : $\sin\theta=\dfrac{xy'-x'y}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\dfrac{\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

Théorème : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$

$$\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\sin\theta=\frac{xy'-x'y}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Exercice: dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(5;0)$ et $B(2;1)$ et $C(6;3)$

1) Calculer $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2)en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Solution : 1) $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$ et

$$\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$$

et on a : $\overrightarrow{AB}(-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;3)$

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-3\times1+1\times3=-3+3=0$

$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ et $AC=\sqrt{10}$

$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{0}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=0$

$\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{-10}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-1$

2) on a : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ et $AB=AC$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{-\pi}{2}[2\pi]$ car : $\left(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{-\pi}{4}[2\pi]$ et

$\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=-1$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$

$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{-\pi}{2}-\frac{\pi}{4}[2\pi]=-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

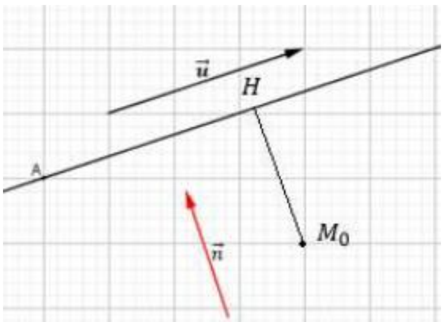
1) Vecteur normal sur une droite.

Définition : Soit $D\left(A;\vec{u}\right)$ la droite passante par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; tout vecteur $\vec{n}$ non nul et orthogonal à $\vec{u}$ s'appelle un vecteur normal sur la droite **(D)**.

Remarque :

Si $\vec{n}$ est normal sur une droite (D) ; Tout Vecteur non nul colinéaire avec $\vec{n}$ est aussi Normal sur la droite (D).

Si (D): $ax + by + c = 0$ est une droite dans le plan alors $\vec{u}(-b;a)$) est un vecteur directeur de la droite (D), et le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est non nul et orthogonal à $\vec{u}$ donc normal sur la droite (D).



2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Soient $A\left(x_A;y_A\right)$ un point donné, et $\vec{v}(a;b)$ un vecteur non nul. Soit (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{v}$ comme vecteur normal.

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{v}=0\Leftrightarrow a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$

$\Leftrightarrow ax+by-\left(ax_A+by_A\right)=0$

Propriété : Soient $A\left(x_A;y_A\right)$ un point donné, et $\vec{n}(a;b)$ un vecteur non nul. La (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{n}$ comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :

(D): $a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$

Exercice : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0;1)$ et qui admet $\vec{n}(2;1)$ comme vecteur normal

Solution : on a (D) qui passe $A(0;1)$ et $\vec{n}(2;1)$ un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite (D) est : $2(x-0)+1(y-1)=0$

donc : (D) : $2x+y-1=0$

Exercice : donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1) $(D): x-2y+5=0$

2) $(D): 2y-3=0$ 3) $(D): x-1=0$

Solution : un vecteur normal a la droite (D) d'équation cartésienne : $ax+by+c=0$

Est $\vec{n}(a;b)$

1) $(D): x-2y+5=0$: $\vec{n}(1;-2)$ un vecteur normal

2) $(D): 0x+2y-3=0$: $\vec{n}(0;2)$ un vecteur normal

2) $(D): 1x+0y-1=0$: $\vec{n}(1;0)$ un vecteur normal

Exercice : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(-3;0)$ et $B(3;0)$ et $C(1;5)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à la droite (AB) passant par C

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à la droite (AB) passant par C

Solution : 1)soit M un point du plan $(\mathcal{P})$

$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 6(x-1)-(y-5)=0$

$\Leftrightarrow 6x-y-1=0$

Donc : $(D): 6x-y-1=0$

1)soit $M(x;y)$ un point du plan $(\mathcal{P})$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\vec{n}=0$

Avec $\vec{n}$ un vecteur normal a la droite (AB)

Le vecteur : $\overrightarrow{AB}(6,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et on a : $\vec{n}(1,6)$

On a donc : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow (x-1)+6(y-5)=0$

$\Leftrightarrow x+6y-31=0$ Donc : $(\Delta): x+6y-31=0$

Exercice : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(1;2)$ et $B(-2;3)$ et $C(0;4)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite (D) médiatrice du segment $[AB]$

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Solution : 1) $(D)/ ax+by+c=0$

Avec $\overrightarrow{AB}(a,b)$ un vecteur normal a (D)

$\overrightarrow{AB}(-3,1)$ donc : $(D)/-3x+y+c=0$

Or $I \in (D)$ I est le milieu du segment $[AB]$

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right)$

Donc : $-3\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}+c=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{5}{2}+c=0 \Leftrightarrow c=-4$

Par suite : $(D)/-3x+y-4=0$

2) (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire a (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(2,1)$ un vecteur normal a (Δ) donc

$(\Delta)/2x+y+c=0$ et on a $A \in (\Delta)$ donc

$2\times1+2+c=0 \Leftrightarrow c=-4$

$(\Delta)/2x+y-4=0$

Exercice : Considérons le triangle ABC où A (2,1) B (5,0) et C (7,6)

1- a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

b) En déduire les coordonnées du point Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

2) Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité de ABC.

3) Déterminer les coordonnées du point H, orthocentre du triangle ABC.

4) Vérifier que les points Ω , G et H sont alignés

3) droites perpendiculaires

proposition : Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$

on considère les deux droites : $(D): ax+by+c=0$ et $(D'): a'x+b'y+c'=0$

$(D)\perp(D') \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{n'} \Leftrightarrow aa'+bb'=0$

Avec $\vec{n}$ le vecteur normal de (D) et $\vec{n}'$ le vecteur normal de (D')

Exercice : (D) $2x+3y-1=0$ et (D') $\frac{3}{2}x-y+4=0$

Etudier la position relative de (D) et (D')

Solution :

$\vec{n}(2;3)$ est un vecteur normal de (D)

$\vec{n'}\left(\frac{3}{2};-1\right)$ est un vecteur normal de (D')

$\vec{n}\cdot\vec{n'} = 2\times\frac{3}{2}+3\times(-1)=3-3=0$ donc $\vec{n}\perp\vec{n'}$

donc $(D)\perp(D')$

4) Distance d'un point par rapport à une droite.

Définition : Soient (D) une droite et M_0 un point dans le plan. La distance du point M_0 à la droite (D) est la distance M_0H où H est la projection orthogonal de M_0 sur (D).On la note : $d(M_0;(D))$

Remarque : La distance d'un point M_0 à une droite (D) est la plus petite distance de M_0 à un point M de (D) $d(M_0;(D)) = \min_{M\in(D)}(M_0M)$

Preuve : Soit la droite (D): $ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0;y_0)$;Soit H la projection orthogonale de M_0 sur (D), $\vec{n}(a;b)$ est normal sur (D).

On a pour tout point $A(x_A;y_A)$ de la droite(D) :

$\overrightarrow{M_0A}.\vec{n} = \left(\overrightarrow{M_0H}+\overrightarrow{HA}\right).\vec{n} = \overrightarrow{M_0H}.\vec{n}+\overrightarrow{HA}.\vec{n} = \overrightarrow{M_0H}.\vec{n}$

Donc : $\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}=\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}$

On conclue que $\left|\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}\right|=\left|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}\right|$ par suite

$\left\|\overrightarrow{M_0H}\right\|\left\|\vec{n}\right\|=\left|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}\right|$ et finalement : $M_0H=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

En passant à l'expression analytique :

$\vec{n}(a;b))$ et $\overrightarrow{M_0A}(x_A-x_0;y_A-y_0)$

par suite : $M_0H=\dfrac{\left|a(x_A-x)_0+b(y_A-y_0)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$M_0H=\frac{\left|ax_A-ax_0+by_A-by_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$M_0H=\frac{\left|ax_A+by_A-ax_0-by_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Or $A\in(D)\Leftrightarrow ax_A+by_A+c=0$

$\Leftrightarrow ax_A+by_A=-c$

D'où $M_0H=\dfrac{\left|-c-ax_0-by_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Théorème : Soient la droite (D): $ax+by+c=0$ et $M_0(x_0;y_0)$ un point dans le plan.

La distance du point M_0 à la droite (D) est :

$$M_0H=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exercice : Soient la droite (D) d'équation :

$(D):3x+4y+5=0$

1)Déterminer les coordonnées du point H la projection orthogonale de O sur (D)

2)calculer La distance du point O à la droite (D)

3)Déterminer les coordonnées du point O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Solution : 1)puisque H est la projection orthogonale de O sur (D) alors H est le point d'intersection de la droite (D)et la droite (Δ) qui passe par O et perpendiculaire a (D) on va donc résoudre le système suivant : $\begin{cases}(D):3x+4y+5=0\\(\Delta):4x-3y=0\end{cases}$ On trouve :

$x=\dfrac{-3}{5}$ et $y=\dfrac{-4}{5}$ donc $H\left(\dfrac{-3}{5};\dfrac{-4}{5}\right)$

Autre méthode :Soit $H(x_H;y_H)$ on a

$H\in(D)\Leftrightarrow 3x_H+4y_H+5=0$

$\overrightarrow{OH}$ est normal a la droite (D) donc colinéaire avec $\vec{u}(3;4)$ Donc : $\exists k\in\mathbb{R}/\overrightarrow{OH}=k\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=3k\\y_H=4k\end{cases}$

Pour déterminer x_H et y_H on va donc résoudre le système suivant : $\begin{cases}(1)\,x_H=3k\\(2)\,y_H=4k\\(3)\,3x_H+4y_H+5=0\end{cases}$

On remplace (1) et (2) dans (3) on trouve :

$k=\dfrac{-1}{5}$ Donc : $\begin{cases}x_H=\dfrac{-3}{5}\\y_H=\dfrac{-4}{5}\end{cases}$

2) $d(O;(D))=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\left|3\times0+4\times0+5\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{5}{5}=1$

3) O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Donc H est le milieu du segment $[OO']$

Donc : $\overrightarrow{O'H}=-\overrightarrow{OH}$ on pose : $O'(x;y)$

Donc : $\begin{cases}\dfrac{-3}{5}-x=\dfrac{3}{5}\\\dfrac{-4}{5}-y=\dfrac{4}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{6}{5}\\y=-\dfrac{8}{5}\end{cases}$ Donc : $O'\left(-\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5}\right)$

Exercice : Considérons la parabole d'équation : (P): $y=x^2$ et la droite (D): $y=x-1$

1- Tracer la droite (D) et la parabole (P).

2- Soit $N\alpha$ un point d'abscisse α et varie sur la parabole (P)

a) Déterminer en fonction de α la distance $d(N\alpha\ ,(D))$.

b) Pour quelle valeur de α la distance $d(N\alpha\ ,(D))$ est minimale.

V) L'INTERPRETATION ANALYTIQUE DE L'INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ

Activité 1: Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et le trinôme $f(x)=\left(x\vec{u}+\vec{v}\right)^2$

1- Développer $f(x)$.

2- Déterminer le signe de $f(x)$.

3- Déterminer le discriminant de $f(x)$.

4- en déduire que pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$\vec{u}.\vec{v}\le\left|\vec{u}.\vec{v}\right|\le\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|$

5- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Activité 2 : On sait que pour trois points donnés dans le plan on a : $MA + MB \geq AB$ le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

1- Développer $(\vec{u} + \vec{v})^2$

2- En utilisant l'inégalité précédente montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

3- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

a)Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

b) l'égalité est vérifiée si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

L'inégalité triangulaire.

a) Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

b) l'égalité est vérifié si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

Propriétés : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B(\vec{i};\vec{j})$ Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ on a

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$

$xx' + yy' \leq |xx' + yy'| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}$

2) L'inégalité triangulaire.

: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}$

Exercice: dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(1;-1)$ et $B(4;-1)$ et $C(-2;2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

2)en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

3)Calculer la surface du triangle ABC

4)déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5)déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Solution :1) on a : $\overrightarrow{AB}(3;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;3)$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 3 \times (-3) + 0 \times 3 = -9$

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$

2)soit α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ on a :

$\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$ et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$ et $AC = 3\sqrt{2}$

Donc : $\cos\alpha = \dfrac{-9}{9\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{9}{9\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$

3) on a : $S = \dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right| = \dfrac{9}{2} cm^2$

4)soit (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire a (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(-6,3)$ un vecteur normal a (Δ) donc

$(\Delta)/ -6x + 3y + c = 0$ et on a $A(1;-1) \in (\Delta)$ donc

$-6 \times 1 - 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 9$

$(\Delta)/ -6x + 3y + 9 = 0$ donc : $(\Delta)/ 2x - y - 3 = 0$

4)soit (D) la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Pour Chaque point $M(x,y)$ de la droite (D)

On a : $d(M;(AB)) = d(M;(AC))$

D'où $\dfrac{|y+1|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \dfrac{|x+y|}{\sqrt{0^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}|y+1| = |x+y|$

On remarque que (D) se trouve dans le demi plan tel que : $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$ donc : $\sqrt{2}(y+1) = x+y$

donc : l'équation cartésienne de (D) est :

$\begin{cases} x + (1-\sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0 \\ y+1 \geq 0 \end{cases}$ (D) est un demi droite

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

LE CERCLE

Etude analytique

Dans tout ce qui va suivre le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.

I) EQUATION D'UN CERCLE

Définition :

Soient Ω un point et r un réel positif, le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M dans le plan $(\mathcal{P})$ qui vérifient :$\Omega M = r$ on le note, $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_{(\Omega,r)} = \{M \in (\mathcal{P})/\Omega M = r\}}$$

Remarque :

On peut considérer le point comme étant un cercle de rayon nul.

1) Cercle défini par son centre et son rayon.

Soient $\Omega(a,b)$ un point et r un réel positif,

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C}_{(\Omega,r)} &\Leftrightarrow \Omega M = r \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Propriété :

Soient $\Omega(a,b)$ un point et r un réel positif, le cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ à une équation cartésienne de la forme :

$\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

2) Equation réduite d'un cercle

On a :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C}_{(\Omega,r)} &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{où : } \alpha = -2a \ ; \beta = -2b \text{ et } \gamma = a^2 + b^2 - r^2 \end{aligned}$$

Propriété :

Tout cercle dans le plan à une équation de la forme : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où α , β et γ sont des réels.

Inversement :

Soient α , β et γ trois réels et $(\Gamma) = \{M(x,y) \in (\mathcal{P})/x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$ déterminons en fonction des réels α , β et γ la nature de l'ensemble (Γ).

$$\begin{aligned} M(x,y) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \gamma \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}{4} \end{aligned}$$

- Si $\frac{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}{4} < 0$ alors $(\Gamma) = \emptyset$
- Si $\frac{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}{4} = 0$ alors $(\Gamma) = \left\{\Omega\left(\frac{-\alpha}{2}, \frac{-\beta}{2}\right)\right\}$
- Si $\frac{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}{4} > 0$ alors $(\Gamma) = \mathcal{C}_{(\Omega, \sqrt{\rho})}$ où $\Omega\left(\frac{-\alpha}{2}, \frac{-\beta}{2}\right)$ et $\rho = \frac{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}{4}$

Exercice 1 :

Déterminer les ensembles :

$(\Gamma_1) = \{M(x,y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0\}$

$(\Gamma_2) = \{M(x,y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - x + 2y + 4 = 0\}$

Exercice 2 :

Soit l'ensemble :$(\Gamma_m) = \{M(x,y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 - 1 = 0\}$ où m est un réel.

1- Montrer que pour tout m dans $\mathbb{R}$, l'ensemble (Γ_m) est un cercle et déterminer ses éléments.

2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle (Γ_m).

3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres Ω_m quand m décrit $\mathbb{R}$

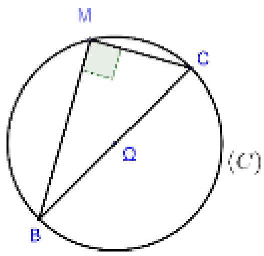
4- a) Déterminer pour quelles valeurs de m le point $A(-1,2)$ appartient-il à (Γ_m).

b) Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels m qui vérifient $M_0 \in (\Gamma_m)$

5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles (Γ_m).

3) Cercle définie par son diamètre.

Propriété : (Rappelle)



Soient A et B deux points distincts dans le plan l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

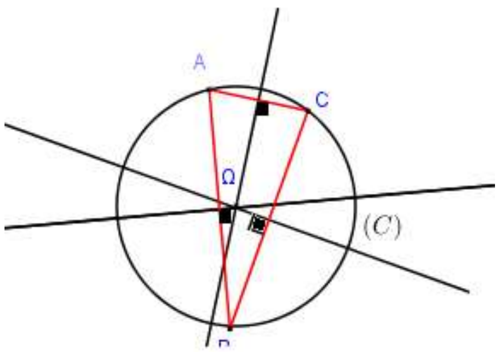
Ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :

Propriété :

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre $[AB]$ à pour équation :
$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

4) Cercle circonscrit à un triangle.

Soit ABC un triangle, les médiatrices du triangle ABC se coupent en Ω le centre du cercle qui conscrit le triangle ABC



Exercice :

Soient les points $A(-1,0)$, $B(1,2)$ et $C(5,-2)$

1- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

2- Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.

Définition :

Soit $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ un cercle dans le plan.

- L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M \leq r$ s'appelle la boule fermée de centre Ω et de rayon r, il s'appelle aussi l'intérieur du cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$.
- L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M > r$ s'appelle l'extérieur du cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$.

Application : La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

Exemple :

Nous allons résoudre graphiquement le système : $(\Sigma)\colon \begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+\frac{11}{4}<0 \\ x^2+y^2+2x-4>0 \end{cases}$

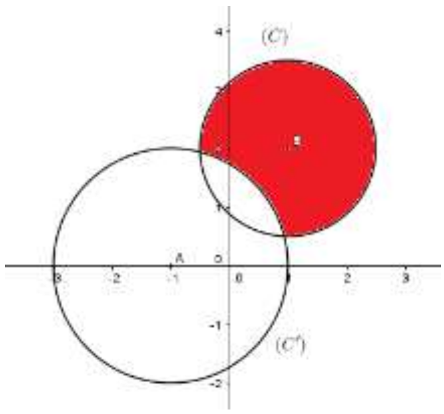
$x^2+y^2-2x-4y+\frac{11}{4}=0$ est l'équation du cercle $(\mathcal{C})$

de centre $B(1,2)$ et de rayon $r=\frac{3}{2}$

$x^2+y^2+2x-4=0$ est l'équation du cercle $(\mathcal{C}')$

de centre $A(-1,0)$ et de rayon $r'=2$.

L'ensemble des points M qui vérifient est l'extérieur de $(\mathcal{C}')$ intersection l'intérieur de $(\mathcal{C})$



Exercices :

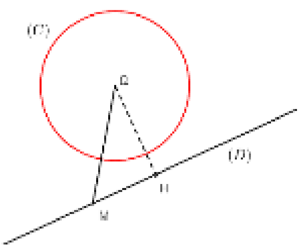
Résoudre graphiquement $(x^2+y^2-4x-6y+9)(2x-y+1)\leq 0$

III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.

1) Propriété

Soit $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ un cercle de rayon r strictement positif et (D) une droite dans le plan. Pour étudier les positions relatives du cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ de (D), il suffit de déterminer la distance de Ω à (D). soit H la projection orthogonal de Ω sur (D)

$d(\Omega,(D))=\Omega H>r$

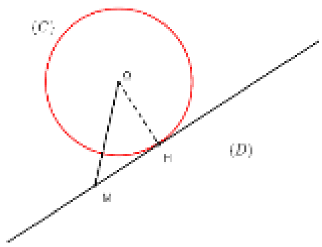


Soit M un point de la droite (D) on a :

$\Omega M \geq \Omega H > r$ donc tout point de la droite (D) est strictement à l'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$

$$(\mathcal{C})\cap(D)=\emptyset$$

$d(\Omega,(D))=\Omega H=r$



Puisque $\Omega H=r$ alors H est un point commun entre (D) et $(\mathcal{C})$.

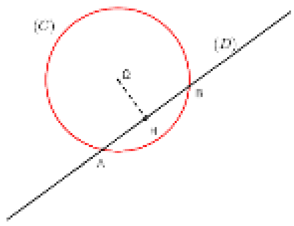
Soit M un point de la droite (D) différent de H on a :

$$\Omega M > \Omega H = r$$

donc tout point de la droite (D) différent de H est strictement à l'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$.

$$(\mathcal{C})\cap(D)=\{H\}$$

$d(\Omega,(D))=\Omega H<r$



Dans ce cas le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (D) se coupent en deux points A et B et H est le milieu du segment $[AB]$

2) Droite tangente à un cercle.

2.1 Définition

Dans tous ce qui suit le rayon du cercle est strictement positif.

Définition :

> Une droite (D) est dite tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ s'ils se coupent en un seul point.

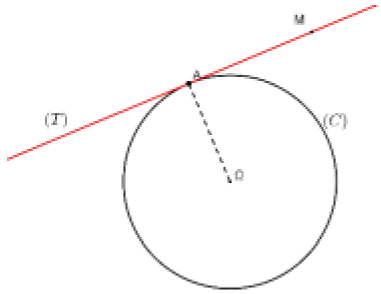
Propriété :

> Une droite (D) est dite tangente au cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ si et seulement si $d\big(\Omega,(D)\big) = r$

2.2 Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.

Soit $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ un cercle dans le plan où $\Omega(a,b)$ et A l'un de ses points.

Soit la droite (T) la tangente à $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ en A



$M(x,y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_A)(y - y_A) + (a - x_A)(b - y_A) = 0$

Propriété :

> Soient $\Omega(a,b)$ un point et $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ un cercle dans le plan et A l'un de ses points. La droite (T) tangente à $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ en A à pour équation : $(x - x_A)(y - y_A) + (a - x_A)(b - y_A) = 0$

Application :

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$

1- Vérifier que le point $A(3,-1)$ appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

2- Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

2.3 Tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ passante par un point à l'extérieure de $(\mathcal{C})$

Exercice :

Soient le cercle $(\mathcal{C})$: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ et $A(5,6)$

1- Vérifier que le point A est à l'extérieur de $(\mathcal{C})$

2- a)Déterminer l'équation de la droite (δ) passante par A et parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Vérifier que (δ) n'est pas tangente à $(\mathcal{C})$.

3- Soit (Δ) une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : (Δ) $y = mx + p$

a) Déterminer l'équation de (Δ) en fonction de m uniquement.

b) Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

4- Soit $B(4,5)$

a) Montrer que la droite passante par B et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

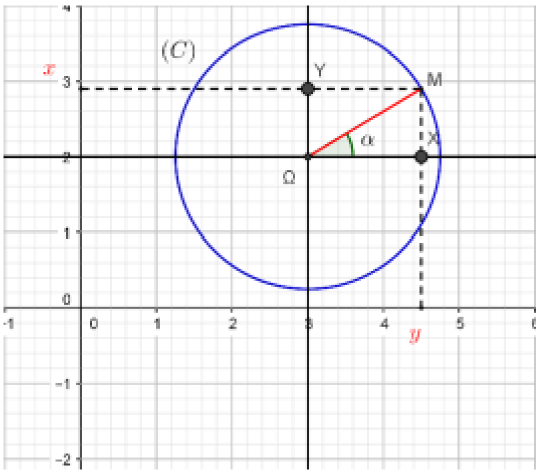
b) Soit (Δ') une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta')\ y = mx + p$; Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

2.3 Tangente à un cercle et de direction déterminée.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(-1,2)$ et de rayon 3.

Déterminer les équations des tangentes à $(\mathcal{C})$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

3) Equation paramétrique d'un cercle.



Considérons $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R.

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ (1)

Si $M(x,y)_{\mathcal{R}}$ et $M(X,Y)_{\mathcal{R}'}$ où : $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $\mathcal{R}'(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Alors (1) se traduit analytiquement par :

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$$

Or : $\begin{cases} X = R.cos\alpha \\ Y = R.sin\alpha \end{cases}$

et par suite : $\begin{cases} x = a + R.cos\alpha \\ y = b + R.sin\alpha \end{cases}$

Réciproquement l'ensemble $(\Gamma) = \left\{M(x,y) \in (\mathcal{P}) / \begin{cases} x = a + R.cos\alpha \\ y = b + R.sin\alpha \end{cases}\right\}$ où a et b sont des réels et R un réel positif

est le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R.

PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Etude analytique (2) -Applications- : cercle

Dans tout ce qui va suivre le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé.

I) EQUATION D'UN CERCLE

Définition : Soient Ω un point et r un réel positif, le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M dans le plan $(\mathcal{P})$ qui vérifient : $\Omega M = r$ on le note, $\mathcal{C}(\Omega,r)$: $C(\Omega;r) = \{\boldsymbol{M \in (\mathcal{P}) / \Omega M = r}\}$

Remarque :
On peut considérer le point comme étant un cercle de rayon nul.

1) Cercle défini par son centre et son rayon.

Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif,

$M(x, y) \in C(\Omega;r) \Leftrightarrow \Omega M = r$

$\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

Exemple : déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon $r=3$

Solution : l'équation cartésienne du cercle est :

$\mathcal{C}(\Omega,r)$: $(x+1)^2+(y-2)^2=3^2$

C a d : $x^2+y^2+2x-4y-4=0$

Propriété : Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif, le cercle $\mathcal{C}(\Omega,r)$ à une équation cartésienne de la forme : $\mathcal{C}(\Omega,r)$: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

2) Equation réduite d'un cercle

On a : $M(x, y) \in \mathcal{C}(\Omega,r) \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où : $\alpha = -2a$; $\beta = -2b$ et $\gamma = a^2 + b^2 - r^2$

Propriété1 : Tout cercle dans le plan à une équation de la forme : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$
où α , β et γ sont des réels.

Propriété2 : Soit (C) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que :

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

avec a ; b ; c des réelles

• Si : $a^2+b^2-c \succ 0$
alors (C) est une cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

• Si : $a^2+b^2-c=0$ alors $(C)=\{\Omega(a;b)\}$

• Si : $a^2+b^2-c \prec 0$ alors $(C)=\varnothing$

PREUVE : $M(x;y)\in(C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2+c-a^2-b^2=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c=0$

• Si : $a^2+b^2-c \succ 0$ alors (C) est une cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

• Si : $a^2+b^2-c=0$ alors $(C)=\{\Omega(a;b)\}$

• Si : $a^2+b^2-c \prec 0$ alors $(C)=\varnothing$

Exemples : Déterminer L'ensemble (E) dans les cas suivants :

1) (E): $x^2+y^2-x+3y-4=0$

2) (E): $x^2+y^2-6x+2y+10=0$

3) (E): $x^2+y^2-4x+5=0$

Solutions : 1) $a=\frac{1}{2}; b=-\frac{3}{2}; c=-4$

On a : $a^2+b^2-c=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-(-4)=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+4=\frac{13}{2}>0$

Donc : $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ donc $\Omega(\frac{1}{2};\frac{-3}{2})$

$R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

alors (E) : est une cercle de centre $\Omega(\frac{1}{2};\frac{-3}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$

2) $a=3; b=-1; c=10$ $a^2+b^2-c=3^2+(-1)^2-10=9+1-10=0$

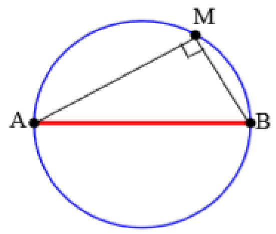
alors $(E)=\{\Omega(3;-1)\}$

3) $a=2; b=0; c=5$

$a^2+b^2-c=4-5=-1<0$ alors $(E)=\varnothing$

3) Cercle définie par son diamètre.

Propriété : (Rappelle)
Soient A et B deux points distincts dans le plan l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.Ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :



Propriété : Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre $[AB]$ à pour équation :
$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

Exemple : Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1;2)$ et $B(-3;1)$

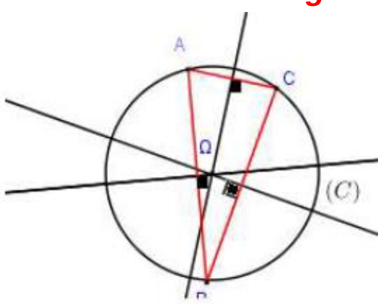
solution : $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\overrightarrow{MA}(1-x;2-y)$ et $\overrightarrow{MB}(-3-x;1-y)$

$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow(-3-x)(1-x)+(1-y)(2-y)=0$

Donc : $(C):x^2+y^2+2x-3y-1=0$

4) cercle définie par trois points ou Cercle circonscrit à un triangle



Soit ABC un triangle, les médiatrices du triangle ABC se coupent en Ω le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC

Exemple : le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$A(2;3)$ $B(0;1)$; $C(-4;5)$; $E(5;2)$ et $F(2;4)$

1)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.
2)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

Solution : 1)Soient $I(1;2)$ et $J(-1;4)$ le milieu respectivement du segments : $[AB]$ et $[AC]$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$ donc (Δ) passe par $I(1;2)$ et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (Δ)

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-2;-2)$ donc une équation de (Δ) est :

$(\Delta):-2(x-1)-2(y-2)=0$

Donc : $(\Delta):-2x+2-2y+4=0$ donc $(\Delta):-2x-2y+6=0$

donc $(\Delta):x+y-3=0$ (après simplifications)

Et soit (Δ') la médiatrice de $[AC]$ donc (Δ') passe par $J(-1;4)$ et $\overrightarrow{AC}$ un vecteur normal a (Δ') et on a : $\overrightarrow{AC}(-6;2)$ donc une équation de (Δ') est :

$(\Delta'):-6(x+1)+2(y-4)=0$ donc : $(\Delta'):3x-y+7=0$

On a Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (Δ') on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases}(\Delta):x+y-3=0\\(\Delta'):3x-y+7=0\end{cases}$$

Et la solution de ce système est : $(-1;4)$ donc $\Omega(-1;4)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est :

$r=A\Omega=\sqrt{(-1-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{10}$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-4)^2=10$

$(C):x^2+y^2+2x-8y+7=0$

2)déterminons l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

On sait que l'équation du cercle s'écrit sous la forme :
$(C'):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Et on a : $O\in(C')\Leftrightarrow c=0$

$E(5;2)\in(C')\Leftrightarrow 25+4-10a-4b=0$

$F(2;4)\in(C')\Leftrightarrow 4+16-4a-8b=0$

on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases}10a+4b=29\\a+2b=5\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{19}{8}\\b=\dfrac{21}{16}\\c=0\end{cases}$$

Et l'équation du cercle est :

$(C'):x^2+y^2-\dfrac{19}{4}x-\dfrac{21}{8}y=0$

II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.

Définition : Soit $C(\Omega;r)$ un cercle dans le plan.

a) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M \leq r$ s'appelle la boule fermée de centre Ω et de rayon r, il s'appelle aussi l'intérieur du cercle $C(\Omega;r)$

b) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M > r$ s'appelle l'extérieur du cercle $C(\Omega;r)$

Application : La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

Exemple : Nous allons résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+\dfrac{11}{4} \prec 0 \\ x^2+y^2+2x-4 \succ 0 \end{cases}$$

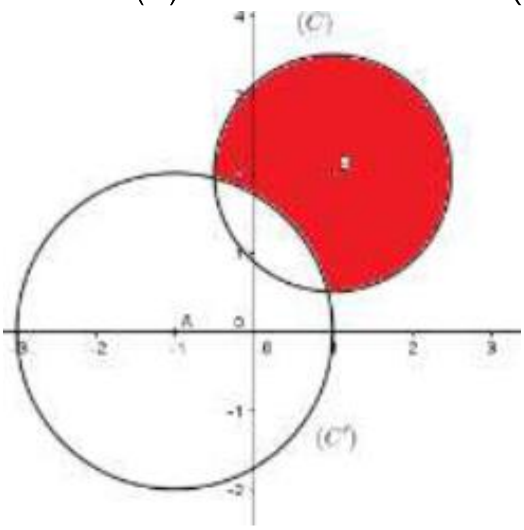
$x^2+y^2-2x-4y+\dfrac{11}{4}=0$

est l'équation du cercle $(\mathcal{C})$

de centre $B(1,2)$ et de rayon $r=\dfrac{3}{2}$

$x^2+y^2+2x-4=0$ est l'équation du cercle $(\mathcal{C}')$ de centre $A(-1,0)$ et de rayon $r'=2$.

L'ensemble des points M qui vérifient (S) est l'extérieur de $(\mathcal{C}')$ intersection l'intérieur de $(\mathcal{C})$



Exercice1 : résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases} (1): x^2+y^2-4x \prec 0 \\ (2): x-y-1 \succ 0 \end{cases}$$

Solution :

- $(1): x^2+y^2-4x \prec 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2 \prec 2^2$

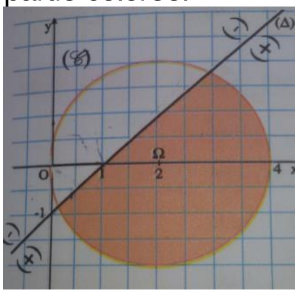
Donc les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x;y)$ des points qui se trouvent à l'intérieurs du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $r=2$

- $(2): x-y-1 \succ 0$: les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x;y)$ des points qui se trouvent au-dessous de la droite d'équation : $(\Delta): x^2+y^2-4x=0$

(demi plan qui contient $\Omega(2;0)$

Car $: 2-0-1=1 \succ 0$)

Finalement l'ensemble des solutions du système c'est les couples $(x;y)$ des points qui appartiennent à la partie colorée.



Exercice2 : Résoudre graphiquement

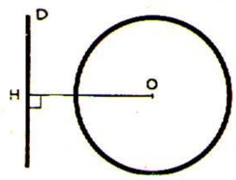
$(x^2+y^2-4x-6y+9)(2x-y+1) \leq 0$

III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.

1) Propriété

Soit $C(O;r)$ un cercle de rayon r strictement positif et (D) une droite dans le plan. Pour étudier les positions relatives du cercle $C(O;r)$ de (D), il suffit de déterminer la distance de O à (D). soit H la projection orthogonal de O sur (D)

1) Si $d(O;(D))=OH \succ r$

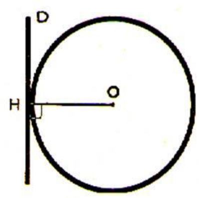


Soit M un point de la droite (D) on a :

$OM \geq OH > r$ donc tout point de la droite (D) est strictement à L'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$

$(\mathcal{C}) \cap (D) = \emptyset$

2) $d(O;(D))=OH=r$



Puisque $OH=r$ alors H est un point commun entre (D) et $(\mathcal{C})$.

Soit M un point de la droite (D) Différent de H on a :

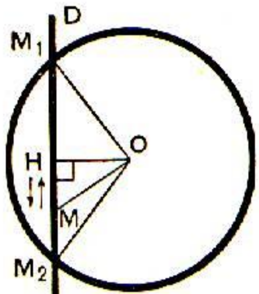
$OM > OH = r$

Donc tout point de la droite (D) différent de H est strictement à L'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$.

$(\mathcal{C}) \cap (D) = \{H\}$ Ont dit que la droite (D) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en H

3) $d(O, (D)) = \Omega H < r$

Dans ce cas le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite(D) se coupent en deux points M_1 et M_2 et H est le milieu du segment $[M_1M_2]$



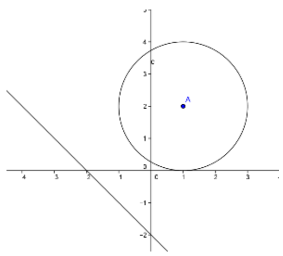
Exemple1 :Etudier la position du cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=2$ avec la droite d'équation $(D): x+y+2=0$

Solution : on calcul $d(\Omega,(P))$?

$$d(\Omega,(P))=\frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>R=2$$

Donc : droite (D) est à L'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$

$(\mathcal{C}) \cap (D) = \emptyset$



Exemple2 :Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=2$ avec la droite d'équation $(D): x-y+2=0$

Solution : on calcul $d(\Omega,(P))$?

$$d(\Omega,(P))=\frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<R=2$$

Donc : le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (D) se coupent en deux points A et B

Déterminons les coordonnées des points d'intersections ?

On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\,(x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2 \\ (2)\,x-y+2=0 \end{cases}$$

On a : $(2) \Leftrightarrow x+2=y$

On remplaçant dans (1) $y=x+2$

On trouve : $(1)(x-1)^2+(x+2-2)^2=(2)^2$

Donc : $(x-1)^2+(x)^2=4 \Leftrightarrow x^2-2x+1+x^2=4$

Donc : $2x^2-2x-3=0 \quad \Delta=28$

Donc : $x_1=\frac{2+2\sqrt{7}}{4}$ et $x_2=\frac{2-2\sqrt{7}}{4}$

Donc : $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ et $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

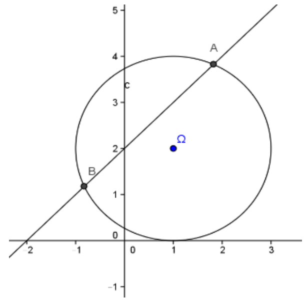
Si : $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ on remplace dans $x+2=y$

On trouve : $y_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}+2=\frac{5+\sqrt{7}}{2}$

Si : $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ on remplace dans $x+2=y$

On trouve :

$y_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$



Donc : les points d'intersections sont :

$A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2};\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$ et

$B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2};\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$

Exemple3 :Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=1$ avec la droite d'équation $(D): y=3$

Solution : on calcul $d(\Omega,(P))$?

$(D): 0x+1y-3=0$

$$d(\Omega,(P))=\frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{1}}=1=R$$

Donc : la droite (D) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A

Déterminons les coordonnées du point d'intersection ou point de tangence ?

L'équation de $(\mathcal{C})$ est $(x-1)^2+(y-2)^2=1^2$

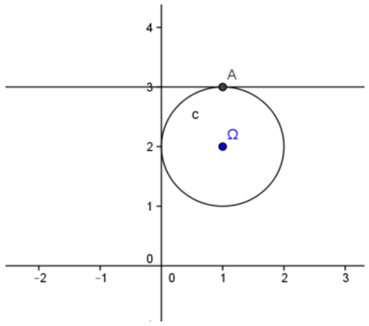
On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\,(x-1)^2+(y-2)^2=1 \\ (2)\,y=3 \end{cases}$$

On remplaçant dans $y=3$ dans (1)

On aura :

$(1)(x-1)^2+1=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0$



Donc : $x=1$ donc point de tangence est $A(1;3)$

2) Droite tangente à un cercle.

2.1 Définition

Dans tous ce qui suit le rayon du cercle est strictement positif.

Définition : Une droite (D) est dite tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ s'ils se coupent en un seul point.

Propriété : Une droite (D) est dite tangente au cercle $\mathcal{C}$ (Ω, r) si et seulement si d $(\Omega, (D)) = r$

2.2 Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.

Soit $\mathcal{C}$ (Ω, r) un cercle dans le plan où Ω (a, b) et A l'un de ses points.

Soit la droite (T) la tangente à $\mathcal{C}$ (Ω, r) en A

$M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

$\Leftrightarrow (x-x_A)(y-y_A)+(a-x_A)(b-y_A)=0$

Propriété : Soient Ω (a, b) un point et $\mathcal{C}$ (Ω, r) un cercle dans le plan et A l'un de ses points. La droite (T) tangente à $\mathcal{C}(\Omega,r)$ en A à pour équation :

$(x-x_A)(y-y_A)+(a-x_A)(b-y_A)=0$

exemple : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation :

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$ (1)

1)Vérifier que $A(0;1) \in (C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

Solution :1)On a : $0^2+1^2-4\times0-2\times1+1=0$

Donc $A(0;1) \in (C)$

2)L'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A. ??

$a=2; b=1; c=1$: $a^2+b^2-c=2^2+1^2-1=4>0$

Donc $(\mathcal{C})$ cercle de centre $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ cad $\Omega(2;1)$

$\overrightarrow{A\Omega}(-2;0)$ et $\overrightarrow{AM}(x-0;y-1)$

$M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega}=0$

$-2(x-0)=0 \Leftrightarrow -2(x-0)+0(y-1)=0 \Leftrightarrow M(x;y) \in (D)$

$M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow x=0$

Donc : L'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A est : $(D): x=0$

Application : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation :

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$

1)Vérifier que le point A $(3, -1)$ appartient au cercle

2- Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

2.3 Tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ passante par un point à l'extérieure de $(\mathcal{C})$

Exercice :

Soient le cercle $(\mathcal{C})$: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ et $A(5,6)$

1- Vérifier que le point A est à l'extérieur de $(\mathcal{C})$

2- a) Déterminer l'équation de la droite (δ) passante par A et parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Vérifier que (δ) n'est pas tangente à $(\mathcal{C})$.

3- Soit (Δ) une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : (Δ) $y = mx + p$

a) Déterminer l'équation de (Δ) en fonction de m uniquement.

b) Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

4- Soit $B(4,5)$

a) Montrer que la droite passante par B et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Soit (Δ') une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : (Δ') $y = mx + p$; Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

2.3 Tangente à un cercle et de direction déterminée.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(-1,2)$ et de rayon 3. Déterminer les équations des tangentes à $(\mathcal{C})$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2;1)$.

3) Equation paramétrique d'un cercle.

le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

Considérons $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r. On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ (1)

Si $M(x, y)$ dans $\mathcal{R}$ et $M(X, Y)$ dans $\mathcal{R}'$ où : $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ et $\mathcal{R}'(O;\vec{i};\vec{j})$

Alors (1) se traduit analytiquement par : $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$

or $\begin{cases} X = r\cos\alpha \\ Y = r\sin\alpha \end{cases}$ et par suite : $\begin{cases} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\sin\alpha \end{cases}$

Réciproquement l'ensemble

$$(C) = \left\{ M(x;y) \in (P) / \begin{cases} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\sin\alpha \end{cases} \right\}$$

où a et b sont des réels et r un réel positif est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r

Exemple1 :Déterminer l'*équation paramétrique du cercle* (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$

Solution :l'*équation paramétrique du cercle* (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$ est :

$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\cos\theta \\ y = -2 + \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ avec $(\theta \in \mathbb{R})$

Exemple2 : Déterminer l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan tel que :

$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{3}\cos\theta \\ y = 1 + \sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$ avec $(\theta \in \mathbb{R})$

Solution : $\begin{cases} x - 3 = \sqrt{3}\cos\theta \\ y - 1 = \sqrt{3}\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{3}\cos\theta \\ y = 1 + \sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{3}\cos\theta\right)^2 + \left(\sqrt{3}\sin\theta\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 3\left((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{3}^2$$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(3;1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$

Exercice1 :le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. (C) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ avec $(\theta \in \mathbb{R})$

1) montrer que (C) est *le cercle* (C) dont on déterminera de centre Ω et de rayon R et une équation cartésienne

2)soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à l'extérieur du cercle (C) et déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A

3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ et qui sont parallèles à la droite : (D) : $3x - 4y = 0$

4)a)soit la droite (Δ) d'équation : $y = x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer

4)b) déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\frac{x^2+y^2}{4} \le x \le y$

Solution :1) $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2\cos\theta \\ y - 0 = 2\sin\theta \end{cases}$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = (2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 4\left((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $R = 2$

2) $A(-1;0)$; (C) : $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

On a : $(-1-2)^2 + (0-0)^2 - 4 = 9 - 4 \succ 0$ donc A est à l'extérieur du cercle (C)

Soit (T) une droite qui passe par A et tangente au cercle $(\mathcal{C})$ et soit : $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de (T) avec $(a;b) \neq (0;0)$

Puisque (T) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ alors :

$d(\Omega,(T)) = R$ cad $\frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2$:

Et on a : $A \in (T)$ donc : $-a + c = 0$ donc on trouve :

$b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ou $b = -\frac{a\sqrt{5}}{2}$ et l'équation cartésienne de (T) est : $2x - \sqrt{5}y + 2 = 0$ ou $2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$

Par suite les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A sont :

(T_1) : $2x - \sqrt{5}y + 2 = 0$ ou (T_2) : $2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$

3) (D) : $3x - 4y = 0$ $\quad \Omega(2;0)$

Puisque $(T) \parallel (D)$ donc on pose :

(T) : $3x - 4y + c = 0$ et (T) tangentes au cercle $(\mathcal{C})$

Donc : $d(\Omega,(T)) = R \Leftrightarrow$ cad $\frac{|6+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 2$:

$\Leftrightarrow \frac{|6+c|}{5} = 2 \Leftrightarrow |6+c| = 10 \Leftrightarrow 6 + c = 10$ Ou $6 + c = -10$

$c=4$ ou $c=-16$
Donc les tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ sont :

(T_1') : $3x-4y+4=0$ ou (T_2') : $3x-4y-16=0$

4)a) on va résoudre le système suivant :

$\begin{cases}(x-2)^2+(y-0)^2=2^2\\ y=x\end{cases}$ donc : $y=x$ et $2x^2-4x=0$

donc : ($x=0$ ou $x=2$) et $y=x$

donc : (Δ) coupe le cercle (C) aux points :

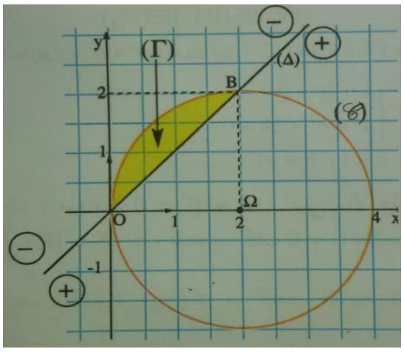
$O(0;0)$ et $B(2;2)$

4)b) $\dfrac{x^2+y^2}{4}\leq x\leq y \Leftrightarrow \begin{cases}x-y\leq 0\\ x^2+y^2-4x\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y\leq 0\\ (x-2)^2+y^2-4\leq 0\end{cases}$

L'inéquation : $(x-2)^2+y^2-4\leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle (C) ou sur le cercle (C)

Et L'inéquation : $x-y\leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve au-dessus de la droite (Δ) ou sur la droite (Δ)

Voire la figure ci-dessus :



Exercice2 : le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$A(3;4)$ $B(4;1)$; $C(2;-3)$

1)montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2)Ecrire l'équation du cercle (C) passant par A ; B et C

Solution : 1) on a : $\overrightarrow{AB}(1;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;-7)$

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & -7\end{vmatrix}=-10\neq 0$

Donc les points A ; B et C sont non alignés

1)Soient $I\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ et $J(3;-1)$ le milieu respectivement du segments : $[AB]$ et $[BC]$

Et soit (D) la médiatrice de $[AB]$ donc (D) passe par I et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (D)

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{7}{2}\right)-3\left(y-\dfrac{5}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x-3y+4=0$

Donc : $(D): x-3y+4=0$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[BC]$ donc (Δ) passe par J et $\overrightarrow{BC}$ un vecteur normal a (Δ)

$M(x;y)\in(\Delta)\Leftrightarrow \overrightarrow{JM}\bullet\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow x+2y-1=0$

Donc : $(\Delta): x+2y-1=0$ (après simplifications)

soit Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (D) on va donc résoudre le système :

$\begin{cases}x-3y+4=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$

Et la solution de ce système est : $\Omega(-1;1)$ donc $\Omega(-1;1)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est : $r=A\Omega=\sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2}=5$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

$(C): x^2+y^2+2x-2y-23=0$

Exercice 3: le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. (C_m) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que :

$(C_m): x^2+y^2-2mx+2y+2m=0$ avec m Paramètre réel

1)déterminer l'ensemble (C_1)

2) a)montrer que $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$ (C_m) est *un cercle* dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) b) montrer que tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(C_0);(C_2);(C_3)$

3) a) montrer que la droite (Δ) : $x=1$ est tangente A toutes les *cercles* (C_m)

3) b)soit $m \succ \frac{-3}{2}$ et $m \neq 1$ et le point $A(0;1)$

Vérifier que A est à l'extérieur des *cercles* (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m)

solution :1) (C_1) ? pour $m=1$ on a :

$(C_1): x^2+y^2-2x+2y+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=0 et y+1=0 \Leftrightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : (C_1) est le point $E(1;-1)$

2) a) $(C_m): x^2+y^2-2mx+2y+2m=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-m)^2+(y+1)^2=(m-1)^2$

Donc : (C_m) est *un cercle* de centre $\Omega_m(m;-1)$ et de rayon $R_m=|m-1| \quad \forall m \in \mathbb{R}-\{1\}$

2) b)on pose : $x=m$ et $y=-1$ avec $m \in \mathbb{R}-\{1\}$

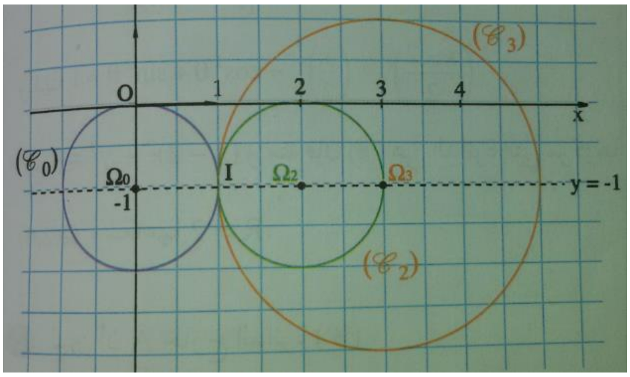
on a donc: l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m \in \mathbb{R}-\{1\}$ est la droite d'équation : $y=-1$ privé du Point $E(1;-1)$

2) b) $I(a;b) \in (C_m) \ \forall m \in \mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ma+2b+2m=0$

$\Leftrightarrow m(2-2a)+a^2+b^2+2b=0 \ \forall m \in \mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2a=0 \\ a^2+b^2+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1$ et $b=-1$ Donc : tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe $I(1;-1)$



3) a)L'équation de (Δ) est : $x+0y-1=0$

Et $d(\Omega_m,(\Delta)) = \frac{|m-1|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |m-1| = R_m$

Donc : la droite (Δ) est tangente a toutes les *cercles* (C_m) (on peut montrer que (Δ) coupe en (C_m) un point unique)

3) b)on a : $x^2+y^2-2mx+2y+2m=2m+3$

Et puisque : $m \succ \frac{-3}{2}$ alors : $x^2+y^2-2mx+2y+2m \succ 0$

donc A est à l'extérieur des *cercles* (C_m)

Montrons que : $d(\Omega_m,(AI)) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}R_m$

Donc : (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m)

Car : $\frac{2}{\sqrt{5}}R_m \neq R_m$

Exercice 1 : Déterminer les ensembles :

$(\Gamma 1) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0\}$

$(\Gamma 2) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - x + 2y + 4 = 0\}$

Exercice1 :

Soient les points $A(-1,0)$, $B(1,2)$ et $C(5,-2)$

1- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

2- Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.

Exercice 2 : Soit l'ensemble :

$(C_m) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2+y^2-2mx+4my+4m^2-1=0\}$

où m est un réel.

1- Montrer que pour tout m dans $\mathbb{R}$, l'ensemble (C_m) est un cercle et déterminer ses éléments.

2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle (C_m).

3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres Ω_m quand m décrit $\mathbb{R}$

4- a) Déterminer pour quelles valeurs de m le point $A(-1,2)$ appartient-il à (C_m)

b) Soit $M_0(x_0;y_0)$) un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels m qui vérifient $M_0 \in (C_m)$

5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles (C_m)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

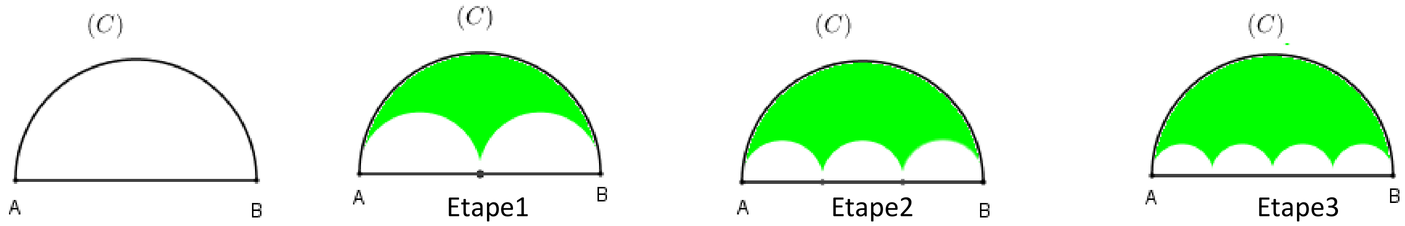
Que l'on devient un mathématicien

LES SUITES NUMERIQUES

I) ACTIVITES

1) En géométrie :

$(\mathcal{C})$ un demi-cercle de diamètre $[AB]$ avec $AB = 10cm$



On partage successivement le segment $[AB]$ en deux, puis trois puis quatre segments de même longueur. A chaque étape, on construit sur les segments obtenus des demi-cercles et on s'intéresse à l'aire du domaine coloré en vert.

On note a_1, a_2 et a_3 l'air du domaine coloré en vert aux étapes 1,2 et 3 décrites ci-dessus

1- Calculer a_1, a_2 et a_3.

2- A l'étape n, on partage le segment $[AB]$ en $n+1$ segments de même longueur, vérifier que $a_n = \frac{25\pi}{2} \times \frac{n}{n+1}$.

2) Que choisir ?

Une personne a reçu deux offres de deux société commerciales pour une durée de 4 ans.

La société $\mathcal{A}$ propose un salaire de 4500 Dh pour le premier mois et un augmentation de salaire de 75 Dh chaque mois.

La société $\mathcal{B}$ propose un salaire de 3500 Dh pour le premier mois et un augmentation de salaire de 3% chaque mois.

Soient a_n et b_n les salaires proposés respectivement par les sociétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour le nième mois.

1- Calculer les salaires des 4 premiers mois pour les deux sociétés.

2- Trouver une relation entre a_{n+1} et a_n puis entre b_{n+1} et b_n.

3- Calculer les salaires du 10$^{\text{ème}}$ mois pour les deux sociétés.

4- Quelle est la société la plus bénéfique pour la personne ?

II) GENERALITES

1) Définitions et notations.

Définition :

On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

Notation :

Si u est une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.

- l'image de l'entier n par u se note u_n et s'appelle **le terme** pour l'entier n
- L'entier n s'appelle **l'indice du terme u_n**
- La suite numérique u se note : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ou $(u_n)_n$

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

- Suite définie par : ***une expression explicite***
  Dans laquelle le terme u_n de la suite $(u_n)_n$ est définie en fonction de n

$u_n = \frac{n^2+1}{2n+1}$; $v_n = \sqrt{n^2+1}$; $w_n = \frac{\sin(n)}{n+1}$

- Une suite définie par :***une expression récurrente***
  Ces suites s'appelle des suites récurrentes, elle sont définies par le (ou les) premier (s) terme (s) et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs.
  - Suites récurrente du premier ordre

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n+3}{2v_n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_0 = -4 \\ w_{n+1} = \sqrt{2{w_n}^2 + 3} \end{cases}$$

  - Suites numériques du second ordre.

$$\begin{cases} u_0 = 2\,;\ u_1 = -1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = -2\ , v_1 = \frac{-1}{2} \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{u_n+2} \end{cases}$$

Remarque :

Il faut bien écrire les indices : u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$

2) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

Activité :

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \geq 0)$

3- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 2)$

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite numérique. $(\mathbb{I} \subset \mathbb{N})$

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est majorée** s'il existe un réel M tel que :$(\forall n \in \mathbb{I})(u_n \leq M)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est minorée** s'il existe un réel m tel que :$(\forall n \in \mathbb{I})(u_n \geq m)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est bornée** si elle est majorée et minorée.

Exercice :

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n-1}{2u_n+3} \end{cases}$

Montrer que $(u_n)_n$ est minorée par 1 et majorée par 3.

Propriété :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif α tel que $(\forall n \in \mathbb{I})(|u_n| \leq \alpha)$

3) Monotonie d'une suite.

Activité 1 :

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} \geq u_n)$

Activité 2 :

Soit la suite récurrente $(v_n)_n$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{7v_n-1}{2v_n+3} \end{cases}$

Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_n$ (vous pouvez utiliser que : $(\forall n \in \mathbb{N})(1 \leq v_n \leq 3)$)

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite numérique. $(\mathbb{I} \subset \mathbb{N})$

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est croissante si** : $(\forall(n,p) \in \mathbb{I}^2)(n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est décroissante si** : $(\forall(n,p) \in \mathbb{I}^2)(n \geq p \Rightarrow u_n \leq u_p)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est monotone** si elle est croissante ou décroissante sur $\mathbb{I}$**.**

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite numérique. $(\mathbb{I} \subset \mathbb{N})$

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est croissante** si et seulement si: $(\forall n \in \mathbb{I})(u_{n+1} \geq u_n)$ **(P)**
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est décroissante** si et seulement si: $(\forall n \in \mathbb{I})(u_{n+1} \leq u_n)$

Démonstration :

- ✓ On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ est croissante donc $(\forall(n,p) \in \mathbb{I}^2)(n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p)$
  d'où (et puisque $n+1 \geq n$) alors : $u_{n+1} \geq u_n$
- ✓ On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ vérifie la propriété **(P)**.
  Soit n et p deux entiers tels que $n \geq p$ on a :
  $u_p \leq u_{p+1} \leq \cdots \leq u_{n-1} \leq u_n$ donc la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ est croissante.

III) SUITES ARITHMETIQUES ; SUITES GEOMETRIQUES

1) Suite arithmétique.

1.1 Définition

Activité :

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\left(u_n = \frac{3n+1}{2}\right)$

Soit n un entier naturel, calculer : $u_{n+1} - u_n$

Définition :

On appelle suite **arithmétique** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente :

$(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{I})(\boldsymbol{u_{n+1}} = \boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{r})$ où r est un réel fixe. Le réel $\boldsymbol{r}$ s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$.

Exemple :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ la suite $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 2$

Le premier terme et la raison d'une suite arithmétique s'appellent aussi les éléments de la suite arithmétique.

1.2 Terme général d'une suite arithmétique.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes. Soit n un entier naturel on a :

$$\cancel{u_{p+1}} = u_p + r$$

$$\cancel{u_{p+2}} = \cancel{u_{p+1}} + r$$

$$\vdots$$

$$u_n = \cancel{u_{n-1}} + r$$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

$$u_n = u_p + (\underbrace{r + r + \cdots + r}_{(n-p)termes})$$

D'où : $u_n = u_p + (n - p)r$

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes, on a :

$(\forall n \in \mathbb{I})(u_n = u_p + (n - p)r)$

Remarque :

Si u_0 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n = u_0 + nr)$

Si u_1 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n = u_1 + (n - 1)r)$

Applications :

❶ Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_{15} = 375$ et $u_{20} = 520$

1- Déterminer sa raison r

2- Déterminer son premier terme u_0.

❷ Soit $(w_n)_n$ tel que : $\begin{cases} w_6 + w_9 + w_{13} = 192 \\ w_4 + w_{15} = 130 \end{cases}$

Déterminer son terme w_{30}

1.3 La somme des termes successifs d'une suite arithmétique.

Activité

Montrer que $(\forall m \in \mathbb{N})(1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$

Preuve d'une propriété :

Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison , p un entier naturel et $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$

On a : d'après le terme général d'une suite arithmétique : $(\forall n \in \mathbb{I})(u_n = u_p + (n - p)r)$

D'où :

$$u_p = u_p$$

$u_{p+1} = u_p + r$

$u_{p+2} = u_p + 2r$

$\vdots$

$u_n = u_p + (n-p)r$ En faisant la somme membre à membre on obtient :

$S = \underbrace{(u_p + u_p + \cdots + u_p)}_{(n-p+1)termes} + r(1 + 2 + \cdots + (n-p))$ D'où :

$S = (n-p+1)u_p + r \times \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ En factorisant par : $\frac{(n-p+1)}{2}$, on obtient :

$S = \frac{(n-p+1)}{2}[2u_p + (n-p+1)r]$ et par suite :

$S = \frac{(n-p+1)}{2}[u_p + (u_p + (n-p)r)]$ En remarquant que : $u_n = u_p + (n-p)r$

Finalement : $S = \frac{(n-p+1)}{2}[u_p + u_n]$

Propriété :

Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique, p un entier naturel et $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$

On a :

$$\boldsymbol{S = \frac{(n-p+1)}{2}[u_p + u_n]}$$

Nombre des termes

Dernier terme de S

Premier terme de S

1.4 Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Soient a, b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r on a donc : $\begin{cases} b = a + r \\ c = b + r \end{cases}$

En faisant la différence membre à membre on obtient : $b - a = c - b$ par suite : $2b = a + c$

Inversement : si a, b et c sont trois réels tels que $2b = a + c$ alors $b - a = c - b$ et par suite, a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = b - a$

Propriété :

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $2b = a + c$

Application :

Déterminer le réel x pour que les nombres $(3x - 1)$;$(1 - 4x)$ et $(x - 5)$ soient les termes consécutifs d'une suite arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

2) Suite géométrique.

Définition :

On appelle suite **géométrique** toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{I}}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente :

$(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{I})(\boldsymbol{v_{n+1} = q v_n})$ où q est un réel fixe. Le réel $\boldsymbol{q}$ s'appelle **la raison** de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{I}}$.

Exemple :

$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} \end{cases}$ la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 2$

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

1.2 Terme général d'une suite géométrique

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite géométrique de raison q ; et p un entier naturel on a :

$$\cancel{v_{p+1}} = q \times v_p$$

$$\cancel{v_{p+2}} = q \times \cancel{v_{p+1}}$$

$$\vdots$$

$$v_n = q \times \cancel{v_{n-1}}$$

En faisant les produits membre à membre on obtient :

$$v_n = (\underbrace{q \times q \times \ldots \times q}_{(n-p)fois})v_p$$

d'où $v_n = q^{n-p} \times v_p$

Propriété :

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{I}}$ est une suite géométrique de raison q et si p est un entier naturel alors : $(\forall n \in \mathbb{I})(v_n = q^{n-p} \times v_p)$

Cas particuliers :

- ✓ $(\forall n \in \mathbb{I})(v_n = q^n \times v_0)$
- ✓ $(\forall n \in \mathbb{I})(v_n = q^{n-1} \times v_1)$

1.3 La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite géométrique de raison q, et v_p l'un de ses termes. soit $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$

- Si $q = 1$ tous les v_i sont égaux et $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = \underbrace{v_p + v_p + \cdots + v_p}_{(n-p+1)termes} = (n-p+1)v_p$

- Si $q \neq 1$

On a : $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$

Donc : $qS = qv_p + qv_{p+1} + \cdots + qv_n$

$$= v_{p+1} + v_{p+2} + \cdots + v_{n+1}$$

Par suite : $S - qS = (v_p + \cancel{v_{p+1}} + \cdots + \cancel{v_n}) - (\cancel{v_{p+1}} + \cancel{v_{p+2}} + \cdots + v_{n+1})$

$$= v_p - v_{n+1}$$

$$= v_p - q^{n-p+1}v_p$$

$$= v_p(1 - q^{n-p+1})$$

Donc $S(1-q) = v_p(1 - q^{n-p+1})$

Finalement : $S = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Propriété :

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q, et v_p l'un de ses termes. soit $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$

- Si $q = 1$ alors : $S = (n - p + 1)v_p$
- Si $q \neq 1$ alors :

$$S = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Nombre des termes

La raison de la suite

Premier terme dans S

Propriété :

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = a \times c$

Preuve : (En exercice)

Application :

Déterminer le réel x pour que les nombres : $(1 + x^2)$; $(3 + x)$ et 10 soient les termes consécutifs d'une suite géométrique dans cet ordre et déterminer sa raison.

Suites numériques

0.1. Généralités

DÉFINITION 0.1.1.
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $I = \{n \in \mathbb{N}/n \geq n_0\}$.
Une suite numérique est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(1) L'image de n par une suite u se note u_n.

(2) n est appelé le rang ou l'indice du terme u_n.

(3) Une suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$.

REMARQUE 0.1.2. Ne pas mélanger u_{n+1}et $u_n + 1$.

EXEMPLE 0.1.3.

(1) u une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$, donc $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{3}$ ...

(2) u une suite définie sur $I = \{2,3,4,\ldots\}$ par $u_n = \sqrt{n-2}$, donc $u_2 = 0$, $u_3 = 1$, $u_4 = \sqrt{3}$ ...

0.1.1. Suite définie explicitement.

Toute fonction définie sur $[a;+\infty[$ (où $a \geq 0$) permet de définir une suite numérique.

EXEMPLE 0.1.4.

(1) **Sc. E :** Calculer les quatre premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 3n - 1$.

(2) **Sc. M :** Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ où u_n est le nombre de diviseurs de n.

0.1.2. Suite définie par récurrence.

Une suite peut aussi être définie par son premier terme et par une relation permettant de calculer chaque terme en fonction du précédent.

EXEMPLE 0.1.5.

(1) Calculer les deux premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(2) Calculer le troisième terme de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} v_0 = 2 \,\text{et}\, v_1 = -1 \\ v_{n+1} = v_n - v_{n-1}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Application (M) :
On considère la suite numérique (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

montrer par récurrence que $u_n = 3 \times 2^n + 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

0.2. Suite majorée-minorée-bornée

DÉFINITION 0.2.1. Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est dite :

(1) majorée, si il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ $(\forall n \in I)$.

(2) minorée, si il existe un $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ $(\forall n \in I)$.

(3) bornée, si elle est majorée et minorée.

Application (M) :
soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

(1) Montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$, $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

(2) Déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

Application (E) :
soit (u_n) la suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) Calculer u_1, u_2 et u_3

(2) Montrer par récurrence que $u_n > 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Application (E) :
soit (u_n) la suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) Calculer u_1, u_2 et u_3

(2) Montrer que (u_n) est majorée par 4.

0.3. Sens de variation.

DÉFINITION 0.3.1. Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

(1) $(u_n)_{n\in I}$ est croissante (strict. croissante) si $n < m \Rightarrow u_n \leq u_m$ $(n < m \Rightarrow u_n < u_m)$.

(2) $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante (strict. décroissante) si $n < m \Rightarrow u_n \geq u_m$ $(n < m \Rightarrow u_n > u_m)$.

REMARQUE 0.3.2.

(1) Dans la pratique, pour déterminer le sens de variation d'une suite, on s'intéresse au signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

(2) Dans le cas où tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut aussi comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

PROPOSITION 0.3.3. *Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique.*
$(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si pour tout entier $n \in I$, $u_n \leq u_{n+1}$.
$(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si pour tout entier $n \in I$, $u_n \geq u_{n+1}$.

PROPOSITION 0.3.4. *Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$, et $(u_n)_{n\in I}$ la suite définie par $u_n = f(n)$, alors*

(1) si f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante ;

(2) si f est décroissante, alors la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante.

Application (M) :
soit (u_n) la suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) Montrer par récurrence que (u_n) est minorée par 2.

(2) Étudier le sens de variation de (u_n).

Application (E) :
soit (v_n) la suite numérique définie par

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n^2 + v_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) Étudier le sens de variation de (v_n).

Application (E) :
soit $(w_n)_{n>1}$ la suite numérique définie par $w_n = \frac{2^n}{n}$

(1) Étudier le sens de variation de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

0.4. Suite arithmétique

DÉFINITION 0.4.1. Soit $p \in \mathbb{N}$.
$(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que $(\forall n \geq p)$ on a

$$u_{n+1} - u_n = r$$

r est appelée la raison de la suite.

EXEMPLE 0.4.2.

(1) La suite (u_n) définie par $u_n = 3n+5$ est une suite arithmétique de raison $r = 3$.

Application (E) :
soit $(w_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par $w_n = -\sqrt{3}n + \frac{3}{2}$

(1) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son premier terme.

Application (M) :
soit (u_n) la suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

(1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son premier terme.

PROPOSITION 0.4.3. $p \in \mathbb{N}$.

(1) $(u_n)_{n\geq p}$ *est une suite arithmétique si et seulement si* $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$ $(\forall n \geq p)$.

(2) Si $(u_n)_{n\geq p}$ *est une suite arithmétique de raison r alors* $u_n = u_m + (n-m)r$, $(\forall n \geq p), (\forall m \geq p)$.

EXEMPLE 0.4.4. Soit (u_n) une suite arithmétique son premier terme $u_0 = -1$.

(1) Déterminer r la raison de la suite (u_n) sachant que $u_{10} = 59$.

(2) Calculer u_7 et u_2.

PROPOSITION 0.4.5. *Soit*$(u_n)_{n\geq p}$ *est une suite arithmétique de raison r . Pour tout entier naturel* $n \geq m$ *:*

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n = (n-m+1) \times \left(\frac{u_m + u_n}{2}\right)$$

Application (M) :
I) Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 3}$$

(1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son premier terme.

(2) Déduire u_n en fonction de n.

(3) Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

II) Étudier la monotonie d'une suite arithmétique en fonction de sa raison r.

0.5. Suite géométrique

DÉFINITION 0.5.1. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$
$(u_n)_{n\geq p}$ est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que $(\forall n \geq p)$ on a

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

q est appelée la raison de la suite $(u_n)_{n\geq p}$.

EXEMPLE 0.5.2.
Soit (u_n) une suite numérique définie par

$$u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$q = \frac{2}{3}$ et $u_0 = -1$.

Application (M) :

Soient (u_n) une suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{9u_n}{4u_n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) Montrer que $u_n \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) On pose $v_n = 2 - \frac{3}{u_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique en déterminant sa raison et son premier terme.

PROPOSITION 0.5.3. $p \in \mathbb{N}$.

(1) $(u_n)_{n\geq p}$ *est une suite géométrique si et seulement si* $u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2}$ $(\forall n \geq p)$.

(2) Si $(u_n)_{n\geq p}$ *est une suite géométrique de raison* $q \neq 0$ *alors*

$$u_n = q^{n-m} u_m$$

$(\forall n \geq p), (\forall m \geq p)$.

(3) Si $(u_n)_{n\geq p}$ *est une suite géométrique de raison* $q \neq 1$ *alors*

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n = u_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$$

$(\forall n \geq p), (\forall m \geq p)$ *et* $(\forall n \geq m)$.

Application (M) :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

et $v_n = u_{n+1} - u_n$, $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

(2) Calculer v_4.

(3) Montrer que $v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = u_n - u_0$.

(4) Déduire le terme général de la suite (u_n).

(5) Calculer $S = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$.

Application (E) :

Soit (u_n) une suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ 3u_{n+1} = u_n + 10 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

et $v_n = u_n - 5$, $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

(2) Calculer v_{15}.

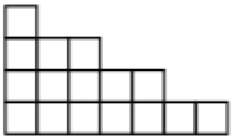
(3) Calculer la somme $v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$.

(4) Déduire la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

LES SUITES NUMERIQUES

I) ACTIVITES

Activité 1 **:** suite définit par une formule explicite ou une formule de récurrence



Des gradins sont constitués de poutres comme ceci (voir dessin)

On considère la suite U des nombres de poutres par niveau en commençant par le haut qui sera appelé le rang 0, le nombre de poutres de rang n ∈ N est noté U_1.

<u>1)formule de récurrence</u>

a)donner les valeur de U_0, U_1, U_2 , U_3

b) comment passe-t-on de U_n à U_{n+1} ?

(Donner une relation entre ces deux termes)

c) en déduire les valeur de U_4, U_5 , U_6

d) utiliser la calculatrice pour obtenir les valeurs de U_{10} , U_{100} puis U_{200}

e) utiliser la calculatrice pour trouver la plus petite valeur de n telle que $U_n \geq 500$

<u>2) formule explicite</u>

a) trouver une formule qui donne directement U_n en fonction de n

(commencer par U_1, U_2 , U_3,U_4 puis généraliser à n)

b) retrouver les valeurs de U_{10} ,U_{100} puis U_{200}

c) retrouver algébriquement la plus petite valeur de n telle que $U_n \geq 500$

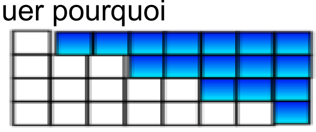
<u>3. pour aller un peu plus loin</u> :

soit $S_n = u_0 + u_1 + u_1 + ... + u_n$ la somme des nombres de poutres qu'il faut au total du rang 0 au rang n

a) donner les valeurs de S_0, S_1, S_2 et S_3

b) observer la figure et expliquer pourquoi

$$S_3 = 4\left(\frac{u_0 + u_3}{2}\right)$$



puis vérifier que l'on retrouve bien S_3

c) calculer S_{10} par un raisonnement analogue

d) montrer que $S_n = (n+1)^2$

e) en déduire la hauteur maximale de gradin que l'on peut construire avec 1000 poutres au total et préciser le nombre de poutres qui restent

Activité 2 : Suite définie uniquement par une formule de récurrence :

soit la suite U définie par : $U_{n+1} = 0.95U_n + 5$

et $U_1 = 200$

1)calculer : U_1, U_2 , U_3 , U_{10}, U_{100}, U_{200}

2) essayer de trouver la plus petite valeur de n telle que $U_n \prec 100$

3. un club à 200 membres inscrits le premier mois, Chaque mois, 5% des membres partent, mais le responsable arrive toujours à obtenir 5 nouvelles inscriptions

a) montrer que le nombre d'inscrit le ne mois est un

b) que semble devenir le nombre d'inscrits à long terme ?

Activité 3 **:** suite définie uniquement par une formule explicite

Soit la suite V définie par : $U_{n+1} = 100 + 100 \times 0.95^{n-1}$

1) calculer : V_1, V_2 , V_3 , V_{10}, V_{100} et V_{200}

2) que semble-t-il pour les suites V et U où U est la suite de Activité 2 précédent ?

Activité4 : Une personne a reçu deux offres de deux société commerciales pour une durée de 4 ans.

La société $\mathcal{A}$ propose un salaire de 4500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 75 Dh chaque mois.

La société $\mathcal{B}$ propose un salaire de 3500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 3% chaque mois.

Soient a_n et b_n les salaires proposés respectivement par les sociétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour le nième mois.

1- Calculer les salaires des 4 premiers mois pour les deux sociétés.

2- Trouver une relation entre a_{n+1} et a_n puis entre b_{n+1} et b_n.

3- Calculer les salaires du 10 ème mois pour les deux sociétés.

4- Quelle est la société la plus bénéfique pour la personne ?

II) GENERALITES

1) Définitions et notations.

Définition : On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ (ou une partie I de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$

$u : I \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u(n) = u_n$

Notation : Si u est une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$

l'image de l'entier n par u se note u_n et s'appelle le terme de rang *n* de la suite

L'entier n s'appelle **l'indice du terme** u_n

La suite numérique u se note : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ou $(u_n)_n$

Remarque : On peut aussi définir une suite à partir d'un certain rang.

Exemple :1/ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_n = \frac{1}{n+2}$

$u_0 = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{3}; u_2 = \frac{1}{4}; u_3 = \frac{1}{5};......$

2/ $(v_n)_{n\geq 3}$ *définie pour tout* $n \geq 3$ *par* $v_n = \frac{1}{n-2}$

$v_3 = 1; v_4 = \frac{1}{2}; v_5 = \frac{1}{3}; v_6 = \frac{1}{4};......$

2) Comment générer une suite

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

a) Suite définie par : une expression explicite

Dans laquelle le terme u_n de la suite $(u_n)_n$ est définie en fonction de n

Exemple :soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$u_n = 2n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Calculer : les quatres 1ere termes de la suite $(u_n)_n$

2) Calculer: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n$

Solution :1) $u_0 = 2\times 0+3 = 3 \quad u_1 = 2\times 1+3 = 5$

$u_1 = 2\times 1+3 = 5 \quad u_3 = 2\times 3+3 = 9$

2) $u_{n+1} - u_n = (2(n+1)+3) - (2n+3)$

$u_{n+1} - u_n = 2n+2+3-2n-3 = 2$

b) Une suite définie par : une expression récurrente

Ces suites s'appellent des suites récurrentes, elles sont définies par le (ou les) premier (s) terme (s) et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs.

Exemple1 : Suites récurrente du premier ordre

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 7 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer : $u_1; u_2; u_3$

Solution :on a $u_{n+1} = 5u_n - 7$

Pour n=0 on a: $u_{0+1} = 5u_0 - 7$ donc $u_1 = 5\times 2 - 7$

Donc : $u_1 = 3$

Pour n=1 on a: $u_{1+1} = 5u_1 - 7$ donc $u_2 = 5\times 3 - 7$

Donc : $u_2 = 8$

Pour n=2 on a: $u_{2+1} = 5u_2 - 7$ donc $u_3 = 5\times 8 - 7$

Donc : $u_3 = 33$

Remarque : Il faut bien écrire les indices : u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$

Exemple2 : Suites numériques du second ordre.

soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$\begin{cases} v_0 = 1; v_1 = -1 \\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer : $v_2; v_3; v_4$

Solution :on a $v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n$

Pour n=0 on a: $v_{0+2} = 2v_{0+1} - 3v_0$ donc $v_2 = 2v_1 - 3v_0$

Donc : $v_2 = 2\times(-1) - 3\times 1 = -5$

Pour n=1 on a: $v_{1+2} = 2v_{1+1} - 3v_1$ donc $v_3 = 2v_2 - 3v_1$

Donc : $v_3 = 2(-5) - 3(-1) = -7$

Pour n=2 on a: $v_{2+2} = 2v_{2+1} - 3v_2$ donc $v_4 = 2v_3 - 3v_2$

Donc : $v_4 = 2(-7) - 3(-5) = -14 + 15 = 1$

3) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

Activité1 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$u_n = \frac{n+1}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

Solution :1) Montrons que : $u_n \leq 1$??

$1 - u_n = 1 - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{(2n+1)-(n+1)}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \geq 0$

Donc $u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2)Montrons que : $\frac{1}{2}<u_n$??

$u_n-\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2(n+1)-(2n+1)}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}>0$

Donc $\frac{1}{2}<u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Par suite : : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :\frac{1}{2}<u_n\leq 1$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 car $u_n\leq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{2}$ car $\frac{1}{2}<u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :$ $\frac{1}{2}<u_n\leq 1$

Activité2 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :0\leq u_n$

3- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n\leq 2$

Solution :1)on a $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$

Pour n=0 on a: $u_1=\sqrt{u_0+2}$ donc $u_1=\sqrt{2}$

Pour n=1 on a: $u_2=\sqrt{u_1+2}$ donc $u_2=\sqrt{\sqrt{2}+2}$

Pour n=2 on a: $u_3=\sqrt{u_2+2}$ donc $u_3=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :0\leq u_n$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $u_0=0$ donc $0\leq u_0$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $0\leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $0\leq u_{n+1}$??

Or on a : $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\geq 0$

donc : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :0\leq u_n$

3) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :u_n\leq 2$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $u_0=0$ donc $u_0\leq 2$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $u_n\leq 2$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\leq 2$??

on a : $u_n\leq 2$ donc $u_n+2\leq 4\Rightarrow\sqrt{u_n+2}\leq\sqrt{4}$

$\Rightarrow u_{n+1}\leq 2$

donc : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :0\leq u_n$

Par suite : : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :0\leq u_n\leq 2$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 0 car $u_n\leq 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0car $0\leq u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :$ $0\leq u_n\leq 2$

Définition : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($\mathbb{I}\subset\mathbb{N}$)

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n\in I \quad u_n\leq M$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n\in I \quad m\leq u_n$
- On dit que la suite ($(u_n)_{n\in I}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Exemple :soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$v_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

1)Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0

2)Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3)Que peut-on déduire ?

Solution :1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad 0\leq v_n$??

$v_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (Le conjugué)

$v_n=\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\geq 0$

Donc : $0\leq v_n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc : $(v_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0

2) Montrons que : $v_n \leq \frac{1}{2}$?? $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{2} = \frac{2-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

On a : $n \geq 1$ et $n+1 \geq 2$ donc $\sqrt{n} \geq 1$ et $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{2}$

Donc : $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq 1+\sqrt{2}$ donc

$-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \leq -1-\sqrt{2}$

donc $2-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \leq 1-\sqrt{2}$ et puisque : $1-\sqrt{2} \prec 0$

Donc $v_n - \frac{1}{2} \prec 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc $v_n \prec \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc la suite $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3) Donc la suite $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ est bornée car :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : 0 < v_n < \frac{1}{2}$

Exercice1: Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^{\ 2} + 2u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer u_1 et montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

Solutions :

$u_{0+1} = u_0^{\ 2} + 2u_0 + 2 = (-1)^2 + 2\times(-1) + 2 = 1 + -2 + 2 = 1$

$u_n - 1 = u_n^{\ 2} + 2u_n + 2 - 1 = u_n^{\ 2} + 2u_n + 1 = \left(u_n + 1\right)^2 \geq 0$

Donc : $1 \leq u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

Exercice2: Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n}{2u_n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 et majorée par 3.

Solutions : Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 3$

1étapes : n=0 on a : $0 < u_0 < 3$ car $0 < 1 < 3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $0 < u_n < 3$

3étapes : Montrons alors que : $0 < u_{n+1} < 3$??

On a : $0 < u_n$ donc $0 < 2u_n + 1$ et $0 < 7u_n$

Donc $0 < u_{n+1}$ (1)

Et on a : $u_{n+1} - 3 = \frac{7u_n}{2u_n+1} - 3 = \frac{7u_n - 3\left(2u_n+1\right)}{2u_n+1}$

$u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 3}{2u_n+1}$ et puisque on a : $0 < u_n < 3$

on a donc : $u_n - 3 < 0$ et $0 < 2u_n + 1$

Donc $u_{n+1} - 3 < 0$ Donc $u_{n+1} < 3$ (2)

De (1) **et** (2) **en déduit que :** $0 < u_{n+1} < 3$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 < u_n < 3$

Exercice3 : Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n = 3n^2 + 6n - 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$u_n = 3n^2 + 6n - 4 = 3\left(n^2 + 2n\right) - 4 = 3\left(\left(n+1\right)^2 - 1\right) - 4$

$u_n = 3\left(n+1\right)^2 - 7$

on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n+1\right)^2 \geq 0$

donc : $3\left(n+1\right)^2 \geq 0$ donc $\left(n+1\right)^2 - 7 \geq -7$

donc : $u_n \geq -7$ par suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -7

Exercice4 : Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$-1 \leq \cos n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $-1 \leq \sin\sqrt{n} \leq 1$

donc : $1 \leq 2+\cos n \leq 3$ et $-1 \leq -\sin\sqrt{n} \leq 1$

donc : $1 \leq 2+\cos n \leq 3$ et $2 \leq 3-\sin\sqrt{n} \leq 4$

donc : $1 \leq 2+\cos n \leq 3$ et $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3-\sin\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$

donc : $\frac{1}{4} \leq \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \leq \frac{3}{2}$

cad : $\frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ donc : $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Propriété : Une suite $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :

$\forall n \in I \ \left|u_n\right| \leq M$

Exemple : Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n = (-1)^n \sin\sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$\left|u_n\right| = \left|(-1)^n \sin\sqrt{n}\right| = \left|(-1)^n\right|\left|\sin\sqrt{n}\right| = \left|\sin\sqrt{n}\right| \le 1$

donc $\left|u_n\right| \le 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

4) Monotonie d'une suite.

Activité 1 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie

par :$u_n = \dfrac{-n}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que : $u_{n+1} - u_n \le 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{-(n+1)}{n+1+2}\right) - \left(\frac{-n}{n+2}\right) = \frac{-n-1}{n+3} + \frac{n}{n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(-n-1)(n+2)+n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-2}{(n+3)(n+2)} < 0$$

Donc : $u_{n+1} - u_n \le 0$ donc $u_{n+1} \le u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

On dira que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Activité2 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie

par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer par récurrence que $u_n \le u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solutions :1étapes :on a $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{2}$

Pour n=0 nous avons $u_0 = 1$ donc $u_0 \le u_1$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes :Supposons que: $u_n \le u_{n+1}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \le u_{n+2}$??

on a : $u_n \le u_{n+1}$ donc $u_n + 2 \le u_{n+1} + 2$

donc : $\sqrt{u_n + 2} \le \sqrt{u_{n+1} + 2}$ donc $u_{n+1} \le u_{n+2}$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : u_n \le u_{n+1}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Définition : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si : $\forall n \in I$

$\forall m \in I \ : m \le n \Rightarrow u_m \le u_n$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si :

$\forall n \in I \ \ \forall m \in I \ : m \le n \Rightarrow u_m \ge u_n$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante sur $\mathbb{I}$.

Théorème : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si: $\forall n \in I \ u_{n+1} \ge u_n$: **(P)**
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si: $\forall n \in I \ u_{n+1} \le u_n$

Démonstration :

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante donc

$\forall n \in I \ \ \forall m \in I \ : m \le n \Rightarrow u_m \le u_n$

d'où (et puisque n + 1 ≥ n) alors : $u_{n+1} \ge u_n$

Inversement : On suppose que la suite $(u_n)_{n\in I}$ vérifie la propriété **(P).**

Soit n et m deux entiers tels que n ≥ m on a :

$u_m \le u_{m+1} \le u_{m+2} \le \ldots \le u_n$ Donc la suite : $(u_n)_{n\in I}$ est croissante.

Exemple1:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie

par : : $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que suite : $(u_n)_{n\in I}$ est croissante.

Solutions :montrons par récurrence que $u_{n+1} \le u_n$

1étapes :on a $u_1 \le u_0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes :Supposons que: $u_{n+1} \le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+2} \le u_{n+1}$??

on a : $u_{n+2} - u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n - 2 - u_{n+1}$

donc $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n - 2$ et on a : $u_{n+1} - u_n \le 0$

donc : $u_{n+1} - u_n - 2 \le 0$ donc $u_{n+2} - u_{n+1} \le 0$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : u_{n+1} \le u_n$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Exemple2 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions :

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}+\frac{2^{n+1}}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}\succ 0$ Donc : $u_n\le u_{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exemple3 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions : $u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

Et on a : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k'=2}^{n+2}\frac{1}{n+k'}$ on pose $k'=k+1$

Et puisque k' est un variable on peut l'appeler k'

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k'=2}^{n+2}\frac{1}{n+k'}=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}$$

Donc :

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}\succ 0\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}\succ 0\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice5 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie

par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=3 \end{cases}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4

3)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions :1) Montrons que $2\le u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $2\le u_0$ car $2<3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $2\le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $2\le u_{n+1}$??

$$u_{n+1}-2=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2=\frac{8(u_n-1)-2(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{6u_n-12}{u_n+2}$$

$u_{n+1}-2=\frac{6(u_n-2)}{u_n+2}$ et puisque on a : $2\le u_n$

Donc : $u_n-2\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc : $u_{n+1}-2\ge 0$

donc $2\le u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $u_n\le 4\quad \forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $u_0\le 4$ car $3<4$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $u_n\le 4$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\le 4$??

$$4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$$

$4-u_{n+1}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ et puisque on a :

$u_n\le 4$

Donc : $4-u_n\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc $u_{n+1}\le 4$ par suite $u_n\le 4\ \forall n\in\mathbb{N}$

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$

On va factoriser $-u_n^2+6u_n-8$: $\Delta=36-32=4>0$

$x_1=\frac{-6+2}{-2}=2$ et $x_2=\frac{-6-2}{-2}=4$ donc :

$-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$

Or on a : $u_n\ge 2$ et $u_n\le 4$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\ge 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

III) SUITES ARITHMETIQUES ; SUITES GEOMETRIQUES

1) Suite arithmétique.

1.1 Définition

Activité1 Compléter les suites de nombres suivantes :

-5 ; -2 ; 1 ; 4 ; … ;…. ;… ;16

10 ; 5 ; 0 ; -5 ; … ;…. ;… ;-25

Activité2 : soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$u_n = 3n+8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer $u_{n+1} - u_n$

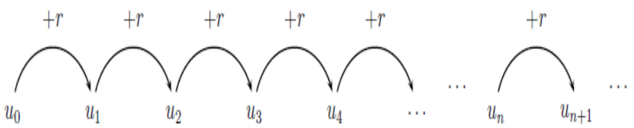
Solution : $u_{n+1} - u_n = (3(n+1)+8) - (3n+8)$

$u_{n+1} - u_n = 3n+3+8-3n-8 = 3 = constante$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique

Définition : On appelle suite **arithmétique** toute suite $(u_n)_{n\in I}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $\forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n + r$

Où r est un réel fixe. Le réel r s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_{n\in I}$.



Exemple : *soient Les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$v_n = n^2 + 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

1)La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 2$

2) $v_0 = 2; v_1 = 3; v_2 = 6$

Ainsi : $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique

1.2 propriété caractéristique d'une suite arithmétique

Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$(u_n)_{n\geq p}$ est suite arithmétique si et seulement si

$2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \ \forall n \geq p$

Preuve : soit $(u_n)_{n\geq p}$ suite arithmétique de raison r

On a donc : $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + r$

Donc : $u_{n+2} - u_{n+1} = r$ et $u_{n+1} - u_n = r$ donc :

$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ donc : $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}$

Inversement : soit $(u_n)_{n\geq p}$ suite tel que :

$2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \quad \forall n \geq p$

Montrons que $(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique ??

On a : $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$ donc $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \quad \forall n \geq p$

Donc la suite : $(u_{n+1} - u_n)_{n\geq p}$ est une suite constante

Soit r cette constante donc : $u_{n+1} - u_n = r$

Donc $(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique

Application : Déterminer le réel x pour que les nombres $(3x - 1)$;$(1 - 4x)$ et $(x - 5)$ soient les termes consécutifs d'une suite Arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

Solution : $(3x - 1)$;$(1 - 4x)$ et $(x - 5)$ soient les Termes consécutifs d'une suite Arithmétique

Ssi $2(1-4x) = (3x-1) + (x-5)$

$-8x + 2 = 4x - 6 \Leftrightarrow -12x = -8 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Donc les termes de la suite sont :

$3\times\dfrac{2}{3} - 1 = 1$ et $1 - 4\times\dfrac{2}{3} = -\dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{2}{3} - 5 = -\dfrac{13}{3}$

Donc : $-\dfrac{5}{3} - 1 = -\dfrac{8}{3} = r$

1.3. Terme général d'une suite arithmétique.

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes. Soit n un entier naturel

$$\cancel{u_{p+1}} = u_p + r$$
$$\cancel{u_{p+2}} = \cancel{u_{p+1}} + r$$
$$\vdots$$
$$u_n = \cancel{u_{n-1}} + r$$
$$u_n = u_p + \underbrace{(r + r + \cdots + r)}_{(n-p)termes}$$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

D'où : $u_n = u_p + (n-p)r$

Propriété : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes

on a : $\forall n \in I \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Remarque : Si u_0 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $u_n = u_0 + nr$

Si u_1 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Application : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_1 = 3$ et $u_5 = 9$

1) Déterminer sa raison r

2) Déterminer son premier terme u_0 .

3) écrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison r ??

on a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 5 et p=1 on a : $u_5 = u_1 + (5-1)r$

Donc : $9 = 3 + 4r \Leftrightarrow 4r = 6 \Leftrightarrow r = \dfrac{3}{2}$

2) le terme u_0 ??

$$u_1 = u_0 + (1-0)r \Leftrightarrow 3 = u_0 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow u_0 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

3) u_n en fonction de n ?

$$u_n = u_1 + \frac{3}{2}(n-1) \Leftrightarrow u_n = 3 + \frac{3}{2}(n-1)$$

$$u_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Exercice6 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie

par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$ et on considère la suite

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

2) écrire u_n en fonction de n

Solution :

1) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{2u_n - 1}{u_n} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = 1$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison

$r = 1$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{2-1} = 1$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison

$r = 1$ et de premier terme $v_0 = 1$

Donc : $v_n = v_0 + nr = 1 + n\times 1 = 1 + n$

Puisque : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ donc $u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n}$ donc $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1$

donc $u_n = \dfrac{v_n + 1}{v_n} = \dfrac{1 + (n+1)}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$

1.4 La somme des termes successifs d'une suite arithmétique.

propriété : Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique

p un entier naturel et $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$

On a : $s_n = \dfrac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n)$

Avec : $n - p + 1$ le nombre des termes de la somme

u_p : le premier terme de la somme

u_n : le dernier terme de la somme

Preuve : Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r et p un entier naturel et

$$s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Donc : $s_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_{p+2} + u_{p+1} + u_p$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

$$2s_n = (u_n + u_p) + (u_{n-1} + u_{p+1}) \ldots + (u_{n-1} + u_{p+1}) + (u_n + u_p)$$

Et on a : $u_{n+k} + u_{p+k} = (u_p + kr) + u_p + (n-k-p)r$

Donc : $u_{n+k} + u_{p+k} = u_p + u_p + (n-p)r$

Donc : $u_{n+k} + u_{p+k} = u_p + u_n$

Et par suite :

$$2s_n = (u_n + u_p) + (u_n + u_p) \ldots + (u_n + u_p) + (u_n + u_p)$$

Donc :

$$2s_n = \underbrace{(u_n + u_p) + (u_n + u_p) \ldots + (u_n + u_p) + (u_n + u_p)}_{n-p+1}$$

Donc : $2s_n = (n-p+1)(u_n + u_p)$

Donc : $s_n = \dfrac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n)$

Remarque : On note la somme :

$s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$ par :

$$s_n = \sum_{k=p}^{k=n} u_k$$

Si p=0 on a : $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

Si p=1 on a : $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

Exemple : calculer en fonction de n les sommes suivantes :

1) $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} k = 1+2+3+...+n$

2) $s_n' = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1) = 1+3+5+...+(2n+1)$

Solutions :1)on pose : $u_n = n$

On a : $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r=1

Car : $u_{n+1} - u_n = 1$

Donc : $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} k = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

Donc : $s_n = \frac{n}{2}(1+n)$

1)on pose : $v_n = 2n+1$

On a : $(v_n)_n$ une suite arithmétique de raison r=2

Car : $v_{n+1} - v_n = 2$

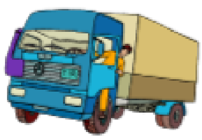
Donc :

$s_n' = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1) = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$

Donc :

$s_n' = \frac{n+1}{2}(1+2n+1) = \frac{n+1}{2}(2n+2) = (n+1)^2$

Exercice7 : Une entreprise de transport possède 40 camions en décembre 1991.



L'évolution de l'entreprise est telle que celle-ci doit acheter 8 camions supplémentaires chaque année.

1) Calculer le nombre de camions que possède l'entreprise en 1992, en 1993 et en 1994.

2) Ces nombres forment une suite.

a) Donner la nature de cette suite.

b) Préciser le premier terme u_1 et la raison de cette suite.

c) Donner l'expression du nombre Un de camions que possède l'entreprise l'année n.

3) Quel est le nombre de camions que possède l'entreprise en 2002 ?

2) Suite géométrique.

Activité1 Compléter les suites de nombres suivantes :

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; … ;…. ;… ;128

1 ; 3 ; 9 ; 27 ; … ; …

$1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}$,; … ;…. ;…

Définition : On appelle suite géométrique toute suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \in I$ où q est un réel fixe.

Le réel q s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_n$.

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

Exemple1 : soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$

la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison

$q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$

Exemple2 : soit la suite $(v_n)_n$ définie par :

$v_n = 2 \times 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3 = q$

donc la suite est géométrique de raison $q = 3$

1.2 Terme général d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q

et p un entier naturel on a :

$u_{p+1} = qu_p$

$u_{p+2} = qu_{p+1}$

$\vdots$

$u_n = qu_{n-1}$

En faisant les produits membre à membre on obtient :

$u_n = \underbrace{q \times q \times q \times .. \times q}_{n-p} u_p$

d'où $u_n = q^{n-p} u_p$

Propriété : Si $(u_n)_{n \in I}$ est une suite géométrique de raison q et si p est un entier naturel alors :

$u_n = q^{n-p} u_p \quad \forall n \in I$

Cas particuliers :

1) si p=0 alors: $u_n = q^n u_0$ 2) si p=1 alors : $u_n = q^{n-1} u_1$

Exemple1 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que

$u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_4 = \frac{3}{16}$ 1) Déterminer sa raison q

2) écrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison q ??

on a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = q^{n-p}u_p$

Pour n= 4 et p=1 on a : $u_4 = q^{4-1}u_1$

Donc : $\frac{3}{16} = q^3 \frac{3}{126} \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$

2) u_n en fonction de n ?

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times u_1 \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemple2 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-u_n} \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$ et on considère la suite

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

2) écrire u_n en fonction de n

Solution :1) $v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{u_n}{3-u_n}} = 1 - \frac{6-2u_n}{u_n}$

$v_{n+1} = 3\left(1 - \frac{2}{u_n}\right)$ donc $v_{n+1} = 3v_n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

Donc : $v_n = u_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = -3 \times 3^n = -3^{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$

Puisque : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1-v_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1+3^{n+1}}$

1.3 La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Proposition : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q , et u_p l'un de ses termes.

Et $s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Si $q = 1$ alors : $s_n = (n-p+1)u_p$

Si $q \neq 1$ alors : $s_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Preuve : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q , et u_p l'un de ses termes.

soit $s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Si $q = 1$ tous les u_i sont égaux

et $s_n = u_p + u_p + u_p + \dots + u_p \; (n-p+1)termes$

donc : $s_n = (n-p+1)u_p$

Si $q \neq 1$

On a : $s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Donc : $qs_n = qu_p + qu_{p+1} + qu_{p+2} + \dots + qu_{n-2} + qu_{n-1} + qu_n$

Donc :

$qs_n = qu_{p+1} + qu_{p+2} + qu_{p+3} + \dots + qu_{n-1} + qu_n + qu_{n+1}$

$s_n - qs_n = u_p - u_{n+1}$

Par suite : $s_n(1-q) = u_p - u_p q^{n-p+1}$

$$s_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Application :

Exemple1 : Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répond-t-il, donne-moi seulement 1 centime le 1er juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne mois la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

Solution : Les nombres de centimes à payer chaque jour sont les termes d'une suite géométrique de 20 termes dont le premier est : $u_1 = 1$ et et la raison $q = 2$

$u_2 = 2$ (La somme à donner le 2 iem jour) ....

$u_{20} = \dots$ (La somme à donner le 20e jour)

Donc : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$u_{20} = 2^{20-1} = 2^{19} = 524288$ Centimes

La somme totale à payer serait :

$s_{20} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{20} = u_1 \frac{1-2^{20-1+1}}{1-2}$

$s_{20} = 2^{20} - 1 = 10485.75$

centimes $s_{20} \simeq 1million$ 500dh Joli voyage !

Exemple2 : calculer en fonction de n la somme suivante :

$$s_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Solutions :1)on pose : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

Car : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$ Donc : $s_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Propriété : a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique

si et seulement si $b^2 = a \times c$

Preuve : (En exercice)

Application :

Déterminer le réel x pour que les nombres : $(1 + x^2)$; $(3 + x)$ et 10 soient les termes consécutifs d'une suite géométrique dans cet ordre et déterminer sa raison.

Solution : $(1 + x^2)$; $(3 + x)$ et 10 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique

si et seulement si $(3+x)^2 = 10 \times (1+x^2)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 10x^2 + 10 \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Donc les termes sont : $\frac{10}{9}$ et $\frac{10}{3}$ et 10 donc : $q = \frac{10/3}{10/9} = 3$

Exercice8 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \\ u_0 = 2; u_1 = \frac{4}{9} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n = u_n - \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a)Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

b) écrire v_n et u_n en fonction de n

c) calculer la somme : $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$

Solution :1)montrons par récurrence que

$u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1étapes : n=0 $u_1 = \frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^{0+2}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes :Supposons que: $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$??

on a: $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$ donc $u_n = 9\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)$

et on a : $u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n)$

$$u_{n+2} = \frac{1}{27}\left(12u_{n+1} - 9\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)\right)$$

$u_{n+2} = \frac{1}{27}\left(3u_{n+1} + \frac{2}{3^n}\right)$ donc $u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+2}}$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

2)a) on a: $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3^{n+2}}$

$v_{n+1} = \frac{1}{9}\left(u_n - \frac{1}{3^n}\right)$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{9}v_n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison

$q = \frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0 = 1$

2) b)écrire v_n et u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison

$q = \frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0 = 1$

Donc : $v_n = v_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Puisque : $u_n = v_n + \frac{1}{3^n}$ donc $u_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) c) $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+...+u_n$??

$u_n=v_n+w_n$ avec $w_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

on a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites géométriques de raison $q=\frac{1}{9}$ et $q'=\frac{1}{3}$ donc

donc $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\sum_{k=0}^{k=n}v_k+\sum_{k=0}^{k=n}w_k$

$$s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=v_0\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}}+w_0\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)+\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\frac{21}{8}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice9 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} & \forall n\in\mathbb{N}\\ u_0\in\left]-1;0\right[\end{cases}$$

1) Montrer que $-1\prec u_n\prec 0\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrer que $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Et en déduire que : $u_n\geq\frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Solution : 1) montrons par récurrence que $-1\prec u_n\prec 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 on a : $-1\prec u_0\prec 0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes :Supposons que: $-1\prec u_n\prec 0$

3étapes : Montrons alors que : $-1\prec u_{n+1}\prec 0$??

On a : $-1\prec u_n\prec 0$ donc : $1\prec u_n+2\prec 2$

donc : $1\prec\sqrt{u_n+2}\prec\sqrt{2}$ donc : $\frac{1}{\sqrt{2}}\prec\frac{1}{\sqrt{u_n+2}}\prec 1$

et puisque : $0\prec -u_n\prec 1$ alors : $0\prec\frac{-u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 1$

donc : $-1\prec\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 0$ donc $-1\prec u_{n+1}\prec 0$

d'où : $-1\prec u_n\prec 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}-u_n=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\left(1-\sqrt{u_n+2}\right)$$

et puisque : $1-\sqrt{u_n+2}\prec 0$ et $\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 0$

alors : $u_{n+1}-u_n\succ 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrons que $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_n\geq u_0$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

Donc : $\sqrt{2+u_n}\geq\sqrt{2+u_0}$ cad $\frac{1}{\sqrt{2+u_n}}\leq\frac{1}{\sqrt{2+u_0}}$

et puisque : $u_n\prec 0$ alors : $\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc : $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

3)Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $0\succ u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc : $0\leq -u_{n+1}\leq\frac{-u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

En donnant à n des valeurs on trouve :

$0\leq -u_1\leq\frac{-u_0}{\sqrt{2+u_0}}$

$0\leq -u_2\leq\frac{-u_1}{\sqrt{2+u_1}}$

………

$0\leq -u_{n-1}\leq\frac{-u_{n-2}}{\sqrt{2+u_0}}$

$0\leq -u_n\leq\frac{-u_{n-1}}{\sqrt{2+u_0}}$

Le produit des inégalités donne : $0\prec -u_n\leq\frac{-u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}$

Donc : $u_n\geq\frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Activités sur les suites

Activité 1 :

Jeu d'échec et suite géométrique.

Le jeu d'échec fut inventé par un mathématicien indien. le Roi le communiqua en fut si émerveillé qu'il dit à l'inventeur de choisir lui-même la récompense qu'il désirait.

Or l'échiquier se compose de 64 case.

Le mathématicien demanda 1 grain de blé pour la première case, 2 grains pour la deuxième, 4 grains pour la troisième et ainsi de suite en doublant toujours le nombre de grains d'une case à la suivante jusqu'à la dernière.

Tout le monde fut étonné de la modicité d'une pareille demande ; mais on fut bien plus surpris quand le mathématicien, ayant fait son calcul, prouva au roi que son royaume ne suffirait pas à produire en plusieurs années tout le blé qu'il demanderait.

En effet, si on se sert de la formule pour avoir le nombre de grains, on obtient

$S = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 774\ 073\ 709\ 551\ 615$.

On peut savoir à peu prés combien il a de grains dans un kilo de blé et combien un hectare de terrain produit en moyenne de kilogrammes et donc combien d'hectares il faudrait pour produit le nombre demandé. On trouve que la surface entière de la terre ensemencée ne serait pas suffisante.

On a aussi calculé que cette quantité de grains couvrirait à la hauteur de 1 m la surface de la france considérée comme plane.

Activité 2 :

1) La population d'un village de montagne diminue tous les ans de 20 %. Sachant qu'en 1996 elle était de 1 875 habitants, compléter le tableau suivant :

Année	1996	1997	1998	1999	2000
Nombre d'habitants					

2) Montrer que les nombres d'habitants sont des termes d'une suite dont on déterminera la nature et la raison.

3) À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur :

a) Déterminer la population de ce village en 2010

b) Donner l'année d'extinction de ce village si on suppose la diminution de la population constante

La célèbre suite du mathématicien italien Fibonacci

La **suite de Fibonacci** tient son nom du mathématicien italien Leonardo Fibonacci, qui a vécu à Pise au XII^{ème} siècle (1175-1240), d'où son nom de Léonard de Pise, en référence à Léonard de Vinci.

La suite de Fibonacci se construit facilement : chaque terme de la suite, à partir du rang 2, s'obtient en additionnant les deux précédents, les deux premiers termes étant 0 et 1. Le troisième terme est donc 1 (0 + 1 = 1), le quatrième terme 2 (1 + 1 = 2), le cinquième 3 (1 + 2 = 3), le sixième 5 (2 + 3 = 5), et ainsi de suite. Le début de la suite du célèbre mathématicien Fibonacci est donc : 0, 1, 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13, 21 ...

Appelons (u_n) la suite de Fibonacci. On a donc $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et pour tout n entier naturel,

on a alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Chaque terme de cette suite, à partir du rang 2, est donc la somme des deux termes précédents.

La suite de Fibonacci n'est ni arithmétique, ni géométrique.

En effet, $u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 1 - 1 = 0$. La différence entre deux termes consécutifs de cette suite n'est pas constante donc la suite de Fibonacci n'est pas arithmétique.

Son premier terme étant 0, elle ne peut être géométrique.

On remarque également par exemple que $u_4/u_3 = 3/2$ et que $u_5/u_4 = 5/3$. En définissant une suite en prenant les termes de la suite de Fibonacci à partir du terme de rang 2, on obtient donc une suite qui n'est pas géométrique : le rapport entre 2 termes consécutifs de cette suite n'est pas constant.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

Suites: Limites & récurrence - Correction des exercices

Exercice 1 Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{n+325} = \dfrac{2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}{n\left(1+\dfrac{365}{n}\right)} = 2\dfrac{1+\dfrac{1}{2n}}{1+\dfrac{365}{n}}$ avec, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{365}{n}\right)=1\end{array}\right\}$ soit, par produit et quotient des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

b) $u_n = \dfrac{2n^2-3n+2}{1-n} = 2n\dfrac{1+\dfrac{3}{2n}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-1}$ avec, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 2n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{2n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)=-1\end{array}\right\}$ soit, par produit et quotient des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

c) $u_n = \dfrac{4n^2+1}{n(2n+1)} = \dfrac{4n^2\left(1+\dfrac{1}{4n^2}\right)}{n\times 2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)} = 2\dfrac{1+\dfrac{1}{4n^2}}{1+\dfrac{1}{2n}}$ avec, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{4n^2}\right)=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)=1\end{array}\right\}$ soit, par produit et quotient des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

d) $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n}+17}$ avec, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\sqrt{n}+17\right)=+\infty$, d'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

e) $u_n = \dfrac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{3n\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)}}{\sqrt{n}\left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}+1\right)} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{n}\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)}}{\sqrt{n}\left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}+1\right)} = \sqrt{3}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{3n}}}}{\dfrac{3}{\sqrt{n}}+1}$

avec, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3n}}\right)=1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{3n}}}=1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}+1\right)=1$.

Ainsi, par produit et quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}} = \dfrac{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}}{\sqrt{n^2\left(1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}} = \dfrac{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{\sqrt{n^2}\sqrt{1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}}$

avec, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}=1$ et, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}=1$, d'où, par quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

g) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Lorsque $n\to+\infty$, on est face à une forme indéterminée du type "$+\infty-\infty$".
On peut alors penser (et doit penser !) à utiliser la quantité conjuguée pour changer cette soustraction :

$u_n = \dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

On a alors, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$, d'où, par addition des limites,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=+\infty$ et enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$.

h) $u_n = \sqrt{n^2+n}-n$: on peut commencer par essayer de procèder de la même façon en utilisant la quantit´e conjugu´ee,

$u_n = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$, mais on se retrouve encore face à une forme indéterminée " $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ".

On doit alors factoriser par le terme prépondérant :

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$$

soit, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$.

On a alors, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right) = 2$, d'où, par quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Rappel : Schéma général d'une démonstration par récurrence :

On cherche à montrer par récurrence, pour tout entier n, la propriété $\mathcal{P}_n$.

Initialisation : On vérifie que $\mathcal{P}_0$ est vraie, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

On montre alors, en utilisant cette hypothèse (dite hypothèse de récurrence), que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est encore vraie.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence que, pour tout entier n, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 2 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 5u_n + 4$.

Montrer que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et donc $u_0 > 0$, et la propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, on ait $u_n > 0$.

On a alors, $5u_n > 0 \Longrightarrow 5u_n + 4 > 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 4 > 0$.

La propriété est donc encore vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $u_n > 0$.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 5 - 4u_n$.

Montrer que, pour tout entier n, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Initialisation : $u_0 = -3$.

Or, pour $n = 0$, $(-4)^{n+1} + 1 = (-4)^1 + 1 = -4 + 1 = -3$, et on a donc pour $u_0 = (-4)^{0+1} + 1$.

La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

ALors, $u_{n+1} = 5 - 4u_n = 5 - 4\left((-4)^{n+1} + 1\right)$, d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi, $u_{n+1} = 5 - 4(-4)^{n+1} - 4 = 5 + (-4)^{n+2} - 4 = 1 + (-4)^{n+1}$, ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Exercice 4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{u_n+2}$.
Montrer que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

Initialisation : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, et donc $0 < u_0 < 1$, et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $0 < u_n < 1$.

Alors, d'une part $1 < u_n + 1 < 2$, et d'autre part $2 < u_n + 2 < 3 \Longrightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{u_n+2} < \dfrac{1}{2}$.

En muliplіant ces deux inégalités, on obtient alors $\dfrac{1}{3} < \dfrac{u_n+1}{u_n+2} < \dfrac{2}{2}$, et on a donc $0 < u_{n+1} < 1$: la propriété est donc encore vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

Exercice 5 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = 1 \times 1! = 1$, et $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Alors, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \left(\sum_{k=1}^{n} k \times k!\right) + (n+1) \times (n+1)! = \Big((n+1)! - 1\Big) + (n+1) \times (n+1)!$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n+1)! + (n+1) \times (n+1)! - 1 = (n+1)!\Big(1 + (n+1)\Big) - 1 = (n+1)!\Big(n+2\Big) - 1$.

Or, $(n+1)!(n+2) = (n+2)!$, et on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n+2)! - 1 = \Big((n+1)+1\Big)! - 1$, ce qui montre que la prorpiété est encore vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 6 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Calculer u_2, u_3 et u_4 : $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 4$; $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 8$; $u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 16$.

Démontrer que, pour tout entier n, $u_n = 2^n$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et donc $u_0 = 2^0$. De même $u_1 = 2 = 2^1$.

La propriété est donc vraie au rang $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, on ait $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$.

On a alors, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5 \times 2^{n+1} - 6 \times 2^n$, d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi, $u_{n+2} = 2^n\left(5 \times 2 - 6\right) = 2^n \times 4 = 2^n \times 2^2 = 2^{n+2}$, ce qui montre que la propriété est donc encore vraie au rang $(n + 2)$.

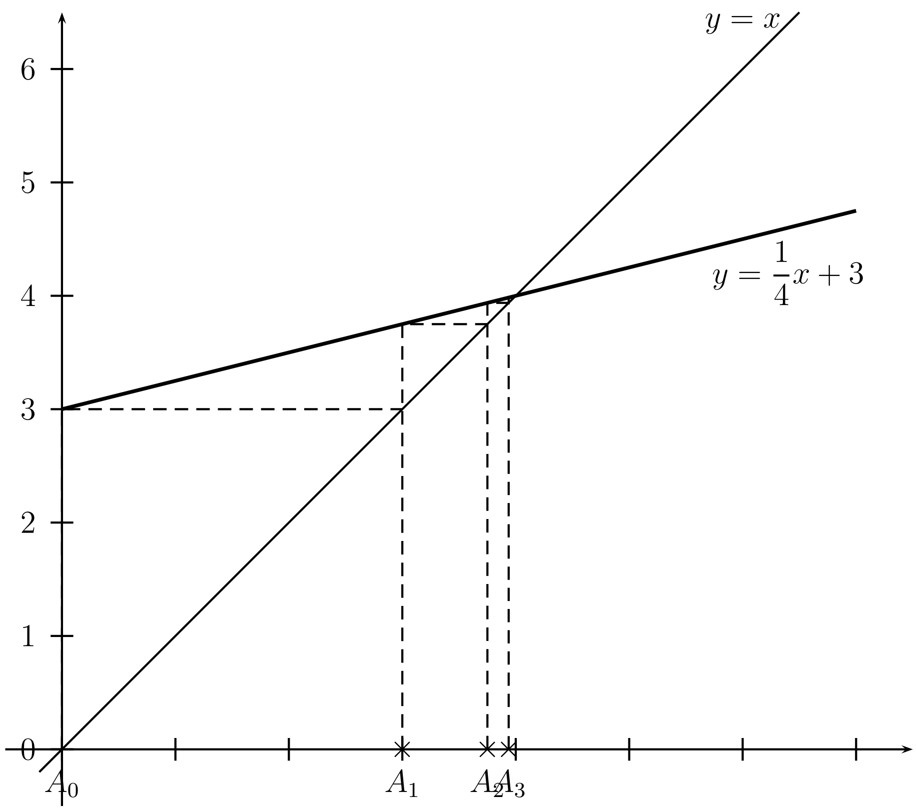
Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $u_n = 2^n$.

Remarque : Dans cette démonstration par récurrence, on a fait une hypothèse de récurrence qui porte sur 2 rangs successifs : n et $(n + 1)$, et qui montre que la propriété se transmet au rang suivant $(n + 2)$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n = 0$ et $n + 1 = 1$ (d'après l'initialisation), et elle donc vraie au rang $n + 2 = 2$.
Ensuite, comme elle est vraie au rang $n = 1$ et $n + 1 = 2$, elle est donc aussi vraie au rang $n + 2 = 3$.
Puis elle est vraie au rang $n = 2$ et $n + 1 = 3$, donc aussi au rang $n + 2 = 4$.
...

Exercice 7 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

1. Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4}x + 3$, puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisse respective u_0, u_1, u_2 et u_3.



2. Montrer que, pour tout entier n, $u_n \leqslant 4$.

   Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n \leqslant 4$.

   Initialisation : $u_0 = 1$, et donc $u_0 \leqslant 4$, et la propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

   Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n \leqslant 4$.

Alors, $\dfrac{1}{4}u_n \leqslant \dfrac{1}{4} \times 4 = 1$, et donc, $\dfrac{1}{4}u_n + 3 \leqslant 1 + 3 = 4$.
Ainsi, $u_{n+1} \leqslant 4$, et la propriété est encore vraie au rang $(n+1)$.

<u>Conclusion :</u> On vient de dmontrer d'après le principe de récurrence que, pour tout entier n, $u_n \leqslant 4$.

3. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

   Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

   <u>Initialisation :</u> $u_0 = 1$, et $u_1 = \dfrac{1}{4}u_0 + 3 = \dfrac{13}{4}$, et donc $u_0 \leqslant u_1$, et la propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

   <u>Hérédité :</u> Supposons que pour un entier n on ait $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   Alors, $\dfrac{1}{4}u_n \leqslant \dfrac{1}{4}u_{n+1}$, d'où, $\dfrac{1}{4}u_n + 3 \leqslant u_{n+1} + 3$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
   Ainsi la propriété est encore vraie au rang $(n+1)$.

   <u>Conclusion :</u> On vient de dmontrer d'après le principe de récurrence que, pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1}$, et donc que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   La suite (u_n) est croissante et majorée par 4, elle converge donc vers une limite l.

Exercice 8 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite, et conjecturer le sens de variation de la suite (u_n). Démontrer cette conjecture.

   $u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{3+1} = 2$; $u_2 = \sqrt{u_1 + 1} = \sqrt{3} \simeq 1,73$;
   $u_3 = \sqrt{u_2 + 1} = \sqrt{\sqrt{3} + 1} \simeq 1,65$; $u_4 = \sqrt{u_3 + 1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}} + 1} \simeq 1,61$;
   Comme $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > u_4$, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante.

   Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n > u_{n+1}$.

   <u>Initialisation :</u> La propriété est vraie pour les rangs $n = 0$ à $n = 3$ d'après les calculs précédents.

   <u>Hérédité :</u> Supposons que pour un entier n on ait $u_n > u_{n+1}$.
   Alors, $u_n + 1 > u_{n+1} + 1$, et donc, $\sqrt{u_n + 1} > \sqrt{u_{n+1} + 1}$, car la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Ainsi, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} > u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} + 1}$, et la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.

   <u>Conclusion :</u> On vient de montrer que, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $u_n > u_{n+1}$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est décroissante.

2. Montrer que, pour tout entier n, $0 < u_n < 3$.

   Par une récurrence immédiate, comme $u_0 = 1 > 0$, et comme si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} > 0$, on sait donc que pour tout entier n, $u_n > 0$.
   De plus, comme $u_0 = 1 < 3$ et que la suite (u_n) est décroissante, on a donc, pour tout entier n, $u_n < u_0 < 3$.

   On a donc bien au final, pour tout entier n, $0 < u_n < 3$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite l.

   La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite $l \geqslant 0$.

4. Déterminer l.

La limite l de la suite vérifie nécésairement $l = \sqrt{l+1}$ (point fixe),

soit $l \geqslant 0$ et $l^2 = l + 1 \iff l^2 - l - 1 = 0 \iff \left(l = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Comme $l = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, la limite de la suite (u_n) (car on sait qu'elle en a une) est $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 9 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2 \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

$u_1 = \dfrac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \dfrac{1}{3} - 2 = -\dfrac{5}{3}$;
$u_2 = \dfrac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = -\dfrac{5}{9} - 1 = -\dfrac{13}{9}$;
$u_3 = \dfrac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = -\dfrac{4}{27}$;

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

Initialisation : $u_4 = \dfrac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = -\dfrac{4}{81} + 1 = \dfrac{77}{81} > 0$, et la propriété est vraie au rang $n = 4$.

Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geqslant 4$ on ait $u_n \geqslant 0$.
Alors, $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant 0$, et donc, $\dfrac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant 0 + n - 2 \geqslant 0 + 4 - 2$, car $n \geqslant 4$.

Ainsi, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant 2 \geqslant 0$, et la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : On vient donc de démontrer que, d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

3. En déduire que, pour tout $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

Pour tout entier $n \geqslant 5$, $u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + (n-1) - 2 = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + n - 3$.
Or, comme $n \geqslant 5$, on a donc $n - 1 \geqslant 4$, et alors, d'après la question précédente, $u_{n-1} \geqslant 0$.
Ainsi, $u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + n - 3 \geqslant 0 + n - 3$.
On a donc, pour tout entier $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-3) = +\infty$, on en déduit, d'après le corolaire du théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 10 Soit, pour tout entier n, $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1}$.

Montrer que pour tout entier n, $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Pour tout entier n, on a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$.
Ainsi, en multipliant ces inégalités par $\dfrac{1}{n+1} > 0$, on obtient $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, on en déduit donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 11 Soit, pour tout entier n, $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$.

Montrer que pour tout entier n, $\dfrac{n-1}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n^2+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

On a $(-1)^n = 1$ lorsque n est pair, et $(-1)^n = -1$ lorsque n est impair.

Ainsi, pour tout entier n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, soit aussi $n-1 \leqslant n+(-1)^n \leqslant n+1$, puis, multipliant par $\dfrac{1}{n+1} > 0$, on obtient $\dfrac{n-1}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n^2+1}$.

On a $\dfrac{n-1}{n^2+1} = \dfrac{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$, et donc, par produit et quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n^2+1} = 0$.

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 12 Soit, pour tout entier n, $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$.

Montrer que pour tout entier n, $u_n \geqslant \dfrac{n-1}{3}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Pour tout entier n, $(-1)^n + n \geqslant -1+n$,

et $(-1)^n + 2 \leqslant 1+2 = 3$, d'où $\dfrac{1}{(-1)^n+2} \geqslant \dfrac{1}{3}$.

Ainsi, en multipliant ces deux inégalités, on obtient : $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2} \geqslant \dfrac{n-1}{3}$,

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{3} = +\infty$, on en déduit, d'après le corollaire du théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 13 Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}$..

1. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.
   Quel semble être la limite de (u_n) ?

   $u_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_0^2+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{3} \simeq 1,732$;

   $u_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_1^2+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{15} \simeq 1,94$;

   $u_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_2^2+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{15}{4}+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{63}{4}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{4} \simeq 1,984$;

   $u_4 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_3^2+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{63}{16}+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{255}{16}} = \dfrac{\sqrt{255}}{8} \simeq 1,996$

$u_5 \simeq 1,999$

La suite (u_n) semble converger vers 2.

2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}\right)^2 - 4 = \frac{1}{4}\left(u_n^2+12\right) - 4 = \frac{1}{4}u_n^2 + 1 = \frac{1}{4}\left(u_n^2+4\right) = \frac{1}{4}v_n$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

3. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

De plus $v_n = u_n^2 - 4 \iff u_n = \sqrt{v_n+4}$ ou $u_n = -\sqrt{v_n+4}$.
Comme $u_n \geqslant 0$ (car u_n est définie par une racine carrée), on a donc $u_n = \sqrt{v_n+4}$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{0+4} = 2$.
On a ainsi démontré la conjecture sur la limite de (u_n) faite à la question 1.

Exercice 14 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \geq -3 \\ u_{n+1} = \sqrt{3+u_n} \end{cases}$

Quelle valeur de u_0 faut-il prendre pour que la suite (u_n) soit stationnaire ?

Une suite stationnaire est une suite constante : pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n = u_{n-1} = \cdots = u_1 = u_0$.

Ainsi, la suite est stationnaire si, $u_1 = u_0 \iff \sqrt{3+u_0} = u_0 \iff 3 + u_0 = u_0^2$ et $u_0 \geqslant 0$.

On doit donc avoir ainsi $u_0^2 - u_0 - 3 = 0$ soit, en résolvant l'équation du second degré, $u_0 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ ou $u_0 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Comme $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < 0$, on doit donc nécessairement avoir $u_0 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Exercice 15 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2.

$3u_1 = u_0 + 4 = 9 \iff u_1 = 3\,;\quad 3u_2 = u_1 + 4 = 7 \iff u_1 = \frac{7}{3}$.

2. Démontrer que, pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$.

Initialisation : La propriété est vraie pour les rangs $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ d'après ce qui précède.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n \geqslant 2$.
Alors, $u_n + 4 \geqslant 2 + 4 = 6$, et donc $3u_{n+1} \geqslant 6 \iff u_{n+1} \geqslant \frac{6}{3} = 2$.
Ainsi, la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

Conclusion : On a donc démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$.

3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

   On peut montrer que (u_n) est décroissante par récurrence, en montrant que pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

   On peut aussi le montrer directement :

   Pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{4}{3}$, et donc,

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{4}{3} - u_n = -\dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{4}{3}$.

   Or, pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$, et ainsi, $-\dfrac{2}{3}u_n \leqslant -\dfrac{4}{3}$, d'où, $u_{n+1}-u_n = -\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{4}{3} \leqslant -\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3} = 0$.

   Ainsi, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est donc décroissante.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

   D'après ce qui précède, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, elle converge donc vers une limite $l \geqslant 2$.

   Cette limite l satisfait de plus nécéssairement l'équation $3l = l + 4$ (point fixe), soit $l = 2$.

   Ainsi, la suite (u_n) converge vers $l = 2$.

5. On pose, pour tout entier n, $v_n = u_n - 2$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{4}{3} - 2 = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}(u_n - 2) = \dfrac{1}{3}v_n$.

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$.

   On en déduit que, pout tout entier n, $v_n = v_0 q^n = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

6. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Déterminer l'expression de S_n, puis de T_n, en fonction de n.

$$\begin{aligned}
S_n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\
&= 3 + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdot + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 3\left[\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdot + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \\
&= 3\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 3\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

   Pour tout entier n, $v_n = u_n - 2 \iff u_n = v_n + 2$, et donc,

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\
&= (v_0+2) + (v_1+2) + \cdots + (v_n+2) \\
&= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (2 + 2 + \cdots + 2) \\
&= S_n + (n+1) \times 2 = \frac{9}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 2(n+1)
\end{aligned}$$

7. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

   Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{9}{2}$.
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(n+1) = +\infty$, et donc, par addition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.

Exercice 16 Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

   Pour tout entier $n > 0$, $1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} = u_n$.

   b. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.

   Pour tout entier $n > 0$, $n + 2 \geqslant 2 > 0$, et donc, $n(n+2) > 0$.
   De plus $(n+1)^2 \geqslant 1^2 > 0$, et on a donc $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} > 0$.

   De même (en cherchant à utiliser le résultat de la question précédente), $\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, soit $-\dfrac{1}{(n+1)^2} < 0$, et donc, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} < 1$.
   Au final, on a bien, pour tout entier $n > 0$, $0 < u_n < 1$.

   c. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

   Pour tout entier $n > 0$,
$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= -\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{-(n+1)^2 + (n+2)^2}{(n+2)^2(n+1)^2} \\
&= \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2}
\end{aligned}$$

   Or, pour tout entier $n > 0$, $2n + 3 > 3 > 0$, et $(n+2)^2(n+1)^2 > 0$,
   d'où, $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$.
   La suite (u_n) est donc décroissante.

   Remarque : Il y a bien sûr quantité d'autres raisonnements que l'on peut mener pour arriver à cette conclusion :

   - Ecrire $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ et étudier le sens de variation de f.

• Procéder par encadrements successifs en partant de $n+1 < n+2$ pour arriver à $u_n > u_{n+1}$
• Conjecturer le sens de variation de (u_n) en calculant les premiers termes, puis démontrer cette conjecture avec un raisonnment par récurrence
• ...

2. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

Montrons par récurrence que, pour tout entier $n > 0$, $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

Initialisation : $x_1 = u_1 = \dfrac{1(1+2)}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1+2}{2(1+1)} = \dfrac{3}{4}$
La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.
Alors, $x_{n+1} = \underbrace{u_1 \times u_2 \times u_3 \times \cdots \times u_n}_{x_n} \times u_{n+1} = x_n \times u_{n+1}$

et donc, avec $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$,
$x_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)} \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \dfrac{n+3}{2(n+2)} = \dfrac{(n+1)+2}{2\left((n+1)+1\right)^2}$ et la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

Conclusion : On a donc démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier $n > 0$, $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

b. Déterminer la limite de la suite (x_n).

$$x_n = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{2n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

avec, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$, d'où, par produit et quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

L'ARITHMETIQUE

I) LA DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

1) Définition et conséquences

1.1 Diviseur d'un entier

Définition : Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; on dit que l'entier relatif b divise a s'il existe un entier relatif k tel que $\boldsymbol{a = kb}$;
On écrit : $\boldsymbol{b|a}$.
On dit que a est divisible par b

Exemples : $3/12$ car $12 = 3\times4$ et $-6/42$ car $-42 = 7\times(-6)$ et on a :7 ne divise pas 16

Remarques :

- Si l'entier non nul b divise l'entier a alors $-b$ divise lui aussi.
- 1 divise tous les entiers relatifs
- 0 est divisible par tous les entiers non nuls : car $0 = 0 \times b$
- Si a est un entier les diviseurs de a constituent un ensemble fini noté D_a :

$D_a = \{b \in \mathbb{Z} \,/\, b|a\}$

Exemple :
$D_{18} = \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
et $D_{18}^{+} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Exercice01 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156
12)Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de -8

Solution01 :1) 156 a 12 diviseurs :
1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.
156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.
2) $D_{-8} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

Propriété : $a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}$; $c \in \mathbb{Z}$

- $1/a$ et $-1/a$ et a/a et $a/-a$
- $b|a \Rightarrow |b| \leq |a|$
- $a/b \Rightarrow a/b\times c$
- $a/b \Rightarrow |a| \leq |b|$
- $b|1 \Rightarrow b \in \{-1,1\}$

Déduction :
Si m et n sont deux entiers relatifs tels que : $mn = 1$ alors $|m| = 1$ et $|n| = 1$.

1.2 Multiple d'un entier.

Définition : On dit que a est un multiple de b si b est un diviseur de a

Remarque : Si b est un entier non nul, les multiples de b constituent Un ensemble infini noté $b\mathbb{Z}$
$b\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} / \, ; \, m = kb \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple :
$3\mathbb{Z} = \{\leftarrow \cdots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots \rightarrow\}$

1.3 Diviseur commun, multiple commun de deux entiers

Définition :a) Si $b|m$ et $b|n$ on dit que b est un diviseur commun de m et n
b) Si $b|m$ et $b'|m$, on dit que m est un multiple commun de b et b'.

Exemples :4 est un diviseur commun de 16 et 12
36 est un multiple commun de 9 et 12.

Propriété : Etant donnés des entiers relatifs non nuls. On a les propositions suivantes :

- $a|b$ et $b|a \Rightarrow |a| = |b|$
- $a|b$ et c|d⇒ ac|bd
- $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$
- $a|b \Rightarrow a|bc$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m + n$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m - n$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|\alpha m + \beta n$ où α et β sont des entiers relatifs quelconques.
- $a/b \Rightarrow a^n/b^n \quad n \in \mathbb{N}$

Exercice02 :
1) $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$
a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors a/c
b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors a/c
c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$
2) $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$
Montrer que $a/19$
3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$
Montrer que $d/13$

Solution02 : 1) a) $\begin{cases} a/2b+c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2(b+c)-(2b+c) \Rightarrow a/c$

1) b) $\begin{cases} a / 2b+3c \\ a / b+c \end{cases} \Rightarrow a / 2b+3c-2(b+c) \Rightarrow a / c$

1) c) $\begin{cases} a / x-y \\ a / b-c \end{cases} \Rightarrow a / bx-by \text{ et } a / by-cy \Rightarrow a / bx-cy$

2) $a / 12n+1$ et $a / -2n+3$

$\Rightarrow a / 12n+1 \text{ et } a / -12n+18 \Rightarrow a / 19$

$\Rightarrow a \in \{\pm1;\pm19\}$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et d / n^2+3 et $d / 2n-1$

$\Rightarrow d / n^2+3 \text{ et } a / (2n-1)^2 \Rightarrow d / 4n^2+12 \text{ et } d / 4n^2-4n+1$

$\Rightarrow d / 11+4n \text{ et } d / -2+4n \Rightarrow d / 13$

Exercice03 : $a \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} a / 5x-7 \\ a / 2x+3 \end{cases} \Rightarrow a / 29$

Solution03 : $\begin{cases} a / 5x-7 \\ a / 2x+3 \end{cases} \Rightarrow a / 2(5x-7)-5(2x+3)$

$a / 10x-14-10x-15 \Rightarrow a / -29 \Rightarrow a / 29$

Exercice04 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$:

3 divise 4^n-1 **Solution04 :**

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} / 4^n-1=3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons

$4^0-1=0$ est un multiple de 3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n-1=3k$ donc

$4^n=3k+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1}-1=3k'$??

$4^{n+1}-1=4\times4^n-1$

$=4\times(3k+1)-1=12k+4-1=12k+3=3(4k+1)$

avec $k'=4k+1$ Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; 4^n-1$ est divisible par 9

Exercice05 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

Solution05 : $n+2/3n+1$ et $n+2/n+2$

$n+2/3n+1$ et $n+2/3n+6$ donc

$n+2/(3n+6)-(3n+1)$ donc $n+2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5 donc Il faut que $n+2 \in \{-1;-5;1;5\}$ ce qui entraine que $n \in \{-3;-7;-1;3\}$

On vérifie que que que si $n \in \{-3;-7;-1;3\}$ alors $n+2/3n+1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$ sont : -7 ; -3 ;-1 ;3

Exercice 06 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Solution06 : Cette fraction a un sens si : $n+4 \neq 0$ soit $n \neq -4$

On constate que $3n+8=3(n+4)-4$

$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si $n+4$ divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que $n+4 \in \{-4;-2;-1;1;2;4\}$ ce qui entraine que $n \in \{-8;-6;-5;-3;-2;0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ;-5 ; -3 ; -2 ; 0.

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :a) $x^2-y^2=32$ avec $x \succ y$

b) $2xy+2x+y=99$

Solution07 :a) $x^2-y^2=32 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=32$

$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positif de 32

Et $(x-y)+(x+y)=2x$ est u nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32=2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$S=\{(6;2);(9;7)\}$

b) $2xy+2x+y=99 \Leftrightarrow 2xy+y+2x+1-1=99$

$\Leftrightarrow y(2x+1)+2x+1=99+1 \Leftrightarrow (2x+1)(y+1)=100$

Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positif de 100

$D_{100}=\{1;2;4;5;10;20;25;50;100\}$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$S=\{(0;99);(2;19);(12;3)\}$

2) La division euclidienne

2.1 La division euclidienne dans ℕ.

Propriété : Considérons a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$; ils existent deux entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$ où $0 \leq r < b$

- L'entier a s'appelle : ***Le divisé***
- L'entier b s'appelle : ***Le diviseur***
- L'entier q s'appelle : ***Le quotient***
- L'entier r s'appelle : ***Le reste***

Remarque : Si r est le reste de la division euclidienne par b alors : $r \in \{0,1, \dots , b-1\}$.

Exemple1 :

la division euclidienne de 75 par 8 donne :
$75=9\times6+3$ car $0 \leq 3 < 8$

la division euclidienne de 126 par 7 donne :
$126=18\times7+0$ car $0 \leq 0 < 7$

la division euclidienne de 85 par 112
donne : $85=0\times112+85$ car $0 \leq 85 < 112$

Exemple2 : Un entier naturel n peut s'écrire de l'une des façons suivantes
$n = 5k$ ou $n = 5k + 1$ ou $n = 5k + 2$
ou $n = 5k + 3$ ou $n = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice 08 : déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 $(p \in \mathbb{N})$

Solution08 : $n \in \mathbb{N}$: $n = 25p + p^2$ et $0 \leq p^2 \prec 25$
donc $0 \leq p \prec 5$

Donc : $\begin{cases} p=0 \\ n=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=1 \\ n=26 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=2 \\ n=54 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=3 \\ n=84 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=4 \\ n=116 \end{cases}$

Donc : $n \in \{0;26;54;84;116\}$

Exercice 09: n et a et b des entiers naturels
Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution09 : soit r le reste de la division euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc :
$n = aq + r$ et $0 \leq r \leq a-1$ et on a : $q = bq' + r'$ et $0 \leq r' \leq b-1$ donc on déduit que :
$n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$

Et puisque : $0 \leq r' \leq b-1$ et $0 \leq r \leq a-1$ alors :
$ar' + r \leq ab-1$ donc $n = abq' + ar' + r$
$0 \leq ar' + r \leq b-1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

2.2 La division euclidienne dans ℤ

Propriété : Considérons a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; ils existent un entiers relatif q et un entier naturel r
Tels que : $a = bq + r$ où $0 \leq r < |b|$

Exemple1 :1)la division euclidienne de 37 par -11 donne : $37=(-11)\times(-3)+4$ car $0 \leq 4 < 11$

2)a division euclidienne de -37 par 11
donne : $-37=11\times(-4)+7$ car $0 \leq 7 < 11$

3) l a division euclidienne de -37 par -11
donne : $-37=(-11)\times4+7$ car $0 \leq 7 < 11$

Exercice10: $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$
si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de ab^9-1 par b^{10}

Solution10 : soit r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b donc :
$a-1=bq+r$ et $0 \leq r \prec b$

Donc : $ab^9 - b^9 = b^{10}q + rb^9$

Donc : $ab^9 - 1 = b^{10}q + rb^9 + b^9 - 1$

Donc : $ab^9 - 1 = b^{10}q + (r+1)b^9 - 1$

On montre que : $0 \leq (r+1)b^9 - 1 \prec b^{10}$???

On a : $0 \leq r \prec b$ donc $0 \leq r+1 \leq b$
donc $0 \leq (r+1)b^9 \leq b^{10}$ donc $0 \leq (r+1)b^9 - 1 \leq b^{10} - 1$
donc $0 \leq (r+1)b^9 - 1 \prec b^{10}$

conclusion : q est aussi le quotient de la division euclidienne de ab^9-1 par b^{10}

II) LES NOMBRES PREMIERS

1) Définition et propriétés

Définitions : a) On dit que l'entier d est un diviseur **effectif** de l'entier relatif a
Si $d|a$ et $|d| \neq 1$ et $|d| \neq |a|$

b) On dit qu'un entier relatif non nul p est **premier** s'il est différent de 1 et s'il n'admet pas de diviseurs effectifs.

Remarques :

- Un nombre premier p admet exactement deux diviseurs positifs 1 et |p|.
- Si p est un nombre premier positif alors p n'admet pas de diviseurs effectifs de même
  - p n'admet pas de diviseurs effectif d'où :
  - -p est aussi premier ;
- Pour l'étude des nombres premiers on se contente d'étudier les nombres premiers positifs.

Propriété : Soit $\boldsymbol{a}$ un entier naturel non nul différent de 1 et non premier, le plus petit diviseur de a diffèrent de 1 est un nombre premier

Exemple1 : Les nombres -3 et -7 et 23 sont premiers.

2) Détermination d'un nombre premier

Propriété : Soit n un entier naturel non nul, diffèrent de 1 et non premier, il existe un nombre premier p qui divise l'entier n et qui vérifie $p^2 \leq n$.

Remarque : Cette propriété nous permet de déterminer si un nombre est premier ou non.

Corolaire : Si un entier n n'est divisible par aucun entier premier p et qui vérifie $p^2 \leq n$ alors n est premier.

Exercice: 1) Les nombres suivants sont–ils premiers :499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2+3n \quad n\in\mathbb{N}$

Théorème : L'ensemble des nombres premiers est infini.

III) PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN, PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN.

1) Plus grand diviseurs commun

1.1 Définition et propriété

Définition : On dit que le nombre d est **le plus grand diviseur commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque d divise a et d divise b et qu'il n'y a pas d'autre plus grands diviseurs de ces deux nombres.

On note $d = PGDC\ (a, b) = a \wedge b$

Exemple :

$-48 \wedge 36 = 12$

Propriétés : 1) $a \wedge a = |a|$ 2) $1 \wedge a = 1$

3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

4) Si $b|a$ alors $a \wedge b = |b|$

5) si $d|a$ et $d|b$ alors $d|\ (a \wedge b)$

Exercice11 : montrer que $\forall a\in\mathbb{Z} \quad a\wedge(a+1)=1$

Solution11 : on pose $d=a\wedge(a+1)$

$\Rightarrow d/a$ et $d/a+1 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$

Exercice12 : $n\in\mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A=n^2+3$ et $B=n+2$

1) montrer que $A\wedge B=(n+2)\wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\dfrac{n^2+3}{n+2}\in\mathbb{N}$

Solution12 : 1)on pose $d=A\wedge B$ et $d'=(n+2)\wedge 7$

On a : $d=A\wedge B$

$\Rightarrow d/A$ et $d/B \Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$

$\Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$ on utilisant la division euclidienne : on trouve : $n^2+3=(n+2)(n-2)+7$

$n^2+3-(n+2)(n-2)=7$

$\Rightarrow d/n^2+3-(n+2)(n-2)$

$\Rightarrow d/7$ et $d/n+2 \Rightarrow d/(n+2)\wedge 7 \Rightarrow d/d'$

Inversement : On a : $d'=(n+2)\wedge 7$

$\Rightarrow d'/n+2$ et $d'/7 \Rightarrow d'/(n+2)(n-2)$ et $d'/7$

$\Rightarrow d'/(n+2)(n-2)+7$ et $d'/7 \Rightarrow d'/n^2+3$ et $d'/7$

donc : $d'/A\wedge B$ donc d'/d

donc d/d' et d'/d et $d\in\mathbb{N}$ et $d'\in\mathbb{N}$ donc

donc $d=d'$ donc : $A\wedge B=(n+2)\wedge 7$

2) $\dfrac{n^2+3}{n+2}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow n+2/n^2+3$ et et on a : $n+2/n+2$

Donc : $n+2/A\wedge B$ Donc : $n+2/(n+2)\wedge 7$

Donc : $n+2/7$ or 7 est premier donc :

Il faut que $n+2\in\{1;7\}$ ce qui entraine que $n=5$

Définition : On dit que deux entier relatifs a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

Exemple : 21 et 10 sont premiers entre eux.

Exercice 13: $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $d\in\mathbb{Z}$ tels que : $a=bc+d$

1) montrer que $a\wedge b=b\wedge d$

2) En déduire que : $a\wedge b=b\wedge(a-bc)$

Solution13 : 1)on pose $\Delta_1=a\wedge b$ et $\Delta_2=b\wedge d$

On a : Δ_1/a et Δ_1/b donc Δ_1/a et Δ_1/bc donc

$\Delta_1/a-bc$ donc Δ_1/d

donc Δ_1/d et Δ_1/b donc $\Delta_1/b\wedge d$ donc Δ_1/Δ_2

inversement On a : Δ_2/b et Δ_2/d donc Δ_2/d et

Δ_2/bc donc $\Delta_2/bc+d$ donc Δ_2/a

donc Δ_2/a et Δ_2/b donc $\Delta_2/a\wedge b$ donc Δ_2/Δ_1

On a donc : Δ_1/Δ_2 et Δ_2/Δ_1 et $\Delta_1\in\mathbb{N}$ et $\Delta_2\in\mathbb{N}$

donc $\Delta_1=\Delta_2$

donc : $a\wedge b=b\wedge d$

2)on a : $a=bc+(a-bc)$ si on prend : $d=a-bc$ et d'après 1) on aura : $a\wedge b=b\wedge d=b\wedge(a-bc)$

Exercice14 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$
montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Solution14 : 1)on pose $d = A \wedge B$

$\Rightarrow d/A$ et $d/B \Rightarrow d/35a+57$ et $d/45a+76$

$\Rightarrow d/9(35a+57)$ et $d/7(45a+76)$

$\Rightarrow d/315a+513$ et $d/315a+532$

$\Rightarrow d/19$ or 19 est premier donc :

Il faut que $d \in \{1;19\}$ ce qui entraine que :

$A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

1.2 L'algorithme d'Euclide.

Théorème : Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul on a : $a = bq + r$
Où $0 \leq r < b$ on a : $a \wedge b = b \wedge r$

L'algorithme d'Euclide.

Propriété : Soient a et b deux entier naturels non nuls. Le plus grand diviseur commun de a et b est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.

Application :
1- Trouver le $PGDC$ (362154, 82350).
2- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350.

Propriété : Soient a et b deux entier relatifs non nuls
Les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs de $a \wedge b$.

On peut dire que : $D_a \cap D_b = D_{a \wedge b}$

Exercice : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :
1) $n \wedge (n+1) = 1$ 2) $n \wedge (2n+1) = 1$
3) $(2n+1) \wedge (3n+1) = 1$

2) Le plus petit multiple commun.
Définition et propriété

Définition : On dit que le nombre entier naturel m est **le plus petit multiple commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque
m est un multiple de a et de b et qu'il n'y a pas d'autre plus petit multiple non nuls de ces deux nombres. On note : $m = PPCM(a, b) = a \vee b$

Exemple : $-48 \wedge 36 = 144$

Propriétés :
1) $a \vee a = |a|$ 2) $a \vee b = b \vee a$
3) $a \vee 1 = |a|$ 4) Si $b|a$ alors $a \vee b = |a|$
5) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
6) $a|(a \vee b)$; $b|(a \vee b)$ et $(a \vee b)|ab$

Propriété : Considérons a et b deux entiers relatifs.
Si $a \vee b = m$ et M un multiple commun de a et b alors $m|M$.

Indications pour preuve :
Poser $M = qm + r$ on a : $a|m$, $a|M$ conclure.
De même pour b et si $r \neq 0$ aboutir à une contradiction.

IV) LA CONGRUENCE MODULO n

1) Définition et propriétés.

Activité : Quelle relation y a-t-il entre ces nombres −11, 15, 67, 28, 132 et 13.

Définition : Soient a et b deux entiers relatifs ; et n un entier naturel non nul. On dit que : $\boldsymbol{a}$ est congrue à $\boldsymbol{b}$ modulo $\boldsymbol{n}$ si $n|(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$.
On écrit : $\boldsymbol{a \equiv b\ [n]}$

Exemples : $122 \equiv 27\ [5]$ $34 \equiv 13\ [7]$

Propriété : Si $a \equiv b\ [n]$ alors a et b ont le même reste de la division euclidienne sur n

Propriété fondamentale :
1) $(\forall a \in \mathbb{Z})(a \equiv a\ [n])$ on dit que la relation de congruence est réflexive.
2) $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2)(\ a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow b \equiv a\ [n]\ )$: on dit que la relation de congruence est symétrique.
3) $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3)$
$(a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n] \Rightarrow a \equiv c\ [n])$: on dit que la relation de congruence est transitive.

Définition : Puisque la relation est de congruence est réflexive, symétrique et transitive on dit que la relation de congruence est une **relation d'équivalence**

2) Compatibilité de la relation d'équivalence avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

Propriété et définition : Soit n un entier naturel non nul. Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ alors :
1) $a + c \equiv b + d\ [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$
2) $ac \equiv bd\ [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Corolaire : Si $a \equiv b\ [n]$ alors pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a : $a^k \equiv b^k\ [n]$

Remarque : La réciproque du corolaire n'est pas vraie : $2^4 \equiv 3^4\ [5]$ mais $2 \not\equiv 3\ [5]$

Exercice15 : $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19
Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :
1) $a+b$ 2) a^2+b^2 3) $2a-5b$

Solution15 : 1)On a : $a \equiv 17[19]$ et $b \equiv 15[19]$

donc : $a+b \equiv 17+15[19] \Leftrightarrow a+b \equiv 13[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a+b$ Par 19 est : 13

2) $a\equiv 17[19]\Rightarrow a^2\equiv 17^2[19]\Rightarrow a^2\equiv 4[19]$

$b\equiv 15[19]\Rightarrow b^2\equiv 15^2[19]\Rightarrow b^2\equiv 16[19]$

Donc : $a^2+b^2\equiv 4+16[19]\Leftrightarrow a^2+b^2\equiv 1[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre a^2+b^2 Par 19 est : 1

3) $a\equiv 17[19]\Rightarrow 2a\equiv 2\times 17[19]\Rightarrow 2a\equiv 15[19]$ **(1)**

$b\equiv 15[19]\Rightarrow 5b\equiv 5\times 15[19]\Rightarrow 5b\equiv 18[19]$

Donc : $5b\equiv -1[19]\Rightarrow -5b\equiv 1[19]$ **(2)**

De **(1) et (2)** on déduit que :

$2a-5b\equiv 15+1[19]\Rightarrow 2a-5b\equiv 16[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $2a-5b$ Par 19 est : 16

Exercice16 : 1)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 10 du nombres 3^n

2)en déduire le chiffre des unités du nombres 2019^{2020}

3)Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tél que : $3^n+5n+2\equiv 0[10]$

Solution16 :1) $3^n\equiv r[10]$ et $r\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

On a : $3^0\equiv 1[10]$ et $3^1\equiv 3[10]$ et $3^2\equiv 9[10]$ et $3^3\equiv 7[10]$ et $3^4\equiv 1[10]$

Si $n\in\mathbb{N}$ alors : $n=4k+r$ avec $r\in\{0;1;2;3\}$

On a : $3^4\equiv 1[10]$ donc : $(3^4)^k\equiv 1^k[10]$

donc : $3^{4k}\equiv 1[10]$ et $3^{4k+1}\equiv 3[10]$ et $3^{4k+2}\equiv 9[7]$ et $3^{4k+3}\equiv 7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est le reste dans la division du nombre 2019^{2020} Par 10 cad : on cherche r tel que : $2019^{2020}\equiv r[10]$??

On a : $2019=2010+9$ donc : $2019\equiv 9[10]$

donc : $2019^{2020}\equiv 9^{2020}[10]$ donc : $2019^{2020}\equiv 3^{4040}[10]$

or : $4040=4\times 1010=4\times k$

donc : $2019^{2020}\equiv 3^{4k}[10]$ donc : $2019^{2020}\equiv 1[10]$

le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est 1

Autre méthode **:** $2019\equiv 9[10]$

donc : $2019\equiv -1[10]$ donc : $2019^{2020}\equiv 1[10]$

3)On Dresse une table comme suite :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
3^n	$\equiv 1[10]$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 9[10]$	$\equiv 7[10]$
$5n$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$
3^n+5n+2	$\equiv 3[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 1[10]$	$\equiv 4[10]$

donc : $3^n+5n+2\equiv 0[10]\Leftrightarrow n=3k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$

Exercice17 : 1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(n+1)\equiv 0[n^2]$

2) montrer que: $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}\equiv 3[10]$

Solution17 :1)on a : $(n+2)^{n+2}=\sum_{k=0}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$ Donc :

$(n+2)^{n+2}=C_{n+2}^0 n^0 2^{n+2}+C_{n+2}^1 n2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$

$(n+2)^{n+2}=2^{n+2}+(n+2)n2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$

Donc : $(n+2)^{n+2}=2^{n+1}(2+n^2+2n)+n^2\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$

$(n+2)^{n+2}=2^{n+1}(2+2n)+2^{n+1}n^2+n^2\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$

$(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(1+n)=n^2\left(2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}\right)$

on a : $n^2\left(2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}\right)\equiv 0[n^2]$

donc : $(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(n+1)\equiv 0[n^2]$

2) on a : $7\equiv 7[10]$ et $7^2\equiv -1[10]$ donc $7^4\equiv 1[10]$

Donc : $7^{4k}\equiv 1[10]$ et $7^{4k+1}\equiv 7[10]$ et $7^{4k+2}\equiv 9[10]$ $7^{4k+3}\equiv 3[10]$

On aussi : $7\equiv 3[4]$ et $7^2\equiv 1[4]$

Donc $7^{2k}\equiv 1[4]$ et $7^{2k+1}\equiv 3[4]$

Or : $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}\equiv 1[2]$ (car impair)

Donc : $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}\equiv 3[10]$

Exercice 18 : 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 45872^{2018} par 9

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13

3) Montrer que pour tout n entier naturel : $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7

4) Montrer que pour tout n entier naturel, $5n^3+n$ est divisible par 6

5) Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors : n^6-1 est un multiple de 7

6 Montrer que pour tout entier naturel, le nombre $n(n^2+5)$ est divisible par 6

Exercice19 : $x\in\mathbb{N}^*$ et $y\in\mathbb{N}^*$ On considère les deux nombres : $a=9x+4y$ et $b=2x+y$

1)montrer que $x\wedge y=a\wedge b$

2) $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=n^2+5n+13$ et $b=n+3$

a)montrer que $a\wedge b=b\wedge 7$
b)en déduire les valeurs possibles $a\wedge b=d$
c)montrer que : $n\equiv 4[7]\Leftrightarrow a\wedge b=7$
d)en déduire les valeurs de $n\in\mathbb{N}$ tel que : $a\wedge b=1$

Solution19 :1)on pose $d=x\wedge y$ et $d'=a\wedge b$
montrons que : $d=d'$
$d=x\wedge y$ donc : $\Rightarrow d/x$ et $d/y \Rightarrow d/a$ et d/b
Car il divise toute combinaison de x et y
$\Rightarrow d/a\wedge b \Rightarrow d/d'$
Inversement :
$d'=a\wedge b \Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/9x+4y$ et $d'/2x+y$
$\Rightarrow d'/(9x+4y)-4(2x+y)$ et $d'/9(2x+y)-2(9x+4y)$
$\Rightarrow d'/x$ et $d'/y \Rightarrow d'/x\wedge y \Rightarrow d'/d$
ce qui entraine: $d=d'$
2) $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=n^2+5n+13$ et $b=n+3$
a) montrons que $a\wedge b=b\wedge 7$?
la division euclidienne de $n^2+5n+13$ par $n+3$
donne : $n^2+5n+13=(n+3)(n+2)+7$
Donc : $a=b(n+2)+7\Leftrightarrow a-b(n+2)=7$
on pose $d'=b\wedge 7$ et $d=a\wedge b$
montrons que : $d=d'$
$d=a\wedge b\Rightarrow d/a$ et $d/b \Rightarrow d/a-b(n+2)$ et d/b
$\Rightarrow d/7$ et $d/b \Rightarrow d/b\wedge 7 \Rightarrow d/d'$
$d'=b\wedge 7\Rightarrow d'/7$ et $d'/b \Rightarrow d'/b(n+2)+7$ et d'/b
$\Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/a\wedge b \Rightarrow d'/d$
ce qui entraine: $d=d'$
b) les valeurs possibles $a\wedge b=d$??
on a : $a\wedge b=b\wedge 7=d$
donc : $d/7$ donc : $d=1$ ou $d=7$
c)montrons que : $n\equiv 4[7]\Leftrightarrow a\wedge b=7$
$n\equiv 4[7]\Leftrightarrow n+3\equiv 0[7]\Leftrightarrow 7/n+3\Leftrightarrow 7/b\Leftrightarrow b\wedge 7=7\Leftrightarrow b\wedge a=7$
d) les valeurs de $n\in\mathbb{N}$ tel que : $a\wedge b=1$??
$a\wedge b=1\Leftrightarrow n$ n'est pas congrue a 0 modulo 4
$n\equiv 0[7]$ ou $n\equiv 1[7]$ ou $n\equiv 2[7]$ ou $n\equiv 3[7]$ ou $n\equiv 5[7]$
ou $n\equiv 6[7]$

3) Les classes d'équivalences.

3.1 Définition et propriété :

Activité : Déterminer l'ensemble des entiers relatifs qui admettent 2 pour reste de la division par 7.

Définition : Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste r de la division euclidienne par n s'appelle **la classe d'équivalence de** r et se note : $\bar{r}$ = $\{m\in\mathbb{Z}\,/\,m\equiv r\,[n]\}=\{nk+r \text{ où } k\in\mathbb{Z}\}$

Exemple : Pour $n=7$ les restes possibles sont les éléments de l'ensemble :{0,1,2,3,4,5,6}
Donc on peut définir les classes d'équivalences suivantes :
$\bar{0}=\{m\in\mathbb{Z}\,/\,m\equiv 0\,[7]\}$
$\bar{1}=\{m\in\mathbb{Z}\,/\,m\equiv 1\,[7]\}$ et …
$\bar{6}=\{m\in\mathbb{Z}\,/\,m\equiv 6\,[7]\}$
on remarquer que $\bar{0}=\bar{7}$
Les classes d'équivalences modulo 7 constituent :un ensemble noté :
$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{6}\}$

Généralisation : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};...;\overline{n-1}\}$

3.2 Les opérations sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition : Soit n un entier naturel non nul.
On définit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ les deux lois :
1) **L'addition :** On pose $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$
2) **La multiplication :** On pose : $\bar{a}\times\bar{b}=\overline{a\times b}$

Exemple : Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $\bar{3}\times\bar{4}=\bar{0}$ et $\bar{5}+\bar{4}=\bar{3}$

Exercice20: Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x=\bar{3}$ 2) $x^2+\bar{3}x=\bar{0}$
3) $\overline{2013}x^3+\bar{2}x=\bar{k}$

Solution20 : On a : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3}\}$
1)On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que Cette équation n'admet pas de solutions
Donc : $S=\varnothing$
1)On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2+\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :
$\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont solutions de l'équation
Donc : $S=\{\bar{0};\bar{1}\}$

2) $\overline{2013}x^3+\overline{2}x=\overline{k} \Leftrightarrow \overline{1}x^3+\overline{2}x=\overline{k} \Leftrightarrow x^3+\overline{2}x=\overline{k}$

Car : $2013=503\times4+1$

On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
x^3	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$x^3+\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Si $\overline{k}=\overline{0}$: $S=\{\overline{0};\overline{2}\}$ Si $\overline{k}=\overline{1}$: $S=\{\overline{3}\}$

Si $\overline{k}=\overline{2}$: $S=\varnothing$ Si $\overline{k}=\overline{3}$: $S=\{\overline{1}\}$

Exercice21 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}\right)^2$ l'équations suivants : $x+\overline{3}y=\overline{1}$

Solution21 : on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4}\}$ Comme suite

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$

$S=\{(\overline{0};\overline{2});(\overline{1};\overline{0});(\overline{2};\overline{3});(\overline{3};\overline{1});(\overline{4};\overline{3});(\overline{4};\overline{4})\}$

Exercice22 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}\right)^2$ les système suivants : $\begin{cases}\overline{3}x+\overline{2}y=\overline{1}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases}$

Solution22 :

$$\begin{cases}\overline{3}x+\overline{2}y=\overline{1}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\overline{3}+\overline{2})x+(\overline{2}+\overline{4})y=\overline{3}+\overline{1}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\overline{4}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\overline{1}\\ y=\overline{4}\end{cases}$$ donc $S=\{(\overline{1};\overline{4})\}$

Exercice : 1) Dresser les tables des opérations de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations :

a) $\overline{2}x-\overline{1}=\overline{0}$ b) $\overline{4}x+\overline{1}=x+\overline{3}$

c) $\overline{5}x^2+\overline{3}x+\overline{1}=\overline{0}$

Propriété : Si p est **premier** alors dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a :

$(\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0} \Leftrightarrow \overline{a}=\overline{0}$ ou $\overline{b}=\overline{0})$

Preuve : Après la décomposition.

IV) DECOMPOSITION D'UN ENTIER EN FACTEURS DES NOMBRES PREMIERS

1) Définition et propriétés

Activité : Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre : 24816

Théorème :

a)Chaque entier **naturel** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite :

$$m=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

b) Chaque entier **relatif** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers
comme suite :

$$m=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

où $\varepsilon\in\{-1,1\}$

Propriété 1: Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme :

$$a=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

un entier d non nul divise l'entier a si et seulement si d à une décomposition de la forme

$$d=\varepsilon p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times p_3^{\beta_3}\times\ldots\times p_n^{\beta_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\beta_k}$$ δn où

$(\forall i\in[\![1,n]\!])(0\leq\beta_i\leq\alpha_i)$

δn un diviseur de a le nombre des valeurs possibles de δi est $\alpha i+1$

On en déduit que :

Propriété 2 :

$$a=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

est un entier, le nombre des diviseurs de a est : $2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$

Exercice :

1- Décomposer le nombre 2975 en facteurs des nombres premiers

2- Déterminer le nombre des diviseurs de 2975.

3- Déterminer tous les diviseurs positifs de 2975.

Propriété 3 : Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme :

$$a=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

un entier m est un multiple de a si et seulement si $m = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times \ldots \times p_n^{\beta_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$

où $(\forall i \in [\![1, n]\!])(\alpha_i \leq \beta_i)$

2) Application de la décomposition.

Propriété : Soient a et b deux entiers naturels

1) Le plus grand entier n qui vérifie :
$n \leq a$ et $n \leq b$ est inf (a, b)

2) Le plus petit entier n qui vérifie :
$n \geq a$ et $n \geq b$ est sup (a, b)

Exemple : $a = 7$ et $b = 10$

Le plus grand des entiers n tel que :
$n \leq 7$ et $n \leq 10$ est : $7 = \inf(10,7)$

Le plus petit des entiers n tel que :
$n \geq 7$ et $n \geq 10$ est $10 = \sup(10,7)$

2.1 Le P.G.C.D de deux nombres.

Soients $a = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$ =1 et $b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ;le $P.G.D.C$ (a, b) est l'entier

$$a \wedge b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\inf(\alpha_k;\beta_k)}$$

Remarque : Soient a et b deux entiers relatifs on a : $a \wedge b = |a| \wedge |b|$

Exemple : Déterminer : $(-5664) \wedge (-984)$ et $324 \wedge (-144)$

Exercice :

1- Décomposer les nombres 362154 et 82350 en produit des facteurs premiers

2- Déterminer le P.G.C.D de 362154 et 82350

3- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350

2.2 Le P.P.C.M de deux nombres.

Soients $a = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$ =1 et $b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ; le ppmc (a, b) est l'entier

$$a \vee b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\sup(\alpha_k;\beta_k)}$$

Exemple :déterminer : $d = (-8316) \wedge 1080$ et $m = 8316 \vee 1080$

Solution : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

Donnent : $8316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11$ et $1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$

$d = 8316 \wedge 1080 = 2^2 \times 3^3 = 108$ et

$m = 8316 \vee 1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 11880$

2.3 Applications de la décomposition.

Propriété : Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, on a les assertions suivantes :

1) $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$

2) $ca \vee cb = c(a \vee b)$

3) $ca \wedge cb = c(a \wedge b$

Exemple :si $2 = a \wedge b$ et $-12 = a \times b$ déterminer : $a \vee b$

Solution : on a $a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$

donc : $a \vee b = |a \times b| / a \wedge b = |-12|/2 = 6$

Exercice23: $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$ et $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les $a \vee b$ $(n \in \mathbb{N})$

Solution23 :

$a = ((5^n)^2 - 1)((6^n)^2 - 1) = (5^n - 1)(5^n + 1)(6^n - 1)(6^n + 1)$

$a = b(5^n + 1)(6^n + 1)$ donc : b / a donc : $a \vee b = a$

V) Exercices avec solutions

Exercice24: n et a et b des entiers naturels Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution : soit r le reste de la division euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc :

$n = aq + r$ et $0 \leq r \leq a - 1$ et on a : $q = bq' + r'$ et $0 \leq r' \leq b - 1$ donc on déduit que :

$n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$

Et puisque : $0 \leq r' \leq b - 1$ et $0 \leq r \leq a - 1$ alors : $ar' + r \leq ab - 1$ donc $n = abq' + ar' + r$

$0 \leq ar' + r \leq b - 1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice25: Déterminer le reste de la division euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Solution25 :on a $19 \equiv 5[7]$ donc $19^2 \equiv 4[7]$

donc : $19^4 \equiv 2[7]$ donc $19^{52} \equiv 2^{13}[7]$

Et on a $23 \equiv 2[7]$ donc $23^{41} \equiv 2^{41}[7]$ donc

$23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{13} \times 2^{41}[7]$

donc $23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{54}[7]$ donc

$23^{41} \times 19^{52} \equiv (2^3)^{18}[7]$ donc $23^{41} \times 19^{52} \equiv 8^{18}[7]$

et puisque : $8 \equiv 1[7]$ donc $23^{41} \times 19^{52} \equiv 1[7]$

conclusion :1est le reste de la division euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Exercice26: $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = 4^n - 3n - 1$

1)montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ 9 divise $4^n - 3n - 1$

Solution26 :1)on a $U_{n+1} = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1$

donc $U_{n+1} = 4 \times 4^n - 3n - 3 - 1$

et puisque : $U_n = 4^n - 3n - 1$ donc :

$4^n = U_n + 3n + 1$ donc : $U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) notons P(n) La proposition suivante : « 9 divise U_n » .Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $U_0 = 4^0 - 3 \times 0 - 1 = 0$ donc 9 divise 0 .

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : « 9 divise U_n »

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : « 9 divise U_{n+1} » ??

c'est-à-dire Montrons que $U_{n+1} \equiv 0[9]$??

On a d'après l'hypothèse de récurrence: « 9 divise U_n » donc $U_n \equiv 0[9]$ donc $4U_n \equiv 0[9]$

Et on a : $9n_n \equiv 0[9]$ donc $U_n + 9n_n \equiv 0[9]$ donc $U_{n+1} \equiv 0[9]$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ 9 divise $4^n - 3n - 1$

Exercice27: 1)Résoudre dans $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$ l'équation: $\bar{4}x - \bar{3} = \bar{0}$

2) Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}\right)^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

3)Résoudre dans $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$ l'équation: $x^2 - x - \bar{2} = \bar{0}$

Solution27 :1)on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$

Comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{4}x$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{4}x - \bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$

Et on utilisons cette une table on déduit que $\bar{2}$ est la seul solution de l'équation

Donc : $S = \{\bar{2}\}$

2): $\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{3} + \bar{2})x + (\bar{2} + \bar{4})y = \bar{3} + \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$

$\begin{cases} y = \bar{4} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{1} \\ y = \bar{4} \end{cases}$ donc $S = \{(\bar{1}; \bar{4})\}$

3)on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$

Comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$x^2 - x - \bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$

Et on utilisons cette une table on déduit que $\bar{2}$ et $\bar{4}$ sont les solutions de l'équation

Donc : $S = \{\bar{2}; \bar{4}\}$

Exercice28: $n \in \mathbb{Z}$ on pose $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$

1)montrer que $n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$ sont des nombres paires

2) En déduire que α_n n'est pas un nombre premier

Solution28 :1)soit $n \in \mathbb{Z}$

$n^2 - 3n + 4 \equiv n^2 - n[2]$ donc

$n^2 - 3n + 4 \equiv n(n-1)[2]$

Or $n(n-1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire

donc $n(n-1) \equiv 0[2]$ donc $n^2 - 3n + 4 \equiv 0[2]$

donc $n^2 - 3n + 4$ est un nombre paire

et on a : $n^2 + 3n + 4 \equiv n^2 + n[2]$ donc

$n^2 + 3n + 4 \equiv n(n+1)[2]$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire

donc $n(n+1) \equiv 0[2]$ donc $n^2 + 3n + 4 \equiv 0[2]$

donc $n^2 + 3n + 4$ est un nombre paire

2)

$\alpha_n = n^4 - n^2 + 16 = (n^2 + 4)^2 - 9n^2 = (n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$

Et puisque $n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$ sont des nombres paire

alors : $n^2 - 3n + 4 \neq 1$ et $n^2 + 3n + 4 \neq 1$

donc α_n n'est pas un nombre premier

Exercice29: $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $d\in\mathbb{Z}$ tels que : $a=bc+d$

1) montrer que $a\wedge b=b\wedge d$

2) En déduire que : $a\wedge b=b\wedge(a-bc)$

Solution29 :1)on pose $\Delta_1=a\wedge b$ et $\Delta_2=b\wedge d$

On a : Δ_1/a et Δ_1/b donc Δ_1/a et Δ_1/bc donc $\Delta_1/a-bc$ donc Δ_1/d

donc Δ_1/d et Δ_1/b donc $\Delta_1/b\wedge d$ donc Δ_1/Δ_2

inversement On a : Δ_2/b et Δ_2/d donc Δ_2/d et Δ_2/bc donc $\Delta_2/bc+d$ donc Δ_2/a

donc Δ_2/a et Δ_2/b donc $\Delta_2/a\wedge b$ donc Δ_2/Δ_1

On a donc : Δ_1/Δ_2 et Δ_2/Δ_1 et $\Delta_1\in\mathbb{N}$ et $\Delta_2\in\mathbb{N}$

donc $\Delta_1=\Delta_2$

donc : $a\wedge b=b\wedge d$

2)on a : $a=bc+(a-bc)$ si on prend : $d=a-bc$ et d'après 1) on aura : $a\wedge b=b\wedge d=b\wedge(a-bc)$

Exercice30: $a\in\mathbb{N}^*$ et $b\in\mathbb{N}^*$ et $a\geq 3$ et a est impair On pose : $d=(2^a-1)\wedge(2^b+1)$

1) a)montrer que $2^{ab}\equiv 1[d]$

b)montrer que $2^{ab}\equiv -1[d]$

2) En déduire que : $d\in\{1;2\}$

3)montrer que $d=1$

Solution31 :1) a)montrons que $2^{ab}\equiv 1[d]$

On a : $d=(2^a-1)\wedge(2^b+1)$

Donc il existent : $\alpha\in\mathbb{N}^*$ et $\beta\in\mathbb{N}^*$ tels que :

$2^a-1=d\alpha$ et $2^b+1=d\beta$ donc :

$2^{ab}=(2^a)^b=(d\alpha+1)^b$

Et on a : $d\alpha+1\equiv 1[d]$ Donc$(d\alpha+1)^b\equiv 1[d]$

Par suite : $2^{ab}\equiv 1[d]$

1) a)montrons que $2^{ab}\equiv -1[d]$

On a : $2^{ab}=(2^b)^a=(d\beta-1)^a$

Et on a : $d\beta-11\equiv -1[d]$ Donc$(d\beta-1)^a\equiv(-1)^a[d]$

et puisque a est impair on a $(d\beta-1)^a\equiv -1[d]$

Par suite : $2^{ab}\equiv -1[d]$

2) $d\in\{1;2\}$???

on a : $2^{ab}\equiv 1[d]$ et $2^{ab}\equiv -1[d]$ donc $0\equiv 2[d]$

donc $d/2$ et on a $d\in\mathbb{N}^*$ donc $d\in\{1;2\}$

3)montrons que $d=1$

On a : 2^a-1 et 2^b-1 sont impairs donc d est impair

Et puisque $d\in\{1;2\}$ donc $d=1$

Exercice32 :

1)a) montrer que : $2^{4k+r}\equiv 2^r[5]\ \forall(k;r)\in\mathbb{N}^2$

b)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 5 du nombres 2^n

2)montrer que $5/17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\ \forall p\in\mathbb{N}^*$

3)montrer que $5/1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}$

Solution33 : 1) a)on a : $2^4\equiv 1[5]$ donc

$(2^4)^k\equiv 1^k[5]$ donc$2^{4k}\equiv 1[5]$ donc$2^{4k}\times 2^r\equiv 2^r[5]$

Donc $2^{4k+r}\equiv 2^r[5]\ \forall(k;r)\in\mathbb{N}^2$

b) $2^n\equiv r[5]$ et $r\in\{0;1;2;3;4\}$

Si $n\in\mathbb{N}$ alors : $n=4k+r$ avec $r\in\{0;1;2;3\}$

donc : $2^{4k}\equiv 1[5]$ et $2^{4k+1}\equiv 2[5]$ et $2^{4k+2}\equiv 4[5]$ et $2^{4k+3}\equiv 3[5]$

2)montrons que $5/17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\ \forall p\in\mathbb{N}^*$?

on a : $17\equiv 2[5]$ donc : $17^{4p+2}\equiv 2^{4p+2}[5]$

$32^{4p+3}\equiv -2^{4p+3}[5]$ $17^{4p+2}\equiv 4[5]$

on a : $32\equiv 2[5]$ donc : $32^{4p+3}\equiv 2^{4p+3}[5]$

donc : $32^{4p+3}\equiv 3[5]$ donc $32^{4p+3}\equiv 2[5]$

donc $17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\equiv 4+3+3[5]$

donc $17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\equiv 0[5]$

donc $5/17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\ \forall p\in\mathbb{N}^*$

3)

on a : $1\equiv 1[5]$ et $2\equiv 2[5]$ et $3\equiv -2[5]$ et $4\equiv -1[5]$

donc : $1^{2006}\equiv 1^{2006}[5]$ et $2^{2006}\equiv 2^{2006}[5]$ et $3^{2006}\equiv(-2)^{2006}[5]$ et $4^{2006}\equiv(-1)^{2006}[5]$

donc ; $1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}\equiv 2+2\times 2^{2006}[5]$

$1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}\equiv 2+2^{2007}[5]$

Or : $2007=4\times 501+3$ donc : $2^{2007}\equiv 3[5]$

Donc : $1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}\equiv 2+3[5]\equiv 0[5]$

Exercice34 : déterminer le chiffre des unités des nombres suivants : 1) $2019^{2020^{2021}}$ 2) $1987^{1991^{1983}}$

Solution34 :1) on a : $2019 \equiv -1[10]$ donc

$2019^{2020^{2021}} \equiv (-1)^{2020^{2021}}[10]$ et puisque 2020^{2021}

Est paire donc : $2019^{2020^{2021}} \equiv 1[10]$

le chiffre des unités est 1

2) on a : $1987 \equiv 7[10]$ donc $1987^2 \equiv 9[10]$

Et $1987^3 \equiv 3[10]$ et $1987^4 \equiv 1[10]$

Donc : $1987^{4k} \equiv 1[10]$ et $1987^{4k+1} \equiv 7[10]$ et

$1987^{4k+2} \equiv 9[10]$ et $1987^{4k+3} \equiv 3[10]$

$1991^{1983} \equiv ?[4]$

$1991 \equiv 3[4]$ et $1991^2 \equiv 1[4]$

on a : $1983 \equiv 1[2]$ donc : $1991^{1983} \equiv 3[4]$

donc : $1987^{1991^{1983}} \equiv 3[10]$

Le chiffre des unités est 3

Exercice35 : soit $N = \overline{dcba}$ un entier naturel montrer que : $N \equiv a-b+c-d[11]$

Solution35 :on a :

$N = \overline{dcba} = a + b\times 10 + c\times 10^2 + d\times 10^3$

et on a : $10 \equiv -1[11]$ et $10^2 \equiv 1[11]$ et $10^3 \equiv -1[11]$

Donc : $N \equiv a-b+c-d[11]$

Exercice36 :

1)En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer : $67 \wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u + 67v = 1$

Solution36 :1)

(1) $67 = 1\times 39 + \boxed{28}$ **(2)** $39 = 1\times 28 + \boxed{11}$

(3) $28 = 2\times 11 + \boxed{6}$ **(4)** $11 = 1\times 6 + \boxed{5}$

(5) $6 = 1\times 5 + \boxed{1}$ **(6)** $5 = 1\times 5 + \boxed{0}$

Donc : $67 \wedge 39 = 1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

2) **(5)** $6 = 1\times 5 + \boxed{1} \Rightarrow 6 - 1\times 5 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 6 - 1\times(11 - 1\times 6) = \boxed{1} \Rightarrow 2\times 6 - 1\times 11 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 2\times(28 - 2\times 11) - 1\times 11 = \boxed{1} \Rightarrow 2\times 28 - 5\times 11 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 2\times 28 - 5\times(39 - 1\times 28) = \boxed{1} \Rightarrow 7\times 28 - 5\times 39 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 7\times(67 - 1\times 39) - 5\times 39 = \boxed{1} \Rightarrow \boxed{7\times 67 - 12\times 39 = \boxed{1}}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

DENOMBREMENT

Dénombrer, c'est compter des objets.

I.Ensemble fini : introduction

Définition : Un ensemble qu'on peut dénombrer ses éléments est dit un ensemble fini et Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé le cardinal de E, on le note : Card(E)=n
Dans le cas contraire, on dit qu'il est infini.

Exemples :1)A = {1, 2}, B = {a, b, c}
Card(A)=2 et card(B)=3

2) $A=\left\{E\left(\frac{11}{n}\right);n\in\mathbb{N}^*\right\}$

A est un ensemble fini : $A=\{0;1;2;3;5;11\}$ et $cardA=6$

Remarques :

1°L'ensemble vide, noté $\varnothing$ est un ensemble de cardinal 0 : $card\varnothing=0$

2°Soit un A ensemble Si $cardA=n$ et $n\in\mathbb{N}^*$ alors il existe une bijection entre A et l'ensemble $\{1;2;3;...;n\}$ donc on peut écrire l'ensemble A sous forme :
$A=\{x_1;x_2;x_3;...;x_n\}$

3°Soient A et B deux ensembles finis
$cardA=cardB$ si et seulement si il existe une bijection entre A et B

Propositions : Soient E et F deux ensembles finis

1) $card(E\cup F)=card(E)+card(F)-card(E\cap F)$

2) Si E et F sont disjoints $(E\cap F=\varnothing)$ alors :
$card(E\cup F)=card(E)+card(F)$

Si $(X_i)_{1\le i\le n}$ est une famille d'ensembles disjoints deux a deux ($(X_i\cap X_j=\varnothing)$ si $(i\neq j)$) alors :

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{i=n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{i=n}card(X_i)$$

3)Si $E\subseteq F$ alors : $card(E)\le card(F)$ et
$card(F-E)=card(C_F^E)=card(F)-card(E)$

Démonstration :1)Si on ajoute Card(E) et Card(F), on compte deux fois les éléments de $E\cap F$. On doit donc retrancher $card(E\cap F)$ pour obtenir le cardinal de $E\cup F$

2)puisque : $E\cap F=\varnothing$ on donc $card(E\cap F)=0$ et on utilise 1)

3)Si $E\subseteq F$ alors $F=E\cup\overline{E}$ et $E\cap\overline{E}=\varnothing$ et de 2) on aura :
$card(F)=card(E)+card(\overline{E})$

donc : $card(F-E)=card(C_F^E)=card(F)-card(E)$

Exercice1 : Soient A et B et C trois ensembles finis.

1) Calculer $card(A-B)$et $card(A\Delta B)$en fonction de $card(A)$ et $card(B)$ et $card(A\cap B)$

2)Montrer que
$card(A\cup B\cup C)=card(A)+card(B)+card(C)$
$-card(A\cap B)-card(A\cap C)+card(A\cap B\cap C)$
(Formule de Poincaré (cas particuliers) :n=3)

Solutions :1)a) Calcul de : $card(A-B)$

$(A-B)\cup(A\cap B)=A$ et $(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$

Donc : $card(A-B)=cardA-card(A\cap B)$

1)b) Calcul de : $card(A\Delta B)$

On a : $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

On sait que : Si $B\subseteq A$ alors :
$card(A-B)=card(B)-card(A)$

Donc $card(A\Delta B)=card(A\cup B)-card(A\cap B)$

Donc : $card(A\Delta B)=card(A)+card(B)-2card(A\cap B)$

2)Montrer que $card(A\cup B\cup C)=card((A\cup B)\cup C)$

$card(A\cup B\cup C)=card(A\cup B)+card(C)-card((A\cup B)\cap C)$

Après les calculs on trouve :
$card(A\cup B\cup C)=card(A)+card(B)+card(C)$
$-card(A\cap B)-card(A\cap C)+card(A\cap B\cap C)$

Exercice2 : Dans un lycée de 100 élèves, 53 pratiquent le football et 15 le football et basket-ball et 20 pratiquent seulement basket-ball sans football

1)Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent le basket-ball ?

2)Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent au moins un sport ?
3)Quelle est Le nombre d'élèves qui ne pratiquent pas Les deux sports ?

Solution : soit E l'ensemble de tous les élèves
soit F l'ensemble des élèves qui pratiquent le football et B l'ensemble des élèves qui pratiquent le basket-ball

D'après les hypothèses on a : $cardE = 100$

$cardF = 53$ et $card(F \cap B) = 13$ et

$card(B \cap \overline{F}) = 20$

1) $card(B) = card(B \cap F) + card(B \cap \overline{F})$

Donc : $card(B) = 13 + 20 = 33$

2) l'ensemble des élèves qui pratiquent au moins un sport est $F \cup B$

$card(F \cup B) = cardF + cardB - card(F \cap B)$

$card(F \cup B) = 53 + 33 - 13 = 73$

3) l'ensemble des élèves qui ne pratiquent pas Les deux sports est :

$\overline{F \cup B} = \overline{F} \cap \overline{B}$

On a : $\overline{F \cup B} \cup (F \cup B) = E$

Donc : $card(\overline{F \cup B}) + card(F \cup B) = cardE$

Donc : $card(\overline{F \cup B}) = cardE - card(F \cup B)$

Donc : $card(\overline{F \cup B}) = 100 - 73 = 37$

Exercice 3: Dans une promotion de 36 étudiants, 22maîtrisent le C++, 22 le C# et 18 le Java.
De plus, 10 étudiants maîtrisent à la fois le C++ et le C#, 9 maîtrisent à la fois le C# et le Java, et 11à la fois le C++ et le Java.
Combien d'étudiants maîtrisent les trois langages de programmation ?

Solution : Soit A l'ensemble des étudiants qui maîtrisent le C++, B l'ensemble de ceux qui maîtrisent le C# et C l'ensemble de ceux qui maîtrisent le Java.
On cherche à calculer card(A∩B∩C).
Or les hypothèses signifient que card(A∪B)=36, card(A)=22 , card(B)=22 , card(C)=18, card(A∩B)=10, card(B∩C)=9, card(A∩C)=11.
On utilise alors la formule de Poincaré avec trois ensembles :
card(A∪B∪C)=card(A)+card(B)+card(C)−card(A∩B)−card(A∩C)−card(B∩C)+card(A∩B∩C)
On en déduit facilement que card(A∩B∩C)=4.

II. *Théorème fondamental du dénombrement*

Ou principe multiplicatif

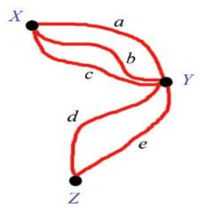
1)Activités

Activité1 : Les localités *X* et *Y* sont reliées par trois routes (*a*, *b* et *c*) et les localités *Y* et *Z* par deux routes (*d* et *e*). Combien y a-t-il de trajets de *X* à *Z* en passant par *Y* ?

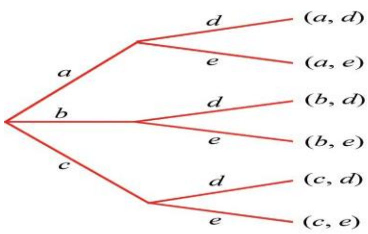
Solution :

Il y a 6 (= 3·2) trajets possibles : (*a*, *d*), (*a*, *e*), (*b*, *d*), (*b*, *e*), (*c*, *d*), (*c*, *e*).

Activité2 : Combien de nombres de trois chiffres qu'on peut former avec les chiffres
Suivants : 0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;.. ;9 ?



Solution :
Il y'a 9 possibilités pour le chiffre des unités
Il y'a 10 possibilités pour le chiffre des dizaines
Il y'a 10 possibilités pour le chiffre des centaines



D'après le **principe général dénombrement** le nombres de possibilités est : $n = 9 \times 10 \times 10 = 900$

Activité3: On lance une pièce de monnaie 2 fois de suite. Quelle est le nombre de possibilités ?

Solution :

Il y'a 2 possibilités pour la 1 fois : P (pile) ou F (face)

1ere fois	2ere fois
2	2

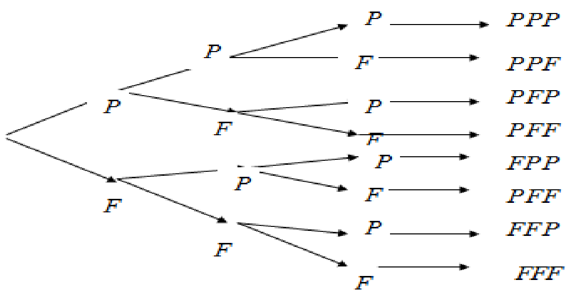
Il y'a 2 possibilités pour la 2 fois : P (pile) ou F (face)
D'après le **principe général dénombrement** le nombres de possibilités est :
L'ensemble des possibilités est :

$\Omega = \{PP; FF; PF; FP\}$

$n = 2 \times 2 = 4$

Activité4 : On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. Quelle est le nombre de possibilités ?
Il y'a 2 possibilités pour la 1 fois : P (pile) ou F (face)
Il y'a 2 possibilités pour la 2 fois : P (pile) ou F (face)
Il y'a 2 possibilités pour la 3 fois : P (pile) ou F (face)

1ere fois	2ere fois	3ere fois
2	2	2



D'après le **principe général dénombrement** le nombres de possibilités est :

L'ensemble des possibilités est :

$\Omega=\{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$

2)Si un événement C_1 peut se produire de n_1 façons différentes

et un événement C_2 peut se produire de n_1 façons différentes et …. et un événement C_p peut se produire de n_p façons différentes

et Tous ces événements étant indépendants,

Alors :Le total n des possibilités de l'événement combiné C_1 , C_2 ; … C_p est le produit des possibilités de chaque événement.

Cad : $n_1\times n_2\times n_3 ...\times n_p$

Exemple1 : Une classe de 15 garçons et 12 filles.

Il faut un garçon et une fille pour représenter la classe.

Combien de possibilités de choix ?

Solution : 15 possibilités pour choisir un garçon, et

12 possibilités pour choisir la fille.

Il y a 15 x 12 = 180 possibilités.

Exemple2 : L'association de 20 membres souhaite élire :

- Le président,
- Le secrétaire, et
- Le trésorier.

$n=2\times2\times2=8$

Combien Ya-t-il de possibilités d'avoir ces trois responsables. Pas de cumul de fonction.

Solution :

Pour le président : 20 possibilités (20 membres).

Pour le secrétaire : 19 possibilités (19 membres restants).

Pour le trésorier : 18 possibilités (18 membres restants).

Le total des possibilités n est le produit :

$n=20\times19\times18=36342$

Propositions : Soient A et B deux ensembles finis et non vides : $card(A\times B)=cardA\times cardB$

Preuve :soient : $cardA=p$ et $cardB=q$

On pose donc : $A=\{x_1;x_2;...;x_p\}$ $B=\{y_1;y_2;...;y_q\}$

Soit : $(x_i;y_j)$ un élément de $A\times B$ avec :

$i\in\{1;2;...;p\}$ et $j\in\{1;2;...;q\}$

Le nombre de choix possibles de x_i est p

Le nombre de choix possibles de y_j est q

D'après le **principe général dénombrement** le nombres de choix possibles est :

$p\times q$ donc : $card(A\times B)=cardA\times cardB=p\times q$

Exemple1 : Combien de nombres de deux chiffres tels que :Le chiffre des unités est 0 ou1ou 2 et le Le chiffre des dizaines est 5 ou 6 ou 7 ou 8 ?

Solution : Le nombre de chiffres c'est le nombre

Des éléments de l'ensemble $A\times B$ avec :

$A=\{0;1;2\}$ et $B=\{5;6;7;8\}$

Donc : $card(A\times B)=cardA\times cardB=3\times4=12$

Exemple2 :si On lance un dé deux fois de suite. Quelle est le nombre de possibilités ?

Solution : Le nombre de possibilités c'est le nombre

Des éléments de l'ensemble $A\times A$ avec :

$A=\{1;2;3;4;5;6\}$

Donc : $card(A\times A)=cardA\times cardA=6\times6=36$

Exemple3 : Combien de menus peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 5 plats et 4desserts ?

Solution : On a ici 3 sous-expériences : le choix de l'entrée, puis le choix du plat et enfin le choix du dessert. D'après le principe multiplicatif on aura donc 3×5×4menus possibles, c'est-à-dire 60.

III.le nombre d'applications d'un ensemble dans un autre

Soientt M et N deux ensembles finis et non vides.

L'ensemble des applications de N dans M est :

$(cardM)^{cardN}=m^n$ avec : $cardM=m$ et $cardN=n$

Preuve :on a : $cardM=m$ et $cardN=n$

On pose donc : $N=\{x_1;x_2;...;x_n\}$ et

$M=\{y_1;y_2;...;y_n\}$

Soit : $(x_i;y_j)$ un élément de $A\times B$ avec :

$i\in\{1;2;...;p\}$ et $j\in\{1;2;...;q\}$

Le nombre des applications de N dans M est Le nombre de choix possibles des images de chaque éléments x_i de N avec : $i \in \{1;2;...;n\}$

Puisque on a : m choix possibles pour chaque x_i

D'après le **principe général dénombrement** le nombres de choix possibles des images est :

$\underbrace{m \times m \times m \times ...m}_{nfois} = m^n$

Exemple1 : Soit l'ensemble $M = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

1)Combien de nombres de 3 chiffres on peut former avec les éléments de E ?

2)Combien de nombres de 3 chiffres différents deux a deux on peut former avec les éléments de E ?

Solutions :

2) le nombre cherché est Le nombre des applications de $N = \{U;D;C\}$ dans $M = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ avec U le chiffre des unités et D le chiffre des dizaines et C le chiffre des centaines

Donc le nombre est : $\underbrace{9 \times 9 \times 9}_{3\ fois} = 9^3 = 729$

1) le nombre des nombres CDU est $9 \times 8 \times 7 = 504$

Exemple2 :

1) de Combien de façons différentes peut - on ranger 5 boules de couleurs différentes dans 4 cases sachant que chaque case peut contenir tous les boules

Solutions :

le nombre de façons : est Le nombre des applications de $N = \{C_1;C_2;C_3;C_4\}$ dans $M = \{1;2;3;4;5\}$ avec C_i la case i

Donc le nombre est : $\underbrace{5 \times 5 \times 5}_{4\ fois} \times 5 = 5^4 = 625$

IV.L'ensembles de tous les parties d'un ensemble fini

Activité :E={A,B,C} soit $P(E)$ l'ensembles de tous les parties de E

Déterminer en extension $P(E)$ et calculer : $cardP(E)$

Solution : Les sous-ensembles de E = {a, b, c} sont l'ensemble vide Ø, les trois singletons {a}, {b}, {c}, les trois paires {a, b}, {a, c}, {b, c}, et l'ensemble E = {a, b, c} lui-même donc :

$P(E)$ ={ Ø ,{a}, {b}, {c},{a, b}, {a, c}, {b, c}, E}

$cardP(E) = 8 = 2^3$

Proposition : Soit E un ensemble fini et non vide et $cardE) = n \quad n \in \mathbb{N}$ et soit $P(E)$ l'ensembles des parties de E on a : $cardP(E) = 2^n$

Preuve : En effet : pour constituer une partie A de E, il y a un choix à

Faire pour chaque élément de E : soit on le met dans B,

Soit on ne l'y met pas (2 possibilités).

S'il y a n éléments dans E, cela donne 2^n possibilités pour A, soit 2^n parties différentes.

V.Arrangements

1)Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E

C'est-à-dire : un élément de la forme :

$(x_1;x_2;...;x_p) \in E \times E \times ... \times E = E^p$

Il est fondamental de bien comprendre que dans la notion d'arrangement l'ordre des éléments importe et on distinguera :

- Les arrangements **avec répétitions**
- Les arrangements **sans répétitions**

2)Arrangements avec répétitions

2-1 Définition : Soit E un ensemble fini de Cardinal n.

Un arrangement avec répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E non nécessairement distincts.On utilise également le terme de p-liste d'éléments de E .

2-2 Nombre d'arrangements avec répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments de E est égal à n^p .

Démonstration :

Il faut donc constituer une suite ordonnée de p éléments de E .

Pour le premier élément on a n choix possibles.

Pour le second on a aussi n choix possibles car les répétitions sont autorisées.

Et ainsi de suite.

D'après le principe multiplicatif, on a donc un nombre de possibilités égal à $\underbrace{n \times n \times ... \times n}_{pfois} = n^p$

Nous pouvons maintenant répondre à la première des cinq questions énoncées dans la sous partie 2.1.

Exemple 1 : Arrangements avec répétitions

Combien de numéros de téléphone à 8 chiffres peut-on former ? **Solution :**

Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements avec répétitions puisque l'ordre des chiffres importe et qu'un numéro de téléphone peut comporter plusieurs fois le même chiffre.

Avec les notations précédentes, l'ensemble E est constitué des chiffres utilisables pour composer un numéro de téléphone, *i.e.* E={0,1,...,9}, et on a alors n=card(E)=10

On s'intéresse aux arrangements avec répétitions de p=8 éléments de E .

D'après le résultat ci-dessus, il y en a 10^8

3)Arrangements sans répétitions

3-1 Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Un arrangement sans répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E tous distincts.

Dans ce cas a nécessairement $p \leq n$ puisque les répétitions sont interdites.

3-2 Nombre d'arrangements sans répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements sans répétitions de p éléments de E se note :

A_n^p et est égal à :

$$A_n^p = n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times(n-p+1)$$

Démonstration : Il faut donc constituer une suite ordonnée de p éléments de E .

Pour le premier élément on a n choix possibles.

Pour le second on a cette fois n−1choix possibles car les répétitions ne sont pas autorisées.

Et ainsi de suite.

D'après le principe multiplicatif, on a donc un nombre de possibilités égal à

$n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times(n-p+1)$.

Exemple 1 : Arrangements sans répétitions

Quel est le nombre de mots comportant 5 lettres distinctes ? (Sans se préoccuper du sens des mots)

Solution : Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements sans répétitions puisque l'ordre des lettres importe et que l'on requiert qu'elles soient distinctes.

Avec les notations précédentes, l'ensemble E est constitué des lettres de l'alphabet, *i.e.* E= {a, b,...,z} } , et on a alors n=card(E)=26

On s'intéresse aux arrangements sans répétitions de p=5 éléments de E .

D'après le résultat ci-dessus, il y en a :

$$A_{26}^5 = 26\times25\times24\times23\times22 = 7893600$$

Remarque : Le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est A_n^p

Exemple 2 : dans un tournoi il Ya 10 participants

Déterminer le nombre de classements des 3 premiers places (on suppose que 2 coureurs ne peuvent pas prendre le même classement

Solution : Il s'agit d'une situation d'arrangements sans répétitions donc : $A_{10}^3 = 10\times9\times8 = 720$

Exemple 3 : Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9.

1)On tire 3 boules de l'urne Successivement avec remise

Et on construit un nombre de trois chiffres

Quel est le nombre de nombres possibles ?

2)On tire 3 boules de l'urne Successivement sans remise

Quel est le nombre de nombres possibles ?

Solution :1) Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements avec répétitions (Successivement avec remise)

il y en a donc : $9^3 = 9\times9\times9 = 729$

2) Il s'agit d'une situation d'arrangements sans répétitions (Successivement sans remise)

il y en a donc : $A_9^3 = 9\times8\times7 = 504$

VI.Permutations

1)permutations sans répétitions

Activité : Quelle est le nombre de mots de 4 lettres (avec un sens ou non) du mot « AID » qu'on peut former ?

Solution : « ADI » s'appelle une permutation

Les mots sont : « AID » et « ADI » « IAD » « IDA » « DAI » « DIA »

il y a en a donc : $6 = 3\times2\times1$ permutations

$3\times2\times1$ se note $3!$

5-1 Définition et Théorème : Soit E un ensemble fini de cardinal n. $n \in \mathbb{N}^*$

Une **permutation** des éléments de E est une liste ordonnée d'éléments de E sans répétitions et le nombre de permutations d'un ensemble fini E à n éléments est le nombre **n! (** ***factorielle n*** **)** défini par

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times2\times1$$

preuve : puisque le nombre de permutations d'un ensemble fini E c'est le nombre d'arrangements sans répétitions de n élément de E $(n = p)$ donc :

$$A_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times(n-n+1) = n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times1$$

Remarque :

- Dans les notations avec parenthèses du type (a ; b ; c) l'ordre est pris en compte. (il s'agit d'une liste ordonnée)
- Dans les notations avec accolades du type {a ; b ; c} l'ordre n'est pas pris en compte. (il s'agit d'un ensemble)
- Par convention on pose 0! = 1

Exemple 1: De combien de façons pouvez-vous ranger 10 livres sur une étagère ?

Réponse : 10! = 3628800

Exemple 2: De combien de façons peut-on mélanger un jeu de 36 cartes ?

Réponse : $36! = 3.72 \times 10^{41}$

2)permutations avec répétitions

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont Identiques est évidemment plus petit que si tous les éléments sont distincts.

Lorsque seuls *k* éléments sont distincts ($k \le n$), chacun d'eux apparaissant n_1, n_2, ..., n_k fois, avec $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ et $n_i \ge 1$, on a :

$P_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!}$ (P_n permutations avec répétitions**)**

En effet, si chacune des n_i places occupées par des éléments identiques ($i \in \{1, 2, ..., k\}$) était occupée par des éléments différents, le nombre de permutations serait alors à multiplier par $n_i!$, d'où :

$P_n \times n_1! \times n_2! \times ... \times n_k! = n!$

Exemple 1: Les $\frac{5!}{2! \times 1! \times 2!}$ permutations des 5 éléments a, a, b, c, c :

aabcc aacbc aaccb abacc abcac abcca acabc acacb acbac acbca
accab accba baacc bacac bacca bcaac bcaca bccaa caabc caacb
cabac cabca cacab cacba cbaac cbaca cbcaa ccaab ccaba ccbaa

Exemple 2: Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot : « excellence » ?

Réponse : $\frac{10!}{4! \times 1! \times 2! \times 2! \times 1!}$ = 37800

Car **e** se répète 4 fois et **x** une fois et **c** deux fois **L** deux fois et **n** une fois

VII.Combinaisons

Activité : soit Ω = {a , b , c , d , e} un ensemble

Quelle est le nombre de sous-ensembles à 2 éléments ?

Les sous-ensembles de Ω à 2 éléments sont :
{ {a , b} , { a , c } , { a , d } , {a , e },
{b , c}, {b , d }, {b , e }, {c , d}, {c , e }, {d, e}}

Il y a : 10 sous-ensembles

Sous-ensembles à 2 éléments s'appelle une 2-COMBINAISON

1 Définition : Soit E un ensemble non vide de n éléments (n ≠ 0) :
Et un entier p : 0 ≤ p ≤ n
On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble fini E de n éléments, tout sous-ensemble A de p éléments de E.

Remarque :« combinaison » est donc synonyme de sous-ensemble et aussi de partie.
(Ce sont les façons de choisir p éléments parmi n éléments

2 Propriété : Quels que soient les entiers naturels n et p tes que 0 ≤ p ≤ n on a :
Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments est le nombre que l'on note par : C_n^p et on a : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ et on a aussi : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^n = 1$

Démonstration : Pour chaque sous-ensemble de p éléments de E, il y a $p!$ façons d'ordonner ses p éléments. Il s'agit en effet du nombre de permutations sans répétitions d'un ensemble de p éléments.

Le nombre d'arrangements sans répétitions de p éléments de E est donc égal au nombre de sous-ensemble de p éléments de E multiplié par $p!$

Ainsi : $A_n^p = C_n^p p!$

Donc : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ donc : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

• Le nombre de combinaisons de 0 éléments parmi n éléments est :
$C_n^0 = 1$ (L'ensemble vide)

• Le nombre de combinaisons de 1 éléments parmi n éléments est :
$C_n^1 = n$ (les singletons)

• Le nombre de combinaisons de n éléments parmi n éléments de E est :
$C_n^n = 1$ (L'ensemble E)

Exemple1 : Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7.
On tire 2 boules de l'urne simultanément
1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair ?
3. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair ?

Solution :1) Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque chaque tirage est une permutation de 2 éléments dans un ensemble de 7 éléments (simultanément) donc le nombre de tirages possibles est : $C_7^2 = \frac{A_7^2}{2!} = \frac{7\times 6}{2\times 1} = 21$

2)pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair il suffit de tirer 2 boules pairs **ou** tirer 2 boules impairs

Donc : le nombre est :

$C_4^2 + C_3^2 = \frac{A_4^2}{2!} + \frac{A_3^2}{2!} = \frac{4\times 3}{2\times 1} + \frac{3\times 2}{2\times 1} = 6+3=9$

Car il ya 3boules pairs et 4boules impairs

3) pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair il suffit de tirer une boules pairs **et** tirer une boules impairs :

Donc : le nombre est : $C_4^1 \times C_3^1 = 4\times 3 = 12$

Exemple2 : UN tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois

Combien doit-on organiser de matchs ?

Solution : Une rencontre est déterminée par le choix de deux équipes parmi 8

Comme il n'y a qu'un match entre deux équipes (pas d'aller-retour), le choix (équipe A, équipe B) est identique au choix (équipe B, équipe A). Il y a donc $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$ rencontres possibles

Exemple3 : Le bureau d'une association contient 4 hommes et 5 femmes et on souhaite élire un comité de 2 hommes et 3 femmes

1) Combien de comités peut-on élire ?

2) on suppose que le président H1 et Madame la secrétaire F1 doivent être présent

Combien de comités peut-on élire ?

Solution :1) Il s'agit d'une situation de combinaisons de5 éléments dans un ensemble de 9 éléments (simultanément)

donc le nombre de comités qu'on peut élire est :

$C_4^2 \times C_5^3 = 6\times 10 = 60$

2) le nombre est : $C_3^2 \times C_4^3 = 3\times 4 = 12$

Exercice1 : À la fin de l'année scolaire, tous les élèves se serre la main. S'il y a 30 élèves, combien de poignées de mains sont échangées ?

Exercice 2: Dans une classe de 20 élèves, on compte 12 garçons et 8 filles.

On doit élire 5 délégués

1)Quel est le nombre de choix possibles ?

2)Quel est le nombre de choix de délégués de même sexe ?

3)Quel est le nombre de choix de délégués de sexe différents ?

4)Quel est le nombre de choix de délégués qui contient 3 garçons et 2 filles ?

5)Quel est le nombre de choix qui contient au plus une fille ?

6)On suppose que dans cette classe il existe un élève x et sa sœur y

a) Quel est le nombre de choix de délégués de 5 élèves qui ne contiennent ni x ni y

b) Quel est le nombre de choix de délégués de 5 élèves qui contiennent x mais pas y

Exercice3 : Combien de diagonales contient un polygone convexe à n côtés (une diagonale relie deux sommets non adjacents) ?

Synthèse :Récapitulons les différentes questions que l'on doit se poser confronté à un problème de dénombrement. Cela nous permettra de savoir choisir le concept à utiliser en fonction de la situation.

1)L'ordre des éléments est-il important ?

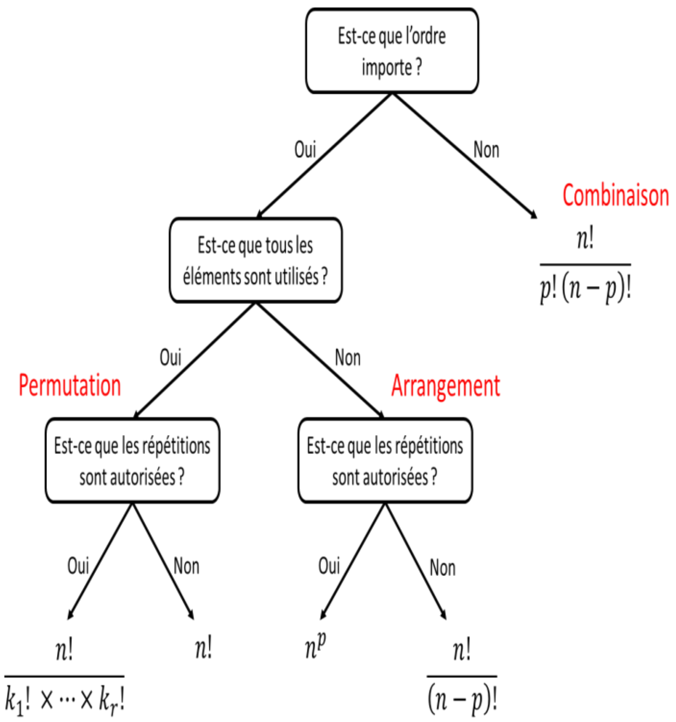
- Si oui il s'agit d'arrangements ou de permutations.
- Si non il s'agit de combinaisons.

2)Si l'ordre importe, est-ce que tous les éléments sont utilisés ?

- Si non il s'agit d'arrangements.
- Si oui il s'agit de permutations.

3)Les répétitions sont-elles ou non autorisées ?

Nous pouvons représenter par un arbre de décision ces différentes alternatives.



3) Propriétés : Quels que soient les entiers naturels n et p tes que 0 ≤ p ≤ n on a :

1) $C_n^p = C_n^{n-p}$ 2) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Preuve :1)on a $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p$$

2) Soit E un ensemble fini de cardinal n. $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in E$

Le nombre de combinaisons de E de p éléments est la somme des combinaisons de E de p éléments qui contiennent a qui ne contiennent pas a

Donc : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Applications : Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de construire facilement un triangle qu'on nomme triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ce tableau et appelé le Triangle de Pascal.

VIII.Formule du binôme de Newton

Proposition : $a \in \mathbb{R}$ ***et*** $b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

ce qui peut également être noté :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

remarque : La somme des exposants de chaque monôme vaut toujours n.

En raison de leur rôle dans cette formule, ils sont aussi appelés coefficients binomiaux.

Démonstrations : Cette formule se démontre rigoureusement à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

<u>Exemple</u> :Développer $(1 + x)^5$ et $(1 - x)^5$ à l'aide de la formule du binôme.

Solution : $(1+x)^5 = \sum_{p=0}^{5} C_n^5 1^{5-p} x^p$

$$(1+x)^5 = C_5^0 x^n + C_5^1 x^1 + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5$$

Remarque :

Les coefficients binomiaux pouvait également être trouvés en remplissant le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 5 :

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Donc : $(1+x)^5 = x^n + 5x^1 + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

$$(1+x)^5 = (1+(-x))^5 = \sum_{p=0}^{5} C_n^5 1^{5-p} (-x)^p$$

Donc : $(1-x)^5 = x^n - 5x^1 + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$

Exercice1 : Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien Ya-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Solution : Notons E ; H, M et S les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués.

L'énoncé donne:

card(E)=800, card(H)=300, card(S)=352, card(M)=424, card(H∩S) =188, card(H∩M) =166 card(S∩M) =208, card(H∩M∩S) =144

On cherche : $card\left(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}\right)$

où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E . D'après les lois de Morgan

$card\left(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}\right) = card\left(\overline{H \cup M \cup S}\right)$ On applique la formule du crible de Poincaré : card(H∪M∪S)=card(H)+card(M)+card(S)−card(H∩M)−card(H∩S)−card(M∩S)+card(H∩M∩S)

On en déduit :
card(H∪M∪S)=658

$$card\left(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}\right) = 800 - 658 = 142$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées

Exercice2. Une femme a dans sa garde-robe : 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Solution :

Cette femme peut s'habiller de $4\times5\times3=60$ façons

Exercice3 : A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr…) ?

Solution : Un tel podium est un arrangement de 3 athlètes choisis parmi l'ensemble des 18 athlètes (l'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant remporter deux médailles simultanément). Il existe donc :

$A_{18}^{3}=\frac{18!}{(18-3)!}=\frac{18!}{15!}=18\times17\times16=4896$ Podiums différents

Exercice4 : Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Solution : Une réponse à ce QCM peut être désignée par une 15-liste de 15 chiffres choisis dans l'ensemble $\Omega=\{1;2;3;4\}$. Le nombre de ces 15-listes est donc de cardinal $(card\Omega)^{15}=4^{15}$

Exercice5 : Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1) Combien de résultats peut-on obtenir ?

2) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

Solution

1) Un tel choix est donné par un 6-uplet (sextuplé) de 6 chiffres, chacun choisi entre 1 et 6. Pour connaître le nombre de choix, on effectue le produit cartésien de l'ensemble $\{1;2;3;4;5;6\}$ ***6*** fois par lui-même. Il y donc $6^6=46656$ choix possibles.

2) Si les six chiffres doivent être distincts, un tel choix sera donné par un arrangement de 6 chiffres choisis parmi 6, c'est à-dire une permutation des 6 chiffres. Il aura donc 6 !=720 choix possibles

Exercice6: Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1) Calculer le nombre d'éléments de A.

2) Dénombrer les éléments de A :

a) composés de quatre chiffres distincts

b) composés d'au moins deux chiffres identiques

c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

Solution :

1) Les éléments de A sont tous les nombres de 1000 à 9999. Il y en a donc 9000. Ainsi Card A =9000

2) a) Un nombre de A est un élément du produit cartésien :

- d'un élément de $\Omega_1=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ en guise de premier chiffre. Il y a 9 possibilités.
- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 9 seulement (aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi).

On doit donc choisir un arrangement de trois éléments pris dans un ensemble de 9 chiffres. Il y a $A_9^3=\frac{9!}{(9-3)!}=\frac{9!}{6!}=9\times8\times7=504$ tels arrangements.

Le nombre d'éléments de A composés de quatre chiffres distincts vaut donc 9 × 504 =4536

b) Le contraire de « au moins deux chiffres identiques » est « quatre chiffres distincts » Le nombre d'éléments de A possédant « au moins deux chiffres identiques » est égal au nombre total d'éléments de A diminué du nombre d'éléments de A possédant leurs quatre chiffres distincts, nombre qui a été calculé dans la question précédente. Le nombre d'éléments de A possédant « au moins deux chiffres identiques » vaut donc 9000-4536=4464

c) Un nombre de A composé de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 est un élément du produit cartésien :

- d'un élément de $\Omega_2=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ en guise de premier chiffre. Il y a 7 possibilités.
- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 7 seulement (aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi, ni égal à 5 ou 7). On doit donc choisir un arrangement de trois éléments pris dans un ensemble de 7 chiffres. Il y a

$A_7^3=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=7\times6\times5=210$ tels arrangements. Le nombre d'éléments de A composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 vaut donc $7\times210=1470$

Exercice7: Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2) Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.
3) Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
4) Même question si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre

Solution :

Désignons par $G=\{G_1;G_2;G_3;G_4\}$ l'ensemble des 4 garçons et $F=\{F_1;F_2\}$ l'ensemble des 2 filles.

1) L'ensemble des dispositions possibles de ces 6 personnes sur les six places d'un banc correspond à l'ensemble des permutations des six éléments de l'ensemble . Il a donc 6 !=720 dispositions différentes.

2) Si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre, il y a deux « configurations possibles » : 4 garçons 2 filles ou 2 filles 4 garçons Au sein de chaque configuration, il y a 2 !=2 manières de permuter les 2 filles, et 4 !=24 manières de permuter les 4 garçons Il y aura au total manières de placer ainsi ces six personnes 2×4 ! ×2 ! =9 6

3) Si chaque fille est intercalée entre deux garçons, il y a trois configurations possibles :
G F G F G G ou G G F G F G ou G F G G F G
Une fois la configuration « choisie », il y a 2 ! =2 manières de permuter les 2 filles, et 4 ! =24 manières de permuter les 4 garçons Il y aura au total 3×2 ! ×4 ! =144 manières de placer ainsi ces six personnes

4) Si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre, il y a cinq configurations possibles :
F F G G G G ou G F F G G G ou G G F F G G ou G G G F F G ou G G G G F F Une fois la configuration « choisie », il y a 2 ! =2 manières de permuter les 2 filles, et 4 ! =24 manières de permuter les 4 garçons Il y aura au total 5× 2 ×4 ! =240 manières de placer ainsi ces six personnes

Exercice8 : On trace dans un plan n≥3 droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé?

Solution : Un triangle est déterminé par 3 droites (ses côtés). Il y a autant de triangles que de possibilités de choisir 3 droites parmi *n*, c'est-à-dire :

$$C_n^3=\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{n\times(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!}=\frac{n\times(n-1)(n-2)}{6}$$

Exercice9 : Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués 1) Quel est le nombre de choix possibles ? 2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et fille 3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons

Solution : Les délégués sont choisis sans ordre

1) Les choix simultanés de 2 délégués parmi les 32 élèves sont au nombre de $C_{32}^2=496$

2) Si on impose d'avoir un garçon et une fille, alors le choix des deux délégués est un élément du produit cartésien entre :
- l'ensemble des choix simultanés de 1 délégué parmi les 19 garçons, soit $C_{19}^1=19$ choix
- l'ensemble des choix simultanés de 1 délégué parmi les 13 filles, soit $C_{13}^1=13$

L'ensemble des choix est donc de cardinal $C_{19}^1\times C_{13}^1=19\times13=247$

3) Si on impose d'avoir 2 garçons comme délégués, le nombre de choix des deux délégués est donc « réduit » au nombre de choix de 2 délégués parmi les 19 garçons, au nombre de $C_{19}^2=171$

Exercice10 : Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

1) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
2) Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?
3) Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

Solution :

1) Le nombre de d'échantillons différents est égal au nombre de choix de 4 personnes parmi les 30, soit $C_{30}^4=$ 27405

2) Le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataires est égal au nombre de choix de 4 personnes parmi les 30-12=18 non célibataires, soit $C_{18}^4=3060$

3) Le contraire de « au moins un célibataire » est « aucun célibataire ».
Le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est égal au nombre total d'échantillons diminué du nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire. Ces deux nombres ayant été déterminés dans les deux questions précédentes,

on conclut que le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est égal à $C_{30}^{4}-C_{18}^{4}=27405-3060=24345$

Exercice11 : Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les possibilités :

a) De ne tirer que 3 jetons verts ;

b) De ne tirer aucun jeton vert

c) De tirer au plus 2 jetons verts ;

d) De tirer exactement 1 jeton vert.

2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.

Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

Solution :

1) Tirages successifs sans remise de 3 jetons

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ».

On a $card(A)=A_{5}^{3}$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $card(B)=A_{4}^{3}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts » cad :Ne tirer aucun vert ou Tirer exactement 1 vert ou Tirer exactement 2 verts

$card(C)=A_{9}^{3}+3A_{5}^{1}A_{4}^{2}+3A_{5}^{2}A_{4}^{1}$

2) a) Notons A l'événement «Tirer 3jetons verts ». On a $card(A)=C_{5}^{3}$

b) Notons B l'événement

« Ne tirer aucun jeton vert ». On a $card(b)=C_{4}^{3}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »

cad Ne tirer aucun vert ou Tirer exactement 1 vert ou Tirer exactement 2 vert : $C_{9}^{3}+C_{5}^{1}C_{4}^{2}+C_{5}^{2}C_{4}^{1}$

d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ». $C_{5}^{2}C_{4}^{1}$

Exercice12: Christian et Claude font partie d'un club de 18 personnes. On doit former un groupe constitué de cinq d'entre elles pour représenter le club à un spectacle.

1) Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer ?

2) Dans combien de ces groupes peut figurer Christian ?

3) Christian et Claude ne pouvant se supporter, combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer de telle façon que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble ?

Solution :

1) Le nombre de choix de 5 personnes parmi les 18 est égal à $C_{18}^{5}=8568$

2) Le nombre de groupes dans lequel figure Christian est égal (une fois lui choisi) au nombre de groupes de 4 personnes choisies parmi 17, soit $C_{17}^{4}=2380$

3) Afin que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble, il faut : - constituer un groupe de 5 personnes contenant Christian mais pas Claude. Le nombre de groupes dans lequel figure Christian mais pas Claude est égal (une fois lui choisi) au nombre de groupes de 4 personnes choisies parmi 16 (pour ne pas qu'y figure Claude), soit $C_{16}^{4}=1820$ 1 OU - constituer un groupe de 5 personnes contenant Claude mais pas Christian.De façon analogue à ce qui précède (Christian et Claude jouent des rôles similaires), il y a $C_{16}^{4}=1820$ possibilités Il y a donc $C_{16}^{4}+C_{16}^{4}=3640$répondant à cette condition

Exercice13: Une course oppose 20 concurrents, dont Ahmed.

1. Combien Ya-t-il de podiums possibles ?
2. Combien Ya-t-il de podiums possibles où Ahmed est premier ?
3. Combien Ya-t-il de podiums possibles dont Ahmed fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien Ya-t-il de distributions de récompenses possibles ?

Solution :1)Pour le premier, on a 20 choix possibles, pour le second 19, pour le troisième 18. Le nombre de podiums possibles est donc égal à 20×19×18=6840.

2)Le premier concurrent est Ahmed. Pour les autres places, il y a 19 puis 18 choix possibles ; Le nombre de podiums ainsi constitués est de 19×18.

3)Il y a trois choix possibles pour la place D'Ahmed. Une fois ce choix fixé, il y a 19 choix possibles pour la première des deux autres places, puis 18 choix possibles pour la seconde des deux autres places. Le nombre de podiums vérifiant ces conditions est donc de 3×19×18.

4)L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi 20, c'est-à-dire $C_{20}^{3}=1140$

Exercice14 : Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien Ya-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?

Solution : On commence par choisir les personnes qui vont s'installer autour de la première table. Il y a C_7^3 possibilités. Ensuite, les 3 personnes qui sont autour de la première table peuvent choisir librement leur place. Il y a 3! choix (autant que de permutations des 3 chaises). De même, il y 4! choix pour les personnes qui s'installent autour de la deuxième table. Le nombre total de possibilités est donc $C_7^3\times 3!\times 4!$

Le fait de trouver 7! montre que le dénombrement que nous avons fait, qui suit les données de l'énoncé, peut être simplifié. En effet, le fait d'imposer deux tables ne change en réalité rien au problème : on doit placer 7 personnes sur 7 chaises, et il y a 7! façons différentes de le faire.

Exercice15 : Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1)1-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

1-2) Combien Ya-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?

1-3) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?

1-4) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?

2)Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

2-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

2-2) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?

2-3) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

Solution :

1)1-1) Il y a $9^3=9\times9\times9=729$ codes possibles.

1-2) Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc $9\times9\times4=324$ tels codes.

1-3) On va compter par différence. Il y a $8\times8\times8$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9\times9\times9-8\times8\times8=217$codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.

1-4) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3\times8\times8=192$ tels codes.

2) 2-1)On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9\times8\times7=504$ choix possibles

2-2) Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8\times7\times5=280$ tels codes

2-3) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de $8\times7\times3=168$.

Exercice16 : Ali et Fatima font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

1)Combien y-a-t-il de comités possibles ?

2)Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 11 fille ?

3)Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons ? 4)On veut que Ali et Fatima soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

5)On ne veut pas que Ali et Fatima soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

Solution :1) Il s'agit de choisir trois joueurs parmi 8. Le nombre de comités possibles est donc de $C_8^3=56$

2)Il s'agit de choisir deux garçons parmi 6, puis une fille parmi 2. Le nombre de choix possibles est donc de $C_6^2\times C_2^1$

3)On compte le nombre de comités comprenant 3 garçons : il vaut C_6^3 (il faut choisir trois garçons parmi 6). On a déjà compté le nombre de comités comprenant exactement deux garçons. Donc le nombre de comités comprenant au moins deux garçons vaut $C_6^2\times C_2^1+C_6^3$

4)Il ne reste qu'à choisir le dernier membre du comité : il y a 6 comités comprenant à la fois Ali et Fatima

On compte les comités comprenant Ali, mais pas Fatima, et les comités comprenant Fatima, mais pas Fred. Dans le premier cas, on trouve C_6^2) comités (il reste à choisir deux joueurs parmi 6, puisqu'on ne peut plus prendre ni Ali, ni Fatima). Dans le second cas, on a aussi C_6^2 comités. On compte enfin les comités ne comprenant ni Ali, ni Fatima. Il y en a C_6^3 Finalement, le nombre total de comités ne comprenant pas simultanément

Fatima et Ali est $C_6^2+C_6^2+C_6^3=50$. Plus simplement, on pouvait aussi soustraire du nombre total de comités 56, cf question 1) le nombre de comités comprenant à la fois Fred et Émile (6, cf question 4), et on retrouve bien 50 comités ne comprenant pas simultanément Ali et Fatima.

Exercice17 On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement:
si les livres doivent être groupés par matières.
si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Solution : Il y a 3! façons de choisir l'ordre des matières. Une telle façon choisie, il y a 4! façons de ranger les livres de mathématiques, 6! façons de ranger les livres de physique, et 3! façons de ranger les livres de chimie. Le nombre de rangements possible est donc : 3!4!6!3!
Il peut y avoir 0,1,...,9 livres placés avant les livres de mathématiques. Il y a donc 10 choix du nombre de livres placés avant le livre de mathématiques. Ce choix fait, il y a 4! façons d'ordonner les livres de mathématiques, et 9! façons d'ordonner les autres : il y a donc en tout 10×4!9! rangements différents.

Exercice18 :Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.
Corrigé
Un anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot
On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombres de permutations entre lettres identiques. On trouve donc :

- MATHS : $5!$
- RIRE : $\frac{4!}{2!}$
- ANANAS : $\frac{6!}{2!3!}$

Exercice19 : Soit *p* points du plan distincts non aligner 3 par 3.
1)Combien de polygones à *n*≤*p* côtés peut-on réaliser à partir de ces points ?
2)On fixe un tel polygone à *n* côtés. Combien de diagonales ce polygone comporte-t-il?

Solution :
1)Il faut d'abord choisir *n* points parmi ces *p* points. Il y a C_p^n tels choix. Ces points *A*1,…,*An* étant choisis, on fixe un premier sommet comme origine. On choisit ensuite le sommet suivant pour lequel il y a *n*−1choix, puis le troisième sommet, pour lequel il y a *n*−2choix, etc... Il y a donc (*n*−1)! possibilités pour ordonner les sommets. Mais attention, procédant ainsi, on compte chaque polygone deux fois car l'ordre global des points n'importe pas (par exemple, le polygone *ABCD* est le même que le polygone *ADCB*). Finalement, on trouve qu'il y a $\frac{1}{2}(n-1)!C_p^n$ polygones possibles à *n* sommets choisis parmi *p* points du plan.
2)Une diagonale est définie par deux sommets consécutifs. On choisit donc d'abord un premier sommet *A* parmi les *n* sommets du polygone. On choisit ensuite un deuxième sommet parmi les sommets du polygone qui ne sont ni *A* ni un sommet adjacent à *A* . Il y a *n*−3choix. Mais ce faisant, on compte deux fois chaque diagonale (la diagonale (*AB*) est comptée en choisissant *A* , puis *B* , et en choisissant *B* , puis *A*). Le nombre de diagonales est donc $\frac{n}{2}(n-3)$.

Exercice20: Dans une urne se trouvent 9 boules :
4 rouges numérotées 0 ;1 ;1 ;2 et 3 vertes numérotées 1 ;2 ;2 et deux noires numérotées 1 ; 3
On en tire 3 boules
Et on considéré les évènements suivants :
A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes. Deux à deux »
B « obtenir trois boules qui portent le même numéro
C « la somme des numéros des boules tirées est égale a 4 »
D « obtenir au moins une boule rouge »
Trouver le nombre de possibilités des évènements A ; B ; C ; D dans les cas suivants :
1)Tirage de 3 boules simultanément
2)Tirage de 3 boules Successivement Avec remise
3)Tirage de 3 boules Successivement sans remise

Solutions : on note les couleurs par : R ; V ; N

1)Tirage de 3 boules simultanément

a) A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes.
Deux à deux » si on tire une boule rouge et une boule verte et une noire et on obtient la combinaison :
$\{R;V;N\}$ et le nombre de possibilités
Est $C_4^1\times C_3^1\times C_2^1=4\times3\times2=24$ donc **:** $cardA=24$
b) B « obtenir trois boules qui portent le même numéro »
Tous les numéros : 0 ;1 ;1 ;1 ;1 ;2 ;2 ;2 ;3
Donc : 3 boules qui portent 1 ou
3 boules qui portent 2 donc le nombre de possibilités est $C_4^3+C_3^3=4+1=5$ donc **:** $cardB=5$
c) C « la somme des numéros des boules tirées est égale a 4 » les possibilités sont :
3+1+0=4 ou 0+2+2=4 ou 2+1+1=4 cad les combinaisons : $\{0;1;3\}$ ***ou*** $\{0;2;2\}$ ***ou*** $\{1;1;2\}$
donc le nombre de possibilités

est $cardC=C_1^1C_4^1C_1^1+C_1^1C_3^2+C_4^2C_3^1=4+3+6\times3=25$

d) methode1 :

D « obtenir au moins une boule rouge »

Obtenir au moins une boule rouge si :

On tire 1 rouge et 2 non rouges **ou** 2 rouges et 1 non rouges **ou** 3 rouges

cad les combinaisons : $\{R;\overline{R};\overline{R}\}$ ***ou*** $\{R;R;\overline{R}\}$ ***ou***

$\{R;R;R\}$ avec **:** $\overline{R}$ « ne pas tirer une boule rouge »

$cardD=C_4^1C_5^2+C_4^2C_5^1+C_4^3=4\times10+6\times5+4=74$

Methode2 :

$\overline{D}$ «ne pas obtenir de boules rouges »

Donc les 3 tirés sont non rouges

$card\,\overline{D}=C_5^3=10$

Donc $cardD=C_9^3-card\,\overline{D}=84-10=74$

2)Tirage de 3 boules successivement Avec remise

a) A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

Deux à deux » si on tire une boule rouge et une boule verte et une noire et on obtient une l'arrangement avec répétition de type: $(R;V;N)$ (avec l'ordre)

et le nombre de possibilités est :

$cardA=6\times(4\times3\times2)=144$

b) B « obtenir trois boules qui portent le même numéro »

Donc : 3 boules qui portent 1 ou

3 boules qui portent 2

on obtient une l'arrangement avec répétition de type: $(0;0;0)$ ***ou*** $(1;1;1)$ ***ou*** $(2;2;2)$ ***ou*** $(3;3;3)$ donc le nombre de possibilités est $cardB=1^3+4^3+3^3+1^3=93$

c) C « la somme des numéros des boules tirées est égale a 4 » les possibilités sont :

3+1+0=4 ou 0+2+2=4 ou 2+1+1=4 cad on obtient une l'arrangement avec répétition de type: $(1;1;2)$ ***ou*** $(0;2;2)$ ***ou*** $(0;1;3)$ (avec l'ordre)

Donc le nombre de possibilités

est $cardC=3!1\times4\times1+C_3^2\times1\times3^2+C_3^2\times4^2\times3=195$

d) $\overline{D}$ «ne pas obtenir de boules rouges »

Donc les 3 tirés sont non rouges

le nombre de tous possibilités est : $cardE=9^3$

Donc $cardD=9^3-5^3=604$

3)Tirage de 3 boules successivement sans remise

a) A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

on obtient une l'arrangement de type: $(R;V;N)$ (avec l'ordre)et le nombre de possibilités est :

$cardA=3!A_4^1\times A_3^1\times A_2^1=6\times(4\times3\times2)=144$

b) B « obtenir trois boules qui portent le même numéro »

Donc : 3 boules qui portent 1 ou

3 boules qui portent 2

on obtient une l'arrangement de type: $(0;0;0)$ ***ou*** $(1;1;1)$ ***ou*** $(2;2;2)$ donc le nombre de possibilités est

$cardB=A_4^3+A_3^3=24+6=30$

c) C « la somme des numéros des boules tirées est égale a 4 » les possibilités sont :

3+1+0=4 ou 0+2+2=4 ou 2+1+1=4 cad on obtient une l'arrangement de type: $(1;1;2)$ ***ou*** $(0;2;2)$ ***ou*** $(0;1;3)$ (avec l'ordre)

Donc le nombre de possibilités est

$cardC=3!A_1^1\times A_4^1\times A_1^1+C_3^2\times1\times A_3^2+C_3^2\times A_4^2\times A_3^1=150$

d) $\overline{D}$ «ne pas obtenir de boules rouges »

Donc les 3 tirés sont non rouges

le nombre de tous possibilités est : $cardE=A_9^3$

Donc $cardD=A_9^3-card\,\overline{D}=A_9^3-A_5^3=564$

Exercice 21: $k\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $0\le k\le n$

1)Montrer que : $A_{n+1}^k=A_n^k+kA_n^{k-1}$

2) $k\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $0\le k\le p\le n$

Montrer que : $C_n^kC_{n-k}^{p-k}=C_p^kC_n^p$ et déterminer la valeur de la somme suivante : $S=\sum_{k=0}^{p}C_n^kC_{n-k}^{p-k}$

3)Déterminer le nombre entier $3\le n$ tel que :

$C_n^1+C_n^2+C_n^3=5n$

4) Montrer que : $2^n\ge1+n$ et $3^n\ge1+2n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

5) a)Montrer que : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

5) b) calculer : $S_n=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k$ en fonction de n

6) quelle est le coefficient de $x^7y^3z^2$ dans l'identité remarquable $(x+2y+3z)^{12}$

solution :

1)on a La relation de Pascal : $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$

Donc : $k!C_{n+1}^k=k!(C_n^k+C_n^{k-1})$ donc

$k!C_{n+1}^k=k!C_n^kk!+k!C_n^{k-1}$

donc $k!C_{n+1}^k=k!C_n^kk!+k\times(k-1)!C_n^{k-1}$

or on a : $C_n^k=\dfrac{A_n^k}{k!}\Leftrightarrow A_n^k=k!C_n^k$

donc $A_{n+1}^k=A_n^k+kA_n^{k-1}$

2)Montrons que : $C_n^kC_{n-k}^{p-k}=C_p^kC_n^p$

On a :

$$C_n^k C_{n-k}^{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}$$

Et on a :

$$C_p^k C_n^p = \frac{p!}{k!(n-k)!} \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}$$

Donc $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$

$$S = \sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^p \text{ car } C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$$

Donc : $S = C_n^p \sum_{k=0}^{p} C_p^k$ et on d'après le binôme de newton on a : $(a+b)^p = \sum_{p=0}^{p} C_p^k a^k b^{p-k}$

Pour : a=1 et b=1 on a :

$$(1+1)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k 1^k \times 1^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k = 2^p$$

Donc : $S = 2^p C_n^p$

3) on a :

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n\times(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n\times(n-1)}{2}$$

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n\times(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!} = \frac{n\times(n-1)(n-2)}{6}$$

$C_n^1 = n$

Donc $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 5n \Leftrightarrow$

$$n + \frac{n\times(n-1)}{2} + \frac{n\times(n-1)(n-2)}{6} = 5n \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} n^2 - 25 = 0 \\ n \geq 3 \end{cases}$ donc $S = \{5\}$

4) D'après le binôme de newton on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Pour : a=1 et b=1 on a : $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

Donc : $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k$

Donc : $2^n = 1 + n + \sum_{k=2}^{n} C_n^k$ donc $2^n \geq 1 + n$

Pour : a=2 et b=1 on a : $(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$

Donc : $3^n = C_n^0 2^0 + C_n^1 2^1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k 2^k$

Donc : $3^n = 1 + 2n + \sum_{k=2}^{n} C_n^k 2^k$ donc $3^n \geq 1 + 2n$

5) a)Montrons que : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'après le binôme de newton on a : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

Pour : x=-1 on a : $(1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$

Donc $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5) b) calculons: $S_n = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k$ en fonction de n

on a : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

du calcul de la dérivée on trouve :

$$n(1+x)^{n-1}(1+x)' = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1}$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1}$$

Pour : x=1 on a : $\sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}$

6) d'après le binôme de newton on a :

$$(x+2y+3z)^{12} = (x+(2y+3z))^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{12-k} (2y+3z)^k$$

Et de cette identité en déduit que :

Pour : k=5 $C_{12}^5 x^7 (2y+3z)^5$

Or : $(2y+3z)^5 = \sum_{p=0}^{5} C_5^p (2y)^{5-p} (3z)^p$

Pour : p=2 $C_5^2 (2y)^3 (3z)^2 = C_5^2 2^3 3^2 y^3 z^2$

le coefficient de $x^7 y^3 z^2$ dans l'identité remarquable $(x+2y+3z)^{12}$ est : $C_{12}^5 C_5^2 2^3 3^2 = 570240$

Exercice 22: Soit E l'ensemble à 12 éléments {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l}.

1)Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent

a. A et b ;
b. a mais pas b
c. b mais pas a
d. ni a , ni b

2)En déduire la relation : $C_{12}^5 = C_{10}^3 + 2C_{10}^4 + C_{10}^5$

3)Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour 2≤p≤n, on a

$$C_n^p = C_{n-2}^{p-1} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p$$

4)Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule du triangle de Pascal.

Solution :

1)a)Puisque deux éléments sont fixés, il reste à choisir 3 éléments parmi 10. Le nombre recherché est C_{10}^{3}

b)Un élément est déjà choisi, il reste à en choisir 4 parmi 10 (puisque *b* est exclu et qu'on ne peut bien sûr par reprendre *a*). Il y a donc C_{10}^{4} telles parties.

c)Idem.

d)On doit cette fois choisir 5 éléments parmi 10 : il y a C_{10}^{5} parties ne comprenant ni *a* ni *b* .

2)Il y a C_{12}^{5} parties à 5 éléments de *E* . Mais on a réalisé une partition de ces parties : celles qui contiennent *a* et *b* , celles qui contiennent seulement un des deux éléments, celles qui ne contiennent aucun des deux. D'où la formule demandée.

3)On part cette fois d'un ensemble à *n* éléments dont on fixe deux éléments *a* et *b* . Le nombre de parties à *p* éléments de cet ensemble est C_{n}^{p} . On réalise une partition de ces parties en les parties :

- contenant *a* et *b* : il y a en a C_{n-2}^{p-2} (il reste *p*−2 éléments à choisir parmi *n*−2);
- contenant *a* mais pas *b* : il y en a C_{n-2}^{p-1}
- contenant *b* mais pas *a* : il y en a C_{n-2}^{p-1}
- ne contenant ni *a* , ni *b*: il y en a. C_{n-2}^{p}

Faisant la somme, on trouve bien la formule voulue.

4)On applique trois fois la relation du triangle de Pascal : une fois dans la première ligne, deux fois dans la deuxième :

$$C_{n}^{p}=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=C_{n-2}^{p-2}+C_{n-2}^{p-1}+C_{n-2}^{p-1}+C_{n-2}^{p}$$

ce qui après regroupement donne la formule voulue.

Exercice23 : Soit 1≤p≤n . On considère n boules et deux boîtes Aet B . Un échantillon est constitué d'une boule dans la boîte A et de p−1 boules dans la boîte B . En dénombrant de deux façons différentes ces échantillons, établir la formule

$$nC_{n-1}^{p-1}=pC_{n}^{p}$$

Retrouver cette formule par le calcul.

Solution :

Voici deux façons de compter le nombre d'échantillons.

- On choisit d'abord une boule à mettre dans la boîte A : il y a n choix possibles. Puis on choisit p−1 boules parmi les n−1 boules restantes pour mettre dans la boîte B . Il y a donc nC_{n-1}^{p-1} échantillons.
- On choisit d'abord les p boules parmi n qui seront dans les deux boîtes : il y a C_{n}^{p} choix possibles. Puis on choisit parmi ces p boules celle à mettre dans la boîte A: il y a p choix possibles, et donc le nombre d'échantillons recherché est pC_{n}^{p}

Puisqu'on compte de deux façons différentes le même nombre d'échantillons, on obtient bien le résultat escompté.

Par le calcul, on a :

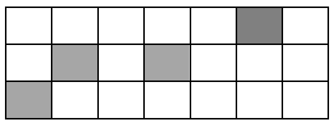
$$nC_{n-1}^{p-1}=n\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!}=p\frac{n!}{p!(n-p)!}=pC_{n}^{p}$$

Soit E un ensemble à n éléments ; Combien y-a-t-il de couples (X,Y) de parties de E tels que X⊂Y?

Pour p parcourant 0,…,n il y a C_{n}^{p} choix possibles pour Y une partie de E à p éléments. Y étant fixé, X est une partie quelconque de Y , qui compte p éléments, il y a donc 2^{p} choix pour X . Le nombre recherché est donc égal à

$$\sum_{p=0}^{n}C_{n}^{p}2^{p}=(1+2)^{n}=3^{n}$$

Exercice24 : On a une grille de : $7\times 3=21$ (voire le schéma)



1)On colore par le noire 4 carreaux de la grille

a. Quel est le nombre de cas possibles ?

b. Quel est le nombre de cas possibles tel que tous les carreaux noirs soient sur la même horizontal ?

c. Quel est le nombre de cas possibles tel que 3 carreaux noirs soient sur la même vertical ?

2)maintenant on colore 4 carreaux de la grille par les couleurs : noire, rouge et vert et jaune

a. Quel est le nombre de façons possibles ?

b. Quel est le nombre de façons possibles pour que les carreaux colorés soient sur la même horizontal

Solution :1)a) dans ce cas Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque on colore par le noire seulement (pas d'ordre) donc : Les choix simultanés de 4 carreaux parmi les 21 carreaux sont au nombre de $C_{21}^{4}=5985$

1)b)on choisit entre 3 horizontaux on a $C_3^1=3$ possibilités et choisi entre **7** carreaux et colore 4 donc C_7^4 possibilités donc au total il Ya :

$C_3^1\times C_7^4=105$

1)c) 3 carreaux noirs soient sur la même vertical on choisit entre 7verticaux on a $C_7^1=7$ possibilités et choisi entre **1** carreaux parmi 18 qui restent et on colore donc C_{18}^1 possibilités donc au total il Ya : $C_7^1\times C_{18}^1=7\times 18=126$

2)a) dans ce cas Il s'agit clairement d'une situation d'arrangement puisque on colore par des couleurs différentes (l'ordre) donc : Les choix de 4 carreaux parmi les 21 carreaux sont au nombre de $A_{21}^4=143640$

1)b)on choisit entre 3 horizontaux on a $C_3^1=3$ possibilités et choisi entre **7** carreaux et colore 4 donc A_7^4 possibilités donc au total il Ya :

$C_3^1\times A_7^4=3\times 840=2520$

Exercice25 : $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$ tq $0\le p\le n$

1)Montrer que : $C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$x^2-C_n^p x+C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p=0$

Solution :1° $C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}=\dfrac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}+\dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$

$$=\frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)\,p!(n-1-p)!}+\frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!}$$

$$=\frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)!\,p!}+\frac{p(n-1)!}{(n-p)!\,p!}=\frac{(n-p)(n-1)!+p(n-1)!}{(n-p)!\,p!}$$

$$=\frac{(n-1)!(n-p+p)}{(n-p)!\,p!}=\frac{n(n-1)!}{(n-p)!\,p!}=\frac{n!}{(n-p)!\,p!}=C_n^p$$

2) $x^2-C_n^p x+C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p=0$

$$\Delta=\left(C_n^p\right)^2-4C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p=\left(C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}\right)^2-4C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p$$

$$\Delta=\left(C_{n-1}^p\right)^2+2C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p+\left(C_{n-1}^{p-1}\right)^2-4C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p$$

$$\Delta=\left(C_{n-1}^p-C_{n-1}^{p-1}\right)^2$$

$$x_1=\frac{-C_n^p+C_{n-1}^p-C_{n-1}^{p-1}}{2}=\frac{-C_{n-1}^p-C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^p-C_{n-1}^{p-1}}{2}=-C_{n-1}^{p-1}$$

$$x_2=\frac{-C_n^p-C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}}{2}=\frac{-C_{n-1}^p-C_{n-1}^{p-1}-C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}}{2}=-C_{n-1}^p$$

$$S=\left\{-C_{n-1}^{p-1};-C_{n-1}^p\right\}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

LIMITE D'UNE FONCTION

I) RAPPELLES ET COMPLEMENTS.

$]a,b[=\{x\in\mathbb{R}/a<x<b\}$

- Le centre de l'intervalle $]a,b[$ est le réel $x_0=\frac{a+b}{2}$
- Le rayon de l'intervalle $]a,b[$ est le réel positif $r=\frac{b-a}{2}$

Activité :

Déterminer les bornes d'un intervalle ouvert de centre x_0 et de rayon r (deux réels données)

Définition :

L'ensemble : $]a,b[^*=\{x\in\mathbb{R}/a<x<b\}/\{x_0\}$ où x_0 est le centre de l'intervalle $]a,b[$, s'appelle l'intervalle pointé de bornes a et b.

Remarque :

Si r est le rayon de l'intervalle $]a,b[$ et x_0 son centre alors : $]a,b[^*=]x_0-r,x_0+r[/\{x_0\}$

Activité :

Montrer que $x\in]x_0-r,x_0+r[/\{x_0\}\Leftrightarrow 0<|x-x_0|<r$

Activité :

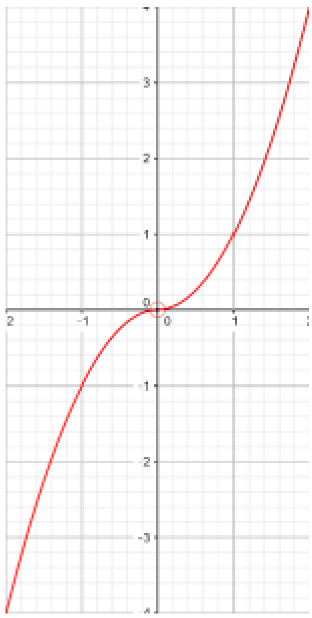
1-Rappeler l'image d'un ensemble par une application.

2- Rappeler $f(A)\subset B$

3- Traduire en utilisant les valeurs absolues : $f(]x_0-r,x_0+r[^*)\subset]l-\beta,l+\beta[$

II) LIMITE NULLE EN 0.

Considérons la fonction : $\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\frac{x^3}{|x|}\end{aligned}$



1- Déterminer l'ensemble de définition de f.

2- Ecrire des expressions de f sur des intervalles sans valeur absolue.

3- La courbe de f est ci-contre :

a)- Déterminer un réel α tel que : $f(]-\alpha,\alpha[^*)\subset]-2,2[$

b)- Déterminer un réel α tel que : $f(]-\alpha,\alpha[^*)\subset]-10^{-2},10^2[$

c)- Déterminer un réel α tel que : $f(]-\alpha,\alpha[^*)\subset]-\varepsilon,\varepsilon[$

En répondant à la question 3-c) on peut conclure que :

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<|x|<\alpha\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$$

On dit que la fonction f admet 0 comme limite en 0. et on écrit : $\lim_{x\to0}f(x)=0$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre 0. On dit que f admet la limite 0 en 0 si elle vérifie la propriété suivante : $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<|x|<\alpha\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$. On écrit : $\lim_{x\to0}f(x)=0$.

Remarques :

- ✓ Le faite que f est définie sur un intervalle pointé est essentielle. $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$ est définie en 0 et n'admet pas de limite en 0. $D_g = \{0\}$.
- ✓ On a pas préciser si dans la définition si f est définie en 0 ou non, même si f est définie en 0, l'image de f en 0 n'affecte pas sur la limite.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \begin{cases} x \mapsto \frac{x^3}{|x|} \; si \; x \neq 0 \\ 0 \mapsto 5 \end{cases} \qquad\qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \begin{cases} x \mapsto \frac{x^3}{|x|} \; si \; x \neq 0 \\ 0 \mapsto -3 \end{cases}$$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$

Propriété :

Si f et g sont confondues sur un intervalle pointé de centre 0 et si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

Propriété :

Les fonctions : $x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \sqrt{|x|}$; $x \mapsto kx$ tendent vers 0 quand x rend vers 0.

III) LIMITE FINIE l EN a.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a si : $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - l) = 0$. c.-à-d. :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Exercice : Montrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{x\to x_0} (ax + b) = (ax_0 + b) \quad (a \neq 0)$$

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + 1) = 2.$$

Propriété :

Si P est une fonction polynôme alors : $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$

Une fonction polynôme P c'est une fonction qui s'écrit de la forme : $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

Exemple :

$$\lim_{x\to 2} 3x^2 + x + 3 = 17.$$

Propriété :

Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Application :

Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Propriété :

Si f et g sont confondues sur un intervalle pointé de centre a et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

Exemple :

On se propose d'étudier la limite de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ en 0.

On remarque que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(f(x) = \frac{x^2}{x(1+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} = g(x))$ (on a multiplié par le conjugué)

D'autre part : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(|g(x)| \leq |x|)$ et puisque : $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ alors $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

et par suite : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Propriété :

Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a ; on a : $\lim_{x\to a}|f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0$

Remarque :

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = l \Leftrightarrow ou \left| \begin{array}{l} \lim_{x\to a} f(x) = l \\ \lim_{x\to a} f(x) = -l \end{array} \right.$$

Propriété :

Si f admet une limite l en a alors cette limite est **unique.**

III) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE.

1) Définition

Activité :

Soit la fonction $\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto x - E(x) \end{array}$ où E désigne la partie entière.

1- Ecrire les expressions de f sans utiliser la partie entière sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,2[$.

2- Construire la courbe de la restriction de f sur $[0,2]$.

3- La fonction f admet-elle une limite en 1.

4- Soit la fonction $g(x) = x$ et $h(x) = x - 1$

a) Remarquer que f et g sont confondues sur $]0,1[$ et que f et h sont confondues sur $]1,2[$

b) déterminer les limite de g et de h en 1.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ où $r > 0$ et l un réel.

On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a à droite si la proposition suivante est vraie :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

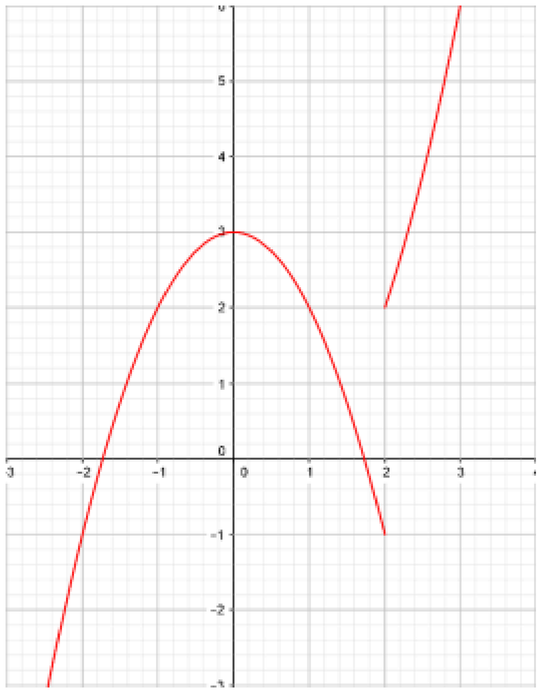
Et on écrit : $\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = l$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$

Exercice :

La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par morceaux comme suite :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$\begin{cases} x\mapsto x^2-x & si\ x\geq 2\\ x\mapsto 3-x^2 & si\ x<2\end{cases}$$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction f à droite et à gauche de 2.



Exercice :

Soit la fonction g définie par :

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$\begin{cases} x\mapsto 2x^2-x+3 & si\ x\geq 1\\ x\mapsto -x^2+x+\alpha & si\ x<1\end{cases}$$

Déterminer α pour que la fonction g admet une limite en 1.

Théorème :

Une fonction f admet une limite l en a si et seulement si elle admet une limite à droite de a égale à sa limite à gauche de a égale à l.

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l\end{cases}$$

2) Propriétés

Toutes les propriétés mentionnées au paravent sont vraie à droite et à gauche de a en tenant compte des conditions

Propriété :

Si sur un intervalle de la forme $]a,a+r[$ on a: $|f(x)-l|\leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} u(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$

Propriété :

Si f et g sont confondues sur un intervalle de la forme $]a,a+r[$ et si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=l$

Propriété :

Si sur un intervalle de la forme $]a,a+r[$ on a : $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+} h(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$

On peut citer les même propriétés à gauche de a.

3) Opérations sur les limites finies.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions tels que : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l'$ on a :

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=l+l'$$
$$\lim_{x\to a}(f\times g)(x)=l\times l'$$
$$\lim_{x\to a}(|f|)(x)=|l|$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{l'} \qquad l'\neq 0$$
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{l}{l'} \qquad l'\neq 0$$
$$\lim_{x\to a}(\sqrt{f})(x)=\sqrt{l} \qquad l>0$$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel a.

Exemple :

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3x^2+1}+2x+1}{2x^2+3}=\frac{1}{5}$$

IV) EXTENTION DE LA NOTION DE LIMITE.

1) Limite infinie à droite (à gauche) de a.

Activité :

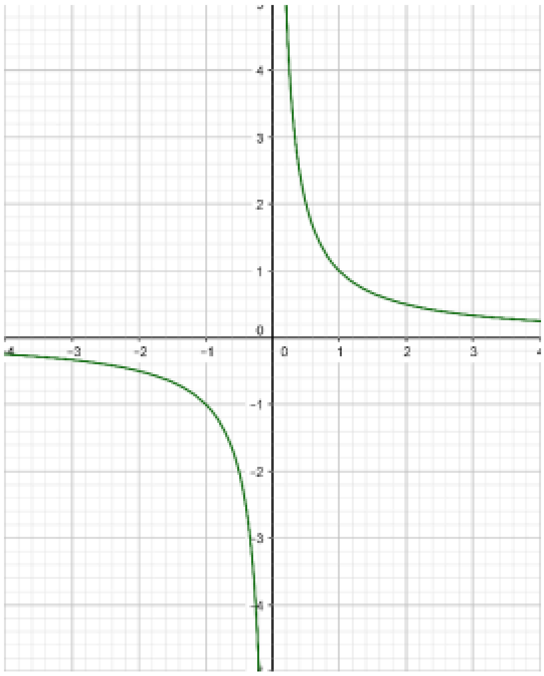
Considérons la fonction $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \frac{1}{x}\end{array}$

La courbe représentative de f est l'hyperbole de centre $O(0,0)$

1- Compléter le tableau suivant :

x	10^{-2}	10^{-6}	10^{-20}	…	10^{-p}
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?



Considérons $A=10^{100}$ déterminer un réel α tel que si $0<x<\alpha$ alors $f(x)>10^{100}$.

Montrer que :

(P) : $(\forall A>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<x<\alpha\Rightarrow f(x)>A)$

La propriété (P) veut dire qu'on peut rendre $f(x)$ aussi grand qu'on veut ; on dit que la limite de f est $+\infty$ quand x tend vers 0 à droite et on écrit : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a,a+r[$ où $r>0$, on dit que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a adroite si $(\forall A>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<x-a<\alpha\Rightarrow f(x)>A)$

On écrit : $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

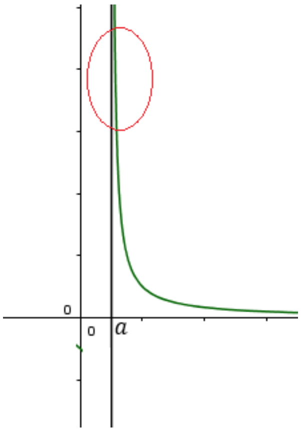
Propriétés :

les fonctions $x\mapsto\frac{k}{|x|}$; $x\mapsto\frac{k}{\sqrt{|x|}}$ et $x\mapsto\frac{k}{|x|^n}$ où k un réel strictement positif et $n\in\mathbb{N}^*$, tendent vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

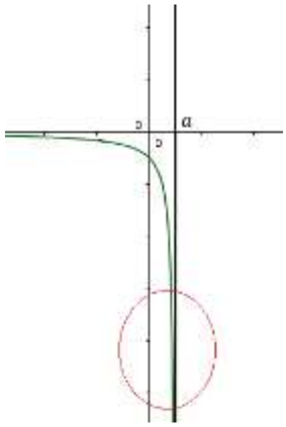
Définitions :

- ✓ $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$: $(\forall A>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<x-a<\alpha\Rightarrow f(x)<-A)$
- ✓ $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$: $(\forall A>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<a-x<\alpha\Rightarrow f(x)>A)$
- ✓ $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$: $(\forall A>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<a-x<\alpha\Rightarrow f(x)<-A)$

Interprétations géométriques :



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Exercice : Compléter l'interprétation géométrique.

Définition :

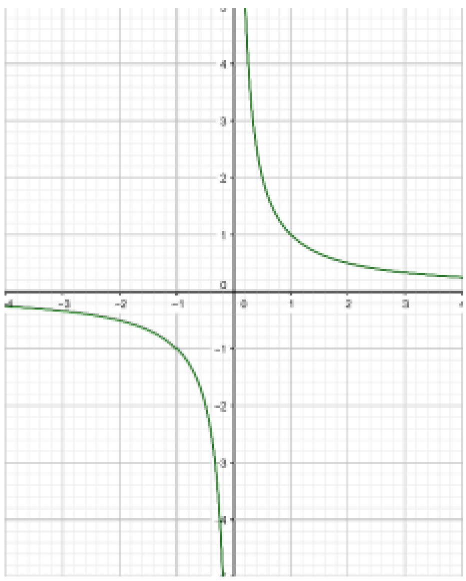
Si la fonction f vérifie l'une des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

Alors, on dit que la droite $(\Delta): x = a$ est une **asymptote verticale.**

2) Limites finies en $\pm\infty$

Activité : Considérons la fonction $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$



La courbe représentative de f est l'hyperbole de centre $O(0,0)$

1- Compléter le tableau suivant :

x	10^2	10^6	10^{20}	…	10^p
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons $\varepsilon = 10^{-100}$ déterminer un réel B tel que si $x > B$ alors $|f(x)| < \varepsilon$.

En général, montrer que :

(P) : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (a un réel quelconque) et l un réel, on dit que la fonction f tend l quand x tend vers $+\infty$ si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

On écrit : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l$

Propriétés :

les fonctions $x \mapsto \frac{k}{|x|}$; $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}}$ et $x \mapsto \frac{k}{|x|^n}$ où k un réel donné et $n \in \mathbb{N}^*$, tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

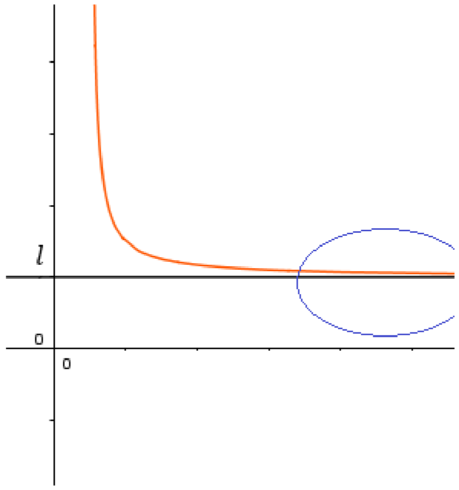
Définitions :

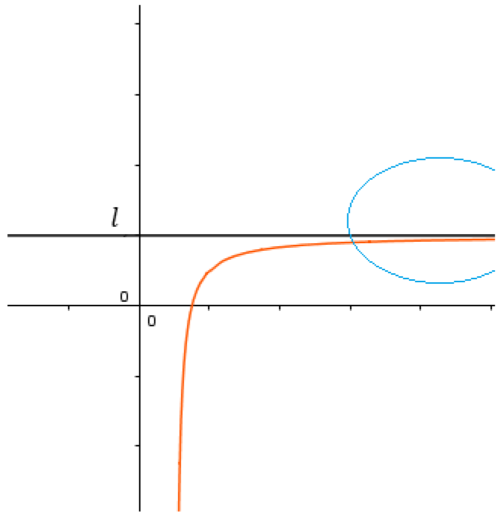
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ (a un réel quelconque) et l un réel, on dit que la fonction f tend l quand x tend vers $-\infty$ si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

On écrit : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

Interprétation géométrique :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$





Completer les autres intérprétations.

Définition :

Si la fonction f vérifie l'une des limites suivantes :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

Alors, on dit que la droite $(\Delta): y = l$ est une **asymptote horizontale.**

Remarque :

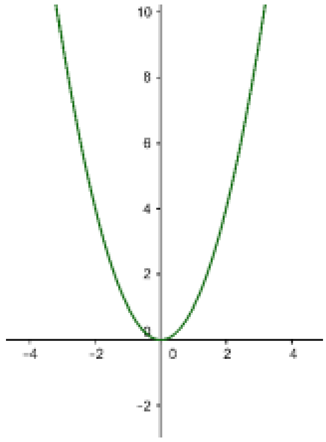
La position de la courbe C_f par rapport à son asymptote horizontale se détermine par le signe de $f(x) - l$:

- Si $f(x) - l \geq 0$ alors C_f est au-dessus de $(\Delta): y = l$
- Si $f(x) - l \leq 0$ alors C_f est au-dessous de $(\Delta): y = l$

3) Limite infinies en $\pm\infty$

Activité : Considérons la fonction $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

La courbe représentative de f est la parabole de centre $O(0,0)$



1- Compléter le tableau suivant :

x	10^2	10^6	10^{20}	…	10^p
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons $A = 10^{100}$ déterminer un réel B tel que si $x > B$ alors

$f(x) > A$.

En général, montrer que :

(P) : $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$

Définition :

Soit f une fonction $]a,+\infty[$ (où a est un réel quelconque) on dit que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si : $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$; on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Propriété :

Les fonctions $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ tendent $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

Définitions :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) < -A)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x < -B \Rightarrow f(x) > A)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x < -B \Rightarrow f(x) < -A)$

Remarque :

Pour l'interprétation géométrique, il y' a plusieurs cas qu'on va étudier par la suite (Etude de fonction).

V) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

1) Limites et ordres.

Propriété :

Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Propriété :

Si f et g sont confondues sur un intervalle pointé de centre a et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

Propriété :

Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si x tend vers a à droite, ou a à gauche , ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

Propriété

- Si sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ on a : $u(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} u(x) = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x \to a^+} v(x) = +\infty$
- Si sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ on a : $u(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} v(x) = -\infty$ alors : $\lim\limits_{x \to a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si x tend vers a à gauche , ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

Exercice :

Soit $f(x) = \dfrac{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\left(f(x) \geq \frac{1}{x^2}\right)$

2- En déduire $\lim\limits_{x \to o} f(x)$

2) Opérations sur les limites

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises et on peut les démontrer en utilisant les définitions des limites.

1) Limite de la somme

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	l		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Formes indéterminées**

Ces propriétés sont vraies si x tend vers a^+ ; a^- ; $+\infty$ ou $-\infty$

Formes indéterminées : Veut dire qu'on peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calcules car il y a plusieurs cas.

Exemples :

❶ $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x^2$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f+g)(x) = 7$

❷ $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et

$$\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - x + 7 = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = +\infty$$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

2) Limites des produits

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} (f \times g)(x)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**Formes indéterminées**

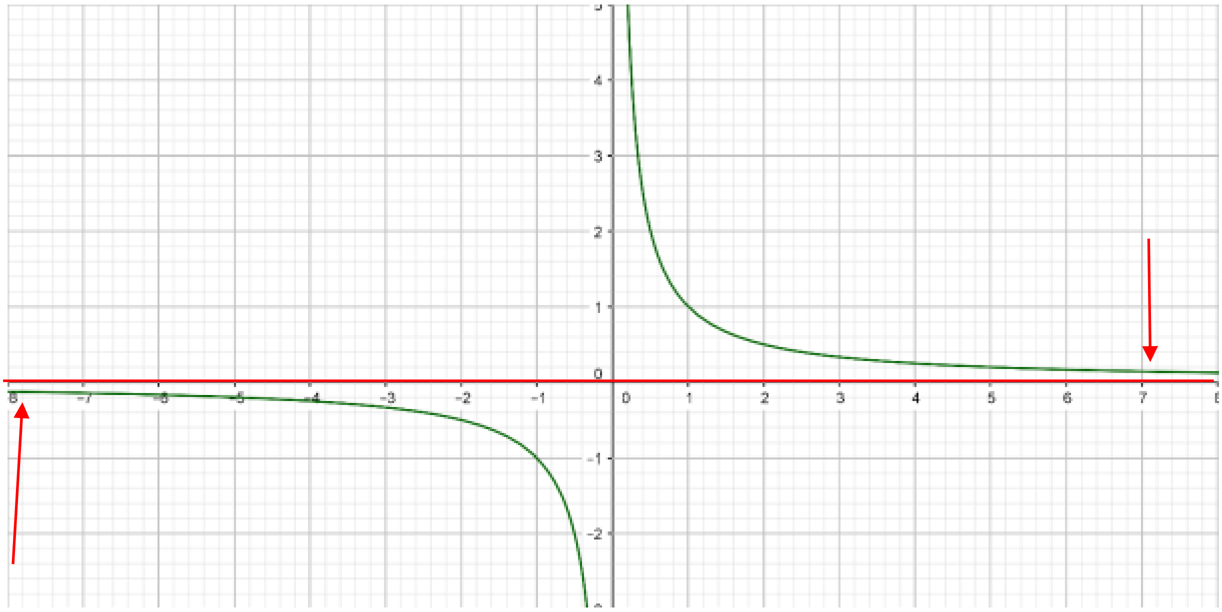
3) Limites des inverses

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarque : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+$ veut dire que f tend vers 0 mais de la droite.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0\ (0^+)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0\ (0^-)$ chose qu'on voit bien sur la courbe de la fonction f



3) Limites des quotients

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$ ou $+\infty$		$l<0$ ou $-\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**Formes indéterminées**	**Formes indéterminées**

Exemple :

_On veut déterminer la $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+1}{x^2+x-2}$ on a :

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}(3x+1)=4\\ \lim\limits_{x\to1^+}(x^2+x-2)=0^+\end{cases}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+1}{x^2+x-2}=+\infty$

Remarque :

- Eviter d'écrire ces expressions qui n'ont pas de sens mathématique : $\frac{?}{0^+}, \frac{?}{0^-}$
- Ne pas utiliser $+\infty$ ou $-\infty$ dans les opérations dans $\mathbb{R}$ ($+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels)

Exercices

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$ $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

3) Limites d'une fonction polynôme en $\pm\infty$

Soit f une fonction polynôme de degré n tel que : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ avec $a_n \neq 0$

On a : $f(x) = a_nx^n\left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1\right)$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1\right) = 1$ alors

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_nx^n$

Même chose si x tend vers $-\infty$

Propriété :

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ $(-\infty)$est la limite de son plus grand terme en $+\infty$ $(-\infty)$

4) Limites d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$

Une fonction rationnelle est le rapport de deux fonctions polynômes : $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ où :

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ avec $a_n \neq 0$ et $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ avec $b_m \neq 0$

$h(x) = \frac{a_nx^n\left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1\right)}{b_mx^m\left(\frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{b_nx} + 1\right)}$ et puisque :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{b_nx} + 1\right) = 1$ alors

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$

Même chose si x tend vers $-\infty$

Propriété :

La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ $(-\infty)$est la limite du rapport des termes de plus grand degré en $+\infty$ $(-\infty)$

Exemples :

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7x^3+2x^2+8}{3x^4+2x^2-5x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7x^3}{3x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7}{3x} = 0$

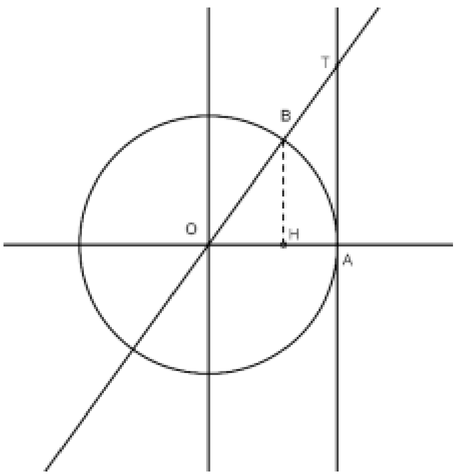
2- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-6x^5+2x^4+8x}{5x^3+2x^2+5x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-6x^5}{5x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-6}{5}x^2 = -\infty$

Remarque : La propriété précédente n'est vraie que si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

Exercice : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{x^3+2x\sqrt{x}}$ vous pouvez poser $\sqrt{x} = t$

5) Limites des fonctions trigonométriques.

Activité :



Dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, On considère le cercle trigonométrique d'origine $A(1,0)$. $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$ et B le point sur le cercle trigonométrique tel que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) \equiv x \quad [2\pi]$.

1-Déterminer en fonction de x la surface du domaine circulaire $\mathcal{D}$ limité par $[OA)$, $[OB)$ et l'arc géométrique $\widehat{AB}$

2- Soit H la projection orthogonale de B sur (OA).

a) Déterminer en fonction de x l'aire du triangle OAB

b) Comparer les aires du domaine $\mathcal{D}$ et du triangle , que peut-on conclure ?

3- Montrer que : $(\forall x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \; (|sinx| \leq |x|)$.

4- Déterminer les limites $\lim\limits_{x \to 0} sinx$; $\lim\limits_{x \to a} sinx$ et $\lim\limits_{x \to a} cosx$

5- Considérons la droite (Δ) la droite tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A

a) Soit T l'intersection de (Δ) et (OB), Déterminer en fonction de x la surface de OAT

b) En déduire que $\left(\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\right) \; (x \leq tanx)$

c) En déduire que $\left(\forall x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) \; (|x| \leq |tanx|)$

6- En utilisant les résultats précédents. Montrer que :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tanx}{x} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$

Propriété :

Soit a un réel on a :

- $\lim\limits_{x \to a} sinx = sina$
- $\lim\limits_{x \to a} cosx = cosa$
- si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\lim\limits_{x \to a} tanx = tana$

Propriété :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$
b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tanx}{x} = 1$
c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$

Exercices :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin7x}{tan3x} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{sin2x}{cosx} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{2cos^2x + cosx - 3}{1 - cos^2x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{tanx + tan2x}{tan3x + tan4x} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - tanx}{cosx - sinx}$$

VI) COMPLEMENT

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a, on dit que f est **continue** en a si elle admet une limite finie en a **qui est égale à $f(a)$.**

***f* continue** en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemples :

1. Toute fonction polynôme est continue en a pour tout a dans $\mathbb{R}$, si P est une fonction polynôme alors $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.

2. Toute fonction rationnelle est continue en a si $a \in D_f$. si h est une fonction rationnelle et $a \in D_h$ alors $\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$.
3. Les fonctions sin et cos sont continues en a pour tout a dans $\mathbb{R}$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ $(r > 0)$ on dit que f est continue à droite de a si : $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

LIMITE D'UNE FONCTION

I) RAPPELLES ET COMPLEMENTS.

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$

1)Le centre de l'intervalle] a, b [est le réel $x_0 = \frac{a+b}{2}$

2)Le rayon de l'intervalle $]a, b[$ est le réel positif $r = \frac{b-a}{2}$

Activité : Déterminer les bornes d'un intervalle ouvert de centre x_0 et de rayon r

(deux réels données)

Définition :L'ensemble : ¨

$]a;b[^* = \{x \in \mathbb{R} / a \prec x \prec b\} - \{x_0\}$ où x_0 est le centre de l'intervalle $]a, b[$:

S'appelle l'intervalle Pointé de bornes a et b.

Remarque : Si r est le rayon de l'intervalle $]a, b[$ et x_0 son centre alors : $]a;b[^* =]x_0 - r; x_0 + r[- \{x_0\}$

$x \in]x_0 - r; x_0 + r[- \{x_0\} \Leftrightarrow \prec |x - x_0| \prec r$

Activité1 : Montrer que

$x \in]x_0 - r; x_0 + r[- \{x_0\} \Leftrightarrow \prec |x - x_0| \prec r$

Activité2 :

1-Rappeler l'image d'un ensemble par une application.

2- Rappeler $f(A) \subset B$

3- Traduire en utilisant les valeurs absolues :

$f(]x_0 - r; x_0 + r[- \{x_0\}) \subset]l - \beta; l + \beta[$

II) LIMITE NULLE EN 0.

Activité3 : Considérons la fonction : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^3}{|x|}$

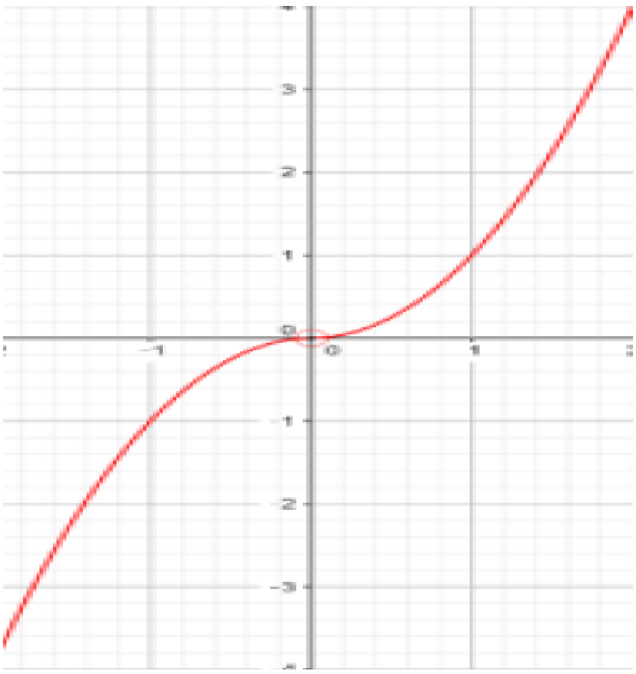
1- Déterminer l'ensemble de définition de f.

2- Ecrire des expressions de f sur des intervalles sans valeur absolue.

3- La courbe de f est ci-contre :

a)- Déterminer un réel α tel que :

$f(]-\alpha; \alpha[- \{0\}) \subset]-2; 2[$



b)- Déterminer un réel α tel que :

$f(]-\alpha; \alpha[- \{0\}) \subset]-10^2; 10^2[$ [

c)- Déterminer un réel α tel que :

$f(]-\alpha; \alpha[- \{0\}) \subset]-\varepsilon; \varepsilon[$

En répondant à la question 3-c) on peut Conclure que :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

On dit que la fonction f admet 0 comme limite en 0. et on écrit : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre 0. On dit que f admet la limite 0 en 0 si elle vérifie la propriété suivante $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

On écrit : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Remarques :1)Le faite que f est définie sur un intervalle pointé est essentielle. $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$ est définie en 0 et n'admet pas de limite en 0.

$Dg = \{0\}$.

Propriété : Si f et g sont confondues sur un intervalle pointé de centre 0 et si $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ alors $\lim_{x\to 0} g(x)=0$

Propriété : Les fonctions : $x\mapsto x^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$) ; $x\mapsto\sqrt{|x|}$; $x\mapsto kx$

Tendent vers 0 quand x rend vers 0.

Exercice : Soit la fonction : $f:x\mapsto\dfrac{x}{x+1}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

Solution : Montrons que :

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<|x|<\alpha\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$?

Soit : $x\in\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ donc $|f(x)|=\left|\dfrac{x}{x+1}\right|\le 2|x|$

Soit $\varepsilon>0$ on cherche $\alpha>0$ tel que :

$0<|x|<\alpha\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$

Pour avoir $|f(x)|<\varepsilon$ il suffit d'avoir $2|x|\prec\varepsilon$ et $|x|\prec\dfrac{1}{2}$ cad $|x|\prec\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|x|\prec\dfrac{1}{2}$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$

donc : $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

III) LIMITE FINIE L EN a.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a si : $\lim_{x\to a} f(x)-l=0$. c.-à-d. :

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<|x-a|<\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$

Propriété : Si P est une fonction polynôme alors $\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$

Une fonction polynôme P c'est une fonction qui s'écrit de la forme :

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2.+...+a_nx^n$

Exemple : $\lim_{x\to 2} 3x^2+2x+1=3\times 2^2+2\times 2+1=17$

Propriété: Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x)-l|\le u(x)$ et $\lim_{x\to a} u(x)=0$ alors $\lim_{x\to a} f(x)=l$

Exemple1 : 1)monter que : $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$

2)a)monter que : $\forall x\in]-1;1[$: $|x^2+5x|\le 6|x|$

b)Calculer $\lim_{x\to 0} x^2+5x$

Solution : 1) $x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right|\le 1$

donc $\left|x^2\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right|\le x^2$ et on a $\lim_{x\to 0} x^2=0$

Donc : $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$

2)a) on a : $|x^2+5x|=|x(x+5)|=|x||x+5|$

Et puisque : $x\in]-1;1[$ alors : $4\prec x+5\prec 6$

alors : $|x+5|\prec 6$ donc $|x^2+5x|\le 6|x|$

b) puisque : $\lim_{x\to 0} 6|x|=0$ alors : $\lim_{x\to 0} x^2+5x$

Exemple2 : monter que: $\lim_{x\to 0} 2+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=2$

Solution : $x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le 1$ donc :

$|f(x)-2|=x^2\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le x^2$ et on a $\lim_{x\to 0} x^2=0$

Alors : $\lim_{x\to 0} f(x)=2$

Exemple3 : monter que: $\lim_{x\to 4}\sqrt{2x+1}=3$

Solution : $\forall x\in\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$|f(x)-3|=|\sqrt{2x+1}-3|=\dfrac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3}$

et on a $\sqrt{2x+1}+3\ge 3$ donc : $|f(x)-3|\le\dfrac{2}{3}|x-4|$

et puisque : $\lim_{x\to 4}|x-4|=0$ Alors : $\lim_{x\to 4} f(x)=3$

Propriété : Si f et g sont confondues sur un intervalle pointé de centre a et si $\lim_{x\to a} f(x)=l$ alors $\lim_{x\to a} g(x)=l$

Exemple : On se propose d'étudier la limite de la fonction : $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ en 0.

On remarque que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

(on a multiplié par le conjugué)

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ D'autre part :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(|f(x)| \leq |x|)$ et puisque $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ alors

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. la fonction f tend vers l quand x tend vers a si : la fonction $h\to f(a+h)-l$ tend vers 0 quand x tend vers 0

Exemple1 : $f(x)=x^2+3x+2$

monter que : $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=6$

Solution : $f(-1+h)-6=h^2-5h$

$|f(-1+h)-6|=|h^2-5h|=|h||h-5|$

Si $h\in]-1;1[$ alors : $|f(-1+h)-6|\leq 6|h|$

puisque : $\lim\limits_{h\to 0}6|h|=0$ alors : $\lim\limits_{h\to 0} f(-1+h)-6=0$

donc : $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=6$

Exemple2 : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

monter que : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{1}{3}$

Solution : $f(-1+h)-6=h^2-5h$

$f(2+h)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2h}{3+h}$

Si $h\in]-1;1[$ alors : $\left|f(2+h)-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{2h}{3+h}\right|\leq|h|$

puisque : $\lim\limits_{h\to 0}|h|=0$ alors : $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h)-\dfrac{1}{3}=0$

donc : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{1}{3}$

Propriété : Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a

on a : $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=0$

Remarque :

$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-l$

Propriété : Si f admet une limite l en a alors cette limite est **unique.**

IV) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE.

1) Définition

Activité : Soit la fonction $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x-E(x)\end{array}$

Où E désigne la partie entière.

1- Ecrire les expressions de f sans utiliser la partie entière sur les intervalles]0,1[et]1,2[.

2- Construire la courbe de la restriction de f sur [0,2].

3- La fonction f admet-elle une limite en 1.

4- Soit la fonction $g(x) = x$ et $h(x) = x - 1$

a) Remarquer que f et g sont confondues sur]0,1[et que f et h sont confondues sur]1,2[

b) déterminer les limites de g et de h en 1.

Définition1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme] a, $a + r$[où $r > 0$ et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a à droite si la proposition suivante est vraie :

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x \in Df)(\ a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$

Définition2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme]a - r, a [où $r > 0$ et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a à gauche si la proposition suivante est vraie :

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x \in Df)(\ a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$

Exemple : Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)$

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $x\succ 1$: $f(x)=\dfrac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x}{x+1}$

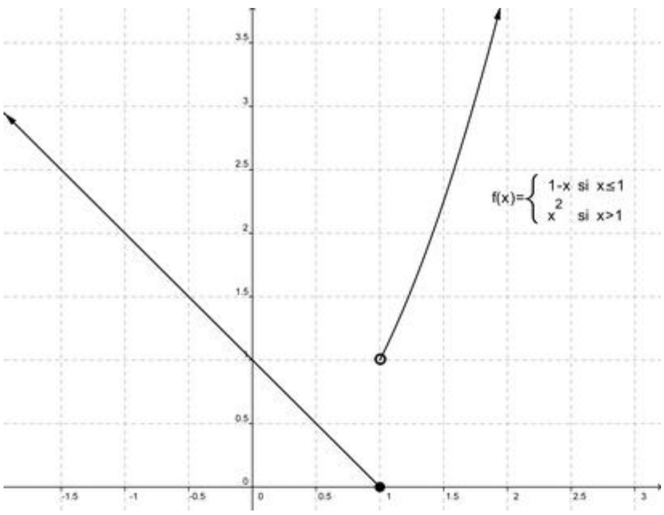
Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$

Si : $x\prec1$: $f(x)=\frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)}=-\frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}-\frac{x}{x+1}=-\frac{1}{2}$

Remarque : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}} f(x)$

Exercice1 :



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 1-x \text{ si } x\leq 1$

$x\mapsto x^2 \text{ si } x\succ 2$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction f à droite et à gauche de 1.

Exercice2 : Soit la fonction g définie par :

g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 2x^2-x+3 \text{ si } x\geq1$

$x\mapsto -x^2+x+\alpha \text{ si } x<1$

Déterminer α pour que la fonction g admet une limite en 1.

Théorème : Une fonction f admet une limite l en a si et seulement si elle admet une limite à droite de a égale à sa limite à gauche de a égale à l.

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)=l \text{ et } \lim_{\substack{x\to a\\x\prec a}} f(x)=l$$

Exemple : Soit la fonction $f: x\mapsto\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0=-1$

Solution :

Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} f(x)$?

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $-1\prec x\prec1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=-\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}}-\frac{x+1}{x-1}=0$

Si : $x\prec-1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\frac{x+1}{x-1}=0$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} f(x)=0$ donc : $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$

2) Propriétés

Toutes les propriétés mentionnées au paravent sont vraie à droite et à gauche de a en tenant compte des conditions

Propriété : Si sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ on a: $|f(x)-l|\leq u(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}} u(x)=0$

alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)=l$

Propriété : Si f et g sont confondues sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)=l$

alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}} g(x)=l$

3) Opérations sur les limites finies.

Propriété :Soient f et g deux fonctions tels que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l'$ on a :

$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=l+l'$ et $\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)=l\times l'$ et

$\lim\limits_{x\to a}|f|(x)=|l|$ et $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{l'}$ si $l'\neq0$

et $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{l}{l'}$ si $l'\neq0$ et $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f}(x)=\sqrt{l}$ si $l\succ0$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel a.

Exemple : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}=\frac{3}{1}=3$

V) EXTENTION DE LA NOTION DE LIMITE.

1) Limite infinie à droite (à gauche) de a.

Activité : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

La courbe représentative de f est l'hyperbole de centre $O(0,0)$

1- Compléter le tableau suivant :

x	10^{-2}	10^{-6}	10^{-20}	...	10^{-p}
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons A = 10100 déterminer un réel α tel que si $0 < x < \alpha$

Alors $f(x) > 10100$.

Montrer que :

(P) : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

La propriété (P) veut dire qu'on peut rendre $f(x)$ aussi grand qu'on veut ; on dit que la limite de f est $+\infty$ quand x tend vers 0 à droite et

on écrit : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme$]a, a + r[$ où $r > 0$, on dit que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a adroite si :

$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

On écrit : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

Propriété : Les fonctions : $x \mapsto k|x|$; $x \mapsto k\sqrt{|x|}$;

$x \mapsto k|x|^n$ Tendent vers 0 quand x rend vers 0.

Propriétés :

l'inverse des fonctions $x \mapsto k|x|$; $x \mapsto k\sqrt{|x|}$;

$x \mapsto k|x|^n$ où k un réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}^*$, tendent vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

Définitions : 1) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$:

$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$

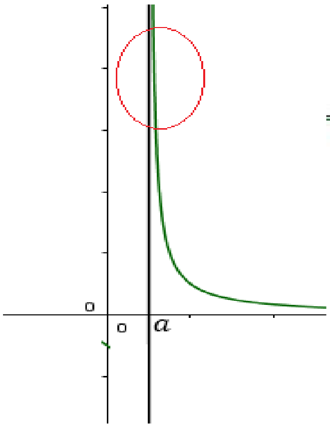
2) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$:

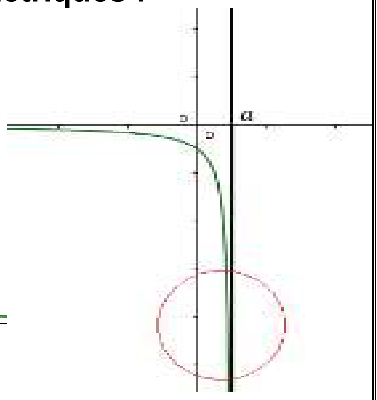
$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

3) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$:

$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$

Interprétations géométriques :





$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Exercice : Compléter l'interprétation géométrique.

Définition : Si la fonction f vérifie l'une des limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ ou

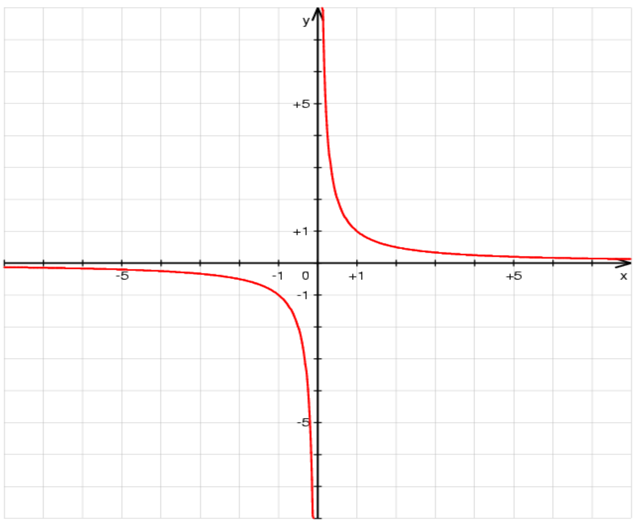
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ Alors

On dit que la droite (Δ): $x = a$ est une Asymptote verticale.

2) Limites finies en $\pm\infty$

Activité : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

La courbe représentative de f est l'hyperbole de centre $O(0,0)$



1- Compléter le tableau suivant :

x	10^{2}	10^{6}	10^{20}	…	10^{p}
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons $\varepsilon = 10^{-100}$ déterminer un réel B tel que si $x > B$ alors $|f(x)| < \varepsilon$.
En général, montrer que :
(P) : $(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ (\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (a un réel quelconque) et l un réel, on dit que la fonction f tend l quand x tend vers $+\infty$ si :
$(\forall\varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df\ )(x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$
On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Propriétés : les fonctions $x \mapsto \dfrac{k}{|x|}$; $x \mapsto \dfrac{k}{\sqrt{|x|}}$; $x \mapsto \dfrac{k}{|x|^n}$ où k un réel donné et $n \in \mathbb{N}^*$

Tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ (a un réel quelconque) et l un réel, on dit que la fonction f tend l quand x tend vers $-\infty$ si :
$(\forall\varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df\ )(x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$
On écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

Propriété :

- Soit f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme : $I =]a, +\infty[$

Si $\forall x \in I : |f(x)| \le u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

- Soit f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme : $I =]-\infty, a[$

Si $\forall x \in I : |f(x)| \le u(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Exemple1 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{-3}{x^2+2}$

déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $x^2+2 \ge x^2$ donc $|f(x)| \le \dfrac{3}{x^2}$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0$ donc :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

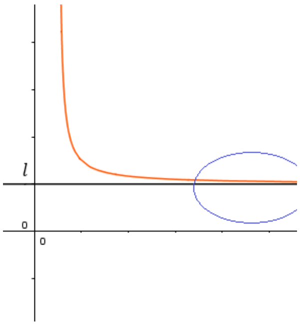
Exemple2 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$

déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $1+\sqrt{x} \ge \sqrt{x}$ et $0 \le 1+\sin x \le 2$ donc $\left|\dfrac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}\right| \le \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ donc

$|f(x)| \le \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Interprétation géométrique :



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Compléter les autres interprétations.

Définition : Si la fonction f vérifie l'une des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

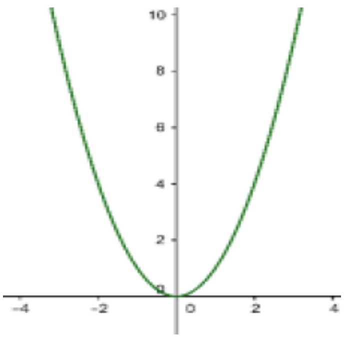
Alors, on dit que la droite (Δ) : $y = l$ est une asymptote horizontale.

Remarque : La position de la courbe Cf par rapport à son asymptote horizontale se détermine par le signe de $f(x) - l$:
1) Si $f(x) - l \ge 0$ alors Cf est au-dessus de (Δ): $y = l$
2)Si $f(x) - l \le 0$ alors Cf est au-dessous de (Δ): $y = l$

3) Limite infinies en ±∞

Activité : Considérons la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

La courbe représentative de f est la parabole de centre $O(0,0)$



1- Compléter le tableau suivant :

x	10^2	10^6	10^{20}	$\dots$	10^p
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons A = 10100 déterminer un réel B tel que si $x > B$ alors $f(x) > A$.

En général, montrer que :

(P) : $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df\ )(x > B \Rightarrow f(x) > A)$

Définition : Soit f une fonction $]a, +\infty[$ (où a est un réel quelconque) on dit que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df\ )(x > B \Rightarrow f(x) > A)$

on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Propriété : Les fonctions :

$x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto |x|$

tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

Définitions : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df\ )(x > B \Rightarrow f(x) > A)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df\ )(x > B \Rightarrow f(x) < -A)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df\ )(x < -B \Rightarrow f(x) > A)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df\ )(x < -B \Rightarrow f(x) < -A)$

Remarque : Pour l'interprétation géométrique, il y' a plusieurs cas qu'on va étudier par la suite (Etude de fonction).

VI) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

1) Limites et ordres.

Propriété : Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x) - l| \le u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$ alors

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche et adroites de a ou $+\infty$ ou $-\infty$.)

Propriété : Si f et g sont confondues sur un intervalle pointé de centre a et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

Propriété :1) soit f est une fonction définit sur un intervalle de la forme $I =]a-r;a-r[-\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $r \succ 0$

Si f admet une limite en a et f positif sur I alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \ge 0$

2) soit f est une fonction définit sur un intervalle de la forme $I =]a-r;a-r[-\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $r \succ 0$

Si f admet une limite en a et g admet une limite en a et $f \le g$ sur I alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3)si on a : $g(x) \le f(x) \le h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{a}$ à droite, ou $\boldsymbol{a}$ à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche de a.)

$]a-r;a-r[-\{a\}$

Propriété :1)Si sur un intervalle de la forme $]\ a, a + r[$ on a : $u(x) \le v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} u(x) = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to a^+} v(x) = +\infty$

2)Si sur un intervalle de la forme $]a, a + r[$ on a : $u(x) \le v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} v(x) = -\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{a}$ à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

Exemple1 : Soit la fonction :

$f : x \mapsto (x^2 + x^4)\sin\frac{1}{x}$ déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ et $x^2 + x^4 \ge 0$

donc $-x^2 - x^4 \le (x^2 + x^4)\sin\frac{1}{x} \le x^2 + x^4$ et puisque :

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 + x^4 = \lim\limits_{x\to 0} -x^2 - x^4 = 0$ alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Exemple2: Soit la fonction : $f : x \mapsto 3x^2 + 5x + 1$

déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^{+}$ on a $3x^2 \leq 3x^2 + 5x + 1$ et et

puisque : $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exemple3 : Soit la fonction : $f : x \mapsto x + \sin x - 1$

déterminer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc :

$x - 2 \leq f(x) \leq x$ et puisque :

$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ alors : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exercice : Soit $f(x) = \dfrac{2 + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ $f(x) \geq \dfrac{1}{x^2}$

2- En déduire $\lim_{x\to0} f(x)$

2) Opérations sur les limites

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises et on peut les démontrer en utilisant les définitions des limites.

1) Limite de la somme

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si x tend vers $a+$; $a-$; $+\infty$ ou $-\infty$

Formes indéterminées : Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calcules car il y a plusieurs cas.

Exemple1 : 1) $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x^2$ on a

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

et $\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = -7$

2) $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x$ on a

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

et $\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - x + 7 = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{x^2}\right) = +\infty$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

Exemple2 : déterminer : $\lim_{x\to+\infty} x^2 - \sqrt{x}$

on a $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

Donc Formes indéterminée : "$+\infty - \infty$"

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

puisque : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

alors : $\lim_{x\to+\infty} x^2 - \sqrt{x} = +\infty$

2) Limites des produits

$\lim f$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f\times g$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

3) Limites des inverses

$\lim f$	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \dfrac{1}{f}$	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

4) Limites des quotients

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

Exemple1 : déterminer : $\lim_{x\to0} x^2 + x + 2 + \dfrac{1}{x^2}$

Solution : on a : $\lim_{x\to0} x^2 + x + 2 = 2$ et $\lim_{x\to0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Donc : $\lim_{x\to0} x^2 + x + 2 + \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Exemple2 : déterminer :

1) $\lim_{x\to1} \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$ 2) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$

3) $\lim_{x\to\pm\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$

Solution : 1) on a : $\lim_{x\to1} (x-1)^2 = 0^+$ et

$\lim_{x\to1} x^3 + 1 = 2$ Donc : $\lim_{x\to1} \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2} = +\infty$

2)on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\dfrac{1+\dfrac{1}{x^3}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x^3}=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{x}=1$ Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3\left(1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3\left(1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=-\infty$

Exemple3 : On veut déterminer

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x+1}{x^2+x-2}$

on a : $\lim\limits_{x\to1^+}3x+1=4$

on a : $\lim\limits_{x\to1^+}x^2+x-2=0^+$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x+1}{x^2+x-2}=+\infty$

Remarque :1) Eviter d'écrire ces expressions qui n'ont pas de sens mathématique : $\dfrac{?}{0^+}$ et $\dfrac{?}{0^-}$

2)Ne pas utiliser $+\infty$ ou $-\infty$ dans les opérations dans $\mathbb{R}$ ($+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels)

Exercices : Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$ $\qquad\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

3) Limites d'une fonction polynôme en ±∞

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Soit f une fonction polynôme de degré n tel que :

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$

avec $a_n\neq0$ On a :

$f(x)=a_nx^n\left(\dfrac{a_0}{a_nx^n}+\dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\dfrac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_nx}+1\right)$

puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0}{a_nx^n}+\dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\dfrac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_nx}+1=1$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n$

Même chose si x tend vers $-\infty$

Propriété : La limite d'une fonction polynôme en **+∞** **(−∞)** est la limite de son plus grand terme en +∞ (−∞)

Exemple :

$\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$

4) Limites d'une fonction rationnelle en ±∞

Une fonction rationnelle est le rapport de deux fonctions polynômes : $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ avec $an\neq0$

$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m$ avec $b_m\neq0$

$$h(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx}$$

$$h(x)=\frac{a_nx^n\left(\dfrac{a_0}{a_nx^n}+\dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\dfrac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_nx}+1\right)}{b_mx^m\left(\dfrac{b_0}{b_mx^m}+\dfrac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\dfrac{b_2}{b_mx^{m-2}}+...+\dfrac{b_{m-1}}{b_mx}+1\right)}$$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{a_0}{a_nx^n}+\dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\dfrac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_nx}+1}{\dfrac{b_0}{b_mx^m}+\dfrac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\dfrac{b_2}{b_mx^{m-2}}+...+\dfrac{b_{m-1}}{b_mx}+1}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$

Même chose si x tend vers $-\infty$

Propriété : La limite d'une fonction rationnelle en **+∞** **(−∞)** est la limite du rapport des termes de plus grand degré en **+∞** **(−∞)**

Exemples :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7x^4}{14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2}=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5}{2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{x}=0$

Remarque : La propriété précédente n'est vraie que si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

Exercice : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{x^3+2x\sqrt{x}}$ vous pouvez poser $\sqrt{x}=t$

5) *Limites des fonctions trigonométriques.*

Activité : Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère le cercle

Trigonométrique d'origine $A(1{,}0)$. $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

et B le point sur le cercle

trigonométrique tel que : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv x[2\pi]$

1-Déterminer en fonction de x la surface du domaine circulaire $\mathcal{D}$ limité par

$[OA)$, $[OB)$ et l'arc géométrique AB

2- Soit H la projection orthogonale de B sur (OA).

a) Déterminer en fonction de x l'aire du triangle OAB

b) Comparer les aires du domaine $\mathcal{D}$ et du triangle, que peut-on conclure ?

3- Montrer que : $\left(\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ $(|\sin x|\leq|x|)$.

4- Déterminer les limites $\lim\limits_{x\to0}\sin x$ et $\lim\limits_{x\to a}\sin x$ et $\lim\limits_{x\to a}\cos x$

5- Considérons la droite (Δ) la droite tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A

a) Soit T l'intersection de (Δ) et (OB), Déterminer en fonction de x la surface de OAT.

b) En déduire que $\left(\forall x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ $(x\leq\tan x)$

c) En déduire que $\left(\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ $(|x|\leq|\tan x|)$

6- En utilisant les résultats précédents. Montrer que :a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

Propriété : Soit a un réel on a :

1) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

2) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

3)si $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$

Propriété : Soit $a\in\mathbb{R}^*$

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{ax}=1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$

Solution : 1)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{2}{3}=1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ directement on trouve une formes indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}}\right)=\lim_{h\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos h}{\frac{h^2}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\times1=-\frac{1}{2}$$

(On pose $\sqrt{x}=h$)

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$

On montre que : $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$$

On pose $x-\dfrac{\pi}{6}=h$) donc $x\to\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow h\to0$

Donc : $=2\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin h}{h}=2\times1=2$

Exercice : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

Solution : 1)on pose : $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ donc : $|f(x)| \leq x^2$ et on a

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ Alors : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$? on pose : $f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |\cos x| \leq 1$ donc : $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|^3}$ et on a

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0$ Alors : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$? on pose : $f(x) = \frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad -1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc :

$0 \leq \frac{1+\sin x}{2+\cos x} \leq 2$ donc $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$

Et puisque : $\lim_{x\to +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ Alors :

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

4) $\lim_{x\to -\infty} 1 + \frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$? on pose : $f(x) = 1 + \frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 2+\sqrt{x^4+1} \geq \sqrt{x^4}$ cad $2+\sqrt{x^4+1} \geq x^2$

donc : $\frac{1}{2+\sqrt{x^4+1}} \leq \frac{1}{x^2}$ donc : $|f(x)-1| \leq \frac{1}{|x|}$

Et puisque : $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ Alors : $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

Exercice : Soient les fonctions tels que :

$f(x) = \sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x) = \frac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim_{x\to 2} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

2)Déterminer : $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to 3} g(x)$

3)Déterminer : $\lim_{x\to 0} h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1)Déterminer : $\lim_{x\to 2} f(x)$ et $f(x) = \sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim_{x\to 2} 2x+1 = 5$ et $\lim_{x\to 2} -3x^2+x = -10$

Donc : $\lim_{x\to 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$

$\lim_{x\to +\infty} 2x+1 = \lim_{x\to +\infty} 2x = +\infty$

Donc : $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$

Et on a : $\lim_{x\to +\infty} -3x^2+x = \lim_{x\to +\infty} -3x^2 = -\infty$

Donc : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

- 2) $\lim_{x\to +\infty} g(x)$? et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

On a : $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc : $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$

Et $\lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$ donc : $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

- 2) $\lim_{x\to 3} g(x)$? et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\lim_{x\to 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1$ et $\lim_{x\to 3} -2x^2+1 = -17$ et

$\lim_{x\to 3} (x-3)^2 = 0^+$ donc : $\lim_{x\to 3} g(x) = -\infty$

3) $\lim_{x\to 0} h(x)$?.

$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$

Or $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et puisque : $\lim_{x\to 0} x^2+1 = 1$ et $\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+$

et $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty$ alors : $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$

4) $k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k =]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$

- $\lim_{x\to +\infty} k(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-3}{x} = 0$
- $\lim_{x\to -\infty} k(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-3}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} -3x+1 = 1$ et $\lim_{x\to 0} x^2-2x = 0$

Etude du signe de : x^2-2x

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim_{x\to 0^+} x^2-2x = 0^-$ et $\lim_{x\to 0^-} x^2-2x = 0^+$

Donc : $\lim_{x\to 0^+} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} k(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 2} -3x+1 = -5$ et $\lim_{x\to 2^+} x^2-2x = 0^+$ et $\lim_{x\to 2^-} x^2-2x = 0^-$

Donc : $\lim_{x\to 2^+} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 2^-} k(x) = +\infty$

Exercice : calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x}-2=0$ et $\lim\limits_{x\to 2}x^2+3x-10=0$

on trouve une formes indéterminée : $"\frac{0}{0}"$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{2x}-2\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{\left(x^2+3x-10\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)}{\left(\sqrt{2x}+2\right)}\times\frac{1}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\left(\sqrt{2x}+2\right)}\times\frac{1}{(x+5)}=\frac{2}{14}$$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$?

On a : $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

Et $2x^3+3x^2-4x-1=(x-1)\left(2x^2+5x+1\right)$

Donc :

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2x^2+5x+1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+5x+1}{x^2+x+1}=\frac{8}{3}$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$?

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

on trouve une formes indéterminée : $"+\infty-\infty"$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$ or $x\to+\infty$ donc $|x|=x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$ donc $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to 0$ (

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

or : $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan h+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\times\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{1-\tan h}\times\frac{\tan h}{h}=\frac{2}{1}\times 1=2$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

LA DERIVATION

I) DERIVATION EN UN POINT

1) Activités

Activité :

Déterminer la limite quad x tend vers a de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ dans les cas suivants :

1- $f(x) = 3x^2 - x + 2$ et $a = -2$

2- $f(x) = \frac{2x^2+1}{x-1}$ et $a = 2$

3- $f(x) = sin3x$ et $a = \frac{\pi}{6}$

4- $f(x) = |2x^2 + x - 3|$ et $a = 1$.

2) Définition :

Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle **ouvert de centre a**.
On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas on appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x, & x < 0 \\ -2x^2 + 3x, & x \geq 0 \end{cases}$

1- Montrer que f est dérivable en -2.

2- f est–elle dérivable en 0.

Remarque :

Si f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ On pose : $h = x - a$ si x end vers a alors h tend vers 0 et on obtient $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Application :

Calculer le nombre dérivé de $f(x) = x^3 + x$ en $a = 1$ en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

2) Dérivé à droite dérivé à gauche.

Activité : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x, & x < 0 \\ -2x^2 + 3x, & x \geq 0 \end{cases}$

Montrer que $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ et que $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 3$.

On peut conclure donc que f n'est pas dérivable en 0.

Posons : $g(x) = 3x^2 + x$ on a $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1$ et puisque $g = f$ sur $]-\infty, 0[$, on peut dire que f **est dérivable à droite de 0 et** le nombre 1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0 et se note $f'_d(0)$.

$h(x) = 3x^2 + x$ on a $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = 3$ et puisque $h = f$ sur $]0, +\infty[$, on peut dire que f **est dérivable à gauche de 0 et** le nombre 3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0 et se note $f'_g(0)$.

Définition :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$

On dit que f est dérivable à droite de a si la limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à droite de a et on le note : $f'_d(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r, a]$où $r > 0$

On dit que f est dérivable à gauche de a si la limite $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à gauche de a et on le note : $f'_g(a)$.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x$

1- Ecrire une expression de f sur $\mathbb{R}$ sans valeur absolu.

2- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -1.

3- f est elle dérivable en -1.

Théorème :

> Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a.
> f est dérivable en a si et seleument si elle dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Preuve : En exercice.

II) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) Rappelles

Exercice 1 :

Soit la droite (D): $2x + 3y - 1 = 0$

1- Déterminer le coefficient directeur de la droite (D).

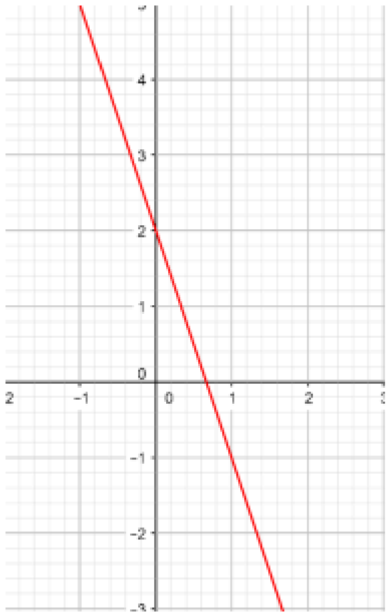
2- Ecrire l'équation réduite de la droite (D)

Exercice 2 :

Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par $A(-1,3)$ et de le coefficient directeur -2

Exercice 3 :

Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) tracée ci-contre.



2) La fonction affine tangente à une fonction.

Soit f une fonction dérivable en a et $f'(a)$ son nombre dérivé en a.

Posons : $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$

On a : $(x-a)\varphi(x) = -f'(a)(x-a) + f(x) - f(a)$ et par suite :

$f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\varphi(x)$

Posons : $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ on aura : $f(x) = u(x) + (x-a)\varphi(x)$

La fonction u est une **fonction affine** et s'appelle la fonction affine tangente en a.

Propriété :

> Soit f une fonction dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme :
> $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

Application :

Déterminer une fonction affine tangente en -3 de la fonction $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Propriété :

> Toute fonction dérivable en a est continue en a.

Preuve :

Puisque f est dérivable en a alors : $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\varphi(x)$

en passant à la limite : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ donc f est continue en a

La réciproque de la propriété précédente n'est pas vraie : $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Remarques :

- La fonction affine tangente en a d'une fonction dérivable en a est une approximation de f au voisinage de a
  On peut écrire alors : $f(x) \sim f'(a)(x-a) + f(a)$
- Si on pose $x = a + h$; on aura : $f(a+h) \sim f'(a)h + f(a)$ qui dit que si on ne connait pas $f(a + h)$ et si h est petit, on peut" essayer de mettre " $f'(a)h + f(a)$ a la place de $f(a+h)$.

Exemple :

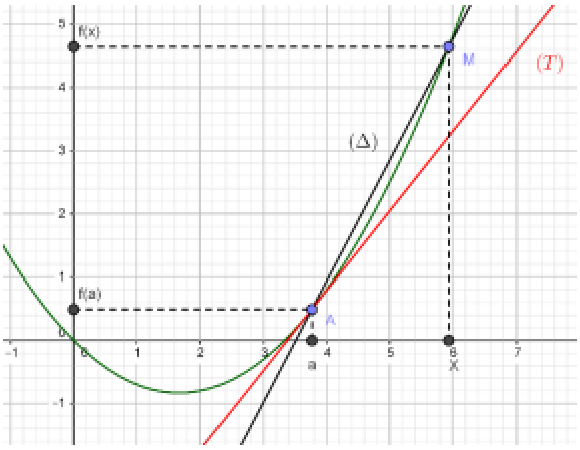
Si on veut une approximation de $sin3$, on peut prendre :

- $f(x) = sinx$
- $a = \pi$ (car π est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est conu)
- $h = 3 - \pi$ (pour avoir :$3 = \pi + h$)

On a alors $f(a) = sin\pi = 0$ et $f'(a) = cos\pi = -1$ (à prouver) ce qui donne :
$sin3 = sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3$.

3) Interprétations géométriques.

3.1 Tangente en un point.



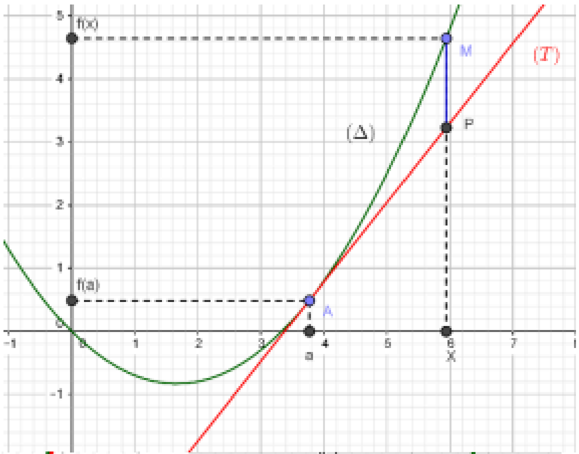
Soit f un fonction dérivable en , $A(a, f(a))$
Soit x un élément de D_f différent de a et $M(x, f(x))$
$(\Delta) = (AM)$; le coefficient directeur de (Δ) est le réel
$m = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
En faisant tendre x vers a et à la position limite une droite (T) qui passe par $A(a, f(a))$ et qui a pour coefficient directeur : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ qui n'est que $f'(a)$ (car f est dérivable en a)
Donc : $(T): y = f'(a)x + p$ et puisque (T) passe par $A(a, f(a))$
alors : $f(a) = f'(a)a + p$ donc $p = f(a) - f'(a)a$
et on peut conclure que : $(T): y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$
Finalement ; $(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$
La droite (T) s'appelle **la tangente à la courbe C_f en $A(a, f(a))$**

Théorème :

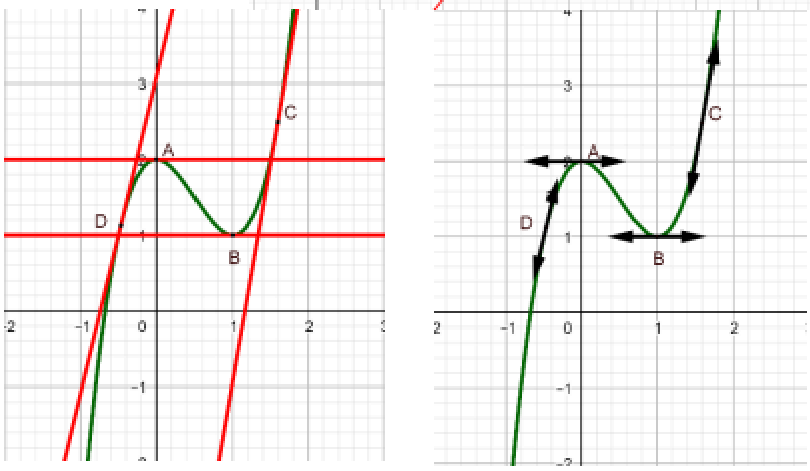
Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative C_f admet une tangente (T) en $A(a, f(a))$ d'équation :
$\boldsymbol{(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)}$

Application :
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = 2x^3 - x + 1$ en $A(1, f(1))$

Remarque :



- La tangente (T) à la courbe C_f en $A(a, f(a))$ ce n'est que la droite qui représente la fonction affine tangente à la fonction f en a et qui est $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ et :
$\overline{PM} = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a)) = \varphi(x)(x - a)$
- En pratique au lieu de représenter la droite (T) ; on représente seulement une partie de (T) avec deux flèches de direction et ceci afin de ne pas trop charger le graphe.



- Cas particulier si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$ alors l'équation de la tangente est $(T): y = f(a)$ c'est une droite parallèle à l'axe (Ox)
- Le vecteur directeur de la tangente en $A(a, f(a))$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$, donc pour tracer une tangente on peut seulement à partir de A tracer le vecteur $\vec{u}$

3.2 Demi-tangente.

Par la même façon que le paragraphe précédent on peut montrer le théorème suivant :

Théorème :

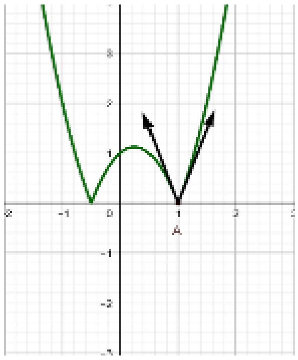
- Si f est une fonction dérivable **à droite** de a, alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a (T_d) d'équation : $(T_d)\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ \boldsymbol{x \geq a} \end{cases}$
- Si f est une fonction dérivable **à gauche** de a, alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a (T_g) d'équation : $(T_g)\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ \boldsymbol{x \leq a} \end{cases}$

Exemple :

$f(x) = |-2x^2+x+1|$; On a : f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = 3$ (à prouver) et est dérivable à gauche de 1 et $f'_g(1) = -3$

donc la courbe représentative de f admet deux demi-tangentes en $A(1, f(1))$.

$(T_d)\begin{cases} y = 3(x-1) \\ \boldsymbol{x \geq 1} \end{cases}$ et $(T_g)\begin{cases} y = -3(x-1) \\ \boldsymbol{x \leq 1} \end{cases}$ qu'on peut représenter par :



Remarque :

Dans cet exemple, au voisinage de a, on peut pas confondre la courbe avec un segment (f n'est pas dérivable en a) on dit que **la courbe représente un point anguleux** en $A(1, f(1))$

Exercices :

❶Soit la parabole d'équation $(\mathcal{P})$: $y = x^2$; A un point quelconque sur $(\mathcal{P})$ et (T) la tangente à $(\mathcal{P})$ en A.
Soient M et N les intersections respéctives de (T) avec l'axe (Ox) de (T) avec l'axe (Oy).
Montrer que M est le milieu de $[AN]$.

❷Soit la parabole d'équation $(\mathcal{H})$: $y = \frac{1}{x}$; A un point quelconque sur $(\mathcal{H})$ et (T) la tangente à $(\mathcal{H})$ en A.
Soient M et N les intersections respéctives de (T) avec l'axe (Ox) de (T) avec l'axe (Oy).
Montrer que A est le milieu de $[MN]$.

III) FONCTION DERIVEE D'UNE FONCTION.

1) Introduction

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + x$.

Soit x un réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de f en x (il est préférable d'utiliser la deuxième définition de la dérivation en un point)

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2+(x+h)-2x^2-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4xh+2h^2+x+h-2x^2-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h+1)}{h} \\ &= 4x+1 \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

On peut remarquer donc que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$, la fonction qui associe à x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle **la fonction dérivée de la fonction f sur** $\mathbb{R}$ et se note par f'.

Activités :

1- Déterminer la fonction dérivée de la fonction sin sur $\mathbb{R}$.

2- Déterminer la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et sur $\mathbb{R}^{*-}$

2) Dérivabilité sur un intervalle.

Définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f , a et b deux éléments de D_f tels que :$a < b$

- On dit que f est dérivable sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a, b[$
- On dit que f est dérivable sur le semi-ouvert $[a, b[$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite de a
- On dit que f est dérivable sur le fermé $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite de a et à gauche de b

Remarque :

Une fonction qui est dérivable sur $[a,b]$ et dérivable $[b,c]$ n'est pas nécessairement dérivable sur $[a,c]$ sauf si $f'_d(b) = f'_g(b)$

3) Fonction dérivée d'une fonction.

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert I**. La fonction qui associe à tout élément x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle **la fonction dérivée de la fonction f sur I.**

3.1 Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles.

Exercices :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions :

1. $x \mapsto C$ sur $\mathbb{R}$
2. $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.
4. $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et sur $\mathbb{R}^{*-}$.
5. $x \mapsto sinx$ sur $\mathbb{R}$.
6. $x \mapsto cosx$ sur $\mathbb{R}$.

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

La fonction f	Sa fonction dérivée f'	Intervalles de dérivation
C	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^{*+}$et $\mathbb{R}^{*-}$
cos	$-sin$	$\mathbb{R}$
sin	cos	$\mathbb{R}$
$tanx$	$1+tan^2x$	$]\frac{-\pi}{2}+k\pi, \frac{-\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

Pour $\boldsymbol{x^n}$ et $\boldsymbol{tan}$ on utilisera les opérations sur les fonctions dérivée.

IV) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES.

Rappelle

A partir de deux fonctions f et g on peut définir :

- la somme : $(\forall x \in D_f \cap D_g)(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Le produit : $(\forall x \in D_f \cap D_g)(f` \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
- L'inverse : $(\forall x \in D_f)\ si\ x \neq 0\ alors\ \ \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$
- Le quotient : $(\forall x \in D_f \cap D_g)\ si\ x \neq 0\ alors\ \ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- La racine : $(\forall x \in D_f)\ si\ x \geq 0\ alors\ \ (\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$

1) La somme

Soit f et g deux fonctions dérivables en a, étudions la dérivabilité de la fonction $(f+g)$ en a.

On a :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= f'(a)+g'(a)\\ &= (f'+g')(a)\end{aligned}$$

En général : Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I alors la fonction $(f+g)$ est dérivable sur I et :

$$\boldsymbol{(f+g)' = f' + g'}$$

2) Le produit

Soit f et g deux fonctions dérivables en a, étudions la dérivabilité de la fonction $(f \times g)$ en a.

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(f\times g)(x)-(f\times g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(x)-f(a)\times g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(x)-f(x)\times g(a)+f(x)\times g(a)-f(a)\times g(a)}{x-a} \quad \text{(on a ajouté et retranché le même nombre)}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\times f(x)+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times g(a)\\ &= g'(a)\times f(a)+f'(a)\times g(a) \quad (\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \text{ car } f \text{ est continue})\\ &= (f'g+g'f)(a)\end{aligned}$$

En général : Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I alors la fonction $(f \times g)$ est dérivable sur I et :

$$\boldsymbol{(f+g)' = f'g+g'f}$$

3) Puissance

On utilisant la propriété précédente et par récurrence prouver que :

$$\boldsymbol{(f^n)' = nf'f^{n-1}}$$

Exemple :

Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x) = (2x^3 - x^2)^4$.

4) L'inverse

Soit f une fonction dérivable en a et $f(a) \neq 0$ étudions la dérivabilité de la fonction $\left(\frac{1}{f}\right)$ en a.

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x)-\left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{f(x)}\right)-\left(\frac{1}{f(a)}\right)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(a)-f(x)}{(x-a)(f(x).f(a))}\\ &= \lim_{x\to a} -\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\times\frac{1}{f(x).f(a)} \quad (\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \text{ car } f \text{ est continue})\\ &= \frac{-f\prime(a)}{f^2(a)}.\end{aligned}$$

En général si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et f ne s'annule pas sur I alors $\left(\frac{1}{f}\right)$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$$

5) Quotient :

En remarquant que $\left(\frac{f}{g}\right) = f \times \left(\frac{1}{g}\right)$ et en utilisant les propriétés du produit et de l'inverse on peut montrer que :

Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I et g ne s'annule pas sur I alors $\left(\frac{f}{g}\right)$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$$

Application :

Montrer que la fonction tan est dérivable sur les intervalles de la forme ;$I_k = \left]\frac{-\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ et que $(\forall x \in I_k)(tan'x = 1 + tan^2x)$.

6) La racine :

Soit f un fonction dérivable en a et $f(a) > 0$ étudions la dérivabilité de la fonction $\sqrt{f}$ en a.

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{f})(x)-(\sqrt{f})(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{1}{(\sqrt{f})(x)+(\sqrt{f})(a)} \quad \text{(On a multiplié par le conjuguais)}\\ &= \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}\end{aligned}$$

En générale ; si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et **strictement positif sur I** alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

Exercice : Soit $f(x) = \sqrt{-2x^2 + x + 1}$

Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée.

Tableau des opérations sur les fonctions dérivées

La fonction	Sa fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$f.g$	$f'.g + g'.f$
$\frac{1}{g}$	$\frac{-g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'.g - g'.f}{g^2}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(ax + b)$	$af'(ax + b)$

Exercices : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes ;

1. $f_1(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$
2. $f_2(x) = (3x^2 + 1)^3.(5x + 1)$
3. $f_3(x) = \frac{3x^3+x}{5x^2+1}$
4. $f_4(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{1+x^2}$
5. $f_5(x) = \frac{\sin(2x)}{1+cos3x}$

Remarque :

Pour calculer la dérivée de $|f|$, on procède comme suit :

-Exprimer $|f|$ sans le symbole de la valeur absolue sur des intervalles de D_f

-Calculer la dérivée des fonctions obtenues sur ces intervalles.

Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = |3x^2 + x - 4|$

Propriété :

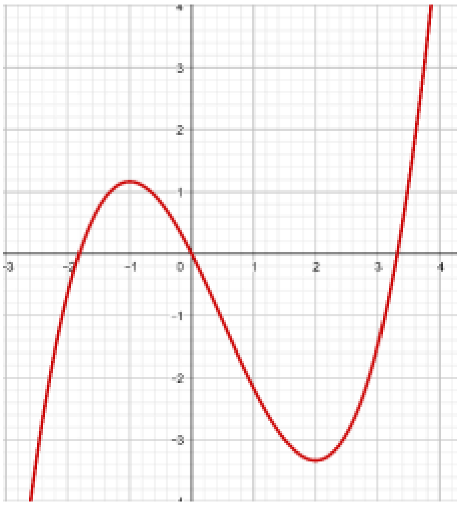
- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition

LA DERIVATION

APPLICATIONS

I) ACTIVITES

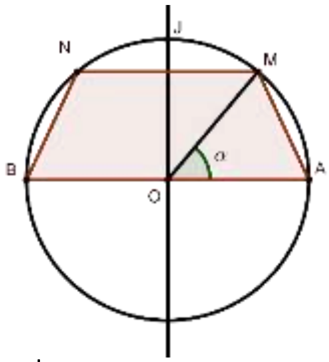
Activité 1 :



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

1. Déterminer graphiquement la monotonie de f suivant des intervalles de $\mathbb{R}$
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. déterminer f' la fonction dérivée de f.
4. Trouver une relation entre le signe de f' et sa monotonie.

Activité 2 :



Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O de rayon $r = 1$ et de diamètre $[AB]$,
M un point de l'arc AB qui contient J, et N le point symétrique de M par rapport à (OJ)
On se propose de déterminer la position de M pour que la surface du quadrilatère $AMNB$ soit maximale. Pour cela :

1. Déterminer l'intervalle dans lequel varie α
2. Essayer de trouver l'aire du quadrilatère $AMNB$ comme fonction $S(\alpha)$
3. Dériver la fonction $S(\alpha)$, puis étudier le signe de $S'(\alpha)$
4. En s'inspirant de l'activité précédente, dresser le tableau de variation de $S(\alpha)$
5. Déterminer la position de M pour que la surface du quadrilatère $AMNB$ soit maximale

II) DERIVATION ET MONOTONIE D'UNE FONCTION

Rappelle

Si g est une fonction positive sur un intervalle I, alors $(\forall a \in I)(\lim\limits_{x \to a} g(x) \geq 0)$.

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I alors f' est positive sur I.
- Si f est décroissante sur I alors f' est négative sur I.
- Si f est constante sur I alors f' est nulle sur I.

Preuve :

On suppose que f est dérivable sur I et que f est croissante sur I. Posons $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ on a :

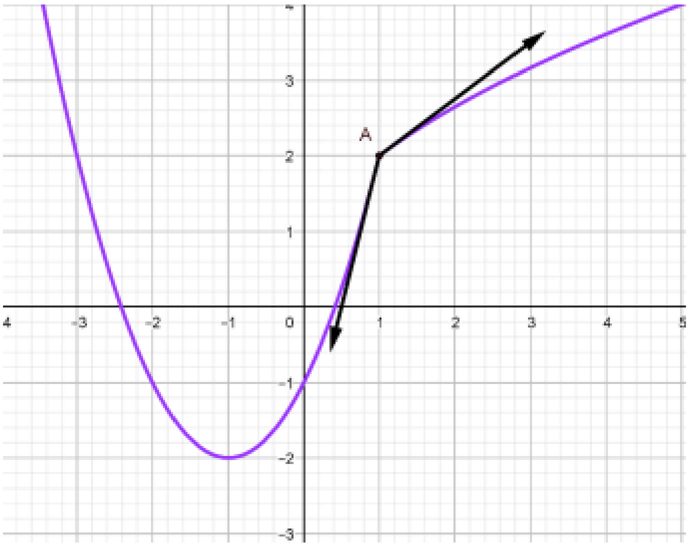
g est positive sur I (c'est le taux d'accroissement entre x et a d'une fonction croissante). En passant à la limite et d'après le rappelle $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \geq 0$

d'où $(\forall a \in I)(f'(a) \geq 0)$ donc f' est positive sur I.

Remarque :

1. Si f est dérivable et strictement croissante, on peut pas conclure que f' est strictement positive.
   $f(x) = x^3$; on a f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa fonction dérivée qui est $f'(x) = 3x^2$ n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$, elle s'annule en 0.
2. Une fonction croissante sur I ne vérifie pas toujours la condition $f' \geq 0$ sur I

   Soit f dont le courbe représentative est ci-contre, on a :
   f est croissante sur $[-1,4]$ mais elle n'est même pas dérivable sur $[-1,4]$ car elle n'est pas dérivable en 1.$(f'_d(1) \neq f'_g(1))$



III) DERIVATION ET EXTREMUMS

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I ; $a \in I$.
Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a) = 0$.

Preuve :

On suppose que f admet un extremum relatif en a donc : (on suppose que c'est un maximum reltif)

$(\exists r > 0)(\forall x \in]a-r, a+r[)(f(x) \leq f(a)$

D'où :

$$(\forall x \in]a-r, a[)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0\right) \quad \text{(car } f(x) \leq f(a) \text{ et} < a\text{)}$$

Donc :

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a) \geq 0$$

D'autre part :

$$(\forall x \in]a, a+r[)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0\right) \quad \text{(car } f(x) \leq f(a) \text{ et} > a\text{)}$$

Donc :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a) \leq 0$$

Et puisque f est dérivable en a alors $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$

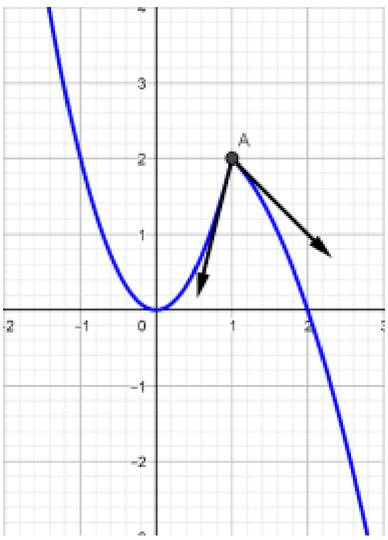
Donc : $f'(a) = f'_d(a) \leq 0$ et $f'(a) = f'_g(a) \geq 0$

Finalement $f'(a) = 0$.

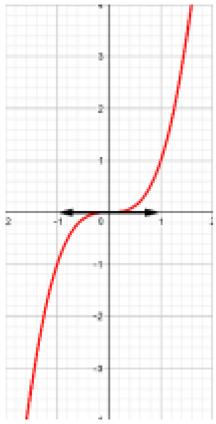
Remarque :

3. Une fonction peut admettre un extremum relatif sans qu'elle vérifie la condition $f'(a) = 0$.

Sur la figure ci-contre f admet un maximum relatif en 1 et f n'est même dérivable en 1.



4. La réciproque de la propriété précédente est fausse ; $f(x) = x^3$ on a f est dérivable sur $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2$ et donc $f'(0) = 0$ et pourtant f n'admet pas d'extremum relatif en 0. (courbe ci-contre)



Propriété :

> Si f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors sa courbe représentative admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a, f(a))$

Preuve :

Puisque f est dérivable en a et admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$

et donc C_f admet une tangente (T) en $A(a, f(a))$ d'équation :

$$(T): y = 0(x-a) + f(a)$$

$(T): y = f(a)$ (T) est donc parallèle à l'axe de abscisses

Propriété : (Admise)

> Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.
>
> - Si f' est positive sur I alors f est croissante sur I.
> - Si f' est négative sur I alors f est décroissante sur I.
> - Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

Remarque :

Le faite que I est un intervalle est nécessaire.

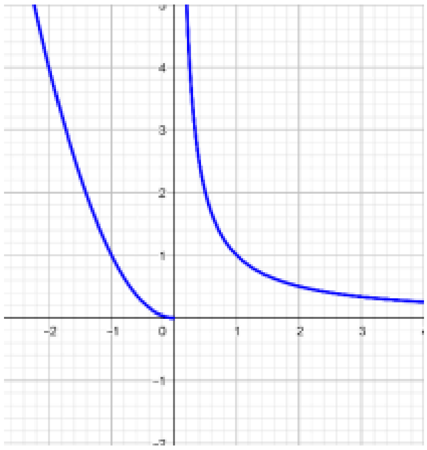
sur la figure ci-contre on a :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(f'(x) < 0)$ mais on peut pas dire f décroissante sur $\mathbb{R}^*$

car $f(-2) = 4 > f(1) = 1$

Cette fonction est définie comme suite :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$



Propriété :

> Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est **strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler** alors f **est strictement croissante sur I.**

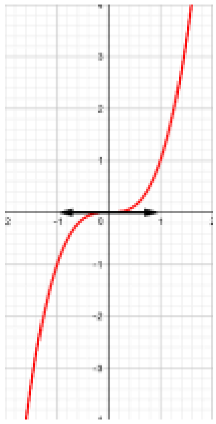
Exemple :

$f(x) = x^3$ sa fonction dérivée est $f'(x) = 3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$

et s'annule en 0, on peut dire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

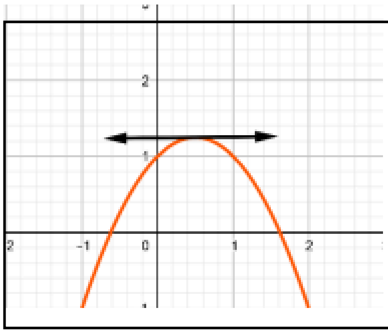
Remarquer que pour cette fonction $f'(0) = 0$ et pourtant f n'admet pas

d'extremum relatif en 0.



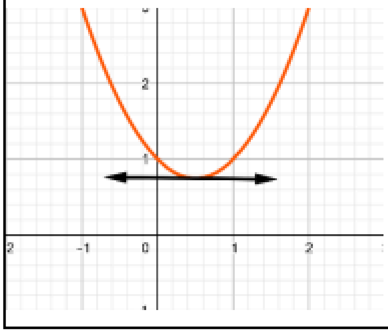
Propriété :

> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
>
> Si f' s'annule en a en changeant de signe à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a



f admet un maximum relatif en a

x	.... $a-r$	a	$a+r$ ....
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$



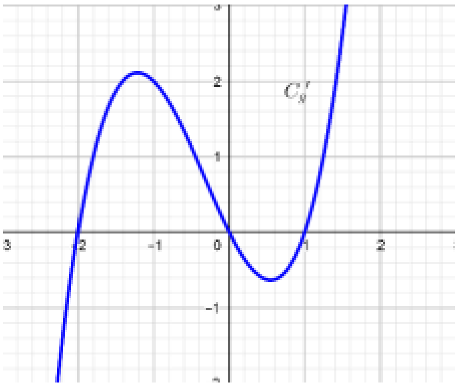
f admet un minimum relatif en a

x	.... $a-r$	a	$a+r$ ....
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

Applications :

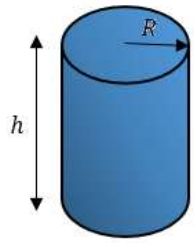
❶ Dresser le tableau de variation de la fonction : $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x$

❷Soit la fonction g dont la fonction dérivée g' est représentée par la courbe ci-dessous : Dresser le tableau de variation de la fonction g



❸ **Problème d'optimisation**

Le but de cet exercice est de trouver les dimensions d'une boite cylindrique fabriquée par le minimum de matière première et de volume $1L$.



1. Déterminer la surface globale de la boite en fonction du rayon de sa base, R et de sa hauteur h.
2. Trouver une relation entre R et h,puis déterminer la surface globale de la boite en fonction de R seulement; on notera cette surface $S(R)$.
3. Dresser le tableau de variation de $S(R)$.
4. En déduire les dimension de la boite pour qu'elle soit fabriquée par le minimum de matière première.

On donne la définition suivante :

Définition

Soit a un nombre positif, le nombre positif b qui vérifie $b^3=a$ s'appelle la racine cubique de a et se note :$\sqrt[3]{a}$

$$a\geq 0 \quad \text{et } b\geq 0 \qquad \text{on a} \quad \sqrt[3]{a}=b \Leftrightarrow b^3=a$$

IV) DERIVEES SUCCESSIVES.

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et f' sa fonction dérivée. Si f' est dérivable on dit que la fonction f est deux fois dérivable et $(f')'$ s'appelle la dérivée seconde de la fonction f.

En générale on définit (sous réserve d'existence) les dérivées successives sur un intervalle ouvert I par :

L'initialisation : $\boldsymbol{f^{(0)} = f}$ et la formule de récurrence $(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N})(\boldsymbol{f^{(n+1)}} = (\boldsymbol{f^{(n)}})')$

Exemple :

$f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 5$

$f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 4x$

$f''(x) = 36x^2 - 6x + 4$

$f'''(x) = 72x - 6$

$f^{(4)} = 72$

$(\forall n \geq 5)(f^{(n)} = 0)$

Exercice :

On veut déterminer dans cet exercice la dérivée d'ordre n de la fonction $h: x \mapsto \frac{1}{x}$

1. Déterminer les dérivées successives jusqu'à l'ordre 5 de la fonction h (Simplifier la fraction et ne pas calculer le produit des coefficients)
2. Conjecturer le résultats observé pour n dans $\mathbb{N}$.
3. Monter la conjecture.

V) LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Définition :

Une **équation différentielle** est une équation ayant pour inconnue une ou plusieurs fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

On s'intéresse à l'équation $(E): y'' + \omega^2 y = 0$ dans cette notation y représente $f(x)$.

L'équation (E) est une équation différentielle de second ordre.

Montrer ce qui suit :

1. si f et g sont solutions de l'équation (E) alors : $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(\alpha f + \beta g)$ est aussi solution de (E)
2. Montrer que les fonctions : $u(x) = cos\omega x$ et $v(x) = sin\omega x$ sont solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire que $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(y = \alpha cos\omega x + \beta\omega x)$ est solution de (E)

On admet que la réciproque est vraie

Propriété :

Les solutions de l'équation différentielle $(E): y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions $y = \alpha cos\omega x + \beta\omega x$ où α et β sont des réels.

Il existe une seul solution φ de l'équation différentielle (E) qui vérifie : $\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0 \\ \varphi'(x_0) = z_0 \end{cases}$ où x_0, y_0 et z_0 sont des réels

Application :

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$
2. Déterminer la solution φ qui vérifie : $\begin{cases} \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \left(^{\pi}\right) \end{cases}$

Cours : LA DERIVATION Avec **Exercices avec solutions**

PROF: ATMANI NAJIB 1BAC SM BIOF

LA DERIVATION

I) DERIVATION EN UN POINT

1) Activité

Déterminer la limite quad x tend vers a de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ Dans les cas suivants :

1- $f(x)=3x^2-x+5$ et $a=-2$

2- $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-1}$ et $a=2$

3- $f(x)$ = $sin3x$ et $a=\frac{\pi}{6}$

4- $f(x)=\left|2x^2+x-3\right|$ et $a=1$.

2) Définition :

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre $\boldsymbol{a}$.

On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas on appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

Exemple : On considère la fonction f dénie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x-3$. Justifier que f est dérivable en -2 et préciser $f'(-2)$

Solution :

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-3+1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim_{x\to-2}x-1=-3=f'(-2)$$

Donc f est dérivable en en -2 et $f'(-2)=-3$

Remarque : Si f est dérivable en a et $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

On pose : h = x − a si x end vers a alors h tend vers 0 et on obtient

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

Application : Calculer le nombre dérivé de $f(x)=x^3+x$ en a = 1 en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

Solution : $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^3+1+h-2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^3+3h^2+3h+1+1+h-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h^3+3h^2+4h}{h}=\lim_{h\to0}h^2+3h+4=4=f'(1)$$

3) Dérivé à droite dérivé à gauche.

Activité : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+x; x\prec 0 \\ f(x)=-2x^2+3x; x\geq 0\end{cases}$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=3$ et que $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

Que peut-on conclure ?

Solution :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2x^2+3x}{x}=\lim_{x\to0^+}-2x+3=3=f_d'(0)$$

3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0

On dit que f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{3x^2+x}{x}=\lim_{x\to0^-}3x+1=1=f_g'(0)$$

1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0

On dit que f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f_d'(0)\neq f_g'(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Définition : 1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$

On dit que f est dérivable à droite de a si la limite $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à droite de a et on le note : $f_d'(a)$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme] $a - r$, a] où $r > 0$

On dit que f est dérivable à gauche de a si la limite $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à gauche de a et on le note : $f'_g(a)$

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a.

f est dérivable en a si et seulement si elle dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Preuve : En exercice.

Exemple1 : soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \ldots x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{4} \ldots x \prec 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

Solution : on a $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} == \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} = f'_d(1)$$

Donc f est dérivable à droite en 1

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{4}(x + 1) = \frac{1}{2} = f'_g(1)$$

Donc f est dérivable à gauche en 1

et on a : $f'_d(1) = f'_g(1)$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$

Exemple2 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - |x|$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Solution :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \to 0^+} x - 1 = -1 = f'_d(0)$$

donc f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0^-} x + 1 = 1 = f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; x \prec 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; x \geq 0 \end{cases}$$

1- Montrer que f est dérivable en $a = -2$.

2- f est–elle dérivable en 0.

Exercice2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left|x^2 - 2x - 3\right| + 2x$$

1- Ecrire une expression de f sur $\mathbb{R}$ sans valeur absolu.

2- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -1.

3- f est-elle dérivable en -1.

II) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) Rappelles

Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par $A(-1{,}3)$ et de le

Coefficient directeur -2

2) La fonction affine tangente à une fonction.

Soit f une fonction dérivable en a et $f'(a)$ son nombre dérivé en a.

Posons : $\begin{cases} \phi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a); x \neq 0 \\ \phi(x) = 0; x = 0 \end{cases}$

On a : $(x - a)\phi(x) = -f'(a)(x - a) + f(x) - f(a)$

et par suite : $f(x) = f'(a)(x - a) + f(a) + (x - a)\phi(x)$

Posons : $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ on aura :

$f(x) = u(x) + (x - a)\phi(x)$

La fonction u est une fonction affine et s'appelle la fonction affine tangente en a.

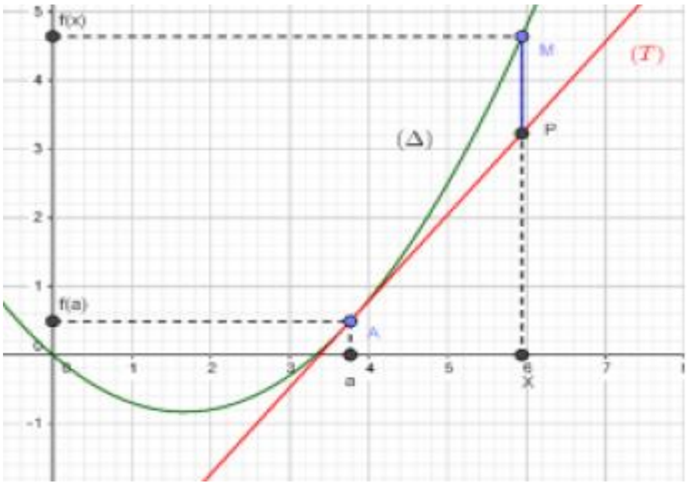
Propriété : Soit f une fonction dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme : $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$

Application : Déterminer une fonction affine tangente en -3 de la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Propriété : Toute fonction dérivable en a est continue en a.

Preuve : Puisque f est dérivable en a alors :

$f(x) = f'(a)(x - a) + f(a) + (x - a)\phi(x)$



en passant à la limite : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ donc f est continue en a

La réciproque de la propriété précédente n'est pas vraie : $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Remarques :1) La fonction affine tangente en a d'une fonction dérivable en a est une approximation de f au voisinage de a

On peut écrire alors : $f(x) \sim f'(a)(x-a) + f(a)$ au voisinage de a

2) Si on pose $x = a + h$; on aura :

$f(a+h) \sim f'(a)h + f(a)$ qui dit que si on ne connait pas $f\ (a+h)$ et si h est petit, on peut" essayer de mettre " $f'(a)h + f(a)$ a la place de $f(a+h)$.

Exemple : donner une approximation de $sin3$

Solution : Si on veut une approximation de $sin3$, on peut prendre :$f(x) = sinx$ et $a = \pi$ (car π est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est connu) $h = 3 - \pi$ (pour avoir :$3 = \pi + h$)

On a alors $f(a) = sin\pi = 0$ et $f'(a) = cos\pi = -1$ (à prouver) ce qui donne :

$sin3 = sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3$.

Exercice3 : soit f une fonction définie sur

$]-\pi;\pi[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{\tan\frac{x}{2}} \ldots si.x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)étudier la dérivabilité de f en 0

2)Donner une valeur approchée du nombre : $f(10^{-5})$

Solution : $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{\tan\frac{x}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan\frac{x}{2}}$

$= 2\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = 2\times 1 = 2$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$

2)on a $f(a+h) \sim f'(a)h + f(a)$

Donc $f(0+10^{-5}) \sim f(0) + 10^{-5} f'(0)$ $a=0$ et $h = 10^{-5}$

$f(0)=0$ et $f'(0)=2$

Donc $f(10^{-5}) \sim 2 10^{-5}$

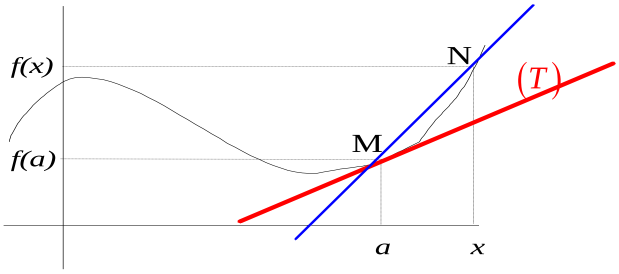
3) Interprétations géométriques.

3.1 Tangente en un point.

Soit f une fonction dérivable en M $(a, f(a))$

Soit x un élément de Df différent de a

et N$(x, f(x))$ (Δ) = (MN) ; le coefficient directeur de (Δ) est le réel : $m = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$



En faisant tendre x vers a et à la position limite une droite (T) qui

passe par M$(a, f(a))$ et qui a pour coefficient directeur : $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ qui n'est que $f'(a)$

(car f est dérivable en a)

Donc : (T): $y = f'(a)x + p$ et puisque (T) passe par $A(a, f(a))$

alors : $f(a) = f'(a)a + p$ donc $p = f(a) - f'(a)a$

et on peut conclure que :

(T): $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$

Finalement ; (T): $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

La droite (T) s'appelle la tangente à la courbe $\boldsymbol{Cf}$ en $\boldsymbol{A(a, f(a))}$

Théorème : Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative Cf admet une tangente (T) en $A(a, f(a))$ d'équation :

$(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$

Exemple :

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = \sin x$ en $A(0, f(0))$

Solution : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 = f'(0)$

Donc f est dérivable en en 0

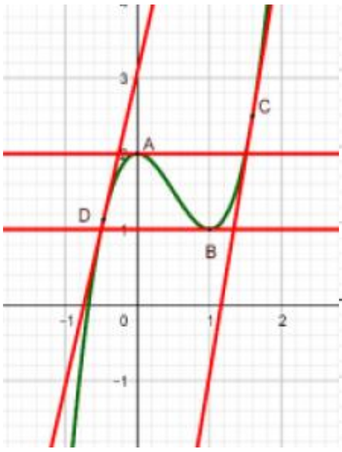
$(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y = f'(0)(x - 0) + f(0)}$

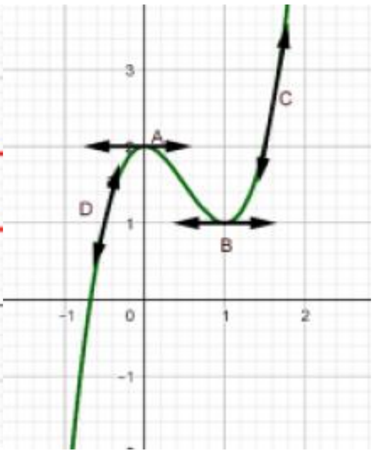
L'équation de la tangente à la courbe en $A(0, f(0))$ est : $(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y = x}$

Remarque : 1) La tangente (T) à la courbe Cf en $A(a, f(a))$ ce n'est que la droite qui représente la fonction affine tangente à la fonction f en a et qui est $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ et :

$\overline{PM} = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a)) = \varphi(x)(x - a)$

2) En pratique au lieu de représenter la droite (T) on Représente seulement une partie de (T) avec deux flèches de direction et ceci afin de ne pas trop charger le graphe.





a) Cas particulier si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$ alors l'équation de la tangente est :

(T): $y = f(a)$ c'est une droite parallèle à l'axe (Ox)

b) Le vecteur directeur de la tangente en $A(a, f(a))$ est $\vec{u}(1; f'(a))$

Donc pour tracer une tangente on peut Seulement à partir de A tracer le vecteur $\vec{u}$

3.2 Demi-tangente.

Par la même façon que le paragraphe précédent on peut montrer le théorème suivant :

Théorème : 1) Si f est une fonction dérivable à droite de a, alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a :

$(T_d): y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$: $\boldsymbol{x \geq a}$

2) Si f est une fonction dérivable à gauche de a, alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a :

$(T_g): y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$: $\boldsymbol{x \leq a}$

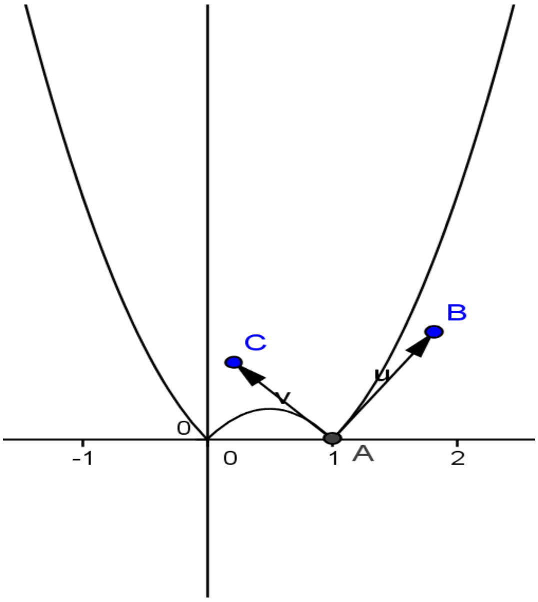
Exemple : $f(x) = \left|-2x^2 + x + 1\right|$

On a : f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = 3$ (à prouver) et est dérivable à gauche de 1 et $f'_g(1) = -3$ donc la courbe représentative de f admet deux demi-tangentes en $A(1, f(1))$.

$(T_d): y = 3(x-1)$ $\boldsymbol{x \geq 1}$

$(T_g): y = -3(x-1)$ $\boldsymbol{x \leq 1}$

Qu'on peut représenter par :



Remarque :

Dans cet exemple, au voisinage de a, on ne peut pas confondre la courbe avec un segment (f n'est pas dérivable en a) on dit que **la courbe** représente un **point anguleux** en A (1, f (1))

Exercice 4: soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \ldots 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x} \ldots x \succ 1 \end{cases}$$

1)déterminer le domaine de définition de f

2)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0=0$ et donner une interprétation géométrique du résultat
3)étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique

Solution :1) $x\in D_f \Leftrightarrow 1-x^2\geq 0$ et $0\leq x\leq 1$

ou $x^3-x\geq 0$ et $x\succ 1$

$x\in D_f \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$ou $x\succ 1$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in[0;+\infty[$ donc : $D_f=[0;+\infty[$

2) étude de la dérivabilité de f à droite de $x_0=0$

On a : $f(0)=1$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}-1}{x}=\frac{x\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{x\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}=\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1=f'_d(0)$

Donc f est dérivable à droite en 0

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en A(0, 1).de coefficient directeur $1=f'_d(0)$

3)a)étudie de la dérivabilité de f à gauche en $x_0=1$ On a : $f(1)=0$ soit $0\leq x\leq 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}}{x-1}=\frac{(1+x)(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=\frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}-(1+x)^2=-4$

Alors : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0=1$

b)soit $x\succ 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x^3-x}-0}{x-1}=\frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3-x}}=\frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x^3-x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}x^2+x=2$

Alors : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0=1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en A(1,0) parallèle à l'axe des ordonnées dirigé vers le le haut

Exercice5 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=\left|x^2-1\right|$

1)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique du résultat
2)étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique du résultat
3)étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique du résultat
4)donner l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0=1$
4)donner l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0=1$

Solution :1) $f(x)=\left|x^2-1\right|$

étude du signe de : x^2-1

$x^2-1=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=-1 ou x=1$

Donc : $\begin{cases} f(x)=x^2-1; x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[\\ f(x)=-\left(x^2-1\right); x\in[-1;1] \end{cases}$ et

$f(1)=\left|1^2-1\right|=0$

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$x2-1$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x+1=2$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=1$ et $f'_d(1)=2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent à droite en A(1, 0).de coefficient directeur $f'_d(1)=2$

2)

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\left(x^2-1\right)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-(x+1)=-2$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0=1$ et $f'_g(1)=-2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent à gauche en A(1, 0).de coefficient directeur $f'_g(1)=-2$

3)f n'est pas dérivable en $x_0=1$ car : $f'_d(1)\neq f'_g(1)$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe admet un point anguleux en $A(1, 0)$.
4) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

5) l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(1) + f'_g(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 0 - 2(x-1) \Leftrightarrow (\Delta_g): y = -2x + 2$$

III) FONCTION DERIVEE D'UNE FONCTION.

1) Introduction

Exemple : Soit f la fonction définie par :
$f(x) = 2x^2 + x$.
Soit x un réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de f en x (il est préférable d'utiliser la deuxième définition de la dérivation en un point)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 + x + h - 2x^2 - x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + x + h - 2x^2 - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(4x + 2h + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 4x + 2h + 1 = 4x + 1 = f'(x)$$

On peut remarquer donc que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$, la fonction qui associe à x son nombre dérivé $f'(x)$
S'appelle la fonction dérivée de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbb{R}$ et se note par f'.
Activités :1- Déterminer la fonction dérivée de la fonction sin sur $\mathbb{R}$.
2- Déterminer la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^*_+$ et sur $\mathbb{R}^*_-$

2) Dérivabilité sur un intervalle.

Définition : Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est Df , a et b deux éléments de Df tels que :$a < b$
1) On dit que f est dérivable sur l'ouvert] a, b[si elle est dérivable en tout point de]a, b[
2) On dit que f est dérivable sur le semi-ouvert [a, b[si elle est dérivable sur]a, b[et dérivable à droite de a
3) On dit que f est dérivable sur le fermé [a, b] si elle est dérivable sur]a, b[et dérivable à droite de a et à gauche de b
Remarque : Une fonction qui est dérivable sur [a, b] et dérivable [b, c] n'est pas nécessairement dérivable sur [a, c] sauf si $f'_d(b) = f'_g(b)$

3) Fonction dérivée d'une fonction.

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $\boldsymbol{I}$. La fonction qui associe à tout élément x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$.

Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles.

Exercices : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions :
1. $x \mapsto C$ sur $\mathbb{R}$ 2. $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^*_+$
4. $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^*_+$ et sur $\mathbb{R}^*_-$. 5. $x \mapsto sinx$ sur $\mathbb{R}$.
6. $x \mapsto cosx$ sur $\mathbb{R}$.

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

f'	**Fonction f**
$f'(x) = 0$	$f(x) = k$
$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$f'(x) = nx^{n-1}$ $n \in \mathbb{Z}^*$	$f(x) = x^n$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos x$
$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
$f'(x) = -a\sin(ax + b)$	$f(x) = \cos(ax + b)$
$f'(x) = a\cos(ax + b)$	$f(x) = \sin(ax + b)$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$

Exemples : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :1) $f(x)=11$

2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=x^3$ 4) $f(x)=\sin(5x-1)$

Solution :1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$

4) $f'(x)=(\sin(5x-1))'=(5x-1)'\cos(5x-1)=5\cos(5x-1)$

IV) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES.

Rappelle :A partir de deux fonctions f et g on peut définir :

1) la somme :

$(\forall x \in D_f \cap D_g)$ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

2) Le produit :

$(\forall x \in D_f \cap D_g)$ $(f` \times g)(x)=f(x)\times g(x)$

3) L'inverse : $(\forall x \in D_f)$ $si\ x \neq 0\ alors$

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}$$

4) Le quotient : $(\forall x \in D_f \cap D_g)$ $si\ x \neq 0\ alors$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

5) La racine : $(\forall x \in D_f)$ $si\ x \geq 0\ alors$

$$\left(\sqrt{f}\right)(x)=\sqrt{f(x)}$$

1) La somme

Soit f et g deux fonctions dérivables en a, étudions la dérivabilité de la fonction $(f+g)$ en a.

On a :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$=f'(a)+g'(a)=(f'+g')(a)$$

En général : Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I alors la fonction $(f+g)$ est dérivable sur I et $(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}'+\boldsymbol{g}'$

Exemple : Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante : $f(x)=x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

Solution :

$$f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=(x^2)'+(7x+15)'-\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=2x+7+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) Le produit :

Soit f et g deux fonctions dérivables en a, étudions la dérivabilité de la fonction $(f\times g)$ en a.

On a : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(x)-f(a)\times g(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(x)-f(x)\times g(a)+f(x)\times g(a)-f(a)\times g(a)}{x-a}$$

(on a ajouté et retranché le même nombre)

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\left(g(x)-g(a)\right)+g(a)\left(f(x)-f(a)\right)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}f(x)\frac{\left(g(x)-g(a)\right)}{x-a}+\lim_{x\to a}g(a)\frac{\left(f(x)-f(a)\right)}{x-a}$$

$=g'(a)\times f(a)+f'(a)\times g(a)=(f'g+g'f)(a)$

($\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ car f est continue)

En général : Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I alors la fonction $(f\times g)$ est dérivable sur I et :

$(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}'\boldsymbol{g}+\boldsymbol{g}'\boldsymbol{f}$

En particulier : Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $k\in\mathbb{R}$ alors la fonction kf est dérivable sur I et :(k$\boldsymbol{f}$)' =k $\boldsymbol{f}'$

Exemples : Déterminer la fonctions dérivée de la fonction suivante : $f(x)=(5x^2+1)(3x-1)$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=\left((5x^2+1)(3x-1)\right)'=(5x^2+1)'\times(3x-1)+(5x^2+1)\times(3x-1)'$$

$$f'(x)=10x\times(3x-1)+3(5x^2+1)=30x^2-10x+15x^2+3$$

$$f'(x)=45x^2-10x+3$$

3) Puissance

On utilisant la propriété précédente et par récurrence prouver que :

$$\left(f^n\right)'=nf'f^{n-1}$$

Exemple :Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=(3x+4)^3$

On utilise la formule : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$$

4) L'inverse : Soit f une fonction dérivable en a et $f(a) \neq 0$ étudions la dérivabilité de la fonction $\frac{1}{f}$ en a. On a : $\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-(f(x)-f(a))}{f(x)f(a)}}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-(f(x)-f(a))}{x-a}\times\frac{1}{f(x)f(a)}=-\frac{f'(a)}{f(a)^2}=\left(-\frac{f'}{f^2}\right)(a)$$

En général si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et f ne s'annule pas sur I alors :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}$$

Exemple : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=-\frac{\cos x'}{(\sin x)^2}$$

5) Quotient : En remarquant que : $\frac{f}{g}=f\times\frac{1}{g}$

et en utilisant les propriétés du produit et de l'inverse on peut montrer que :

Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I et g ne s'annule pas sur I alors : $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$

Exemple : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

Application :

Montrer que la fonction tan est dérivable sur les intervalles de la forme $I_k =]-\pi/2+k\pi,\pi/2+k\pi[$ ($k\in\mathbb{Z}$) et que $(\forall x\in I_k)(tan'x = 1 + tan^2x)$.

6) La racine :

Soit f une fonction dérivable en a et $f(a) > 0$ étudions la dérivabilité de la fonction $\sqrt{f}$ en a.

On a :

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}\right)}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)(x-a)}$$

(On a multiplié par le conjuguais)

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\frac{1}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)}$$

$$=\frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}=\left(\frac{f'}{2\sqrt{f}}\right)(a)$$

En générale ; si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et **strictement positif sur I** alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Exemple : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$

On utilise la formule : $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

Exercice6 : Soit $f(x)=\sqrt{x^2-x}$

Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée.

Solution : $D_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

On a : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-x$

Et on a : $u(x)\succ 0\quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{0;1\}$

$$\forall x\in D_f-\{0;1\}\;:\; f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x}\right)'=\frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Remarque :

Pour calculer la dérivée de $|f|$, on procède comme suit :

-Exprimer $|f|$ sans le symbole de la valeur absolue sur des intervalles de Df

-Calculer la dérivée des fonctions obtenues sur ces intervalles.

Déterminer la dérivée de la fonction

$$f(x)=\left|3x^2+x-4\right|$$

Propriété :

1) Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition

Tableau des opérations sur les fonctions dérivées

f'	**Fonction f**
$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$f(x)=\tan x$
$f'(x)=u'+v'$	$f(x)=u+v$
$f'(x)=u'-v'$	$f(x)=u-v$
$f'(x)=ku'$	$f(x)=ku$
$f'(x)=u'\times v+u\times v'$	$f(x)=u\times v$
$f'(x)=nu^{n}\times u'$	$f(x)=u^n$
$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$	$f(x)=\frac{1}{u}$
$f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$	$f(x)=\frac{u}{v}$
$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x)=\sqrt{u}$

Exercice7 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 2) $f(x)=\frac{3}{x}$

3) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 4) $f(x)=\cos 2x+3\sin 3x$

5) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$ 6) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

7) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

Solutions :

1) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times 4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times 3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

2) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

3) $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

4) $f'(x)=(\cos 2x+3\sin 3x)'=-2\sin 2x+3\times 3\cos 3x=-2\sin 2x+9\cos 3x$

5) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=\left((3x^2+2)\times(7x+1)\right)'=(3x^2+2)'\times(7x+1)+(3x^2+2)\times(7x+1)'$

$f'(x)=6x\times(7x+1)+7(3x^2+2)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$

7) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times 3x^2}{(x^3+1)^2}$

$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$

Exercice8 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes ;

1. $f(x)=-2x^4+x^3+5x^2+x+1$
2. $f(x)=(3x^2+1)(2x+3)$
3. $f(x)=\frac{3x^2+x}{5x^2+1}$
4. $f(x)=\frac{3x^2+x}{5x^2+1}$
5. $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x^2+1}$
6. $f(x)=\frac{\sin 2x}{\cos 3x+1}$

Exercice9 : déterminer $f'(x)$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=9x+2$ 2) $f(x)=5x^2-3x+2$

3) $f(x)=x+\frac{2}{x}$ 4) $f(x)=\frac{5x+2}{3x-1}$

5) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 6) $f(x)=\frac{1}{(2x+1)^5}$

7) $f(x)=(5x^3-3)^4$ 8) $f(x)=\sqrt{2x^2-6x+4}$

9) $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ 10) $f(x)=x+\frac{x^2}{x-1}$

11) $f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$ 12) $f(x)=x\cos x$

13) $f(x)=\tan^2 x$ 14) $f(x)=\cos x\times\sin x$

15) $f(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$ 16) $f(x)=\frac{\left(1+2x+x^2\right)^5}{4}$

17) $f(x)=1+x+\frac{x-1}{\sqrt{2+x^2}}$ 18) $f(x)=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

Exercice 10: Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^2+3x-1$ 2) $f(x)=4\sin x$

3) $f(x)=x^4\cos x$ 4) $f(x)=\sqrt{x}+x^3$

5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f(x)=\frac{6}{4x^2+3x-1}$

7) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

9) $f(x)=(2x+3)^5$

Solution : 1) $f(x)=x^2+3x-1$ $D_f=\mathbb{R}$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\left(x^2\right)'+(3x-1)'=2x+3$

2) $f(x)=4\sin x$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=4u(x)$ avec $u(x)=\sin x$

Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=4(u(x))'=4\cos x$

3) $f(x)=x^4\cos x$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x^4$ et $v(x)=\cos x$

Puisque u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=\left(\left(x^4\right)\times(\cos x)\right)'=\left(x^4\right)'\times(\cos x)+\left(x^4\right)\times(\cos x)'$

$f'(x)=4x^3\times(\cos x)-x^4\times\sin x=4x^3\cos x-x^4\times\sin x$

4) $f(x)=\sqrt{x}+x^3$ $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

$f(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=x^3$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et v est dérivables en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=(u(x))'+(v(x))'=\frac{2}{2\sqrt{x}}+3x^2$

5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $D_f=\mathbb{R}^{*+}=]0;+\infty[$

On a : $f(x)=\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=\sqrt{x}$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc f est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)==\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

6) $f(x)=\frac{6}{4x^2+3x-1}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\frac{1}{4}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\frac{1}{4}\right\}$

est on a : $f(x)=\frac{6}{u(x)}$ avec $u(x)=4x^2+3x-1$

$f'(x)=6\left(\frac{1}{u(x)}\right)'=6\left(-\frac{u'}{u^2}\right)=-6\frac{\left(4x^2+3x-1\right)'}{\left(4x^2+3x-1\right)^2}-6\frac{8x+3}{\left(4x^2+3x-1\right)^2}$

7) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$f(x)=u(x)/v(x)$ avec $u(x)=4x-3$ et $v(x)=2x-1$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$

$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$

8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$: $D_f=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

On a : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-4$

Et on a : $u(x) \succ 0 \ \ \forall x \in D_f - \{-2;2\}$

Donc f est dérivables sur $D_f - \{-2;2\}$

$\forall x \in D_f - \{-2;2\}$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2-4}\right)' = \frac{\left(x^2-4\right)'}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

9) $f(x) = (2x+3)^5 \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = (u(x))^5$ avec $u(x) = 2x+3$

On utilise la formule : $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \times u'$

$$f'(x) = \left((2x+3)^5\right)' = 5\times(2x+3)^{5-1}\times(2x+3)' = 5\times2\times(2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$$

Exercice11 : soit f une fonction définie sur $I =]-\pi;\pi[$ par : $\begin{cases} f(x) = 2\dfrac{\cos x - 1}{\sin x}; si...0 \prec x \prec \pi \\ f(x) = \dfrac{x|x+1|}{x-1}; si... -\pi \prec x \leq 0 \end{cases}$

1)monter que f est dérivable en $x_0 = 0$
et donner l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0 = 0$

2)a)étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$

b)donner les équations des demies tangentes à a la courbe de f en en $x_0 = -1$

Solution : 1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} 2\frac{\cos x - 1}{x\sin x} = \lim_{x\to0^+} -2\frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2\times\frac{1}{2}\times1 = -1 = f_d'(0)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et $f_d'(0) = -1$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-} \frac{|x+1|}{x-1} = \lim_{x\to0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1 = f_g'(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 0$ et $f_g'(0) = -1$

Et puisque : $f_d'(0) = f_g'(0)$

Donc f est dérivable à en $x_0 = 0$ et $f'(0) = -1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une tangent en O(0, 0).de coefficient directeur $f'(0) = -1$

l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0 = 0$ est : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$y = f(0) + f'(0)(x-0)$

$y = 0 - 1(x-0) \Leftrightarrow (T): y = -x$

2) $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} = f_d'(-1)$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = -1$ et $f_d'(-1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{-x}{x-1} = -\frac{1}{2} = f_g'(-1)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = -1$ et $f_g'(-1) = -\frac{1}{2}$ mais on a : $f_d'(-1) \neq f_g'(-1)$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en A(-1, 0).

b) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = -1$ est :

$y = f(-1) + f_d'(-1)(x+1)$ avec $x \geq -1$

$y = 0 + \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow (T_d): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ avec $x \geq -1$

l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = -1$ est :

$y = f(-1) + f_g'(-1)(x+1)$ avec $x \leq -1$

$y = 0 - \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow (T_g): y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ avec $x \leq -1$

Exercice12 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{3x-2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$$

1)déterminer le domaine de définition D_f de f

2) déterminer le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow 3x-2 \geq 0$ et $x - 1 \neq 0$

Donc : $D_f = \left[\frac{2}{3};1\right[\cup]1;+\infty[$

2) on a $f(x) = g(3x-2) \times h(x)$

Avec : $h(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$ et $g(x) = \sqrt{x}$

On sait que : g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et la fonction polynôme D_f $x \to 3x-2$ est dérivable sur D_f

$3x-2 \succ 0 \Leftrightarrow x \succ \frac{3}{2}$ donc la fonction $x \to g(3x-2)$

est dérivable sur $D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

donc : f est dérivable sur $D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ cad $D_{f'} = D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

$\forall x \in D_{f'}$:

$$f'(x) = \left(g(3x-2)\right)' \times h(x) + g(3x-2) \times \left(h(x)\right)'$$

$$\left(g(3x-2)\right)' = (3x-2)' \times g'(3x-2) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-2}}$$

Car : $g'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(h(x)\right)' = 3\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' \times \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

$$\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' = \frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \times \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3 + \sqrt{3x-2}\,\frac{-9}{(x-1)^2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

Exercice13 :en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$

Solution:1) on pose : $f(x) = (x+2)^{2018}$ on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en -1 et

$f(-1) = (-1+2)^{2018} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1)$

Et puisque : $f'(x) = 2018(x+2)^{2017}(x+2)' = 2018(x+2)^{2017}$

Donc : $f'(-1) = 2018 \times 1^{2017} = 2018$

Donc: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1} = 2018$

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$ on pose $f(x) = 2\sin x$

on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en

$\frac{\pi}{6}$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \left(\frac{\pi}{6}\right)} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Et puisque : $f'(x) = 2\cos x$

Donc : $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Donc : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$

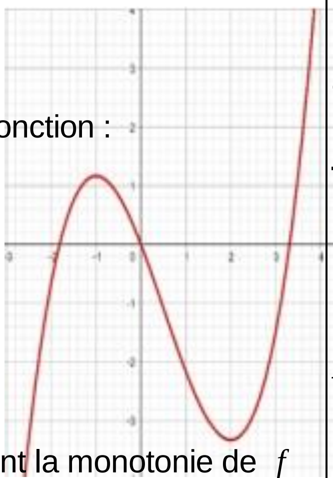
« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

Cours *LA DERIVATION (APPLICATIONS)*
Avec **Exercices avec solutions**
PROF : ATMANI NAJIB 1BAC SM BIOF

LA DERIVATION -APPLICATIONS

I) Activité

La courbe ci-contre est la courbe de la fonction :



$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$

1)Déterminer graphiquement la monotonie de f suivant desintervalles de $\mathbb{R}$

2)Dresser le tableau de variations de f

3)déterminer f' la fonction dérivée de f

4)Trouver une relation entre le signe de f' et sa monotonie

II) DERIVATION ET MONOT ONIE D'UNE FONCTION

Rappelle : Si g est une fonction positive sur un intervalle I, alors $(\forall a\in I)\lim\limits_{x\to a} g(x)\geq 0$

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1) Si f est croissante sur I alors f'est positive sur I.
2) Si f est décroissante sur I alors f'est négative sur I.
3) Si f est constante sur I alors f' est nulle sur I.

Preuve :
On suppose que f est dérivable sur I et que f est croissante sur I. Posons $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

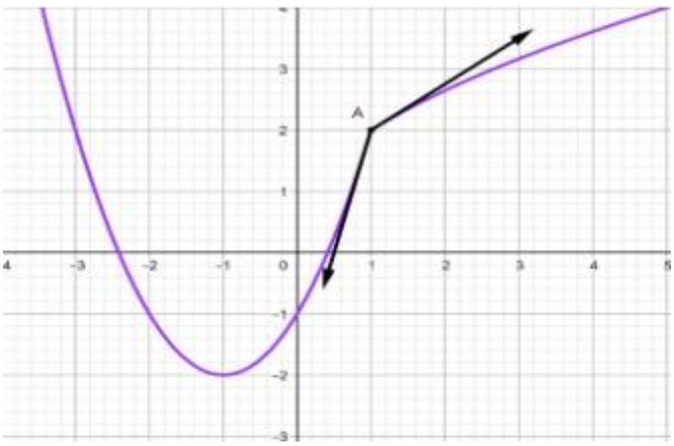
g est positive sur I(c'est le taux d'accroissement entre x et a d'une fonction croissante).
En passant à la limite et d'après le rappelle

$(\forall a\in I)\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\geq 0$

d'où $(\forall a\in I)\ f'(a)\geq 0$ donc f' est positive sur I.

Remarque : Si f est dérivable et strictement croissante, on ne peut pas conclure que f' est strictement positive.

Exemple :
$f(x)=x^3$; on a f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa fonction dérivée qui est $f'(x)=3x^2$ n'est pas trictement positive sur $\mathbb{R}$, elle s'annule en 0.
2. Une fonction croissante sur I ne vérifie pas toujours la condition $f'\geq 0$ sur I
Soit f dont le courbe représentative est ci-contre, on a :
f est croissante sur $[-1,4]$ mais elle n'est même pas dérivable sur $[-1,4]$ car elle n'est pas dérivable en 1.($f_d'(1)\neq f_g'(1)$)



III) DERIVATION ET EXTREMUMS

Propriété :Soit fune fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$

Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a)=0$

Preuve : On suppose que f admet un extremum relatif en a donc :
(on suppose que c'est un maximum reltif)

$(\exists r\succ 0)(\forall x\in]a-r;a+r[);\ f(x)\leq f(a)$

D'où : $\left(\forall x\in \left]a-r;a\right[\right);\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f_g'(a)\geq 0$

D'autre part : $\left(\forall x\in \left]a;a+r\right[\right);\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq 0$

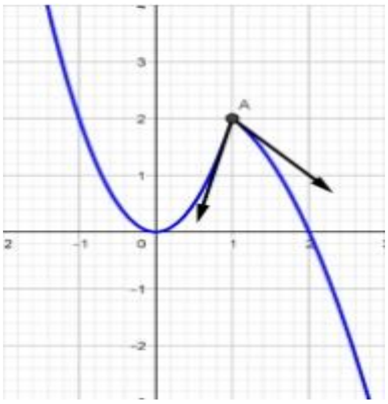
Donc : $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f_d'(a)\leq 0$

puisque f est dérivable en a alors

$f_d'(a)=f_g'(a)=f'(a)$ donc : $f'(a)\geq 0$ et

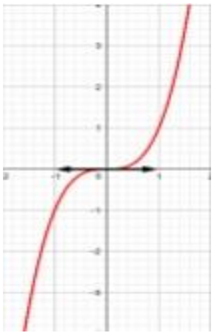
$f'(a)\leq 0$ Finalement: $f'(a)=0$

Remarque :1) Une fonction peut admettre un extremum relatif sans qu'elle vérifie la condition $f'(a)=0$. Sur la figure ci-contre f admet un maximum relatif en 1 et f n'est même dérivable en 1.



2)La réciproque de la propriété précédente est fausse ; $f(x)=x^3$ on a f est dérivable sur $\mathbb{R}$; $f'(x)=3x^2$ et donc $f'(0)=0$ et pourtant f n'admet pas d'extremum relatif en 0.

(Courbe ci-contre)



Propriété : Si f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors sa courbe représentative Admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a,\ f(a))$

Preuve : Puisque f est dérivable en a et admet un extremum en a alors $f'(a)=0$

et donc C_f admet une tangente (T) en $A(a,\ f(a))$ d'équation :

(T): $y=0(x-a)+f(a)$

(T): $y=f(a)$

(T) est donc parallèle à l'axe de abscisses

Propriété : (Admise)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1) Si f' est positive sur I alors f est croissante sur I.

2) Si f' est négative sur I alors f est décroissante sur I.

3) Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

Remarque :

Le faite que I est un intervalle est nécessaire.

sur la figure ci-contre on a :

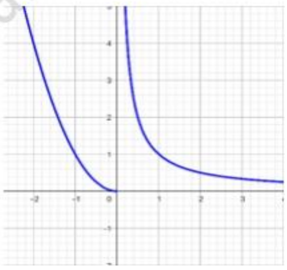
$(\forall x\in\mathbb{R}^*)(f'(x)<0)$

Mais on ne peut pas dire f décroissante sur $\mathbb{R}^*$

car $f(-2)=4>f(1)=1$

Cette fonction est définie comme suite :

$$\begin{cases} f(x)=x^2\ldots x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{1}{x}\ldots x\succ 0\end{cases}$$



Propriété : Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement croissante sur I

Exemple1 :$f(x)=x^3$

Sa fonction dérivée est $f'(x)=3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$

et s'annule en 0, on peut dire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarquer que pour cette fonction $f'(0)=0$ et pourtant f n'admet pas d'extremum relatif en 0.

Exemple2 : $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x-6}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il

dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-6}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-6)-(4x-3)(2x-6)'}{(2x-6)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-6)-2\times(4x-3)}{(2x-6)^2}=\frac{8x-24-8x+6}{(2x-6)^2}=\frac{-18}{(2x-6)^2}\prec 0$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}\quad f'(x)=\frac{-18}{(2x-6)^2}\prec 0$

Donc f est strictement décroissante sur les intervalles. $]1;+\infty[$ et $]-\infty;1[$

Exemple3 : Soit $f(x)=x\sqrt{x^2-x}$

Etudier les variations de la fonction f

Solution : $D_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

On a : $f(x)=x\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-x$

Et on a : $u(x)\succ 0\quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{0;1\}$

$\forall x\in D_f-\{0;1\}$:

$$f'(x)=\left(x\sqrt{x^2-x}\right)'=x'\sqrt{x^2-x}+x\frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$f'(x)=\sqrt{x^2-x}+x\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{4x^2-3x}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Puisque : $2\sqrt{x^2-x}\succ 0\quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $4x^2-3x$

Le tableau de signe de : $4x^2-3x$ est :

x	$-\infty$		0		$3/4$		$+\infty$
$4x^2-3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $f'(x)\succ 0\quad \forall x\in]1;+\infty[$ et $\forall x\in]-\infty;0[$

donc f est strictement croissante sur $]4/3;+\infty[$

et sur $]-\infty;0[$

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$.
Si f' s'annule en a en changeant de signe à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a

Exemple : Soit $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$

Etudier les extremums de la fonction f

Solution : $D_f=\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=x^2+x-2$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de x^2+x-2

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Delta=9$ deux solutions : $x_1=1$ et $x_2=-2$

Donc voici le tableau de variation de f :

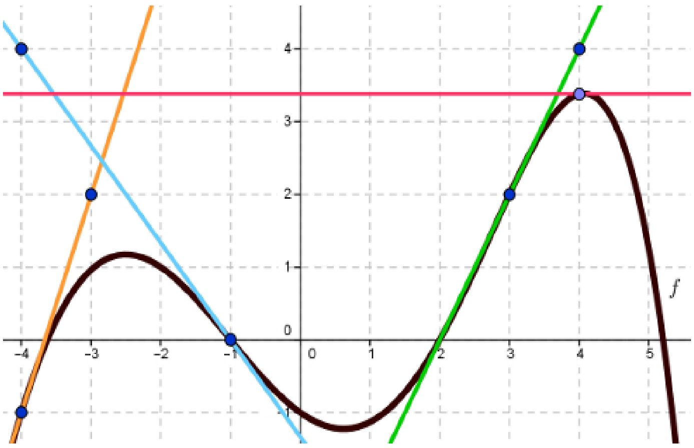
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10/3$	$\searrow$	$-7/6$	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f admet une valeur minimal relatif c'est $-7/6$ en 1

f admet une valeur maximal relatif c'est $10/3$ en -2

Exercice 1: On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ représentée par sa courbe C en noire ci-dessous.



On a également tracé les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses -4, -1, 3 et 4.

1)Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f'(-4)$;

$f(-1)$; $f'(-1)$; $f(3)$; $f'(4)$

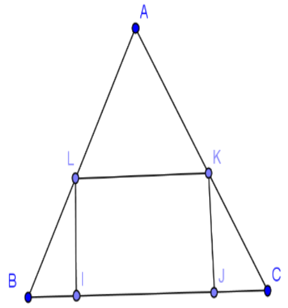
2) Déterminer le signe de $f'(3)$ et $f'(5)$

solution :1) $f(-4)=-1$; $f'(-4)=3$

$f(-1)=0$; $f'(-1)=-\frac{4}{3}$; $f(3)=2$; $f'(4)=0$

2) $f'(3)\succ 0$ et $f'(5)\prec 0$

Exercice2 : soit ABC un Triangle équilatéral et la longueur de son côté est a
On construit à l'intérieur un rectangle $IJKL$
(Voir la figure)
on pose $CI=BJ=x$



1) Déterminer l'intervalle qui contient x
2)Déterminer la valeur de x pour que la surface du rectangle $IJKL$ soit maximal

Solution :1)On a : $0\prec CI+BJ\prec CB$ donc $0\prec 2x\prec a$

donc $0\prec x\prec \frac{a}{2}$ donc $x\in \left]0;\frac{a}{2}\right[$

2)cherchons la surface $S(x)$ du rectangle $IJKL$?

$S(x)=IJ\times IL$ on a : $IJ=a-2x$

Calculons : IL ?? soit H la projection orthogonal de A sur (BC)

On a H est le milieu de $[BC]$(car ABC un Triangle équilatéral) et sur le Triangle AHC on a $I\in(HC)$

Et $L\in(CA)$ et $(IL)\parallel(HA)$ d'après thalles on a :

$\frac{CI}{CH}=\frac{IL}{AH}$ et on a : $CH=\frac{a}{2}$ et $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ et

$CI=x$ donc : $IL=\sqrt{3}x$

$\forall x\in \left]0;\frac{a}{2}\right[$ $S(x)=\sqrt{3}x(a-2x)=-2\sqrt{3}x^2+a\sqrt{3}x$

la fonction S est dérivable sur $\left]0;\frac{a}{2}\right[$ et on a :

$S'(x)=-4\sqrt{3}x+a\sqrt{3}$ $S'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{4}$

Donc voici le tableau de variation de S :

x	0	$\frac{a}{4}$	$a/2$
$S'(x)$	$-$	0	$+$
$S(x)$	0 $\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$	$\searrow$ 0

la surface $S(x)$ du rectangle $IJKL$ est maximal si et seulement si $x=\frac{a}{4}$ et la surface maximal est :

$S_{max}=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

IV) DERIVEES SUCCESSIVES.

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et f' sa fonction dérivée. Si f' est dérivable on dit que la fonction f est deux fois dérivable et $(f')'$ s'appelle la dérivée seconde de la fonction f.
En générale on définit (sous réserve d'existence) les dérivées successives sur un intervalle ouvert I par :L'initialisation : $f^{(0)}=f$
et la formule de récurrence $(\forall n\in\mathbb{N})(f^{(n+1)}=(f^{(n)})'$

Exemple : montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}$

$\cos^{(n)}x=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

Solution : raisonnement par récurrence

Pour n=1 $\cos^{(1)}x=\cos' x=-\sin x=\cos\left(x+1\frac{\pi}{2}\right)$

Supposons que : $\cos^{(n)}x=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

Montrons que : $\cos^{(n+1)}x=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$?

$\cos^{(n+1)}x=\left(\cos^{(n)}x\right)'=\left(\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)'=-\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

$=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

V) LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Définition : Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une ou plusieurs fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

On s'intéresse à l'équation (E): $y'' + \omega^2 y = 0$

Dans cette notation y représente $f(x)$.

L'équation (E) est une équation différentielle de second ordre.

Montrer ce qui suit :

1. si f et g sont solutions de l'équation (E) alors : $(\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}2)(\alpha f + \beta g)$ est aussi solution de (E)
2. Montrer que les fonctions : $u(x) = cos\omega x$ et $v(x) = sin\omega x$ sont solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire que $(\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ $(y = \alpha cos\omega x + \beta\omega x)$ est solution de (E)

On admet que la réciproque est vraie

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle (E): $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions : $y = \alpha cos\omega x + \beta\ sin\omega x$ où α et β sont des réels.

Il existe une seul solution g de l'équation différentielle (E) qui vérifie : $g(x_0) = y_0$

et $g'(x_0) = z_0$ où x_0, y_0 et z_0 sont des réels

Exemple : soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$

1)Résoudre l'équation différentielle (E)

2)Déterminer la solution g qui vérifie :

$g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$

solution : $(w = 2)$ 1) la solution générale de l'équation différentielle (E) est :

La fonction : $F(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ où α et β sont des réels

2) $F'(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $\begin{cases} F(0) = 1 \\ F'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Donc : $F(x) = \cos 2x + \sin 2x$

On peut écrire $F(x)$ sous la forme :

$$F(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice3 : Soient les fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 2) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$

3) $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$

Etudier les variations de ces fonctions et déterminer les extremums s'ils existent

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $3x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

f' s'annule en $1/3$ en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en $1/3$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur minimal absolue c'est $2/3$ en $1/3$ donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 2/3$

1) $D_g = \mathbb{R}$ g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Puisque : $g'(x) \geq 0$ et g s'annule seulement en $x=1$ alors la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et g n'admet pas d'extremums

3) $h(x)=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$ $\quad x \in D_h \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$D_h = \mathbb{R}-\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

Puisque h est une fonction rationnelle alors il dérivable sur D_h

$$\forall x \in D_h \ : \ h'(x)=\frac{(2x+1)'(x-1)^2-2(x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^4}$$

$$h'(x)=\frac{3(x+1)}{(x-1)^3}=\frac{3}{(x-1)^2}\times\frac{x+1}{x-1}$$

Puisque: $\forall x \in \mathbb{R}-\{3\}$ $\dfrac{3}{(x-1)^2} \succ 0$ Le signe de $h'(x)$ est le signe de $\dfrac{x+1}{x-1}$

Donc voici le tableau de variation de h :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	$-1/4$	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	-1

h' s'annule en -1 en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en -1

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur maximal relative

c'est $-\frac{1}{4}$ en -1

Exercice 4: Soit la fonction : $f(x)=4x^3-3x^2-6x$

Montrer que f est majorée sur l'intervalle :

$I_1 =]-\infty;1]$ et minorée sur l'intervalle : $I_2=\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

et bornée sur l'intervalle : $I_3=\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=6(2x^2-x-1)=6(x-1)(2x+1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-1)(2x+1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-\dfrac{1}{2}$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$7/4$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de f on a :

- f est croissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ en deduit que f Admet une valeur maximal en $-\frac{1}{2}$ sur I_1 c'est $\frac{7}{4}$ donc :

$\forall x \in I_1$: $f(x) \leq \dfrac{7}{4}$ donc que f est majorée sur l'intervalle : $I_1=]-\infty;1]$ par $\dfrac{7}{4}$

- f est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ et croissante sur $[1;+\infty[$ en deduit que f Admet une valeur minimal en 1 sur I_2 c'est -5 donc :

$\forall x \in I_2$: $-5 \leq f(x)$ donc que f est minorée sur l'intervalle : I_2 par -5

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement

Aux calculs et exercices Que l'on devient

Un mathématicien

ETUDE DES FONCTIONS

I) CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION

1) Activités :

Activité 1 :

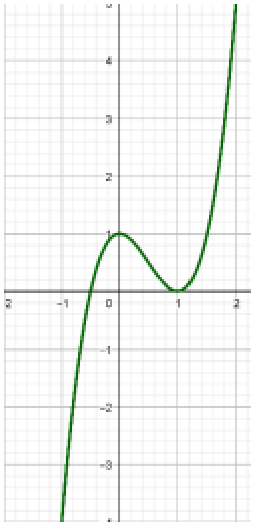
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$; Soit $A(a, f(a))$ un point de sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation de la tangente (T_A) en A. (En fonction de a)
2. Soit P et M deux points qui ont la même abscisse x et qui appartiennent respectivement à C_f et (T_A), Montrer que le signe de $\overline{PM}$ est positif quel que soit la valeur de x.
3. Déterminer la dérivée seconde de f.

Activité 2 :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2$.

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction g.
2. Dresser le tableau de signe de $g''(x)$.
3. La courbe représentative de g est représentée ci-contre, étudier graphiquement La position relative de la courbe c_g par rapport à ses tangentes.
4. Que peut-on conclure ?



Activité 3 :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de h et étudier sa parité.
2. Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$
3. Déterminer la fonction dérivée de la fonction h et dresser le T.V
4. Déterminer l'équation de la tangente T en $O(0,0)$
5. Etudier les positions relatives de T et la courbe C_f
6. Tracer la courbe C_f

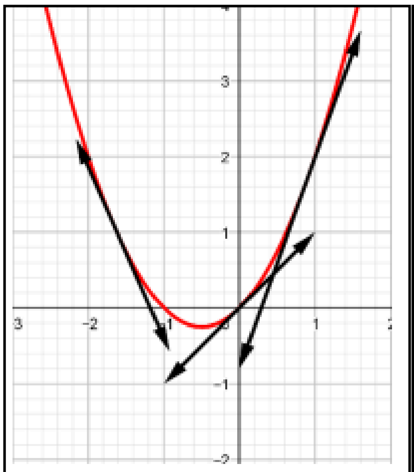
2) Définition et propriétés.

2.1 Définitions :

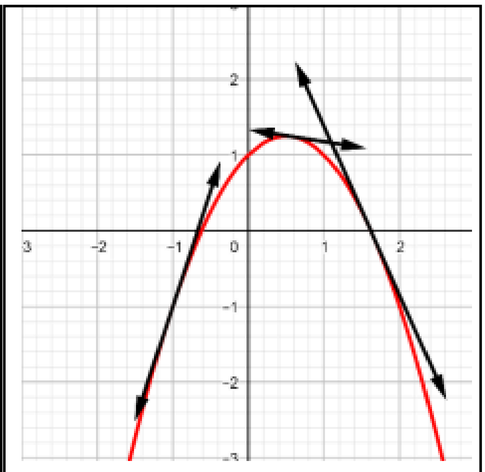
Définition :

Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f.

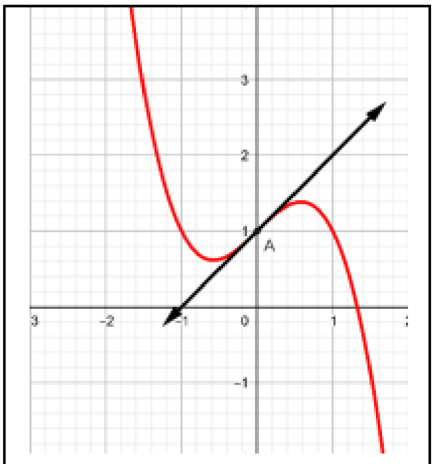
- On dit que la courbe est **convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes**
- On dit que la courbe est **concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.**
- **Un point d'inflexion** est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe C_f



Graphe d'une fonction convexe



Graphe d'une fonction concave

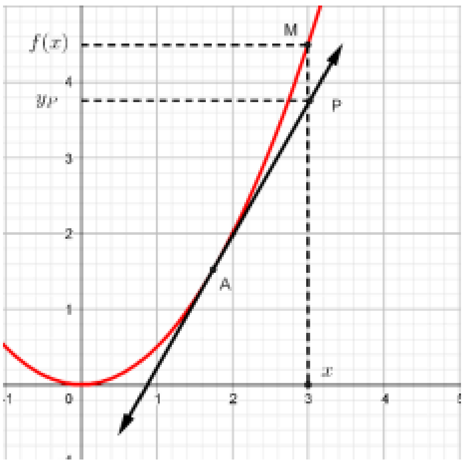


Point d'inflexion en A

Remarque :

Si f est dérivable en a et C_f traverse sa tangente en A alors le point A est un point d'inflexion

2.2 Dérivée seconde et concavité.



Soit f une fonction **deux fois dérivable** sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative. Soient a un élément de I, $A(a, f(a))$ et (T_A) la tangente en A, Soient P et M deux points qui ont le même abscisse x et qui appartiennent respectivement à C_f et (T_A),

On a : $y_P = f'(a)(x-a) + f(a)$. Soit :

$$\varphi(x) = \overline{PM} = f(x) - y_P$$
$$= f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$$

φ est dérivable sur I

$(\forall x \in I)(\varphi'(x) = f'(x) - f'(a))$ (car $\left(f(a)\right)' = 0$; $f(a)$ est une constante)

φ est deux fois dérivable sur I

$(\forall x \in I)\left(\varphi''(x) = f''(x)\right)$

Si $\boldsymbol{f''}$ **est positive** sur I, il en est de même pour φ'' et on aboutit au tableau suivant :

x	a
$\varphi''(x)$	$+$
$\varphi'(x)$	0
Signe de φ'	$-$ 0 $+$
$\varphi(x)$	0

On voit bien que si f est deux fois dérivable et que $f'' \geq 0$ sur I alors $\varphi(x) = \overline{PM} = f(x) - y_p$ est positif ce qui signifie que C_f est au-dessus de sa tangente en $A(a, f(a))$ et ceci pour tout a dans I d'où :

C_f est convexe sur I.

De même si on suppose que f'' est négative sur I on conclut que C_f est concave sur I.

Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle$I$.

- Si f'' est **positive** sur I alors C_f est **convexe** sur I.
- Si f'' est **négative** sur I alors C_f est **concave** sur I.
- Si f'' **s'annule en a en changeant de signe** alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

Remarque :

Les conditions du théorème précèdent sont suffisantes ; on peut avoir une courbe convexe, concave ou un point d'inflexion sans l'existence même de la dérivée seconde.

Exercice :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 0.
2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier la dérivabilité de f' en 0 ; f est-elle deux fois dérivable en 0.
4. Tracer la courbe C_f et remarquer qu'elle admet un point d'inflexion en $O(0,0)$.

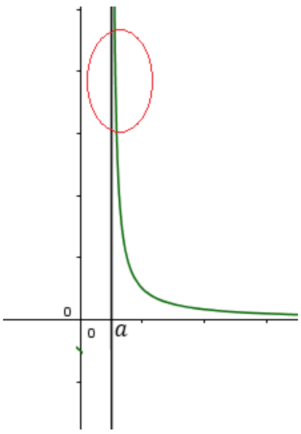
II) BRANCHES INFINIES.

1) Asymptote verticale (rappelle)

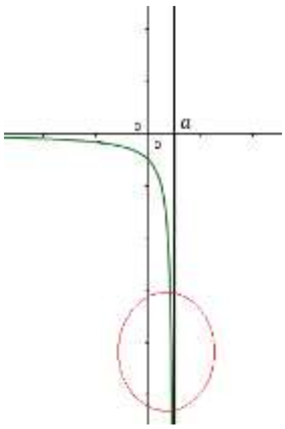
Définition :

Si la fonction f vérifie l'une des limites suivantes :
$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$
Alors, on dit que la droite $(\Delta): x = a$ est une **asymptote verticale.**

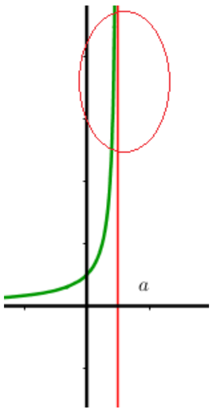
Interprétations géométriques :



$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$



$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

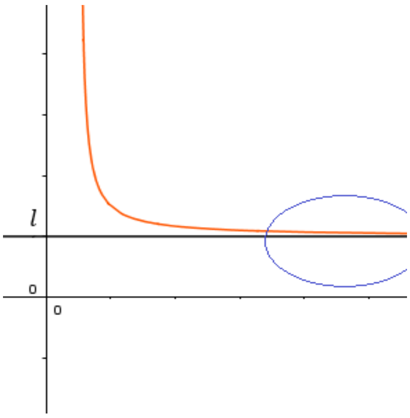
2) Asymptote horizontale.

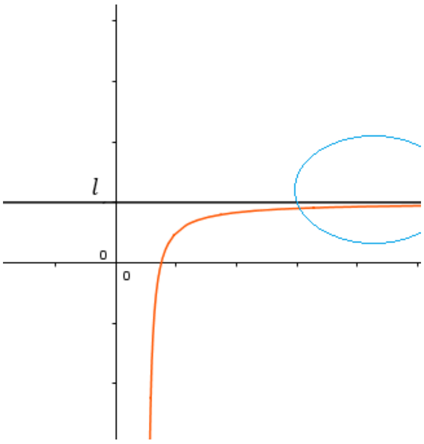
Définition :

Si la fonction f vérifie l'une des limites suivantes :
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$
Alors, on dit que la droite $(\Delta): y = l$ est une **asymptote horizontale.**

Interprétation géométrique :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$





Remarque :

La position de la courbe C_f par rapport à son asymptote horizontale se détermine par le signe de $f(x) - l$:

- Si $f(x) - l \geq 0$ alors C_f est au-dessus de $(\Delta): y = l$
- Si $f(x) - l \leq 0$ alors C_f est au-dessous de $(\Delta): y = l$

Exercice :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Interpréter géométriquement les résultats obtenues.

3) Asymptote oblique.

Activité :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x^2-x}{x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g.
2. Déterminer les limites aux bornes de D_g
3. Effectuer la division de $P(x) = 2x^2 - x$ sur $(x-1)$ puis en déduire que $(\forall x \in D_g)\left(g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)$
4. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} g(x) - (2x+1)$

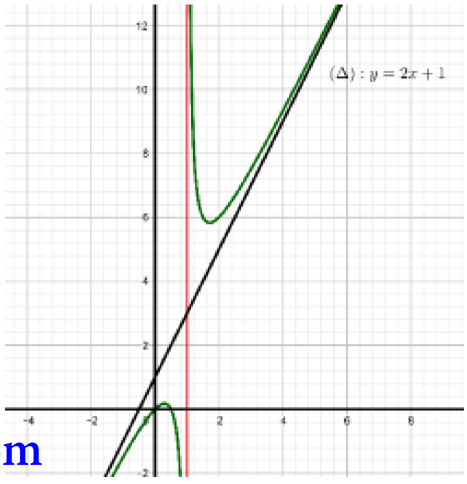
On dit que la droite $(\Delta): y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

Définition :

> Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$, on dit que la droite $(\Delta): y = ax + b$ où $a \neq 0$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ si : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

Exemple :

La courbe de la fonction : $g(x) = \frac{2x^2-x}{x-1}$ a pour asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, la droite $(\Delta): y = 2x + 1$.



Remarque :

Si la courbe C_f admet la droite $(\Delta): y = ax + b$ comme asymptote oblique alors la position de la courbe C_f se déduit par

le signe de $\overline{PM} = f(x) - (ax+b)$.

- Si $\overline{PM} = f(x) - (ax+b) > 0$ alors C_f est au-dessus de (Δ)
- Si $\overline{PM} = f(x) - (ax+b) < 0$ alors C_f est au-dessous de (Δ).
- Si $\overline{PM} = f(x) - (ax+b) = 0$ alors C_f est coupe (Δ).

Propriété :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La courbe C_f admet la droite $(\Delta): y = ax+b$ $(a \neq 0)$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ si et seulement s'il existe une fonction h tel que :

$$\begin{cases} f(x) = ax + b + h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0 \end{cases}$$

Preuve : Il suffit de poser : $h(x) = f(x) - (ax+b)$.

Exercice : En utilisant la division euclidienne montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*/\{1\})\left(\frac{x^3+2x^2+2x}{x^2+x} = x + 1 + \frac{1}{x+1}\right)$

En déduire que la fonction $f(x) = \frac{x^3+2x^2+2x}{x^2+x}$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

Propriété :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La droite $(\Delta): y = ax+b$ $(a \neq 0)$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \end{cases}$$

Preuve :

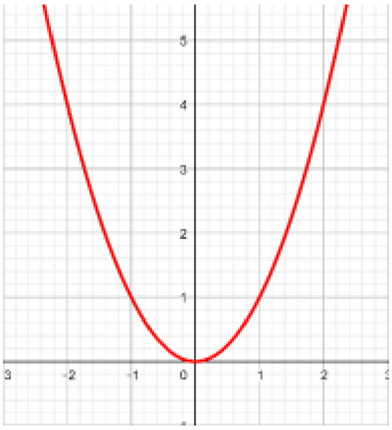
D'après la propriété précédente : On peut écrire $f(x) = ax + b + h(x)$ où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

Donc : $\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x}\right) = 0$)

D'autre part : $f(x) - ax = b + h(x)$ où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$

4) Branches paraboliques.

4.1) Vers l'axe (Oy)



Soit la fonction définie par : $f(x) = x^2$

On a : $D_f = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$

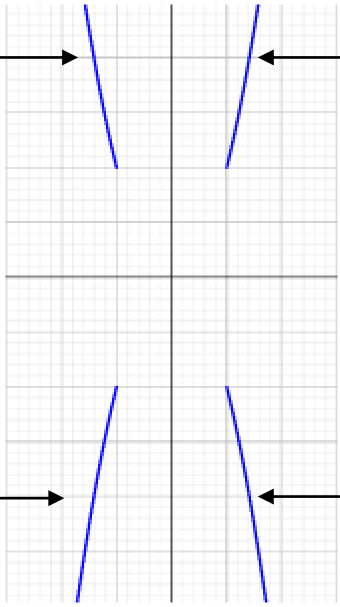
On dit que **la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$**

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$; on dit que la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$.

Interprétations géométriques :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$$



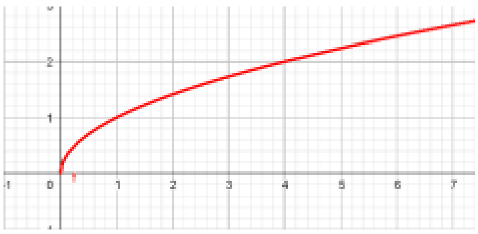
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \end{cases}$$

4.2) Vers l'axe (Ox)

Soit la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x}$

On a : $D_f = \mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = 0$

On dit que **la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$**

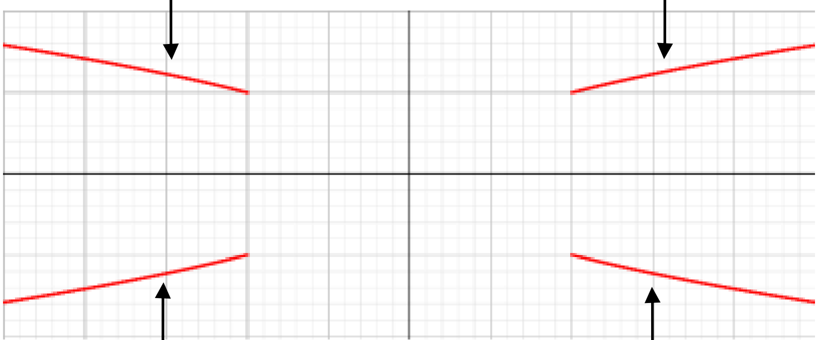


Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$; on dit que la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Interprétations géométriques.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

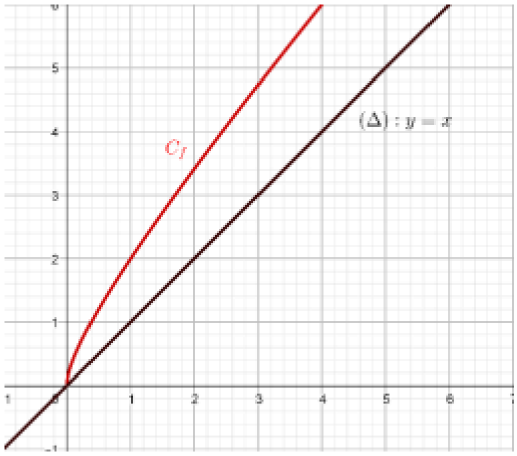
4.3) Vers l'axe $(\Delta): y = ax$

Activité :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+}$par : $f(x) = x + \sqrt{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$



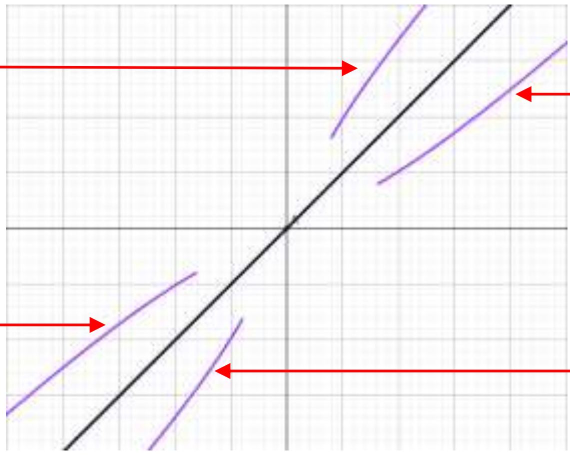
On dit que la courbe de la fonction **admet une branche parabolique vers la droite** $(\boldsymbol{\Delta}): \boldsymbol{y = x}$**.**

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$; si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ alors on dit que : la courbe de la fonction **admet une branche parabolique vers la droite** $(\boldsymbol{\Delta}): \boldsymbol{y = ax}$**.**

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = +\infty \end{cases}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = -\infty \end{cases}$



$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = +\infty \end{cases}$

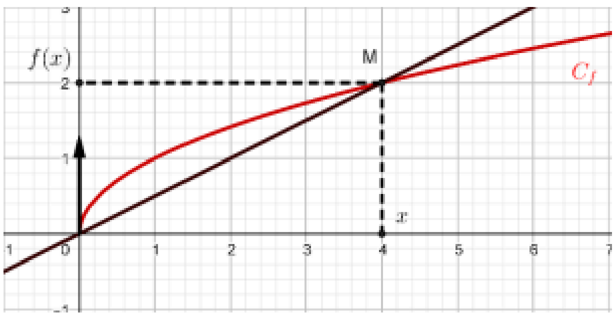
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = -\infty \end{cases}$

III) DEMI-TANGENTE VERTICALE

Introduction :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})(f(x) = \sqrt{x})$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^{+}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0.



Soient $x \neq 0$ et $M(x, f(x))$ un point de la courbe C_f la droite (OM) à pour coefficient directeur $m = \frac{\sqrt{x}}{x}$ donc elle a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{x}}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix}$ le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi vecteur directeur de la droite (OM) si on fait tendre x vers 0 (à droite) La droite (OM) "tend" pour une position limite vers une droite (T) de vecteur directeur $\vec{j}\binom{0}{1}$ donc

sera parallèle à l'axe (Oy).

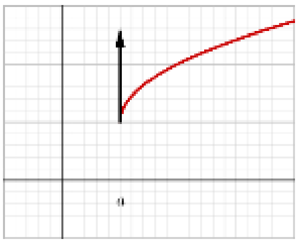
Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$
Si **f est continue** à droite de a et $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors la courbe C_f admet une demi-tangente verticale à droite de a.

Exercice :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - E(x)$

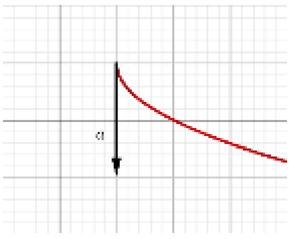
1. Tracer la courbe de la fonction f sur $[0,2[$.
2. Etudier la limite $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
3. Que remarquer vous ?.

Interprétation géométriques

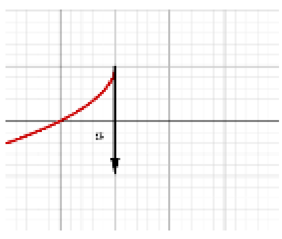


$\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$

IV) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

1) Axe de symétrie :

Activité :

Soit la fonction $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{2x^2 - 4x - 6} \end{aligned}$

1. Déterminer D_f ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que $(\forall x \in D_f)(2 - x \in D_f)$
3. Montrer que $(\forall x \in D_f)(f(2-x) = f(x))$

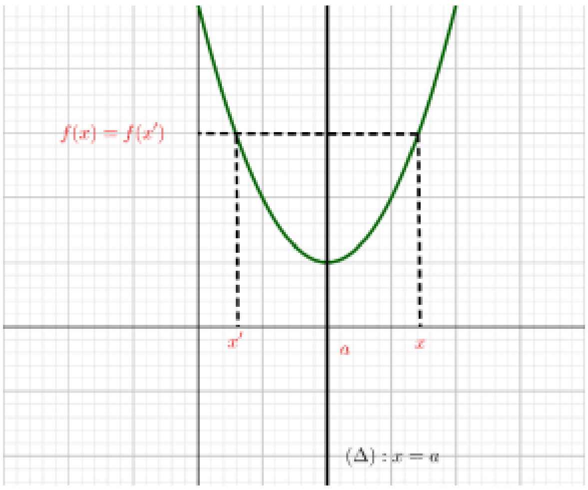
Propriété :

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.
La droite $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f) \\ (\forall x \in D_f)(f(2a-x) = f(x)) \end{cases}$

Preuve :
Soit x un élément de D_f et $A(x, 0)$, si $A'(x', 0)$ est le symétrique de A par rapport à (Δ) $x = a$ alors $\frac{x+x'}{2} = a$ (a est le centre de l'intervalle de bornes x et $'$)

d'où : $x' = 2a - x$ et puisque $(\Delta) \perp (AA')$ alors

$f(x) = f(x')$ ce que signifie : $f(2a - x) = f(x)$



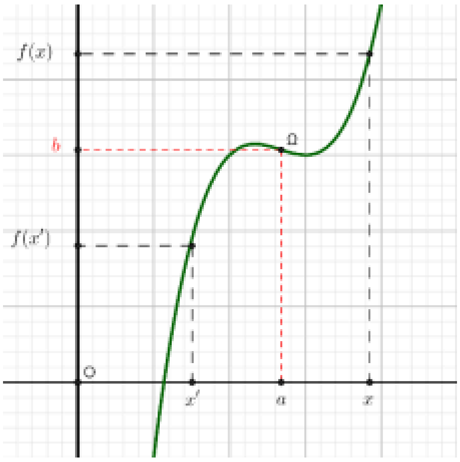
2) Centre de symétrie.

Propriété :

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.

Le point $\Omega(a,b)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f) \\ (\forall x \in D_f)(f(2a-x) = 2b - f(x)) \end{cases}$

Preuve :



$\Omega(a,b)$ étant centre de symétrie de la courbe C_f, si $M(x,f(x))$ est un point de C_f alors sont symétrique M' par rapport à Ω est un point de C_f. soit $M'(x',f'(x))$ on a : $\frac{x+x\prime}{2} = a$ et $\frac{f(x)+f(x')}{2} = b$ car a est le centre de l'intervalles de bornes x et x' et b est le centre de l'intervalles de bornes $f(x)$ et $f(x')$

Par suite : $x' = 2a - x$ et $f(x') = 2b - f(x)$ et finalement :

$f(2a-x) = 2b - f(x)$

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Montrer que le point d'inflexion de C_f est son centre de symétrie. (c'est valable uniquement pour ces fonctions)

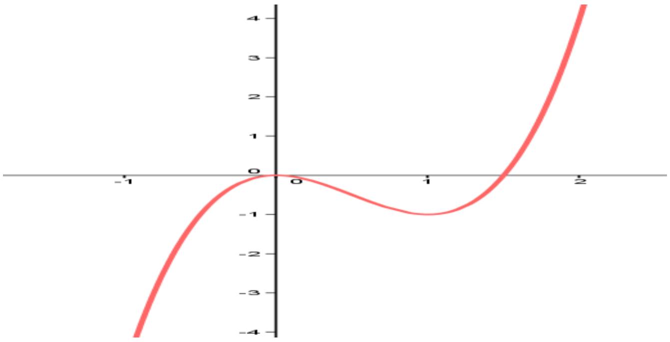
ETUDE DES FONCTIONS

I) CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION

*1) Activité :*Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=2x^3-3x^2$

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction g.
2. Dresser le tableau de signe de $g''(x)$.



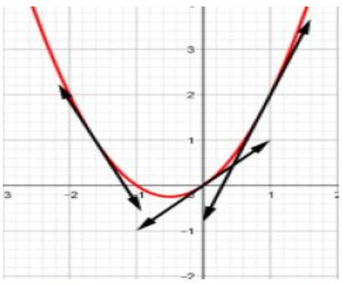
3. La courbe représentative de g est représentée ci-contre
Étudier graphiquement La position relative de la courbe cg par rapport à ses tangentes.
4. Que peut-on conclure ?

2) Définition et propriétés.

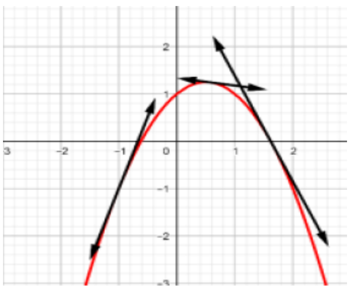
2.1 Définitions :

Définition : Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f.

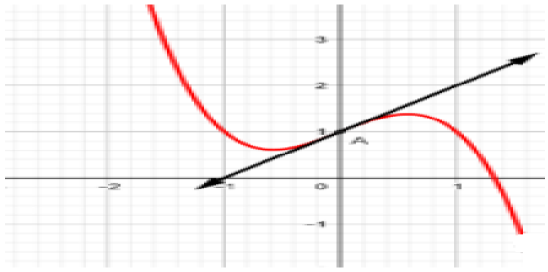
1) On dit que la courbe est convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes
2) On dit que la courbe est concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.
3) Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe C_f



Graphe d'une fonction convexe



Graphe d'une fonction concave



Point d'inflexion en A

Remarque : Si f est dérivable en a et C_f traverse sa tangente en A alors le point A est un point d'inflexion

2.2 Dérivée seconde et concavité.

Théorème : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle$I$.

1) Si f'' est positive sur I alors C_f est convexe sur I.
2) Si f'' est négative sur I alors C_f est concave sur I.
3) Si f'' s'annule en $\boldsymbol{a}$ en changeant de signe alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

Remarque : Les conditions du théorème précèdent sont suffisantes ; on peut avoir une courbe convexe, concave ou un point D'inflexion sans l'existence même de la dérivée seconde.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}$$

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction f.
2. Dresser le tableau de signe de f''(x).et étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent

Solution :1)

$$f'(x)=\left(\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}\right)'=\frac{1}{12}4\times x^3-4x+1=\frac{1}{3}x^3-4x+1$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x+1\right)'=x^2-4$$

2) $f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2 ou x=2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

(C_f) est convexe sur $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

(C_f) est concave sur $[-2,2]$ et $A(1,f(1))$ et $B(-1,f(-1))$ sont les points d'inflexions de (C_f)

Exercice1 : Soit la fonction f définie sur $I=[0;\pi]$ par : $f(x)=\sin^2 x$ Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur I

Solution : $\forall x\in[0;\pi]$

$$f'(x)=\left(\sin^2 x\right)'=2(\sin x)'(\sin x)^{2-1}=2\cos x\sin x$$

$$f'(x)=\sin 2x\Rightarrow f''(x)=2\cos 2x \quad \forall x\in[0;\pi]$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$$

Et $k\in\mathbb{Z}$ donc les solutions sont : $x=\frac{\pi}{4}$ et $x=\frac{3\pi}{4}$

$x\in[0;\pi]\Rightarrow 2x\in[0;2\pi]$

$2x$	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

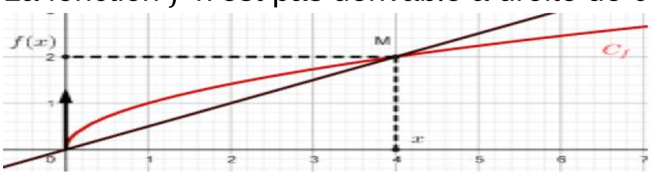
(C_f) est concave sur $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ et $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{3\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

II) DEMI-TANGENTE VERTICALE

Introduction : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par : $(\forall x\in\mathbb{R}+)$ $f(x)=\sqrt{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

La fonction f n'est pas dérivable à droite de 0.



Soient $x\neq 0$ et $M(x,f(x))$ un point de la courbe C_f la droite (OM) à pour coefficient directeur $m=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ donc elle a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1;\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et le vecteur $\vec{v}\left(\sqrt{x};1\right)$) est aussi vecteur directeur de la droite (OM) si on fait tendre x vers 0 (à droite) La droite (OM) "tend" pour une position limite vers une droite (T) de vecteur directeur $\vec{j}(0;1)$ Donc sera parallèle à l'axe (Oy).

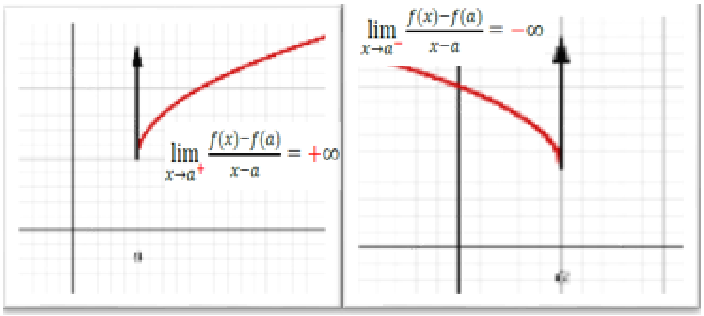
Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a,a+r[$

Si f est continue à droite de a et

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$$

Alors la courbe Cf admet une demi-tangente verticale à droite de a.

Interprétation géométriques



Exemple : Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^2\sqrt{1+x}$

1. étudier la dérivabilité de f a droite en $x_0=-1$.
2. donner une interprétation géométrique

Solution : $D_f=[-1,+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}}{x+1}$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2(1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable a droite en $x_0=-1$.

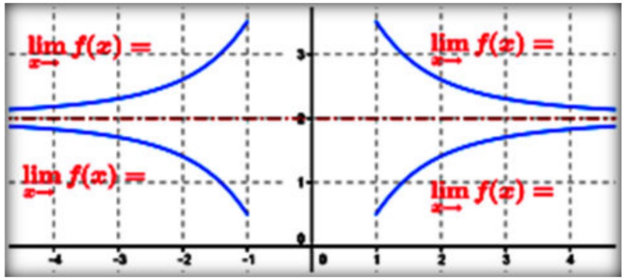
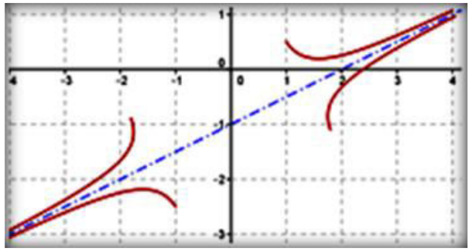
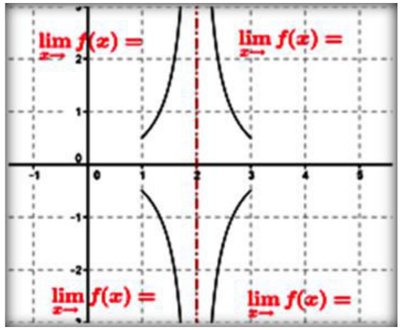
2)Interprétation géométrique :

La courbe Cf admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(-1;f(-1))$ dirigée vers le haut

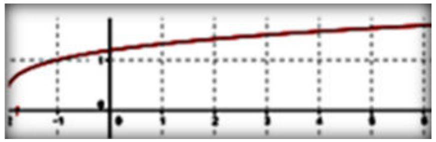
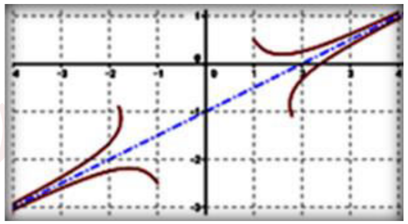
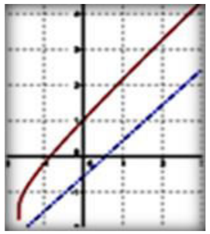
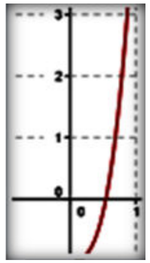
Car : $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$ $(+\times+=+)$

III)BRANCHES INFINIES.

II) BRANCHES INFINIES.

Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$	Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$	Si : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$
 La droite (Δ) d'équation $y=b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞	La droite $(\Delta): y=ax+b$ est une Asymptôte oblique à (C_f) signifie que : $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$  (C_f) est au dessus de $(\Delta) \Leftrightarrow \big(f(x)-(ax+b)\big)>0$ (C_f) est en dessous de $(\Delta) \Leftrightarrow \big(f(x)-(ax+b)\big)<0$	 La droite (Δ) d'équation $x=a$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de a

Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$	Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$		Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-ax\big)=\infty$	
 La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Ox)	 La droite (Δ) d'équation $y=ax+b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞ .	 La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D), d'équation $y=ax$	 La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy)

Exemples :

Exemple1 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{2x-1}{3x-6}$$

déterminer les limites aux bornes de D_f et (Donner une interprétation géométrique des résultats)

Solution : $D_f=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x-1}{3x-6}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1=3$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-6=0^+$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-6=0^-$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ): $x=2$ est une asymptote vertical a la courbe C_f

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x-6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{3x-6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ): $y=\frac{2}{3}$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f

Exemple2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

On a : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1$$

($|x|=x$ car $x\to+\infty$)

La droite (Δ): $y=1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=-1$$

La droite (Δ'): $y=-1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

Exemple3 : : Soit f la fonction définie par :

$\forall x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=2+\frac{x-1}{x^2}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ car :

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

Donc : La droite (Δ): $y=2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de ∞

étudions la position de courbe (C_f) et la droite (Δ) ?

$f(x)-2=\frac{x-1}{x^2}$ le signe et celui de $x-1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f(x)-2$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ): $y=2$

Sur l'intervalle $]-\infty;0[\cup]0;1[$ et la courbe C_f est au-dessus de (Δ): $y=2$ Sur l'intervalle $]1;+\infty[$

C_f coupe (Δ) au point $I(1;2)$

Exemple4: Soit f la fonction définie par :

$\forall x\in\mathbb{R}^*-\{3\}$: $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-3}$

montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-3}\Leftrightarrow f(x)-(2x-1)=\frac{1}{x-3}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{+\infty}=0$

Donc : la droite (Δ): $y=2x-1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-3}=0$

Donc : la droite (Δ): $y=2x-1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

Exemple5 : Soit la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{x}$ étudier les branches paraboliques au voisinage de $+\infty$

Solution : On a : $Df = \mathbb{R}+$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$

Exemple6 : Soit la fonction définie par :

$f(x) = x^3$ étudier les branches paraboliques au voisinage de $+\infty$

Solution : On a : $Df = \mathbb{R}+$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$

Exemple7: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$f(x) = x + \sqrt{x}$

Solution : On a : $Df = \mathbb{R}+$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

Mais $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 1x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Donc la courbe de la fonction admet une branche parabolique vers la droite (Δ): $y = x$.

Propriété : Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La droite (Δ): $y = ax + b$ ($a \neq 0$) est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$$

Preuve : D'après la propriété précédente : On peut écrire $f(x) = ax + b + h(x)$ où $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+b+h(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} a + \frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x} = a$$

D'autre part : $f(x) - ax = b + h(x)$ $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1) Déterminer D_f

2) montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution : 1) On a : $x^2+1 \succ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $D_f = \mathbb{R}$

2)a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$ $\quad |x| = x$ car $x \to +\infty$

$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 = a$

Et on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 1x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

Donc : la droite (Δ): $y = 1x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

b) De même on a :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

Et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$ $\quad |x| = -x$ car $x \to -\infty$

$= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1 = a$

Et on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) + 1x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$$

Donc : la droite (Δ): $y = -x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

IV) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

1) Axe de symétrie :

Activité : Soit la fonction

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{2x^2-4x-6}$

1. Déterminer D_f ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que $(\forall x \in D_f)\ (2 - x \in D_f)$
3. Montrer que $(\forall x \in D_f)\ (f\ (2 - x) = f(x))$

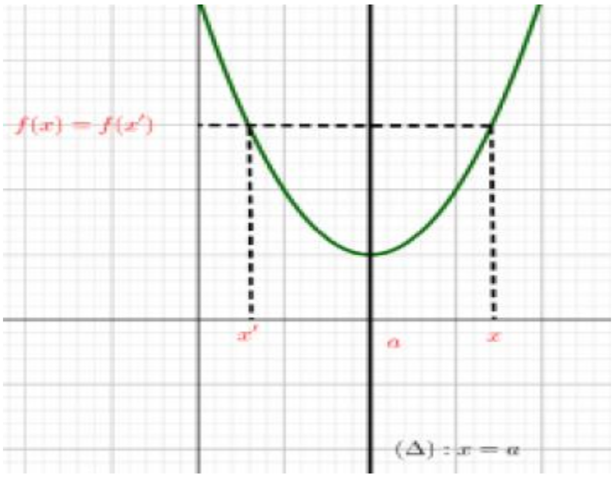
Propriété : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.

La droite (Δ): $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si et seulement si :

a)$(\forall x \in D_f\ )(2a - x \in D_f\ )$

b)$(\forall x \in D_f\ )(f(2a - x) = f(x))$

Preuve : Soit x un élément de D_f et $A(x, 0)$, si $A'(x', 0)$ est le symétrique



de A par rapport à (Δ) $x = a$ alors

$\frac{x+x'}{2} = a$ (a est le centre de l'intervalle de bornes x et x')

d'où : $x' = 2a - x$ et puisque $(\Delta) \perp (AA')$ alors

$f(x) = f(x')$ ce que signifie : $f(2a - x) = f(x)$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x-x^2}$

1)Déterminer D_f

2) montrer que la La droite (Δ): $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution :1) On a : $f(x) = \sqrt{x-x^2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\}$

$x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 ou x = 0$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc : $D_f = [0,1]$

2)a) montrons que : si $x \in D_f = [0,1]$ alors $1 - x \in D_f$?

$x \in D_f = [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1-1 \leq 1-x \leq 1$

Donc : $x \in D_f \Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 1-x \in D_f$

b) montrons que : $f(1-x) = f(x)$ ؟؟؟؟

$f(1-x) = \sqrt{(1-x)-(1-x)^2} = \sqrt{1-x-(1-2x+x^2)}$

$= \sqrt{1-x-1+2x-x^2} = \sqrt{x-x^2} = f(x)$

Donc : La droite (Δ): $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice2: Soit f la fonction définie par :

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

montrer que la La droite (Δ): $x = \frac{1}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R}$

a) si $x \in D_f = \mathbb{R}$ alors $\frac{2}{3} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{2}{3}-x\right) = f(x)$ ؟؟؟؟

$f\left(\frac{2}{3}-x\right) = 3\left(\frac{2}{3}-x\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3}-x\right) + 5$

$= 3x^2 - 2x + 5 = f(x)$

Donc : La droite (Δ): $x = \frac{1}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice3: Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$

montrer que la La droite (Δ): $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R} - \{1;3\}$

a) si $x \in \mathbb{R} - \{1;3\}$ alors $4 - x \in \mathbb{R} - \{1;3\}$ en effet :

$x \in \mathbb{R} - \{1;3\} \Rightarrow x \neq 1$ et $x \neq 3$

$\Rightarrow -x \neq -1$ et $-x \neq -3 \Rightarrow 4-x \neq 4-1$ et $4-x \neq 4-3$
$\Rightarrow 4-x \neq 3$ et $4-x \neq 1$ alors $4-x \in \mathbb{R}-\{1;3\}$

b) montrons que : $f(4-x)=f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}-\{1;3\}$????

$$f(4-x)=\frac{1}{4-x-1}-\frac{1}{4-x-3}=\frac{1}{3-x}-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}$$

donc $f(4-x)=f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}-\{1;3\}$

donc la droite (Δ): $x=2$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice4: Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\cos x$

montrer que la La droite (Δ): $x=k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f=\mathbb{R}$

a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $2k\pi - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f(2k\pi - x)=f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$????

$f(2k\pi - x)=\cos(2k\pi - x)=\cos(-x)=\cos x$

donc $f(2k\pi - x)=f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

donc la droite (Δ): $x=k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

2) Centre de symétrie.

Propriété : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.
Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe Cf si et seulement si :

a) $(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$

b) $(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = 2b - f(x))$

Preuve : $\Omega(a, b)$ étant centre de symétrie de la courbe C_f, si $M(x, f(x))$ est un point de Cf alors sont symétrique M' par rapport à Ω est un point de C_f. soit $M'(x', f'(x))$ on a : $\frac{x+x'}{2}=a$

et $\frac{f(x)+f(x')}{2}=2b$

car a est le centre de l'intervalles de bornes x et x' et b est le centre de L'intervalles de bornes $f(x)$ et $f(x')$ Par suite : $x' = 2a - x$ et $f(x') = 2b - f(x)$

et finalement : $f(2a - x) = 2b - f(x)$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$

1) montrer que : $\forall \in D_f$: $f(x)=x-2+\frac{2}{x+1}$

2)montrer que le point $\Omega(-1;-3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$$x-2+\frac{2}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1}=\frac{x^2-x}{x+1}=f(x)$$

2)a) montrons que si $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ alors $-2-x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ en effet :

$x \in \mathbb{R}-\{-1\} \Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow -2-x \neq -2+1$
$\Leftrightarrow -2-x \neq -1 \Leftrightarrow -2-x \in \mathbb{R}-\{-1\}$

b) montrons que : $f(-2-x)+f(x)=-6=2b$??

$$f(-2-x)+f(x)=-2-x-2+\frac{2}{-2-x+1}+x-2+\frac{2}{x+1}$$
$$=-6+\frac{2}{-x-1}+\frac{2}{x+1}=-6-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x+1}=-6$$

donc $f(-2-x)+f(x)=-6=2b\ \forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$

donc le point $\Omega(-1;-3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice5 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\sin x-\cos x$

montrer que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Solution :

a) on a si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}-x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\times 0-f(x)$??

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x-\sin x$$

donc $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\times 0-f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

donc le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice6 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{4x^2+2x-2}$

1)Déterminer D_f

2) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$

3) calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

4) montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution : 1) $D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / 4x^2+2x-2\geq 0\right\}$

$4x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0$

$\Delta = b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$

$x_1=\frac{-1+3}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **et** $x_2=\frac{-4}{4}=-1$

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$4x2+2x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$4x^2+2x-2\succ 0 \Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Donc :

$$f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+2x-2}\right)'=\frac{\left(4x^2+2x-2\right)'}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{8x+2}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}$$

$$f'(x)=\frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x-2}}\quad \forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

3) calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}$

On a: $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}$ $x\to-\infty$ donc $|x|=-x$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}=-\sqrt{4}=-2=a$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}+2x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2+2x-2-4x^2}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=b$

Donc : donc la droite $y=-2x-\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ a la courbe C_f

Exercice7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x+3$

1) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) dresser le tableaux de variation de f

4) Étudier la concavité de la courbe de (C_f) et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur $\mathbb{R}$

5)montrer que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de (C_f) et déterminer l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f) en $I(0;3)$

6) on utilisant le tableaux de variation de f monter que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que : $\alpha\prec-1$ et vérifier que $-2.2\prec\alpha\prec-2.1$ et déterminer le signe de $f(x)$

7) Tracer la courbe Cf et discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation : $x^3-3x+3=m$

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}=\left]-\infty;+\infty\right[$ car f est une fonction polynôme

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x+3=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x+3=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=-\infty$

2) étude des branches infinies de la courbe (C_f):

$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3-3x+3}{x}=x^2-3+\frac{3}{x}\quad\forall\in\mathbb{R}^*$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3+\frac{3}{x}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3+\frac{3}{x}=+\infty$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

3) le tableaux de variation de f ?

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x)=\left(x^3-3x+3\right)'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)=3(x-1)(x+1)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) Étude de la concavité de la courbe de (C_f) ?

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x)=3\left(x^2-1\right)$ donc : $f''(x)=6x$

le tableaux de signe de $f''(x)$ est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Donc : (C_f) est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

(C_f) est concave sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f''(x)$ s'annule en changeant de signe 0 donc $I(0,3)$ est un point d'inflexion de (C_f)

5)montrons que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de (C_f) ?

a) on a si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\times 0-x=-x\in\mathbb{R}$

b) montrons que : $f(-x)=2\times 3-f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$?

$f(-x)=(-x)^3-3(-x)+3=-x^3+3x+3$

$2\times 3-f(x)=6-f(x)=6-\left(x^3-3x+3\right)=-x^3+3x+3$

donc $f(-x)=2\times 3-f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$ donc le point $I(0,3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f) en $I(0;3)$ est : $(T): y=f'(0)x+f(0)=-3x+3$

6) du tableaux de variation de f

On deduit que f admet une valeur minimal en 1 sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ et c'est : $f(1)=1$

Donc : $f(x)\geq f(1)=1\quad \forall x\in[-1;+\infty[$

Et l'image de l'intervalle $]-\infty;-1]$ par f est l'intervalle $]-\infty;5]$ et $0\in]-\infty;5]$ donc il existe un α de $]-\infty;-1]$ tel que $f(\alpha)=0$ et puisque f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$ alors quelque soit $x\neq\alpha$ on a $x\prec\alpha$ ou $\alpha\prec x\prec -1$ donc $f(x)\prec f(\alpha)$ ou $f(\alpha)\prec f(x)\prec f(-1)$

Donc : $f(x)\prec 0$ ou $0\prec f(x)\leq 5$

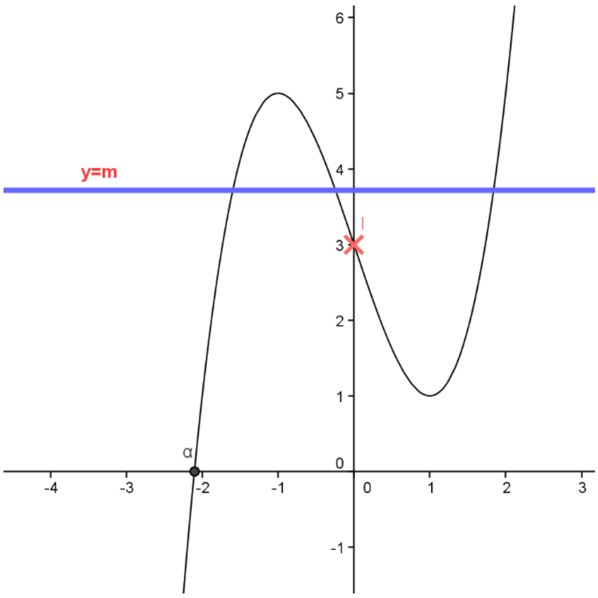
Donc : $\forall x\in]-\infty;-1]-\{\alpha\}$ on a $f(x)\neq 0$ donc α est unique et on utilisant la calculatrice en vérifie que : $f(-2.2)\approx -1.04$ et $f(-2.1)\approx 0.03$

Donc d'après l'étude précèdent on a alors : $-2.2\prec\alpha\prec -2.1$

On deduit que : $f(x)\succ 0\ \forall x\in]\alpha;+\infty]$ et

$f(x)\prec 0\quad \forall x\in]-\infty;\alpha]$

7) Tracer la courbe Cf



Remarque : le signe de $f(x)$ partir de (C_f)?

a)sur $]-\infty;\alpha]$ $f(x)\leq 0$ car (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses

b)sur $]\alpha;+\infty]$ $f(x)\geq 0$ car (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses

7) $x^3-3x+3=m \Leftrightarrow f(x)=m$

Les solutions de l'équation : $f(x)=m$ sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) avec la droite d'équation : $y=m$

m	$m\in]5;+\infty[\cup]-\infty;1[$	$m=1$ou $m=5$	$m\in]1;5[$
nombre de solutions	1	2	3

Exercice8 : soit f une fonction définie par :

$$f(x)=2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) étudier la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal

4) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f

5) déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses f

6) montrer que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f)

7) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\neq 1$

donc : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

2) étude des branches infinies de la courbe (C_f)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=2$

Car : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

La droite (Δ): $y=2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$

b) on a $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to0} 2-\frac{1}{x-1}=3$

donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

donc La droite (Δ'): $x=0$ est une asymptote a la courbe C_f

c) on a $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-1}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{x-1}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to1} 2+\frac{1}{x}=3$

donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

donc La droite (Δ ''): $x=1$ est une asymptote a la courbe C_f

3) étude de la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal : $(\forall x\in D_f)$

$$f(x)-2=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x}{x(x-1)}=\frac{-1}{x(x-1)}$$

si $x\in]0;1[$ alors $f(x)-2\succ 0$

Donc la courbe C_f est au- dessus de (Δ): $y=2$

si $x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ alors $f(x)-2\prec 0$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ): $y=2$

5) déterminons les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses : $(\forall x\in D_f)$

$$f(x)=0\Leftrightarrow 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-x-1}{x(x-1)}=0$$

$2x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Donc les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};0\right)$ et $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};0\right)$

6) montrons que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f) :

On a : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

a) si $x\in D_f$ alors $1-x\in D_f$ en effet :

$x\in\mathbb{R}-\{0;1\}\Rightarrow x\neq0$ et $x\neq1$

$\Rightarrow -x\neq0$ et $-x\neq-1\Rightarrow 1-x\neq1$ et $1-x\neq0$

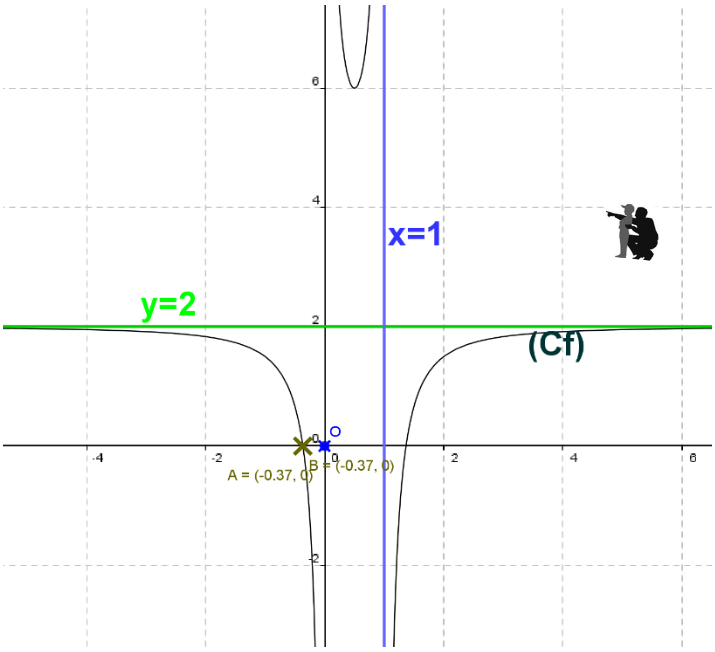
alors $1-x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

b) montrons que : $f(1-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$ ؟؟؟؟

$$f(1-x)=2+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x-1}=2+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}=2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

donc $f(1-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

donc la droite $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f



Exercice9 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$

1) déterminer les limites aux bornes de D_f

2)déterminer les réels a et b tel que :

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3} \quad \forall x\in D_f$

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f

5) montrer que le point $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f)

6) calculer $f''(x)$ $\forall x\in D_f$ et étudier la concavité de la courbe de f

7) étudier la position de courbe (C_f) et son asymptote oblique (Δ)

8) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repére

9) déterminer l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f) en $x_0=2$

9) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 3$

donc : $D_f=\mathbb{R}-\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

2)on fait la division euclidienne de x^2-3x+6 par $x-3$ on trouve : $x^2-2x+1=(x-3)(x+1)+4$

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{(x-3)(x+1)+4}{x-3}=x+1+\frac{4}{x-3}$$

Donc : $a=1$ et $b=1$ et $c=4$

3)Les branches infinies de la courbe (C_f)

a) $\lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$

donc La droite $x=3$ est une asymptote a la courbe C_f

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

on a : $f(x)=x+1+\dfrac{4}{x-3} \Leftrightarrow f(x)-(x+1)=\dfrac{4}{x-3}$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-3}=\dfrac{4}{+\infty}=0$

Donc : la droite $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x-3}=\dfrac{4}{-\infty}=0$

Donc : la droite $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) les variations de f et le tableau de variation ?

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}: f'(x)=\left(x+1+\frac{4}{x-3}\right)'=1-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{(x-3)^2-4}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-3)^2-2^2}{(x-3)^2}=\frac{(x-3-2)(x-3+2)}{(x-3)^2}=\frac{(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-5)(x-1)$

$(x-5)(x-1)=0 \Leftrightarrow x-5=0$ ou $x-1=0 \Leftrightarrow x=5$ ou $x=1$

Le tableau de signe :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	

Le tableau de variation

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

5) Montrons que le point $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f) ??

a) Montrons que si $x\in\mathbb{R}-\{3\}$ alors $6-x\in\mathbb{R}-\{3\}$?

$x\in\mathbb{R}-\{3\}\Leftrightarrow x\neq 3\Leftrightarrow -x\neq -3\Leftrightarrow 6-x\neq 3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6-x\in\mathbb{R}-\{3\}$

b) Montrons que : $f(6-x)+f(x)=8=2b$?

$$f(6-x)+f(x)=6-x+1+\frac{1}{6-x-3}+x+1+\frac{1}{x-3}$$

$$=8+\frac{1}{-x+3}+\frac{1}{x-3}=8-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-3}=8$$

Donc : $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f)

6) étudie la concavité de la courbe de f ?

$\forall x\in D_f$: $f'(x)=1-\frac{4}{(x-3)^2}$

Donc : $f''(x)=\frac{2(x-3)4}{(x-3)^4}=\frac{8(x-3)}{(x-3)^4}$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $x-3$

Si $x\succ 3$ (C_f) est convexe

Si $x\prec 3$ (C_f) est concave

7) $f(x)-(x+1)=\frac{4}{x-3}$

Si $x\succ 3$ alors $f(x)-(x+1)\succ 0$

Donc la courbe C_f est au- dessus de (Δ

Si $x\succ 3$ alors $f(x)-(x+1)\prec 0$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ

8) a) intersections avec l'axe des abscisses

$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2-2x+1}{x-3}=0\quad\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$:

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\qquad\Delta=b^2-4ac=4-4\times1\times1=0$

$x=\frac{-b}{2a}=1$ **donc** le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est $A(1;0)$

a) intersections avec l'axe des ordonnées

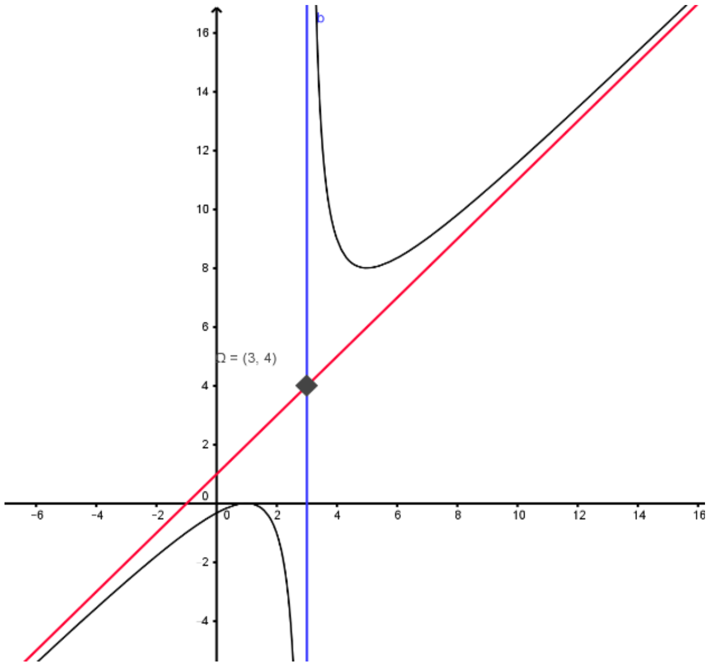
$f(0)=-\frac{1}{3}$ **donc** le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est $C\left(0;-\frac{1}{3}\right)$

9) l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f) en $x_0=2$ est $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$f'(2)=\frac{(2-5)(2-1)}{(2-3)^2}=\frac{-3}{1}=-3$ et $f(2)=\frac{2^2-2\times2+1}{2-3}=-1$

$y=f(2)+f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=-1-3(x-2)\Leftrightarrow y=-3x+5$

9)La courbe (C_f) :



Exercice 10: Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$

1)Déterminer D_f

2) Déterminer les limites aux bornes de D_f

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

5) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f

6) tracer la courbe (C_f)

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-x-2\geq$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$

$x_1=-1$ **et** $x_2=2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$

2) on a : $\forall x\in D_f-\{0\}$

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

3) étude des branches infinies de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-2}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-2}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1}=\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y=-x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) étudie de la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-x-2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-2}}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 2 et à gauche de -1

Alors la courbe Cf admet une demi-tangente verticale aux points $A(-1.0)$ et $B(2.0)$

5) étude des variations de f et le tableaux de variation de f ?

$x^2-x-2\succ 0 \Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

Donc :

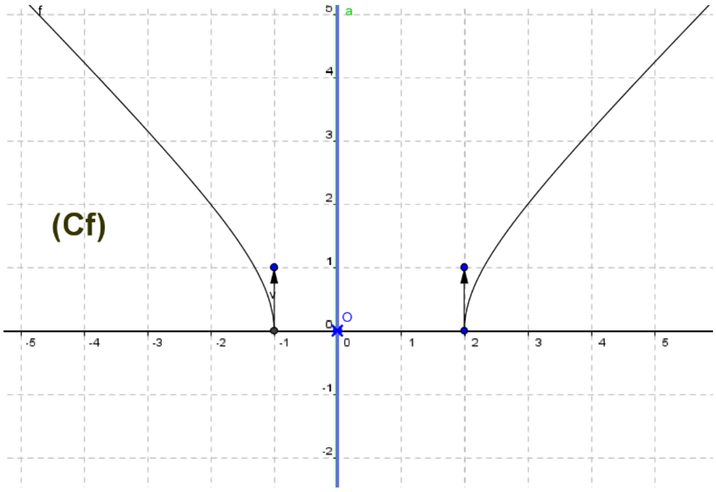
$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)'=\frac{\left(x^2-x-2\right)'}{2\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}\quad\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2x-1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$			$0 \nearrow +\infty$

6) tracer la courbe (C_f)



Exercice11: soit f une fonction définie par :

$$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période $T=\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

Solution :

1) $D_f=\mathbb{R}$

2)a)si $x\in\mathbb{R}$ alors $\pi+x\in\mathbb{R}$

b)

$$f(\pi+x)=2\cos\left(2(\pi+x)+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(\pi+x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T=\pi$

<u>Remarque :</u> la fonction : $x\to\cos(ax+b)$ est périodique de période $T=\frac{2\pi}{|a|}$ si $a\neq0$

<u>Un domaine d'étude de f</u>

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=\pi$

donc par exemple : $D_E=[0;\pi]$

3) $f'(x)$ et le tableaux de variation de f ?

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 2\times -2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0;\pi]$

$$x \in [0;\pi] \Leftrightarrow 0 \le x \le \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le 2x+\frac{\pi}{4} \le \frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigo en deduit le signe de $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Le tableau de signe de $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ est :

$2x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		π		2π		$\frac{9\pi}{4}$
$\sin(2x+\frac{\pi}{4})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

4) du tableau de variation de f :on deduit que Que f change de signe en sur les intervalles $\left[0;\frac{3\pi}{8}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\right]$ cad (C_f) coupe l'axe des abscisses

On va résoudre dans $I = \left[0;\frac{7\pi}{8}\right]$ l'équation :

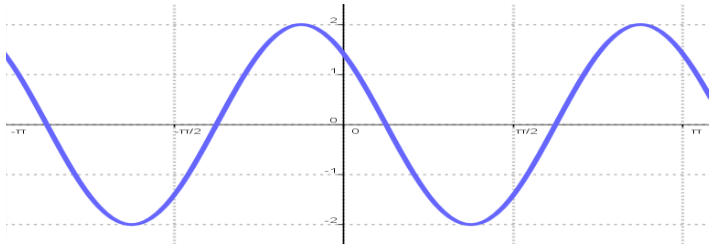
$f(x) = 0$

On a : $\begin{cases} f(x)=0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \frac{\pi}{4} \le 2x+\frac{\pi}{4} \le \frac{9\pi}{4} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} ou 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2} \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} ou. x = \frac{5\pi}{8}$$

On trace la courbe (C_f) sur l'intervalle $D_E = [0;\pi]$

Et on deduit le reste par les translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ $k \in \mathbb{Z}$



Exercice12: soit f une fonction définie par : $f(x) = 4\sin x + \cos 2x$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période $T = 2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4)donner l'équation de la tangente (T) a la courbe de f en en $x_0 = 0$

5) calculer $f''(x)$ en fonction de $\sin x$

6)déterminer les points d'inflexions de la courbe (C_f)

7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;4\pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$

2)a)si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

b) $f(2\pi+x) = 4\sin(x+2\pi) + \cos(2(x+2\pi))$

$$f(2\pi+x) = 4\sin x + \cos(2x) = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = 2\pi$

donc par exemple : $D_E = [0;2\pi]$

f est dérivable sur $D_E = [0;2\pi]$ et $\forall x \in D_E$ on a :

$$f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x) = 4\cos x - 4\cos x \sin x$$

$$f'(x) = 4\cos x(1-\sin x)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0;2\pi]$

On a : $1 - \sin x \ge 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1-\sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 .ou. 1 - \sin x = 0$$

$1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ Donc :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1

4) l'équation de la tangente (T) a la courbe de f en en $x_0=0$ est : $y=f(0)+f'(0)(x-0)$

Avec : $f'(0)=4$ et $f(0)=1$ donc : $y=4x+1$

5) calcule de $f''(x)$ en fonction de $\sin x$:

On a $f'(x)=4\cos x-2\sin(2x)$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$

$f''(x)=-4\sin x-4\cos(2x)=-4\sin x-4(1-2\sin^2 x)$

$f''(x)=8\sin^2 x-4\sin x-4=4(\sin^2 x-\sin x-1)$

Etude du signe de $f''(x)$ sur $D_E=[0;2\pi]$

On pose : $X=\sin x$ donc : $X\in[-1;1]$ et l'équation $\sin^2 x-\sin x-1=0$ devient : $X^2-X-1=0$

$\Delta=9$ les solutions sont : $X_1=-\frac{1}{2}$ et $X_2=1$

Donc : $f''(x)=8(\sin x-1)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)$

On a : $\sin x-1\le 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigo en deduit que :

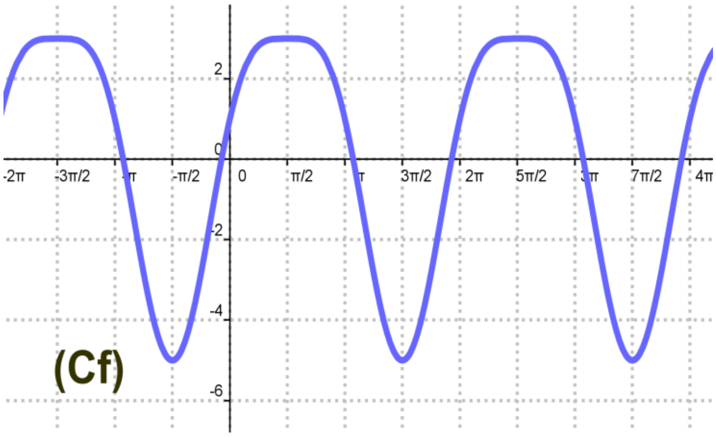
$\sin x+\frac{1}{2}\le 0 \Leftrightarrow \sin x\le -\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$

x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$

(C_f) est concave sur $\left[0,\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$ et $A\left(\frac{7\pi}{6},-\frac{3}{2}\right)$ et $B\left(\frac{11\pi}{6},-\frac{3}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

7) La courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;4\pi]$



Exercice13: soit f une fonction définie par :

$f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}$ car $2+\cos x\neq 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

2) <u>Un domaine d'étude de</u> f

a)si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\pi+x\in\mathbb{R}$

) $f(2\pi+x)=\frac{\sin(2\pi+x)}{2+\cos(2\pi+x)}=\frac{\sin x}{2+\cos x}=f(x)$

Donc : f est périodique de période $T=2\pi$

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=2\pi$ donc par exemple : $D=[-\pi;\pi]$

Etudions la parité de f ?

$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=-\frac{\sin x}{2+\cos x}=-f(x)$

Donc f est impair

Donc il suffit d'étudier f sur $D_E=[0;\pi]$

3) f est dérivable sur $D_E=[0;\pi]$ et $\forall x\in D_E$ on a :

$f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin x\times\sin x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$

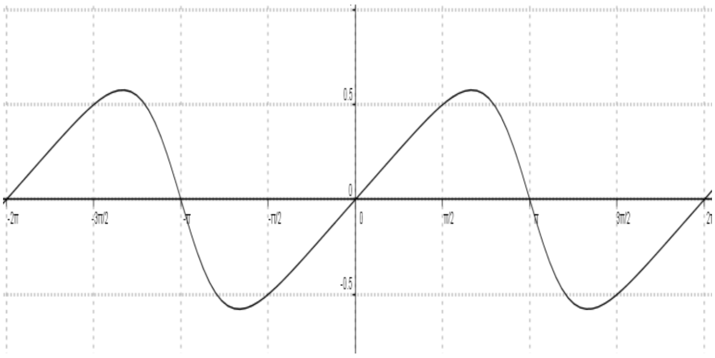
Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E=[0;\pi]$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2\cos x+1$

$2\cos x+1\ge 0\Leftrightarrow \cos x\ge -\frac{1}{2}$ Et $x\in[0;\pi]$ Donc :

$2\cos x+1\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow 0$



Autre exercices

Exercice1 : Soit f la fonction définie par :

$f(x) = 2x^2+2x-1$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

Exercice2 : Soit g la fonction définie par :

$$g(x)=\frac{2x^2-x}{x-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g.
2. Déterminer les limites aux bornes de D_g
3. Effectuer la division de
 $P(x) = 2x^2 - x$ sur $(x - 1)$

puis en déduire que $(\forall x \in Dg)$ $g(x)=2x+1+\dfrac{1}{x-1}$

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-(2x+1)$

On dit que la droite (Δ): $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

Exercice3 : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de h et étudier sa parité.
2. Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$
3. Déterminer la fonction dérivée de la fonction h et dresser le T.V
4. Déterminer l'équation de la tangente en $O(0,0)$
5. Etudier les positions relatives de T et la courbe
6. Tracer la courbe Cf

Exercice4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x - E(x)$

1. Tracer la courbe de la fonction f sur $[0,2[$.
2. Etudier la limite $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$
3. Que remarquer vous ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

Etude d'asymptotes et de branches infinies.

L´étude des branches infinies a pour objectif de comprendre en d´détails le comportement de la courbe de la fonction

La première chose à faire est de calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction

- **Si** $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ alors la courbe (C) admet une asymptote verticale d´équation $\boxed{x=a}$
- **Si** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$ alors la courbe admet une asymptote horizontale d´équation $\boxed{y=b}$
- **Si** $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ en en va étudier **les branches infinies**

Si : $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty}$

$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0}$ → la courbe de f admet une branche parabolique dans la direction d'axe (Ox). au voisinage de $\pm\infty$

$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\infty}$ → la courbe de f admet une branche parabolique dans la direction d'axe (Oy). au voisinage de $\pm\infty$

$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0}$:

- $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty}$ → la courbe de f admet une branche parabolique dans la direction de la droite $y=ax$ au voisinage de $\pm\infty$
- $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=b\in\mathbb{R}}$ → la courbe de f admet une asymptote oblique d´équation $y=ax+b$ au voisinage de $\pm\infty$

Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$ alors la courbe de f admet une asymptote **oblique** d´équation $y=ax+b$ au voisinage de $\pm\infty$

La droite d´équation $x=a$ est un **axe de symétrie** de la courbe de f ssi :

a) $\forall x\in D_f$ on a : $(2a-x)\in D_f$ b) $\forall x\in D_f$ on a : $f(2a-x)=f(x)$

Le point $\Omega(a;b)$ est un **centre de symétrie** de la courbe de f ssi :

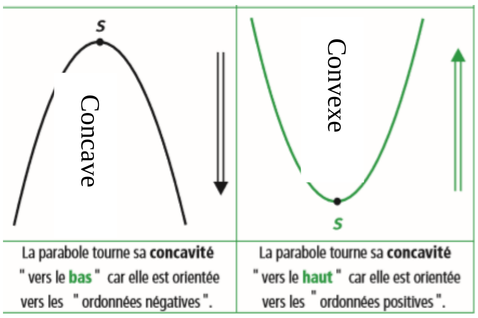
a) $\forall x\in D_f$ on a : $(2a-x)\in D_f$ b) $\forall x\in D_f$ on a : $f(2a-x)=2b-f(x)$

Étudier la **concavité** ou la **convexité d'une** d'courbe d'une fonction revient à déterminer les intervalles sur lesquels elle est convexe et ceux sur lesquels elle est concave. Pour cela on calcul f'' et en étudie son signe

et si f'' s'annule en changent de signe en x_0 alors $A(x_0;f(x_0))$ est un point D'inflexion

Si une fonction est paire alors l'**axe** (Oy). Est un axe symétrie a la courbe

Si une fonction est impaire alors Le point $O(0;0)$ est un centre symétrie la courbe



LA ROTATION DANS LE PLAN

I) RAPPELLES ET COMPLEMENTS

1) La symétrie axiale.

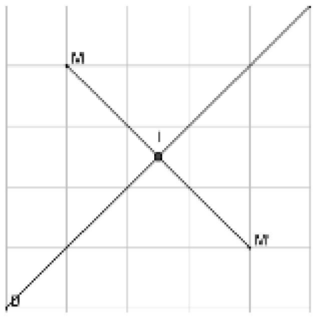
Définition

Soit (D) une droite donnée. On dit que le point M' est le symétrique du point M par rapport à (D) si :

- $M' = M$ si $M \in (D)$
- (D) est la médiatrice du segment $[MM']$, si $M \notin (D)$.

La relation qui lie le point M à M' s'appelle **la symétrie axiale d'axe (D) ;** se notre par $S_{(D)}$.
On écrit : $S_{(D)}(M) = M'$.

Remarques :



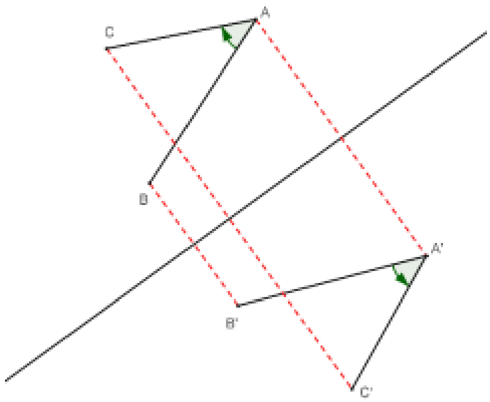
- Si $M \notin (D)$ alors $M' = S_{(D)}(M) \neq M$ et (D) est la médiatrice du segment $[MM']$ c'est-à-dire passe par I milieu de $[MM']$ et perpendiculaire à (MM').
- Si $N \in (D)$ alors $S_{(D)}(N) = N$ on dit que N est invariant par $S_{(D)}$
- Inversement si un point N est invariant par $S_{(D)}$ alors $N \in (D)$

Propriétés :

La symétrie axiale conserve :

- Les distances : si $M' = S_{(D)}(M)$ et $N' = S_{(D)}(N)$ alors $MN = M'N'$
- Le milieu d'un segment et en générale le barycentre d'un système pondéré.
- les mesures des angles **géométriques**
- Le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

La symétrie axiale inverse les mesures des angles orientés : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) \quad [2\pi]$



Propriété :

La symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est elle-même

Preuve :

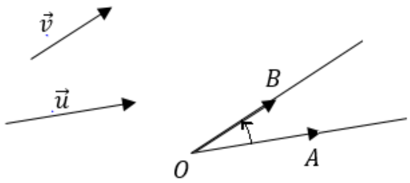
$$S_{(\Delta)}(M) = M' \Leftrightarrow S_{(\Delta)}(M') = M$$

2) Les angles orientés

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ; et soient A et B deux points du plan orienté tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

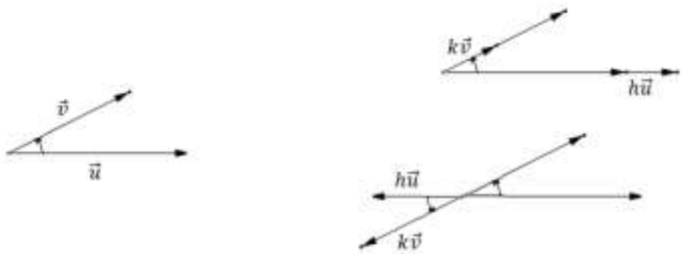
l'angle orienté des demis droites $[OA)$; $[OB)$ s'appelle aussi angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on le note par : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. la mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est la mesure de l'angle orienté $(\widehat{[OA),[OB)})$ et se note par $(\overline{\vec{u},\vec{v}})$.



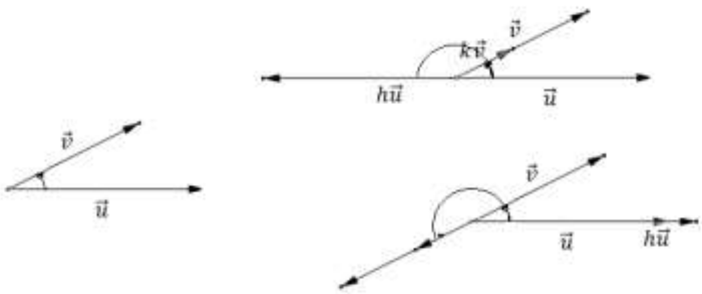
Propriétés :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et h et k deux réels non nuls ; on a :

- $(\overline{\vec{v},\vec{u}}) \equiv -(\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$
- si $hk > 0$ alors : $(\overline{h\vec{u},k\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$



- si $hk < 0$ alors : $(\overline{h\vec{u},k\vec{v}}) \equiv \pi + (\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$

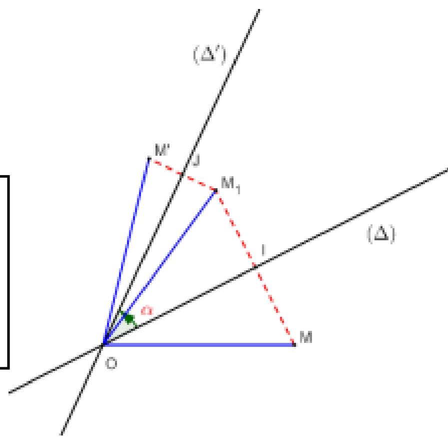


Propriété :

Soient (D) et (Δ) deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

et qui se coupent en A, soient B un point de (D) et C un point de (Δ).

On a : $2\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv 2(\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$



Preuve :

D'après la propriété précédente : On a $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$

ou $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \pi + (\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$

et dans les deux cas : $2\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv 2(\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$

II) LA ROTATION DANS LE PLAN

1) Définition :

1.1 Composition de deux symétries axiales

Activité :

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O ; $M_1 = S_{(\Delta)}(M)$ et

$M' = S_{(\Delta')}(M_1)$ et soit $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \alpha[2\pi]$ où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ')

1- Quelle est l'application qui transforme M en M'.

2- Montrer que $OM = OM'$

3- Montrer que pour tout M dans le plan la mesure : $\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)$ est constante.

Propriété :

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O ; $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta')}$ les symétries axiales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') soit $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \alpha[2\pi]$ où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ').

L'application $S_{(\Delta')}oS_{(\Delta)}$ transforme le point M en M' tel que : $\boldsymbol{OM = OM'}$ et $\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \boldsymbol{2\alpha\ [2\pi]}$

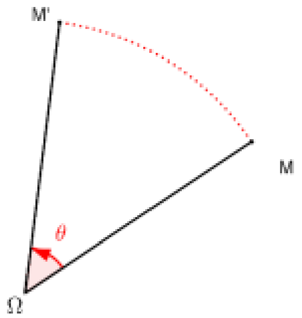
L'application $\left(S_{(\Delta')}oS_{(\Delta)}\right)$ s'appelle **la rotation de centre O et d'angle 2α**

1.2 Définition de la rotation.

Définition :

Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, **la rotation de centre Ω et d'angle θ** est l'application qui transforme tout point M en M' tel que :

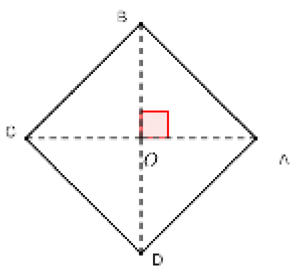
$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega M = \Omega M'} \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \boldsymbol{\theta\ [2\pi]} \end{cases}$$

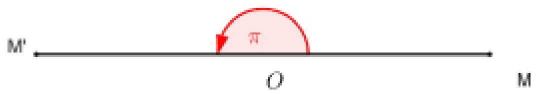


On la note par : $R_{(\Omega,\theta)}$

Remarque : Si l'angle de la rotation est non nul, son centre est **le seul point invariant.**

Exemples :





- La symétrie centrale S_O est la rotation de centre O et d'angle π
- L'identité Id_P est la rotation d'angle nul. (tous les points de (P) sont centre de cette rotation)
- $ABCD$ un carré de centre O, R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $R(A) = B$; $R(B) = C$ et $R(D) = A$

2) Propriétés de la rotation

2.1 La décomposition d'une rotation

Soit R la rotation de centre O et d'angle α

①(Δ) une droite quelconque qui passe par O et (Δ') l'image de (Δ) par **la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\alpha}{2}$.**

D'après ce qui précède $\left(S_{(\Delta')}oS_{(\Delta)}\right)$ est la rotation de centre O et d'angle $2 \times \frac{\alpha}{2}$

Donc : $\boldsymbol{S_{(\Delta')}oS_{(\Delta)} = R}$. (figure 1)

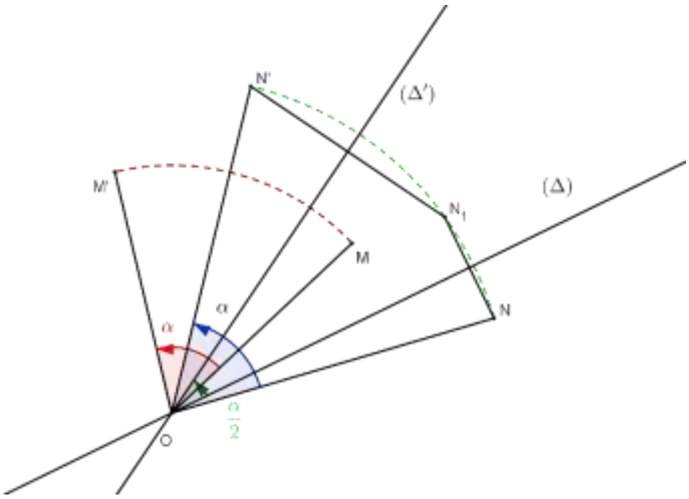


figure 1

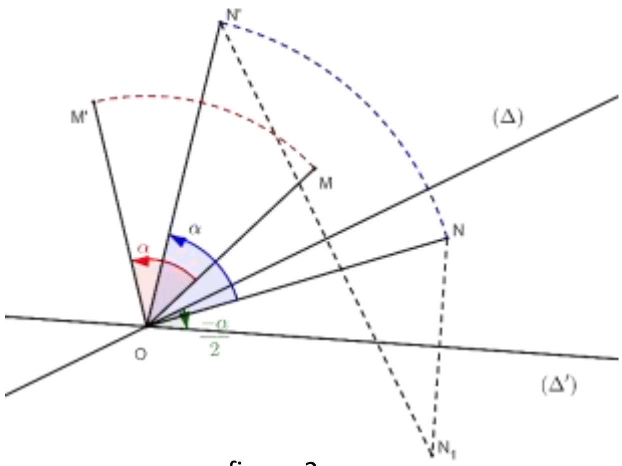


figure 2

② (Δ) une droite quelconque qui passe par O et (Δ') l'image de (Δ) par **la rotation r de centre O et d'angle $\frac{-\alpha}{2}$.**

D'après ce qui précède (composition de deux symétries axiales) $\left(S_{(\Delta)}oS_{(\Delta')}\right)$ est la rotation de centre O et d'angle $2 \times \frac{\alpha}{2}$

Donc : $\boldsymbol{S_{(\Delta)}oS_{(\Delta')} = R}$. (figure 2)

Propriété

Soit R la rotation de centre O et d'angle α ; la rotation R peut-être décomposée comme suite :

- $R = \boldsymbol{S_{(\Delta')}oS_{(\Delta)}}$ **où** (Δ') l'image de (Δ) par **la rotation r de centre O et d'angle : $\frac{\alpha}{2}$.**
- $R = \boldsymbol{S_{(\Delta)}oS_{(\Delta')}}$ **où** (Δ') l'image de (Δ) par **la rotation r de centre O et d'angle: $\frac{-\alpha}{2}$.**

2.2 Propriété d'une rotation.

Puisque toute rotation est la composition de deux symétries axiales on peut en déduire les propriétés suivantes :

- La rotation est une **isométrie (elle conserve les distances) :** **si** $\begin{cases} R(A) = A' \\ R(B) = B' \end{cases} \Rightarrow A'B' = AB$
- La rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs et par suite conserve la linéarité des points
- La rotation conserve le milieu et le barycentre d'un système pondéré.
- La rotation conserve les mesures des angles géométriques
- La rotation conserve les mesures des angles orientés (les deux symétries qui composent la rotation inversent les mesures des angles orientés)

Application :

① Soient O, A, B et C quatre points dans le plan tels que $OA = OB$, construire le point D image de C par la rotation de centre O et qui transforme A puis B.

② Soient A, B, C et D quatre points dans le plan tels que $AC = BD$ et $(AB) \nparallel (CD)$; Déterminer le centre de la rotation qui transforme A en B et C en D.

Propriété :

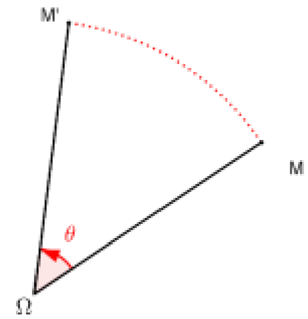
La rotation $R_{(\Omega,\theta)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est la bijection $R_{(\Omega,-\theta)}$

Preuve :

$$R_{(\Omega,\theta)}(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

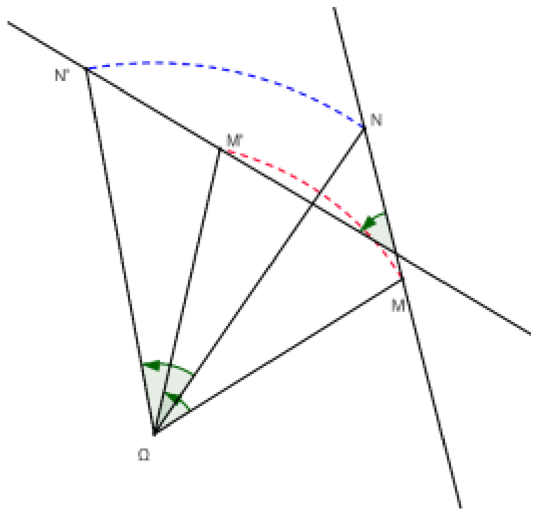
$$\iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}}\right) \equiv -\theta \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff R_{(\Omega,-\theta)}(M') = M$$



Propriété : (Propriété fondamentale de la rotation)

Soit $R_{(\Omega,\theta)}$ la rotation de centre Ω et d'angle θ si $\begin{cases} R(M) = M' \\ R(N) = N' \end{cases}$ alors $\left(\overline{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right) \equiv \theta \ [2\pi]$



Preuve :

On a :

$$\left(\overline{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{M'N'}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \ [2\pi]$$

Car $\left(\overline{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \ [2\pi]$ (la rotation conserve la mesure des angles orientés)

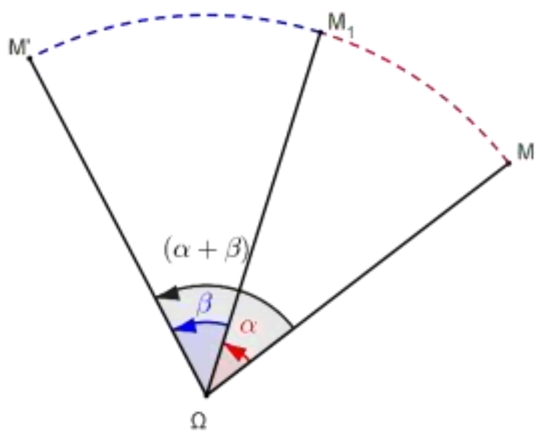
D'où : $\left(\overline{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{M'N'}}\right) \equiv 0 \ [2\pi]$.

III) COMPOSITION DE DEUX ROTATIONS

1) Composition de deux rotations de même centre

Soient $R_{(\Omega,\alpha)}$ et $R'_{(\Omega,\beta)}$ deux rotations de centre Ω ; Posons $R(M) = M_1$ et $R(M_1) = M'$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend right, "R'oR"'] & M_1 \arrow[r, "R'"] & M' \end{tikzcd}$$



$$R(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M_1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}\right) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$R(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M_1 = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \beta \quad [2\pi] \end{cases}$$

On en déduit que : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha + \beta \quad [2\pi] \end{cases}$

Et par suite : $R''_{(\Omega,\alpha+\beta)}(M) = M'$ et $\left(R'_{(\Omega,\beta)} o\, R_{(\Omega,\alpha)}\right)(M) = M'$

Donc $R'_{(\Omega,\beta)} o\, R_{(\Omega,\alpha)} = R''_{(\Omega,\alpha+\beta)}$.

Propriété :

La composition de deux rotations $R_{(\Omega,\alpha)}$ et $R'_{(\Omega,\beta)}$ de même centre Ω est la rotation de centre Ω et d'angle $(\alpha+\beta)$: $\boldsymbol{R'_{(\Omega,\beta)} o\, R_{(\Omega,\alpha)} = R''_{(\Omega,\alpha+\beta)}}$.

Remarque :

On sait que la rotation $R_{(\Omega,\alpha)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est $R'_{(\Omega,-\alpha)}$

$R'_{(\Omega,-\alpha)} o R_{(\Omega,\alpha)} = R''_{(\Omega,0)} = \mathcal{I}d_P$

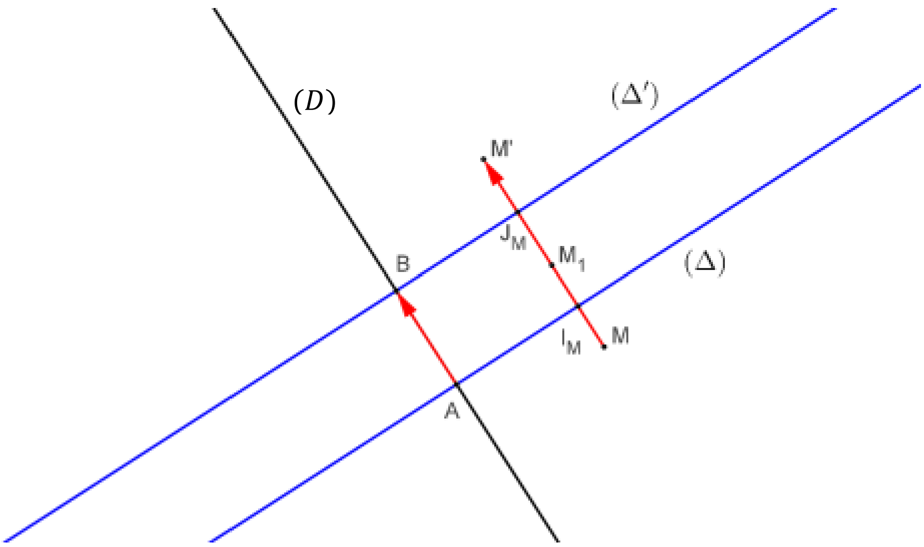
2) Composition de deux rotations de centres différents.

2.1 Composition de deux symétries axiales d'axes parallèles

Soient (Δ) et (Δ') deux droites parallèles dans le plan. $S_{(\Delta)}$ et $S'_{(\Delta')}$ les symétries axiales d'axes respectifs (Δ) et (Δ')

On a :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "S_{(\Delta)}"] \arrow[rr, bend right, "S'o\,S"'] & M_1 \arrow[r, "S'_{(\Delta')}"] & M' \end{tikzcd}$$



Soit (D) une droite perpendiculaire à (Δ)

A et B les intersections respectives de (D) et (Δ) et de (D) et (Δ')

Soient I_M et J_M les milieux respectifs de $[MM_1]$ et $[M_1M']$, on a :

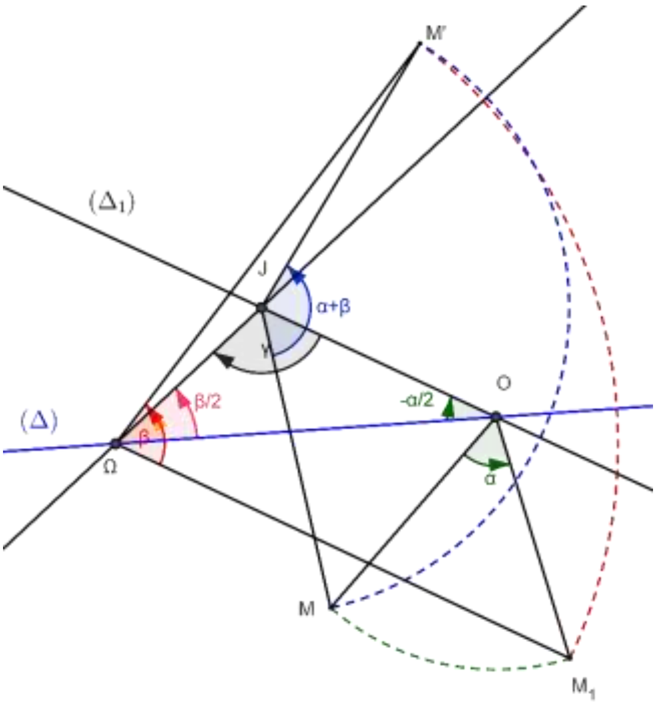
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$$
$$= 2\overrightarrow{I_MM_1} + 2\overrightarrow{M_1J_M}$$
$$= 2\overrightarrow{I_MJ_M}$$
$$= 2\,\overrightarrow{AB}$$

Propriété :

La composition de deux symétries axiales $S_{(\Delta)}$ et $S'_{(\Delta')}$ d'axes parallèles est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B les intersections respectives de (D) et (Δ) et de (D) et (Δ') avec (D) une droite perpendiculaire à (Δ)

si $(\Delta) \parallel (\Delta')$ alors : $S'_{(\Delta')} o S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{AB}}$

2.2 Composition de deux rotations de centres différents.



Soient $R_{(O,\alpha)}$ et $R'_{(\Omega,\beta)}$ deux rotations dans le plan où $\Omega \neq O$ on s'intéresse à la nature de la transformation $R'oR$

On sait que toute rotation peut être décomposée en composée de deux symétries axiales.

Posons $(\Delta) = (O\Omega)$

On a : $R = S_{(\Delta)} o S_{(\Delta_1)}$ où (Δ_1) est l'image de la droite (Δ) par la rotation r_1 de centre O et d'angle $\frac{-\alpha}{2}$

D'autre part :

$R' = S_{(\Delta_2)} o S_{(\Delta)}$ où (Δ_2) est l'image de la droite (Δ) par la rotation r_2 de centre Ω et d'angle $\frac{\beta}{2}$

D'où :

$$R'oR = \left(S_{(\Delta_2)} o S_{(\Delta)}\right) o \left(S_{(\Delta)} o S_{(\Delta_1)}\right)$$
$$= S_{(\Delta_2)} o \left(S_{(\Delta)} o S_{(\Delta)}\right) o S_{(\Delta_1)} \qquad \text{(La composition est associative)}$$
$$= S_{(\Delta_2)} o S_{(\Delta_1)} \qquad (S_{(\Delta)} o S_{(\Delta)} = \mathcal{I}d_{(P)})$$

La nature de $R'oR$ **dépend de la position relative de (Δ) et (Δ')**

❶ Si (Δ) et (Δ') se coupent en J (figure 1)

Dans ce cas $R'oR = S_{(\Delta_2)} o S_{(\Delta_1)}$ est une rotation de centre J et d'angle $2\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)$ modulo 2π où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ_1) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ_2).

Détermination de l'angle de la rotation :2γ

On a : $-\gamma - \frac{-\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \equiv \pi \; [2\pi]$ (lire tous les angles dans le sens trigonométrique)

d'où : $\gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \pi \; [2\pi]$ $(-\pi \equiv \pi[2\pi])$

finalement : $2\gamma = \alpha + \beta \; [2\pi]$ $(2\pi \equiv 0[2\pi])$

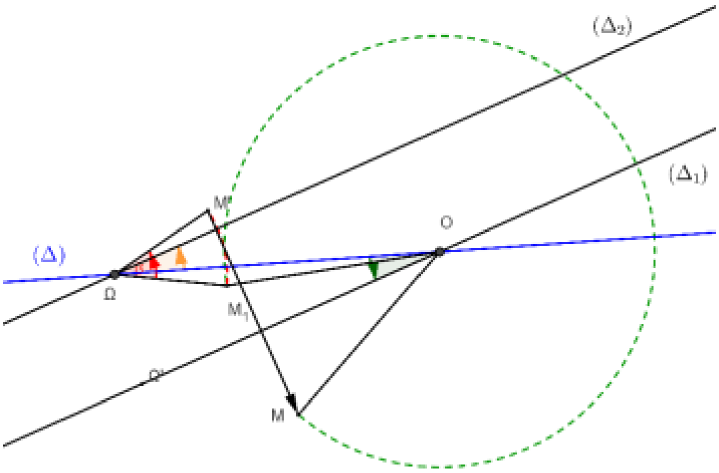
❷ Si (Δ) et (Δ') sont parallèles (figure 2)

Dans ce cas $R'oR = S_{(\Delta_2)}oS_{(\Delta_1)}$ est une translation.

<u>Quand est ce que (Δ) et (Δ') sont parallèles</u> ?

$$(\Delta)//(\Delta') \Leftrightarrow \frac{-\alpha}{2} \equiv \frac{\beta}{2}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta \equiv 0 \quad [2\pi]$$



<u>Théorème :</u>

Soient $R_{(O,\alpha)}$ et $R'_{(\Omega,\beta)}$ deux rotations dans le plan où $\Omega \neq O$

- Si $\boldsymbol{\alpha + \beta \neq 2k\pi}$ alors $R'oR$ est une **rotation d'angle $\boldsymbol{\alpha + \beta}$**
- Si $\boldsymbol{\alpha + \beta = 2k\pi}$ alors $R'oR$ est une **translation dans le plan.**

<u>Remarque :</u>

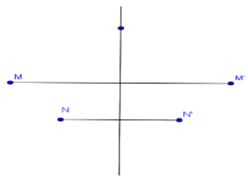
Pour déterminer les éléments de la rotation ou de la translation il est indispensable de maitriser toutes les étapes de la démonstration.

LA ROTATION DANS LE PLAN

I) RAPPELLES ET COMPLEMENTS

1) La symétrie axiale.

Définition/Soit (D) une droite donnée. On dit que le point M' est le symétrique du point M par rapport à (D)



1°si : $M' = M$ si $M \in (D)$

2° (D) est la médiatrice du segment $[MM']$ si $M \notin (D)$.

La relation qui lie le point M à M' s'appelle : **la symétrie axiale d'axe (D) ;** se notre par $S_{(D)}$.

On écrit : $S_{(D)}(M) = M'$.

Remarques :

1)Si $M \notin (D)$ alors $M' = S_{(D)}(M) \neq M$ et (D) est la médiatrice du segment $[MM']$

C'est-à-dire passe par I milieu de $[MM']$ et perpendiculaire à (MM').

2)Si $N \in (D)$ alors $S_{(D)}(N) = N$ on dit que N est invariant par $S_{(D)}$

3)Inversement si un point N est invariant par $S_{(D)}$ alors $N \in (D)$

Propriétés : La symétrie axiale conserve :

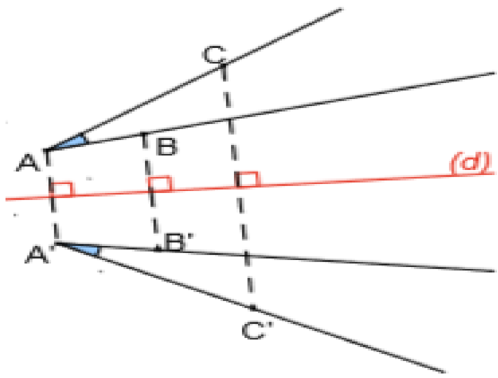
1)Les distances : si $M' = S_{(D)}(M)$ et $N' = S_{(D)}(N)$ alors $MN = M'N'$

2)Le milieu d'un segment et en générale le barycentre d'un système pondéré.

3)les mesures des angles **géométriques**

4)Le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

La symétrie axiale inverse les mesures des



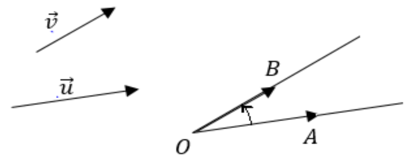
angles orientés : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\left(\overline{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}\right)[2\pi]$

Propriété : La symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est elle-même

Preuve : $S_{(\Delta)}(M) = M' \Leftrightarrow S_{(\Delta)}(M') = M$

2) Les angles orientés

Définition :



Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et soient A et B deux points du plan orienté tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ l'angle orienté des demis droites $[OA)$; $[OB)$ s'appelle aussi angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on le note par : $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ .la mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ est la mesure de l'angle orienté $([OA), [OB))$ et se note par $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

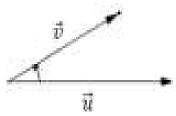
Propriétés :

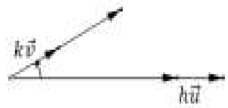
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et h et k deux réels non nuls ; on a :

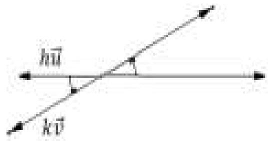
$\left(\overline{\vec{v};\vec{u}}\right) \equiv -\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$

1)si $hk > 0$ alors : $\left(\overline{k\vec{u};h\vec{v}}\right) \equiv \left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$

2)si $hk < 0$ alors : $\left(\overline{k\vec{u};h\vec{v}}\right) \equiv \pi + \left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$







II) LA ROTATION DANS LE PLAN

1) Définition :

1.1 Composition de deux symétries axiales

Activité : Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O ; $M_1 = S_{(\Delta)}(M)$ et $M' = S_{(\Delta')}(M_1)$ et soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \equiv \alpha[2\pi]$ où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ')

1- Quelle est l'application qui transforme M en M'.

2- Montrer que $OM = OM'$

3- Montrer que pour tout M dans le plan on a :

$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) \equiv 2\alpha[2\pi]$

Propriété : Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O ; $S_{(\Delta)}$) et $S_{(\Delta')}$ les symétries axiales d'axes respectifs (Δ) et (Δ')

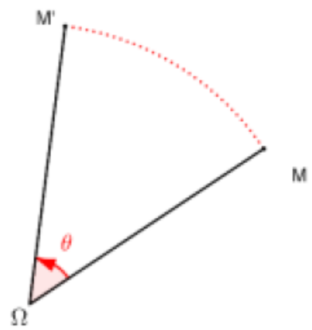
soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \equiv \alpha[2\pi]$ où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ').

L'application $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ transforme le point M en M' tel que : $\begin{cases} OM = 0M' \\ (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{0M'}) \equiv 2\alpha[2\pi] \end{cases}$

L'application $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ s'appelle la rotation de centre $\boldsymbol{O}$ et d'angle $\boldsymbol{2\alpha}$

1.2 Définition de la rotation.

Définition : Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, **la rotation de centre Ω et d'angle θ** est l'application qui transforme tout point M en M' tel que :

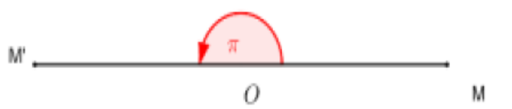


$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$

On la note par : $R(\Omega, \theta)$

Remarque : Si l'angle de la rotation est non nul, son centre est le seul point invariant.

Exemples : 1) La symétrie centrale S_O est la Rotation de centre O et d'angle π



2) L'identité IdP est la rotation d'angle nul.

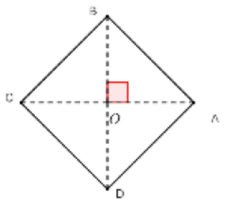
(Tous les points de (P) sont centre de cette rotation)

Exercice1 : ABCD est un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ positif. Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O une rotation de centre O et d'angle α .

1) Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$; $r_A(D)$,

2) Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = B$?

Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = C$?



Solution : $r_A\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r_O(O;\alpha)$

- $r_A(A) = A$ Car le centre est le seul point invariant.
- $r_A(B) = D$ Car $\begin{cases} AB = AD \\ (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$
- $r_A(D) = B'$ avec B' le symétrique de B par rapport a A

2) $r_O(A) = B \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

$r_O(A) = C \Leftrightarrow \alpha = \pi$

2) Propriétés de la rotation

Figure1

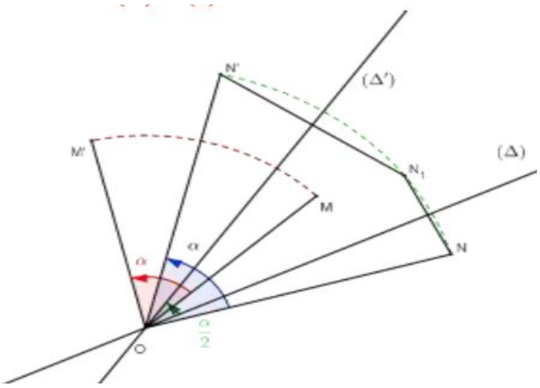
2.1 La décomposition d'une rotation

Soit R la rotation de centre O et d'angle α

1) (Δ) une droite quelconque qui passe par O et (Δ') l'image de (Δ) par la rotation $\boldsymbol{r}$ de centre $\boldsymbol{O}$ et d'angle $\frac{\alpha}{2}$

D'après ce qui précède ($S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)}$) est la rotation de centre O et d'angle $2\frac{\alpha}{2} = \alpha$

Donc : $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = R$. (Figure 1)



2) (Δ) une droite quelconque qui passe par O et (Δ') l'image de (Δ) par

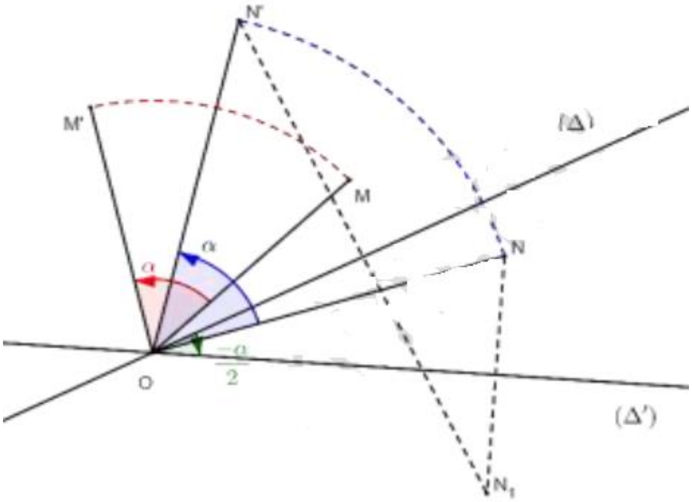
la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\alpha}{2}$

D'après ce qui précède (composition de deux symétries axiales)

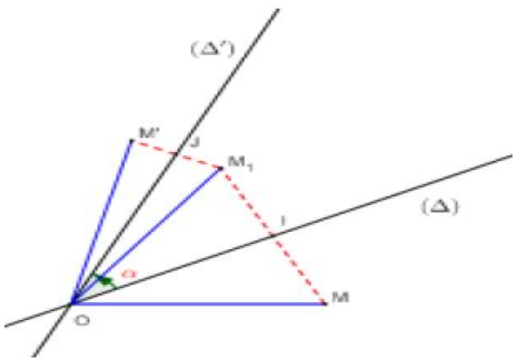
$S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$ est la rotation de centre O

et d'angle $2\frac{\alpha}{2} = \alpha$

Donc : $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')} = R$. (figure 2)



Propriété : Soit R la rotation de centre O et



d'angle α ; la rotation R peut-être décomposée comme suite :

1) $R = S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)}$ **où** (Δ') l'image de (Δ) par la rotation r de centre O et d'angle **:** $\frac{\alpha}{2}$

2) $R = S_{(\Delta)} o S_{(\Delta')}$ **où** (Δ') l'image de (Δ) par la rotation r de centre O et d'angle : $-\frac{\alpha}{2}$

Exercice2 :

ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ positif et Soit

r la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$

Décomposer la rotation r en composée de deux symétries orthogonales

Solution : $r = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$ car $(AD) \cap (AC) = \{A\}$

et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

OU $r = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ car $(AB) \cap (AC) = \{A\}$

et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

2.2 Propriété d'une rotation.

Puisque toute rotation est la composition de deux symétries axiales on peut en déduire les propriétés suivantes :

1)La rotation est une isométrie (elle conserve les distances) : si $R(A) = A'$ et $R(B) = B'$

Alors $A'B' = AB$

2) La rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs et par suite conserve la linéarité des points

3) La rotation conserve le milieu et le barycentre d'un système pondéré.

4) La rotation conserve les mesures des angles géométriques

5) La rotation conserve les mesures des angles orientés (les deux symétries qui composent la rotation inversent les mesures des angles orientés)

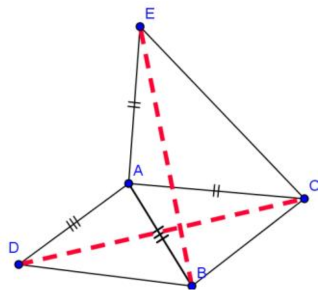
Applications :

Exercice3 : ABC est un triangle.

On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A

1)Montrer que : $BE = CD$

2)Montrer que : $(BE) \perp (CD)$



Solution :

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $\begin{cases} AD = AB \\ \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

donc : $r(D) = B$ ❶

On a : $\begin{cases} AC = AE \\ \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc :❷ $r(C) = E$

Et puisque la rotation conserve les distances

Alors de❶ et ❷ en déduit que $BE = CD$

2)on a $r(D) = B$ et $r(C) = E$

Donc : $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ par suite : $(BE) \perp (CD)$

Exercice4 : ABC est un triangle tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ positif. On construit à l'extérieur les carrés $ABDE$ et $ACFG$

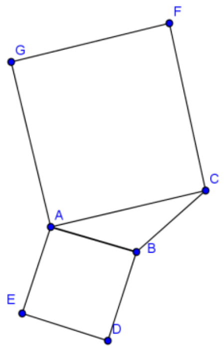
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

déterminer : $r(E)$ et $r(C)$

Et Montrer que : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$

Solution :

on a : $\begin{cases} AE = AB \\ \left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$



Donc : $r(E)=B$ ❶

Et on a : $\begin{cases} AC = AG \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : ❷ $r(C)=G$

Et on a : $r(A)=A$ ❸ car A le centre de la rotation

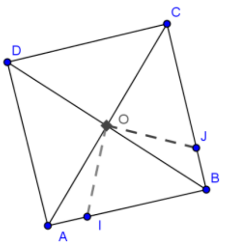
De : ❶et❷ et❸ en déduit que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$

Exercice5 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ positif.

I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Montrer que $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$

Solution : il suffit de montrer que **:** $r(I)=J$????



On pose : $r(I)=I'$

On a : $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(A)=B$

Et on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BI'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❶ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❷

De ❶ et ❷ en déduit que $\overrightarrow{BI'}=\overrightarrow{BJ}$ donc $I'=J$

Donc $r(I)=J$ par suite : $\begin{cases} OI = OJ \\ \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Exercice6 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ positif. Soit (D) la droite parallèle a (BD) et coupe (AD) en M et coupe (AB) en N et Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. E et F les images M et N respectivement Par la rotation r

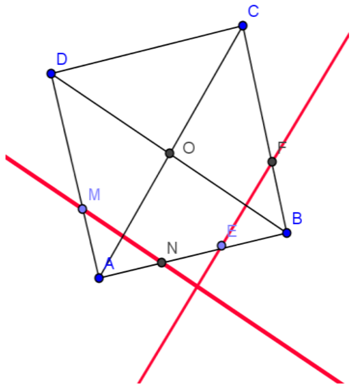
1)Faire une figure et Montrer que $(EF)\perp(MN)$

2)Déterminer l'image de la droite (BD) par la rotation r

3)Montrer que $DN=FA$ et $(EF)\parallel(AC)$

Solution :1)

on a :❶ $r(M)=E$



et : $r(N)=F$ ❷

de ❶ et ❷ en deduit que:

$\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{EF}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc : $(EF)\perp(MN)$

2) on a: $\begin{cases} 0B = 0C \\ \left(\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(B)=C$ ❶

Et on a : $\begin{cases} 0D = 0A \\ \left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(D)=A$ ❷

de ❶ et ❷ en deduit que: $r((BD))=(AC)$

3) $DN=FA$???

on a: ❶ $r(D)=A$ et ❷ $r(N)=F$

donc : $DN=FA$

$(EF)\parallel(AC)$???

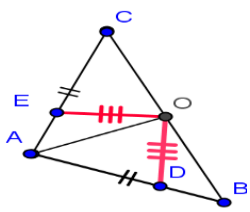
On a : $(MN)\parallel(BD)$ et $r((BD))=(AC)$ et $r((MN))=(EF)$

Donc : $(EF)\parallel(AC)$ car la rotation conserve le parallélisme

Exercice7 : ABC est un triangle isocèles et rectangles en A tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ positif et O le milieu du segment $[BC]$.D et E deux points tels que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

Montrer que ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

Solution : il suffit de montrer que **:** $r(E)=D$????



On pose : $r(E)=E'$

On a : $\begin{cases} OA = OC \\ \left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(C)=A$ ❶

Et on a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$ ❷

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ❸

De ❶et❷et❸: en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❹ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❺

De❹et ❺ en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\overrightarrow{AD}$ cad $E'=D$

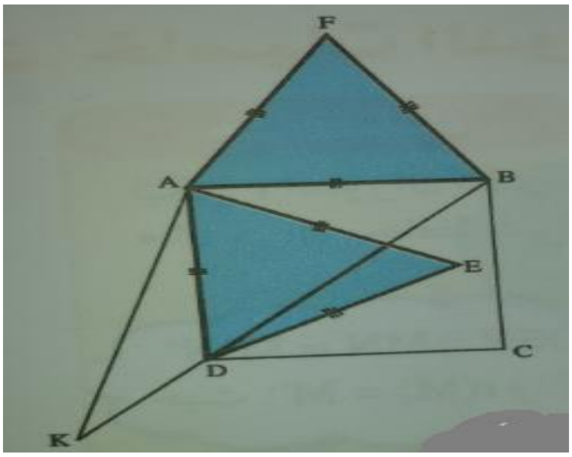
Donc : $r(E)=D$ par suite : $\begin{cases} OE=OD \\ \left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

Exercice8 : ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif. et AED et AFB deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés

Solution : soit r la rotation de centre A et



d'angle $\frac{\pi}{3}$: $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$

et soit K l'antécédent de C par r

On a : $r(B)=F$

Car $\begin{cases} AB=AF \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(D)=E$ Car $\begin{cases} AD=AE \\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(K)=C$

donc : $AK=AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

puisque : $AB=BC$ donc B appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et $AD=DC$ donc D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et on a : $AK=AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

donc : AKC est équilatéral donc K appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

Donc les points : K et B et D sont alignés

Et puisque la rotation conserve les alignement des points alors :les points : E et C et F sont alignés

Propriété : La rotation $R\ (\Omega,\ \theta)$ est une bijection et sa bijection réciproque est la bijection $R\ (\Omega,\ -\theta)$

Preuve : $R\ (\Omega,\ \theta)\ (M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M=\Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M'=\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M}\right)\equiv-\theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(\Omega,-\theta)(M') = M$

Propriété : (Propriété fondamentale de la rotation)

Soit $R\ (\Omega,\ \theta)$ la rotation de centre Ω et d'angle θ

si $R(M) = M'$ et $R(N) = N'$ alors $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}\right)\equiv\theta[2\pi]$

Preuve : On a :

$\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{\Omega M}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{M'N'}\right)[2\pi]$

$\equiv\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)[2\pi]$car : $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{\Omega M}\right)\equiv\left(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{\Omega M'}\right)[2\pi]$

(la rotation conserve la mesure des angles orientés)

D'où : $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{\Omega M}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{M'N'}\right)\equiv 0[2\pi]$

III) COMPOSITION DE DEUX ROTATIONS

1) Composition de deux rotations de même centre

Soient $R(\Omega,\alpha)$ et $R'(\Omega,\beta)$ deux rotations de centre Ω ; Posons $R(M) = M_1$ et $R(M_1) = M'$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend right, "R'\circ R"'] & M_1 \arrow[r, "R'"] & M' \end{tikzcd}$$

$R(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M=\Omega M_1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_1}\right)\equiv\alpha[2\pi] \end{cases}$

$R(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M_1=\Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\beta[2\pi] \end{cases}$

On en déduit que : $\begin{cases} \Omega M=\Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha+\beta[2\pi] \end{cases}$

Et par suite : $R''(\Omega, \alpha+\beta)(M) = M'$
et $(R'(\Omega, \beta) o\ R(\Omega,\alpha))(M) = M'$
Donc $R'(\Omega, \beta)\ o\ R(\Omega, \alpha) = R''(\Omega, \alpha+\beta)$.
Propriété : La composition de deux rotations $R(\Omega, \alpha)$ et $R'(\Omega, \beta)$ de même centre Ω est la rotation de centre Ω et d'angle $(\alpha + \beta)$:
$\boldsymbol{R'(\Omega, \beta)\ o\ R(\Omega,\alpha) = R''(\Omega,\alpha+\beta)}$.
Remarque : On sait que la rotation $R(\Omega, \alpha)$ est une bijection et sa bijection
Réciproque est $R'(\Omega, -\alpha)$
Donc : $R'(\Omega,-\alpha) o R(\Omega,\alpha) = R''(\Omega,0) = \mathcal{I}d_P$

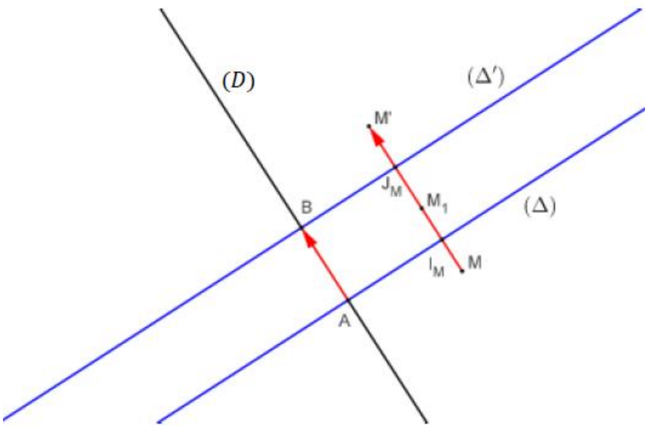
2) Composition de deux rotations de centres différents.

2.1 Composition de deux symétries axiales d'axes parallèles

Soient (Δ) et (Δ') deux droites parallèles dans le plan. $S_{(\Delta)}$ et $S'_{(\Delta')}$ les symétries
Axiales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') On a :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "S_{(\Delta)}"] \arrow[rr, bend right, "S' o\ S"'] & M_1 \arrow[r, "S'_{(\Delta')}"] & M' \end{tikzcd}$$

Soit (D) une droite perpendiculaire à (Δ)
A et B les intersections respectives de (D) et (Δ) et de (D) et (Δ')



Soient I_M et J_M les milieux respectifs de $[MM_1]$ et $[M_1M']$, on a :

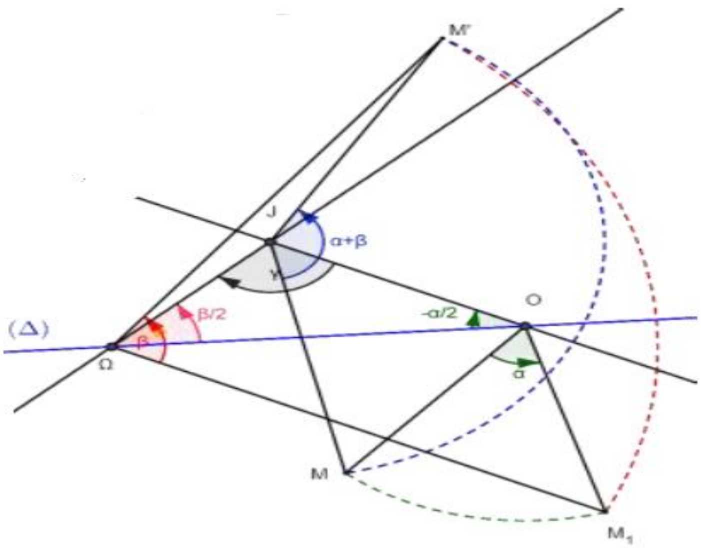
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{I_M M_1} + 2\overrightarrow{M_1 J_M}$

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{I_M J_M} = 2\overrightarrow{AB}$

Propriété : La composition de deux symétries axiales $S_{(\Delta)}$ et $S'_{(\Delta')}$
d'axes parallèles est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B les intersections respectives de (D) et (Δ) et de (D) et (Δ') avec (D) une droite perpendiculaire à (Δ)
si $(\Delta) \parallel (\Delta')$ alors : $S'_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{AB}}$

2.2 Composition de deux rotations de centres différents.

Soient $R(O,\alpha)$ et $R(\Omega,\beta)$ deux rotations dans le plan où $\Omega \neq O$ on
S'intéresse à la nature de la transformation $R' o R$
On sait que toute rotation peut être décomposée en composée
de deux symétries axiales.
Posons $(\Delta) = (O\Omega)$
On a : $R = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}$ où (Δ_1) est l'image de la droite (Δ) par la
rotation r_1 de centre O et d'angle $-\dfrac{\alpha}{2}$
D'autre part : $R' = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}$ où (Δ_2) est l'image de la droite (Δ) par la
rotation r_2 de centre Ω et d'angle $\dfrac{\beta}{2}$
D'où : $R' \circ R = \left(S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}\right) \circ \left(S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}\right)$
$R' \circ R = \left(S_{(\Delta_2)} \circ \left(S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)}\right) \circ S_{(\Delta_1)}\right)$ (La composition est associative)
$R' \circ R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ car $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)} = \mathcal{I}_P$
La nature de $R' o R$ **dépend de la position relative de** (Δ) **et** (Δ')
Si (Δ) et (Δ') se coupent en J (figure 1)



Dans ce cas $R'\circ R=S_{(\Delta_2)}\circ S_{(\Delta_1)}$ est une rotation de centre J et d'angle $2\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ modulo 2π où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ_1) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ_2).

Détermination de l'angle de la rotation :2 γ

On a : $-\gamma-\frac{-\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\equiv\pi[2\pi]$(lire tous les angles dans le sens trigonométrique)

d'où : $\gamma\equiv\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-\pi[2\pi]$ car ($-\pi \equiv \pi[2\pi]$)

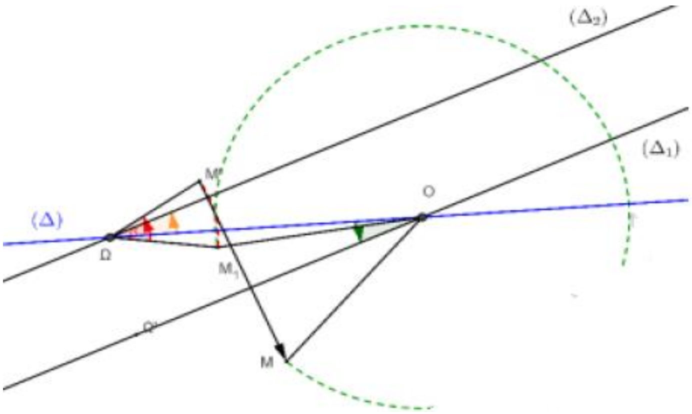
Finalement : $2\gamma = \alpha + \beta\ [2\pi]$ car ($2\pi \equiv 0[2\pi]$)

Si (Δ) et (Δ′) sont parallèles (figure 2)

Dans ce cas $R'\circ R=S_{(\Delta_2)}\circ S_{(\Delta_1)}$ est une translation.

Quand est ce que (Δ) et (Δ′) sont parallèles ?

$(\Delta)\parallel(\Delta')\Leftrightarrow-\frac{\alpha}{2}\equiv\frac{\beta}{2}[2\pi]\Leftrightarrow\alpha+\beta\equiv0[2\pi]$



(Figure 2)

Théorème : Soient $R(O,\alpha)$ et $R(\Omega,\beta)$deux rotations dans le plan où $\Omega \neq O$

1°Si $\boldsymbol{\alpha+\beta\neq 2k\pi}$ alors $R'oR$ est une **rotation d'angle $\boldsymbol{\alpha+\beta}$**

2°Si $\boldsymbol{\alpha+\beta=2k\pi}$ alors $R'oR$ est une **translation dans le plan.**

Remarque : Pour déterminer les éléments de la rotation ou de la translation il est indispensable de maitriser toutes les étapes de la démonstration.

Exercice9 : ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif et Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1)déterminer la nature de la transformation suivante : $S_{(AD)}\circ S_{(AB)}$

1)on considère les rotations suivantes : $r\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r'\left(B;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r''\left(C;-\frac{\pi}{2}\right)$

déterminer la nature des transformations suivante : $r\circ r'$ et $r\circ r''$

Solution :1) $S_{(AD)}\circ S_{(AB)}=r\left(A;2\frac{\pi}{2}\right)=r(A;\pi)=S_A$

2) a) $r\circ r'$ on a $A\neq B$ et $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\neq2k\pi$ donc c'est une rotation $r\left(?;\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=r(?;\pi)$ cad une symétrie central

Déterminons le centre de la rotation $r\circ r'$?

On a : $r\circ r'=S_{(AC)}\circ S_{(AB)}\circ S_{(AB)}\circ S_{(BD)}=S_{(AC)}\circ S_{(BD)}$

Et puisque : $(AC)\cap(BD)=\{O\}$

Alors le le centre de la rotation est le point O

2) b) $r\circ r''$???

on a $A\neq C$ et $\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ donc c'est une translation

Déterminons le vecteur de la translation $r\circ r''$?

On a : $r\circ r''(C)=r\left(r''(C)\right)=r(C)=C'$

Avec : $\begin{cases}AC=AC'\\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc $r\circ r''$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{CC'}$

Exercice10 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$négatif. Soient M, N, P et Q quatre points dans le plan tels que : $\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

la droite (AN) coupe les droites (DM)et (BP) Respectivement en E et F

la droite (CQ) coupe les droites (DM)et (BP) Respectivement en H et G

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$

1)Faire une figure dans le cas ou : $AB=6cm$

2)Montrer que : $r(M)=N$ et $r(N)=P$ et $r(P)=Q$ et $r(Q)=M$

3) a)Montrer que : $r(F)=G$

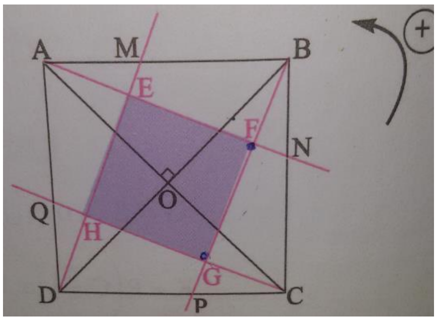
b)en déduire que : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

4)a) calculer : $(r\circ r)(F)$et $(r\circ r)(E)$

4)b) en déduire que :les segments $[EG]$et $[FH]$ont le même milieu

5) Montrer que : EFGH est un carré

Solution :1)



2) on a $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$

$\begin{cases} OB=OC \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(B)=C$

Et puisque $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{r(A)r(M)}=\frac{1}{3}\overrightarrow{r(A)r(B)}$

cad : $\overrightarrow{Br(M)}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et on a : $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

donc : $r(M)=N$

de meme : on montre que : $r(N)=P$ et $r(P)=Q$ et $r(Q)=M$

3) a)on montre que : $r(F)=G$?

Puisque : $r(N)=P$ et $r(A)=B$ alors : $r((AN))=(BP)$

Et Puisque : $r(P)=Q$ et $r(A)=B$ alors : $r((AN))=(BP)$

Et puisque : $r(P)=Q$ et $r(B)=C$ alors : $r((BP))=(QC)$

Donc : $r((AN)\cap(BP))=r((AN))\cap r((BP))$ car r est une application injective

Donc : $r(\{F\})=(BP)\cap(QC)=\{G\}$ par suite : $r(F)=G$

3)b)On a : $r(F)=G$ donc : $\begin{cases} OF=OG \\ \left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OG}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

4)a) On a : $r(C)=D$ et $r(Q)=M$ et $r(B)=C$

donc : $r((CQ))=(DM)$ et puisque : $r((BP))=(QC)$

alors : $r((CQ)\cap(BP))=(DM)\cap(CQ)$ cad :

$r(\{G\})=\{H\}$ donc : $r(G)=H$

on a : $(r\circ r)(F)=r(r(F))=r(G)=H$ et on a :

$r((AN))=(BP)$ et $r((DM))=(AN)$

donc : $r((AN)\cap(DM))=(AN)\cap(BP)$

donc : $r(E)=F$

On a : $(r\circ r)(EF)=r(r(E))=r(F)=G$

4)b)puisque r est une rotation d'angle : $-\pi/2$ alors : $r\circ r$ est une rotation d'angle : $2\times(-\pi/2)=-\pi$ donc $r\circ r$ est une symétrie central et soit K son centre

Puisque on a : $(r\circ r)(F)=H$ et $(r\circ r)(E)=G$

Alors : K est le milieu des segments $[EG]$ et $[FH]$

Donc : les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont les mêmes milieux

4) puisque les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont les mêmes milieux alors : $EFGH$ est un parallélogramme et on a aussi : $r(F)=G$ et $r(E)=F$ donc : $EF=FG$ et $\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{FG}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : EFGH est un carré.

Exercice11 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv \pi/2[2\pi]$. Soient I, J, K et L les milieux respectivement des segments $[AB]$ et $[BC]$ et $[CD]$ et $[DA]$.

1)Déterminer les mesures des angles suivants :

a) $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ b) $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)$ c) $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)$ d) $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$

2)soit $S_{(AB)}$ la symétrie axiale d'axe (AB)

soit $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$ la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$

et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

a) $F=S_{(AC)}\circ S_{(BD)}$ b) $G=S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$

c) $H=r_{(D;\pi)}\circ r_{(A;\pi)}$ d) $K=r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)}\circ r_{(D;\pi)}\circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$

Solution :1) a)les droites (AC) et (BD) et (JL) et (IK) sont des axes de symétries du carré ABCD

On a : $S_{(AC)}(A)=A$ et $S_{(AC)}(C)=C$ et $S_{(AC)}(B)=D$

Donc on deduit que : $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\equiv -\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) On a : $S_{(LJ)}(A)=D$ et $S_{(LJ)}(C)=B$ et $S_{(LJ)}(B)=C$

Donc on deduit que : $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\equiv -\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Puisque la rotation conserve la mesure de l'angle orienté et on a : $r_{(O;\pi)}(A)=C$ et $r_{(O;\pi)}(B)=D$ et $r_{(O;\pi)}(C)=A$ alors : $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

d) puisque : $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ alors : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2)a) $F=S_{(AC)}\circ S_{(BD)}$??

On a : $(AC)\cap(BD)=\{O\}$

Donc F est la composé de deux symétries orthogonaux d'axes qui se coupent en O

Donc : F est rotation de centre O

Et puisque : $(AC)\perp(BD)$ alors : F est une symétrie central de centre O ou $F=r_{(O;\pi)}$

2)b) $G=S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$??

On a : $(AB)\cap(AC)=\{A\}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc G est la composé de deux symétries orthogonaux d'axes qui se coupent en A

Donc : G est rotation de centre A

$G=r_{\left(O;2\frac{\pi}{4}\right)}=r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$

2)c) $H=r_{(D;\pi)}\circ r_{(A;\pi)}$??

Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :

$r_{(D;\pi)}=S_{(DC)}\circ S_{(DA)}$ et $r_{(A;\pi)}=S_{(DA)}\circ S_{(AB)}$

Donc : $H=r_{(D;\pi)}\circ r_{(A;\pi)}=S_{(DC)}\circ S_{(DA)}\circ S_{(DA)}\circ S_{(AB)}$

Et puisque : $S_{(DA)}\circ S_{(DA)}=I_P$ alors : $H=S_{(DC)}\circ S_{(AB)}$

Et puisque : $(DC)\parallel(AB)$ alors : H est une translation et puisque : $A\in(AB)$ et D la projection du point D sur la droite (DC) alors :

$S_{(DC)}\circ S_{(AB)}=t_{2\overrightarrow{AD}}$ donc : $H=t_{2\overrightarrow{AD}}$

d) $K=r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)}\circ r_{(D;\pi)}\circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$??

Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :

$r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)}=S_{(CA)}\circ S_{(CD)}$ et $r_{(D;\pi)}=S_{(DC)}\circ S_{(DA)}$ car

$\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Et on a : $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}=S_{(AD)}\circ S_{(AC)}$

Donc :

$K=S_{(CA)}\circ S_{(CD)}\circ S_{(DC)}\circ S_{(AD)}\circ S_{(AC)}=S_{(CA)}\circ I_P\circ I_P\circ S_{(AC)}$

$K=S_{(CA)}\circ S_{(AC)}=I_P$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

VECTEURS DE L'ESPACE

I) DEFINITION : Vecteur de l'espace

Définition : Soient A, B deux points dans l'espace $\mathcal{E}$

Si A et Bsont distinctes alors Pour tout point M dans l'espace $\mathcal{E}$ il existe un point unique N dans l'espace $\mathcal{E}$ tel que :MABN est un parallélogramme et est écrit : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$

Si A et B sont confondues alors : $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{MN}$ (vecteur nul)

Remarques : Si O un point dans l'espace $\mathcal{E}$ alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un point unique M dans l'espace $\mathcal{E}$ tel que : $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$

L'application : $\varphi : \mathcal{E} \to V_3$

$M \mapsto \overrightarrow{OM}=\vec{u}$ est une bijection

L'ensemble des vecteurs se note V_3

Un vecteur non nul $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

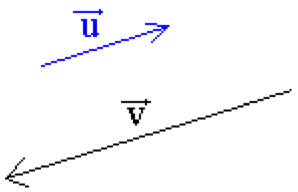
Sa direction : c'est la direction de la droite (AB)

Son sens : de A a B

Sa norme : $\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens, la même norme.

Deux vecteurs peuvent avoir la même direction de tels vecteurs sont **colinéaires**



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$ ssi ABNM est un parallélogramme

II) LES OPERATIONS DANS V_3 .

1) L'addition.

Définition : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de V_3 ; Soient les points O : A ; B

tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OC}$

la somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OD}$ tel que : OBDC est un parallélogramme

$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$

Propriété :L'addition dans V_3 a les propriétés suivantes :

L'addition dans V_3 est **commutative** :

$\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

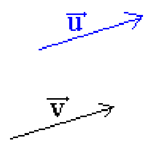
L'addition dans V_3 est **associative** $\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ et $\forall \vec{w} \in V_3$

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{v}+(\vec{u}+\vec{w})$

$\vec{0}$ Est **l'élément neutre pour l'addition dans** V_3 . $\forall \vec{u} \in V_3$: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

Tout vecteur $\vec{u}$ de V_3 admet un **opposé** noté $-\vec{u}$: $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

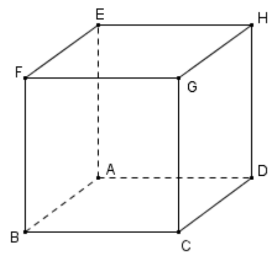
Puisque la somme de de deux vecteurs vérifie les quatre propriétés précédentes on dit que : $(V_3$, +) est un groupe commutatif.



Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de V_3 la différence des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la somme de $\vec{u}$ et de $(-\vec{u})$ et se note : $\vec{u}-\vec{v}$

et on a donc : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

Exemple :



ABCDEFGH un cube on pose :

Simplifier : $\vec{t}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FH}$

Solution :

On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\vec{t}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})+\overrightarrow{FH}$

(Relation de Chasles)

$\vec{t}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}$ Car

$\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{BD}$ (FHDB est un parallélogramme)

$\vec{t}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{AE}=\vec{0}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AE}$

2) Produit d'un vecteur par un réel.

Définition : $\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul et on pose : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

sur la droite (AB) il existe un seul point C tel que $\overrightarrow{AC}=k\vec{u}$

Le vecteur $\vec{v}=k\overrightarrow{AB}=k\vec{u}$ s'appelle le produit du réel k et du vecteur $\vec{u}$
on pose pour tout k dans $\mathbb{R}$:
$k\vec{0}=\vec{0}$ et $\forall\vec{u}\in V_3$ $0\vec{u}=\vec{0}$
on a : $k\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$ ou $k=0$
Propriété : Le produit d'un vecteur par un réel a les propriétés suivantes :
$\forall\vec{u}\in V_3$ et $\forall\vec{v}\in V_3$ et $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\forall\beta\in\mathbb{R}$
1) $\alpha\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ 2) $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$
3) $1\vec{u}=\vec{u}$ 4) $\alpha\left(\beta\vec{u}\right)=(\alpha\beta)\vec{u}$

Puisque (V_3 , +) est un groupe commutatif et le produit d'un réel par un vecteur vérifie les quatre propriétés précédente on dit que :
(V_3 , +, .) est un espace vectoriel réel.

Remarque :
$\forall\vec{u}\in V_3$ et $\forall\vec{v}\in V_3$ et $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\forall\beta\in\mathbb{R}$
1) $\alpha\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\alpha\vec{u}-\alpha\vec{v}$ 2) $(\alpha-\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}-\beta\vec{u}$
3) $\alpha\left(-\beta\vec{u}\right)=(-\alpha)\left(\beta\vec{u}\right)=-\alpha\beta\vec{u}$

III) VECTEURS COLINEAIRES.

1) Vecteur colinéaires

Définition : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que :
$\vec{v}=k.\vec{u}$

Remarque : Tout vecteur est colinéaire avec lui-même : $\vec{u}=k.\vec{u}$

Tout vecteur est colinéaire avec $\vec{0}$
car : $\vec{u}$. 0= $\vec{0}$

On a : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $(AB)\,||\,(CD)$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls

A et B et C non alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

A et B et C non alignés $\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}/\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

Exemple : ABCDEFGH un cube et K milieu du segment $[EF]$ et L milieu du segment $[CF]$ et M un point du segment $[CD]$ tel que :
$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ Montrer que : $(ML)\,||\,(DK)$

Solution : en utilisant la Relation de Chasles

On a : $\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{CL}-\overrightarrow{CM}$ et puisque : L milieu du segment $[CF]$ Alors : $\overrightarrow{CL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

donc : $\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)$ (1)

D'autre part On a : $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FK}$ et
$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{CD}$ Donc : $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{CD}$
et puisque : K milieu du segment $[EF]$

Alors : $\overrightarrow{FK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$ donc : $\overrightarrow{FK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (car : $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{CD}$)

Donc : $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (2)

De (1) et (2) on a : $\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DK}$

donc $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{ML}$ sont colinéaires
Donc : $(ML)\,||\,(DK)$

Propriété : Si on a : $a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{0}$ avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Exemple : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires
Déterminer les réels x et y tels que :
$x\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)+y\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)=2\vec{u}+5\vec{v}$

Solution : $x\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)+y\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)=2\vec{u}+5\vec{v}\Leftrightarrow$

$(x+y-2)\vec{u}+(2x+3y-5)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-2=0\\2x+3y-5=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\2x+3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

2) Droite vectorielle

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, l'ensemble des vecteurs colinéaires avec le vecteur $\vec{u}$ s'appelle : **la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}$ et se note $\Delta_{\vec{u}}$**

$\Delta_{\vec{u}}=\left\{\vec{v}\in V_3/\exists k\in\mathbb{R}/\vec{v}=k\vec{u}\right\}$

$\Delta_{\vec{u}}=\Delta_{\vec{v}}\Leftrightarrow\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires
alors $\Delta_{\vec{u}}\cap\Delta_{\vec{v}}=\left\{\vec{0}\right\}$

3) Détermination vectorielle d'une droite

Définition : Soient $\vec{u}$ un vecteur non nulle et A un point de l'espace affine $\mathcal{E}$. L'ensemble des points M dans l'espace $\mathcal{E}$ qui vérifient $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$

où k est un réel s'appelle **la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.** On la note par $D(A;\vec{u})$:

$$D(A;\vec{u})=\{M\in\varepsilon / \exists k\in\mathbb{R} / \overrightarrow{AM}=k\vec{u}\}$$

Remarque :

- Le couple $(A, \vec{u})$ détermine un repère sur la droite $D(A;\vec{u})$
- Tout vecteur non nul et colinéaire avec $\vec{u}$ est aussi vecteur Directeur de la droite $D(A;\vec{u})$

IV) VECTEURS COPLANAIRES.

1) vecteurs coplanaires.

Rappelle :

Un plan est défini par :

- Trois points non alignés
- Deux droites sécantes ou strictement parallèles.
- Une droite et un point extérieur à cette droite.

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et A un point l'espace

on pose $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$

On dit que : les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi les points A, B ; C et D sont coplanaires

Propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs dans l'espaces vectoriel

Les vecteurs $\vec{u}$, v et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'ils existent deux réels x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

Remarque : si $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires alors les vecteurssont $\vec{w}$ et $\vec{v}$ et $\vec{u}$ coplanaires

2) Plan vectoriel

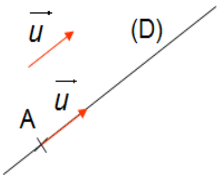
Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires ; l'ensemble des vecteurs $\vec{w}$ dans V_3 qui s'écrivent de la forme : $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$ où x et y sont des réels s'appelle le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$

3) Détermination vectoriel d'un plan.

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires

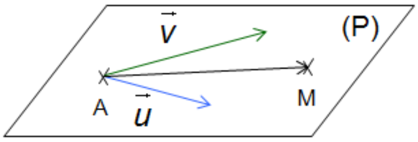
et A un point de l'espace $\mathcal{E}$

l'ensemble des point M dans l'espace qui vérifient $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ est le plan qui passe par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, on le note par : $P(A;\vec{u};\vec{v})$



$$P(A;\vec{u};\vec{v})=\{M\in\varepsilon / \exists x\in\mathbb{R} : \exists y\in\mathbb{R} / \overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}\}$$

Le triplet $R(A;\vec{u};\vec{v})$ s'appelle un repère du plan (P) et le couple (x, y) s'appelle les coordonnées du point M dans le plan (P) muni du repère R



Exemple : ABCDEFGH un parallélépipède de centre O et I milieu du segment $[AD]$

on pose $\overrightarrow{EG}=\vec{u}$ $\overrightarrow{FC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{IO}=\vec{w}$

Montrer que : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Solution : On a : $\overrightarrow{EG}=\vec{u}$ et on a $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$

On considère le triangle ADF

et puisque : I milieu du segment $[AD]$

et O milieu du segment $[FD]$

on trouve : $\overrightarrow{IO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ Donc : $\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{AK}$

et puisque : K milieu du segment $[AF]$

cad $\overrightarrow{AK}=\vec{w}$

et On considérons le point L tel que AFCL est un parallélogramme on trouve : $\vec{v}=\overrightarrow{AL}$

Alors : $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AK}=\vec{w}$

Donc : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Exemple : ABCDEFGH un cube

M milieu du segment $[HE]$ et et N milieu du segment $[HG]$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils coplanaires ? justifier

Solution : On considérons le triangle HEG et puisque : M milieu du segment $[HE]$ N milieu du segment $[HG]$ on trouve : $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{MN}$

et puisque $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$: alors $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MN}$ donc

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et par suite Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

V) PARALLELISME DANS L'ESPACE

1) Parallélisme de deux droites

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et
et A et B deux points de l'espace

1) $D\left(A;\vec{u}\right) \parallel D\left(B;\vec{v}\right) \Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ sont colinéaires

2) A et B et C et D des points tels que : $A \neq B$
et $C \neq D$: $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

Exercice 01: $ABCD$ un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points Q ; P ; N ; M tel que :

$\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AD}$ $\quad \overrightarrow{CQ} = 3\overrightarrow{CB}$ $\quad \overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$

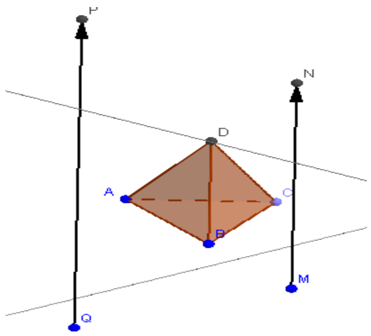
1)Tracer une figure

2)Ecrire $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$

3)En déduire que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

4)Que peut-on dire des droites (MN) et (PQ)

Solution :1)



2) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = 2\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} = -3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{CB} = -3\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}\right)$

$\overrightarrow{PQ} = -3\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\right) = -3\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = -3\overrightarrow{BD}$

3) on a $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ ❶

on a $\overrightarrow{PQ} = -3\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ ❷

de❶ et ❷ on trouve : $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ donc $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

donc : $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

4)on a $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

Donc (MN) et (PQ) sont parallèles

Exercice02 : $ABCD$ un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points K ; L tel que :

$\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Montrer que $(LD) \parallel (EK)$

Solution : pour montrer que $(LD) \parallel (EK)$ il suffit de montrer que : $\overrightarrow{LD}$, $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires ??

On a : $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ on utilisant la Relation de Chasles

Donc : $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{EK} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ et

puisque : $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AE}$

Donc : $\overrightarrow{EK} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Alors : $\overrightarrow{EK} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ❶

On a : $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

et puisque : $\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ ❷

de ❶ et ❷ on déduit que : $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LD}$

donc : $(LD) \parallel (EK)$

2) Parallélisme d'une droite et d'un plan.

Propriété : La droite $D\left(A;\vec{u}\right)$ et le plan P $P\left(B;\vec{v};\vec{w}\right)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

$D\left(A;\vec{u}\right) \parallel P\left(B;\vec{v};\vec{w}\right) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$

Exemple : ABCDEFGH un cube
K est le symétrique du point D par rapport a H
Montrer que $(AK) \parallel (BCG)$

Solution :on a : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CG}$

donc : Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont coplanaires

on déduit que : $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CG}$

donc : $(AK) \parallel (BCG)$

3) Parallélisme de deux plans

Propriété : Deux plans $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ et $Q\left(B;\vec{u}';\vec{v}'\right)$ sont parallèles si et seulement si
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}'$ sont coplanaires et $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont coplanaires aussi

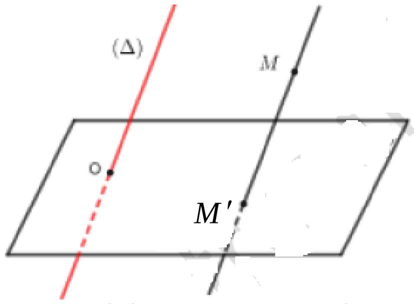
Remarque : Une seule condition n'est pas suffisante

Géométrie analytique de l'espace

I)LE REPERE DANS L'ESPACE et LA BASE DANS V_3

1) La projection sur un plan parallèlement à une droite.

1.1 Définition : Considérons un plan (P) dans l'espace $(\mathcal{E})$ et (Δ) une droite qui coupe (P) en O. Soit M un point dans l'espace $(\mathcal{E})$; on sait que par M passe une Seule droite parallèle à (Δ), donc elle coupe le plan (P) en un seul point M'. Le point M' s'appelle la projection du point $\boldsymbol{M}$ sur le plan $(\boldsymbol{P})$ Parallèlement à la droite $(\boldsymbol{\Delta})$.



Ainsi ; on définit l'application :

p: $(\mathcal{E}) \rightarrow (P)$

$M \mapsto M' = p(M)$

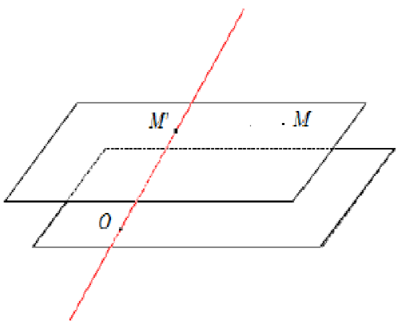
L'application p s'appelle la projection sur le plan $(\boldsymbol{P})$ parallèlement à $(\boldsymbol{\Delta})$

1.2 Propriété de la projection $\boldsymbol{p}$.

- Si on remplace la droite (Δ) par une droite qui lui est parallèle, la projection p ne varie pas, ce qui nous permet de dire que p est la projection sur le plan $(\boldsymbol{P})$ dans la direction de $(\boldsymbol{\Delta})$.
- L'application p est surjective, mais pas injective.
- L'image de la droite (Δ) par l'application p est le singleton $\{O\}$.
- L'ensemble des points invariants par la projection p est le plan (P).

2) La projection sur une droite parallèlement à un plan.

2.1 Définition : Considérons un plan (P) dans l'espace $(\mathcal{E})$ et (Δ) une droite qui coupe (P)en O. Soit M un point dans l'espace $(\mathcal{E})$; on sait que par M passe un seul plan parallèle à (P), donc il coupe la droite (Δ) en un seul point M'.



Le point M' s'appelle la projection du point $\boldsymbol{M}$ sur la droite $(\boldsymbol{\Delta})$ Parallèlement au plan $(\boldsymbol{P})$.

Ainsi ; on définit l'application :

q: $(\mathcal{E}) \rightarrow (\Delta)$

$M \mapsto M' = q(M)$

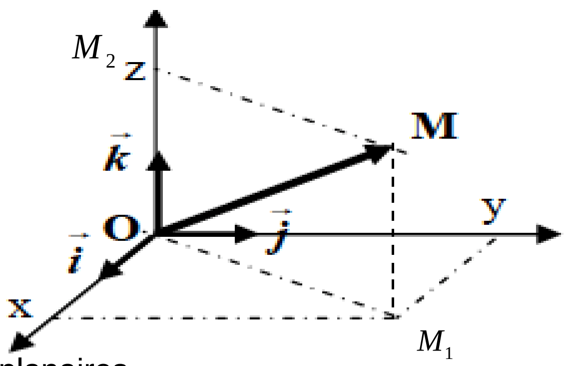
L'application q s'appelle la projection sur la droite $(\boldsymbol{\Delta})$ Parallèlement au plan $(\boldsymbol{P})$.

2.2 Propriété de la projection $\boldsymbol{q}$.

- Si on remplace le plan (P) par un plan qui lui est parallèle, la projection q ne varie pas, ce qui nous permet de dire que q est la projection sur la droite $(\boldsymbol{\Delta})$ dans la direction de $(\boldsymbol{P})$.
- L'application q est surjective, mais pas injective.
- L'ensemble des points invariants par la projection q est la droite (Δ).

3) Le repère dans l'espace $(\mathcal{E})$

Soit O un point dans l'espace $(\mathcal{E})$ et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires



On pose : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$

Soient M un point dans l'espace, la droite qui passe par M et parallèle a (OK) coupe le plan (OIJ) en M_1

On a : $M_1 \in (OIJ)$ donc $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont non coplanaires

Donc : il existe un et un seul couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ tel que : $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$ donc : $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i} + y\vec{i}$

la droite qui passe par M et parallèle au plan (OIJ) coupe la droite (OK) en M_2

On a : $M_2 \in (OK)$ donc $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires
Donc il existe un et un seul réelle z tel que :
$\overrightarrow{OM_2} = z\overrightarrow{OK} = z\vec{k}$
Et puisque OM_1MM_2 est un parallélogramme
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ et par suite :
$(\forall M \in (\mathcal{E}))(\exists! (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ / $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$

Propriété et définition: Soit O un point dans l'espace $(\mathcal{E})$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires :
$(\forall M \in (\mathcal{E}))(\exists! (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ / $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$
Le quadruplet $R(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ s'appelle **u**n repère dans l'espace $(\mathcal{E})$ **;** on écrit $M(x, y, y)$
- Le réel x s'appelle l'abscisse du point M dans le repère R
- Le réel y s'appelle l'ordonnée du point M dans le repère R
- Le réel z s'appelle la cote du point M dans le repère R

Remarque : Pour définir un repère de l'espace il suffit d'un point et de 3 vecteurs non coplanaires

4) La base dans l'espace vectoriel V_3 .

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires et $\vec{u}$ un vecteur donné
Si O est un point dans l'espace $(\mathcal{E})$ alors on sait qu'il existe un seul point M dans $(\mathcal{E})$ tel que :
$\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et d'après la propriété précédente :
$\exists! (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ / $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$
On peut conclure donc qu'il existe un unique triplet (x, y, z) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$

Propriété et définition: Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires dans V_3
On a : $(\forall \vec{u} \in V3)(\exists! (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ /
$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$
Le triplet $B(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ s'appelle une base de l'espace vectoriel V_3 on écrit $\vec{u}(x;y;z)$
- Le réel x s'appelle la première composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base β
- Le réel y s'appelle la deuxième composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base β
- Le réel z s'appelle la troisième composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base β

Remarque : Pour définir une base de l'espace vectoriel V_3 , il suffit de trois vecteurs non coplanaires.

5) Les opérations dans V_3 .

- $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs dans l'espace vectoriel V_3 muni de la base $B(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on a donc : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{i} + z'\vec{k}$ par suite :
$\vec{u} + \vec{v} = (x+x')\vec{i} + (y+y')\vec{j} + (z+z')\vec{k}$
D'où : $\vec{u} + \vec{v}(x+x'; y+y'; z+z')$
De même on montre que si k est un réel alors : $k\vec{u}(kx;ky;kz)$
Si I est le milieu du segment $[AB]$
alors : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Dans l'espace muni d'un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$),
Si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; x_B - x_A; z_B - z_A)$
$\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont égaux si et seulement si :x = x' , y = y' et z = z'.

II) CONDITIONS ANALYTIQUE DE COLINEARITE DE DEUX VECTEURS.

Soient $B(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de V_3 et $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ Deux vecteurs non nuls.
On sait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$ et ceci est équivalent à :
$x' = kx$ et $y' = ky$ et $z' = kz$
et puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$ on peut supposer l'un des réels non nul x par exemple
et on aura: $k = \frac{x'}{x}$ (1) et $y' = \frac{x'}{x}y$ (2)
et $z' = \frac{x'}{x}z$ (3)

ce qui est équivalent à :

$k=\frac{x'}{x}$ et $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$

et de (2) et (3) on peut conclure :

$y'z=\frac{x'}{x}yz$ et $z'y=\frac{x'}{x}zy$

d'où : $yz'-zy'=0$ et finalement :
$yz'-zy'=0$ et $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$ ce qui se traduit par : $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$

et $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=0$ etLes trois déterminants s'appelle

les déterminants extraits de $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$

Remarque : les déterminants extraits on les trouve par la suppression des lignes
Donc : Si deux vecteurs sont colinéaires alors tous les déterminants extraits sont nuls.
Remarquer que : cette propriété reste vraie si l'un des vecteurs est nul.

Inversement : Soients $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls.
Tels que : $yz'-zy'=0$ et $xy'-yx'=0$
et $xz'-zx'=0$

montrons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

et puisque $\vec{u}\neq\vec{0}$ on peut supposer l'un des réels non nul, y par exemple on aura :

$y'=\frac{y'}{y}y$ et $x'=\frac{y'}{y}x$ et $z'=\frac{y'}{y}z$ donc, on posant :

$k=\frac{y'}{y}$ on obtient : $y'=ky$ et $x'=kx$ et $z'=kz$

ce qui est équivalent à : $\vec{v}=k\vec{u}$

par suite $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Théorème : Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls.

les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement tous les déterminants extraits de

$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$ sont nuls c'est-à-dire :

$yz'-zy'=0$ et $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$

Remarques : $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont des triplets proportionnels.

Exemple: $\vec{u}(1;-1;2)$ et $\vec{v}(-2;2;-4)$ et $\vec{w}(1;1;2)$

1)étudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

2)étudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$

Solution :1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0$ et $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-4+4=0$

et $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=4-4=0$ Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

2) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2-2=-4\neq0$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont non colinéaires

Exercice : Soit l'espace $(\mathcal{E})$ muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$; et considérons les points

$A(1;2;1)$ et $B(2;1;3)$ et $C(-1;4;-3)$ et $D(2;3;3)$

1. étudier l'alignement des points A, B et C
2. étudier l'alignement des points A, B et D

Solution :1) $\overrightarrow{AB}(2-1;1-2;3-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AC}(-1-1;4-2;-3-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}(-2;2;-4)$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=4-4=0$ et $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-4+4=0$ et $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0$

Donc A, B et C sont alignés

2) $\overrightarrow{AB}(2-1;1-2;3-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AD}(2-1;3-2;3-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}(1;1;2)$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2-2=-4\neq0$ Donc A, B et D ne sont pas alignés

Exercice : Soit l'espace $(\mathcal{E})$ muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$; et considérons les points

A (1, −2,1) ; B (−1,0,1) ; C (0,1,0) et E (7,6,1)
1. Vérifier que les points A, B et C sont non alignés
Que pouvez-vous dire des points A, B et E.
2. Déterminer le point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer le centre de ce parallélogramme.

III) CONDITIONS ANALYTIQUE DE COPLANARITE DE TROIS VECTEURS.

Définition : Soient $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base de V_3

$\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$ trois vecteurs

le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ se note : $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ et on a :

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

(On a développé suivant la première colonne)

Exemple :

$$\begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=+1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}+(-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-4+12-9$$

$$=-1$$

Méthode de Sarrus (Pierre-Frédéric Sarrus 1798-1861)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{matrix}=(-2-6-12)-(3+2-24)=-1$$

Théorème : Soient $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base de $\mathcal{V}3$ et $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$ trois vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=0$

Remarque : Pour calculer le déterminant de 3 vecteurs, on développe suivant n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne
en tenant compte des signes : +−+

Exemple : $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base et Soient

$\vec{u}(2;-4;3)$ et $\vec{v}(-1;1;2)$ et $\vec{w}(3;1;-1)$

trois vecteurs

Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ?

Solution :

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=2(-1-2)+4(1-6)+3(-1-3)=-38\neq 0$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

Exercice : Considérons les vecteurs

$\vec{u}(2m+1;3;2-m)$ et $\vec{v}(-1;2;3)$ et $\vec{w}(-3;1;2)$

déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

Solution :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=0$$

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} 2m+1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2-m & 3 & 2 \end{vmatrix}=(2m+1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+(2-m)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ssi $1(2m+1)-21+5(2-m)=0 \Leftrightarrow -3m=10 \Leftrightarrow m=-\frac{10}{3}$

Application : Résolution des systèmes de 3 équations à 3 inconnus :

Résoudre dans $\mathbb{R}3$ le système :

$$\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x-y+3z=3 \\ -x+2y+z=-1 \end{cases}$$

1) On calcul:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-15\neq 0$$

On a : $\Delta \neq 0$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-25}{-15}=\frac{5}{3}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{2}{15}$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2&1&2\\1&-1&3\\-1&2&-1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-12}{-15}=\frac{4}{5}$$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{5}{3};\frac{-2}{15};\frac{4}{5}\right)\right\}$

IV) Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ soit la droite (D) passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$

$$M(x;y;z)\in(D)\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x=x_A+k\times a\\ y=y_A+k\times b\\ z=z_A+k\times c\end{cases}\quad (k\in\mathbb{R})}$$

point d'attache — vecteur directeur

Ce système est appelé représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$

Remarques : Prenons l'exemple de la droite (D) de représentation $\begin{cases}x=-3+2k\\ y=-k\\ z=4+4k\end{cases}\quad (k\in\mathbb{R})$:

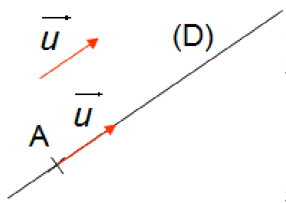
1) Le réel k est appelé le paramètre.
A chaque point de (D) correspond une et une seule valeur de k et inversement.
D'un point de vue pratique, B (3 ; 2 ; 5) appartient à (D) si et seulement si il existe k tel que :

$$\begin{cases}3=-3+2k\\ 2=-k\\ 5=4+4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=3\\ k=-2\\ k=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Ce qui est impossible donc B n'appartient pas à (D).
2) Le paramètre est souvent également noté à l'aide de la variable t.
3) Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.
Il suffit en effet de changer de point d'attache ou de vecteur directeur pour obtenir un système de représentation différent.
4) la droite (D) passe par le point $A(-3;0;4)$ et $\vec{u}(2;-1;4)$ est un vecteur directeur de (D)

V) deux équations cartésiennes d'une droite dans l'espace

Propriété et définition : l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ et (D) la droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$



Si $abc\neq 0$ alors : le système : $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ s'appelle deux équations cartésiennes de la droite(D)

Si $ab\neq 0$ et $c=0$ alors : le système : $\begin{cases}\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}\\ z-z_A=0\end{cases}$ s'appelle deux équations cartésiennes de la droite(D)

Preuve :soit (D) la droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$ et soit $M(x;y;z)\in(D)$

$$M(x;y;z)\in(D)\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{AM}=k\vec{u}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x-x_A=ka\\ y-y_A=kb\\ z-z_A=kc\end{cases}$$

Si $abc\neq 0$ donc $a\neq 0$ et $b\neq 0$ et $c\neq 0$ alors : $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}=k$

Si $ab\neq 0$ et $c=0$ alors : $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}$ et $z-z_A=0$

Exemple : soient les points $A(-1;1;0)$ et $B(2;-1;1)$ et $C(0;-1;2)$

1)Déterminer deux équations cartésiennes de la droite(AB)

Est-ce que point $C(0;-1;2)\in(AB)$?

Solution : $\overrightarrow{AB}(3;-2;1)$

Donc : $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ les deux équations cartésiennes de la droite(AB)

On remplace les coordonnées de C dans les équations de la droite(AB)

Et puisque : $\frac{0+1}{3}\neq\frac{-1-1}{-2}$ donc $C\notin(AB)$

Exercice : soit la droite (D) définie par les deux équations cartésiennes : $\frac{2x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{3-4z}{4}$

1) déterminer un point et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D)

2) déterminer une représentation paramétrique de la droite (D)

Solution : 1) $\frac{2x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{3-4z}{4}\Leftrightarrow$

$$\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3}=\frac{y-(-1)}{4}=\frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{-1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{6}=\frac{y-(-1)}{8}=\frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{-2}$$

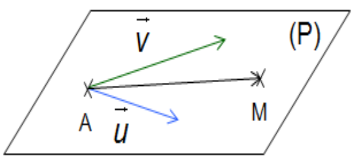
(D) la droite passant par le point $A\left(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{4}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(6;8;-2)$

1)une représentation est : $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+6k \\ y=-1+8k \\ z=\frac{3}{4}-2k \end{cases}\quad (k\in\mathbb{R})$:

V/) Représentation paramétrique d'un PLAN dans l'espace

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) .

Soit $P(A;\vec{u};\vec{v})$ le plan qui passe par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a;b;c)$, $\vec{v}(a';b';c')$



$M\in P(A;\vec{u};\vec{v})\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}:\exists k'\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{AM}=k\vec{u}+k'\vec{v}$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+k'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x=x_A+k\times a+k'\times a' \\ y=y_A+k\times b+k'\times b' \\ z=z_A+k\times c+k'\times c' \end{cases}$$

point d'attache | premier vecteur directeur | second vecteur directeur

Ce système est appelé représentation paramétrique du plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$

Exemple1 : déterminer une représentation paramétrique du plan passant par les points : $A(2;-1;-3)$ et $B(0;1;4)$ et $C(-3;0;0)$

Solution : ABC est le plan passant par $A(2;-1;-3)$ et $\overrightarrow{AB}(-2;2;7)$ et $\overrightarrow{AC}(-5;1;3)$

Sont deux vecteurs directeurs

Donc une représentation paramétrique du plan ABC est : $\begin{cases} x=2-2t-5t' \\ y=-1+4t+t' \\ z=-3+7t+3t' \end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$ et $(t'\in\mathbb{R})$

Le dernier système est une représentation paramétrique du plan (ABC) c'est à dire que les coordonnées (x ; y ; z) d'un point quelconque du plan dépendent de paramètres qui sont ici t et t', mais il existe d'autre représentation paramétrique pour ce plan.

Exemple2 : déterminer les coordonnées d'un point de ce plan ainsi que les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan suivant définit par une représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x=3+2t-4s \\ y=2+t-s \\ z=5t-5s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3+2\,t-4\,s \\ y=2+1\,t-1\,s \\ z=0\;+5\,t-5\,s \end{cases}$$

vous pouvez alors en déduire que c'est un plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\quad \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\quad \vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

V/) EQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN dans l'espace

Définition :

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) .

Soit $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ le plan qui passe par $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\alpha;\beta;\delta)$, $\vec{v}(\alpha';\beta';\delta')$ l'équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous forme: $ax+by+cz+d=0$ Avec : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

Exemple : Déterminer l'équation cartésienne du plan $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ qui passe par $A(1;-3;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-2;4;1)$ et $\vec{v}(-1;0;2)$

solution : $M(x;y;z)\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y+3;z-1)$

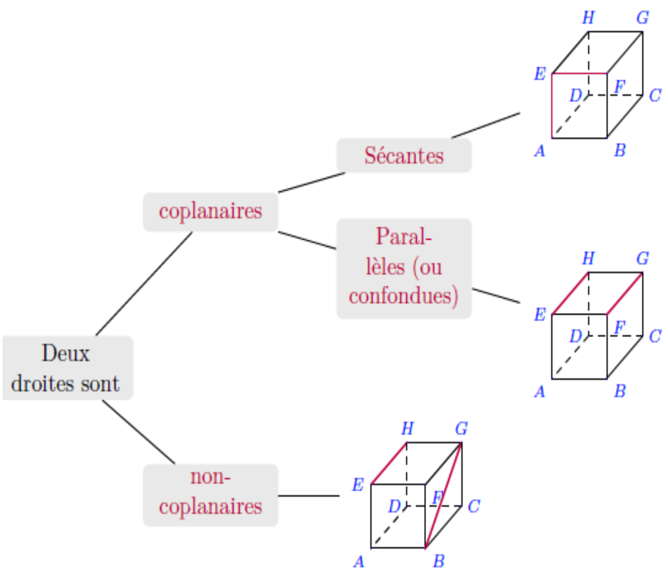
$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & -2 & -1\\ y+3 & 4 & 0\\ z-1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(x-1)\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$8(x-1)+3(y+3)+4(z-1)=0\Leftrightarrow 8x-8+3y+9+4z-4=0$$

$$(P):8x+3y+4z-3=0$$

V//) Position relative de deux droites dans l'espace

1/ Position relative de deux droites dans l'espace

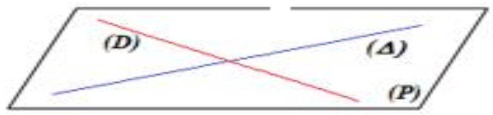


Soient $D\left(A;\vec{u}\right)$ et $\Delta\left(B;\vec{v}\right)$

On a 3 positions pour (D) et (Δ) :

Position n° 1

❶ (D) et (Δ) se coupent en un point



Ce cas se réalise lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires et le système formé par les représentations des deux droites admet une solution

Exemple1 Soient les droites (D_1) et (Δ_1) de représentations paramétriques respectives

$$(D_1)\begin{cases}x=-2+k\\ y=2-2k\\ z=4+k\end{cases}(k\in\mathbb{R})\qquad(\Delta_1)\begin{cases}x=-1-t\\ y=2t\\ z=1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (Δ_1) et (D_1)

Solution : on a : $\vec{u}(1;-2;1)$ un vecteur directeur de (D_1) et $\vec{v}(-1;2;1)$ un vecteur directeur de (Δ_1)

et puisque : $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq0$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de (Δ_1) et (D_1)

Donc on va résoudre le système suivant :

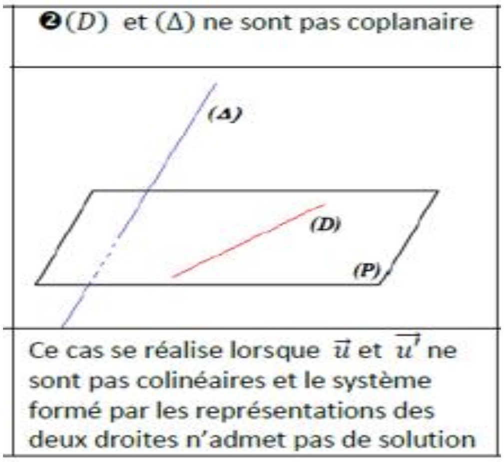
$$\begin{cases}-2+k=-1-t\\ 2-2k=2t\\ 4+k=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+k=1\\ t+k=1\\ t-k=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+k=1\\ t-k=3\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2t=4\\ t-k=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\ k=-1\end{cases}$ On remplaçant $t=2$ dans l'équation paramétriques de (Δ_1) On trouve :

$\begin{cases}x=-3\\ y=4\\ z=3\end{cases}$ Donc les droites (Δ_1) et (D_1) se coupent en $E(-3;4;3)$

Position n° 2: deux droites peuvent être non coplanaires. Donc Il n'existe alors aucun plan

contenant ces deux droites.
Pour le montrer, il suffit de montrer que les deux droites ne sont ni parallèles, ni sécantes.



Exemple2 : Soient les droites (D_2) et (Δ_2) de représentations paramétriques respectives

$$(D_2)\begin{cases} x=1+k \\ y=-2-k \\ z=2+3k \end{cases} (k\in\mathbb{R}) \quad (\Delta_2)\begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=3+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D_2) et (Δ_2)

Solution :on a $\vec{u}(1;-1;3)$ un vecteur directeur de (D_2) et : $\vec{v}(2;-1;1)$ un vecteur directeur de (Δ_2)

et puisque : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc les droites (D_2) et (Δ_2) sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de (Δ_1) et (D_1)

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1+k=2t \\ -2-k=1-t \\ 2+3k=3+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-2t=-1 \\ k-t=-3 \\ 3k-t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-2t=-1 \\ k-t=-3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-5 \\ t=-2 \end{cases}$ mais le couple $(k;t)=(-5;-2)$ ne vérifie pas l'équation $3k-t=1$

Car : $3(-5)-(-2)=-13\neq 1$

Donc le système n'admet pas de solutions

Donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non coplanaires

Methode2 : on a (D_2) passe par $A(1;-2;2)$ et de vecteur directeur de $\vec{u}(1;-1;3)$

et : (Δ_2) passe par $B(0;1;3)$ et de vecteur directeur de

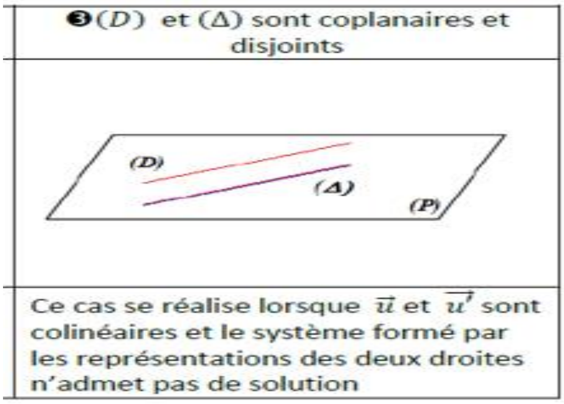
$\overrightarrow{AB}(-1;3;1)$ on va voir si les Les vecteurs $\vec{u}(1;-1;3)$ et $\vec{v}(2;-1;1)$ et $\overrightarrow{AB}(-1;3;1)$ sont coplanaires ??

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}\right)=14\neq 0$ Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont non coplanaires

Donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non coplanaires

Position n° 3



Exemple3 : Soient les droites (D_3) et (Δ_3) de représentations paramétriques respectives

$$(D_3)\begin{cases} x=1+k \\ y=-2 \\ z=2-1k \end{cases} (k\in\mathbb{R}) \qquad (\Delta_3)\begin{cases} x=2t \\ y=1 \\ z=3-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D_3) et (Δ_3)

Solution : on a (D_3) passe par $A(1;-2;2)$ et de vecteur directeur de $\vec{u}(1;0;-1)$

et : (Δ_3) passe par $B(0;1;3)$ et de vecteur directeur de $\vec{v}(2;0;-2)$

on peut voir que les Les vecteurs $\vec{u}(1;0;-1)$ et $\vec{v}(2;0;-2)$ sont colinéaires

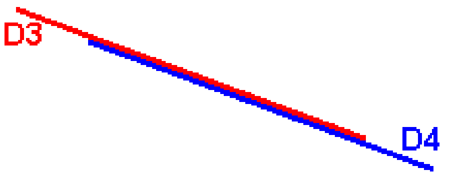
Car : $\vec{v}=2\vec{u}$ Donc les droites (D_3) et (Δ_3) sont parallèles

On remarque aussi que : $A\notin(\Delta_3)$

car $\begin{cases} 1=2t \\ -2=1 \\ 2=3-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}=t \\ -\frac{1}{2}=t \\ 2=3-2t \end{cases}$

Donc les droites (D_3) et (Δ_3) sont strictement parallèles

Position n° 4 ; les droites sont confondues



Exemple4 : L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soient les droites (D_3) et (D_4) de représentations paramétriques respectives

$$(D_3)\begin{cases} x=k-3 \\ y=-k+3 \\ z=2 \end{cases} (k\in\mathbb{R}) \qquad (D_4)\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=2t-1 \\ z=2 \end{cases}$$

$(t\in\mathbb{R})$

Etudier la position relatif de (D_3) et (D_4)

Solution : on a (D_3) passe par $A(-3;3;2)$ et de vecteur directeur de $\vec{u}(1;-1;0)$

et (D_4) passe par $B(1;-1;2)$ et de vecteur directeur de $\vec{v}(-2;2;0)$

on peut voir que les Les vecteurs $\vec{u}(1;-1;0)$ et $\vec{v}(-2;2;0)$ sont colinéaires

Car : $\vec{v}=-2\vec{u}$ Donc les droites (D_3) et (D_4) sont parallèles

On remarque aussi que :

$A\in(D_4)$ car $\begin{cases} -3=-2t+1 \\ 3=2t-1 \\ 2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=t \\ 2=t \\ 2=2 \end{cases}$

Donc les droites (D_3) et (D_4) sont confondues

Exercice : Soient les droites (D) et (D') de représentations paramétriques respectives :

$$(D)\begin{cases} x=k \\ y=1-k \\ z=3-2k \end{cases} (k\in\mathbb{R}) \qquad (D')\begin{cases} x=2+6k' \\ y=-3-12k' \\ z=4+3k' \end{cases} (k'\in\mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D) et (D')

Solution :

M(x;y;z) appartient à (D) et (D') si et seulement si il existe k et k' réels tels que :

$$\begin{cases} k=2+6k' \\ 1-k=-3-12k' \\ 3-2k=4+3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2+6k' \\ 1-2-6k'=-3-12k' \\ 3-2k=4+3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ k'=-\frac{1}{3} \\ 3-2k=4+3k' \end{cases}$$

Cette dernière égalité sert à vérifier notre résultat :

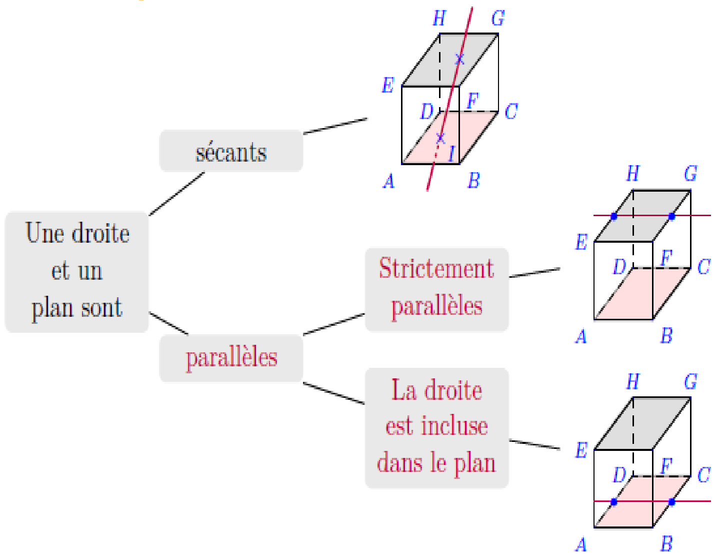
3 - 2k = 3 - 0 = 3 et 4 + 3k' = 4 - 1 = 3.

$k=0$ et $k'=-\frac{1}{3}$ donc (D) et (D') possèdent un unique point commun C

Dont les coordonnées peuvent être calculées à l'aide de k ou k' : $C(0;1;3)$

(D) et (D') sont alors contenues dans le plan (P) passant par C et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1;-1;-2)$ et $\vec{v}(6;-12;3)$

2/ Position relative d'une droites et d'un plan dans l'espace



L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Proposition1 : La droite $D(A;\vec{u})$ et le plan $P(B;\vec{v};\vec{w})$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et dans le cas contraire la droite coupe le plan

Proposition2 : soit la droite (D) passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ et un plan (P) d'équation cartésienne: $ax+by+cz+d=0$

(D) // (P) si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$

(D) coupe (P) si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$

Preuve : une représentation paramétrique de La droite $D(A;\vec{u})$ est $(D)\begin{cases}x=k\alpha+x_A\\ y=k\beta+y_A\\ z=k\gamma+z_A\end{cases}(k\in\mathbb{R})$

M(x;y;z) appartient à (D) et (P) si et seulement si il existe k tels que :

$$\begin{cases}x=k\alpha+x_A\\ y=k\beta+y_A\\ z=k\gamma+z_A\\ ax+by+cz+d=0\end{cases}$$

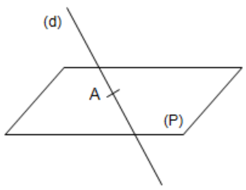
donc : $a(k\alpha+x_A)+b(k\beta+y_A)+c(k\gamma+z_A)+d=0$

donc : $k(a\alpha+b\beta+c\gamma)=-(ax_A+by_A+cz_A)-d$

- **si :** $a\alpha+b\beta+c\gamma k\neq 0$ alors :

$$k=\frac{-(ax_A+by_A+cz_A)-d}{a\alpha+b\beta+c\gamma}$$

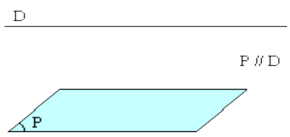
donc (D) coupe (P) en un point unique



- **si :** $a\alpha+b\beta+c\gamma k=0$ et $ax_A+by_A+cz_A+d=0$ alors : $(D)\subset(P)$
- **si :** $a\alpha+b\beta+c\gamma k=0$ et $ax_A+by_A+cz_A+d\neq 0$

alors : $(D)\cap(P)=\varnothing$

Donc (D) strictement parallèles a (P)



Exemple1 : Soient la droite (D_1) de représentations paramétrique $(D_1)\begin{cases}x=-4t+2\\ y=2t-1\\ z=3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

et le plan (P_1) d'équation cartésienne:

$(P_1):3x+2y+z+1=0$

Etudier la position relatif de (D_1) et (P_1)

Solution :

on a (D_1) est de vecteur directeur $\vec{u}(-4;2;3)$

Et on a : $3(-4)+2\times2+3\neq 0$

donc (D_1)) coupe (P_1) en un point unique

on a $M(x;y;z)\in(D_1)\cap(P_1)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}/$

$$\begin{cases}x=-4t+2\\ y=2t-1\\ z=3t\\ 3x+2y+z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4t+2\\ y=2t-1\\ z=3t\\ 3(-4t+2)+2(2t-1)+3t+1=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\ x=-2\\ y=1\\ z=3\end{cases}$ donc (D_1)) coupe (P_1)

au point $A(-2;1;3)$

Exemple2 :

Soient la droite (D_2) de représentations paramétrique $(D_2)\begin{cases}x=-4+5t\\ y=-1-2t\\ z=-3+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

et le plan (P_2) d'équation cartésienne:

$(P_1):x+3y+z+4=0$

Etudier la position relatif de (D_2) et (P_2)

Solution :on a (D_2) est de vecteur directeur $\vec{u}(5;-2;1)$ et on a : $5+3(-2)+1=0$

donc (D_2) est parallèle a (P_2)

on va déterminer l'intersection de (D_2) et (P_2)

Donc on va résoudre le système suivant :

on a $M(x;y;z)\in(D_2)\cap(P_2)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=-4+5t\\ y=-1-2t\\ z=-3+t\\ x+3y+z+4=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4+5t\\ y=-1-2t\\ z=-3+t\\ (-4+5t)+3(-1-2t)+-3+t+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4+5t\\ y=-1-2t\\ z=-3+t\\ -6=0\end{cases}$$

Donc le système n'admet pas de solutions

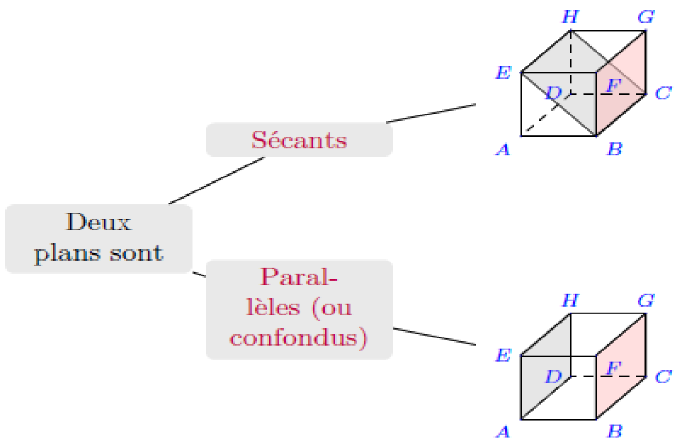
donc (D_2) ne coupe pas le plan (P_2)

Donc (D_2) strictement parallèles a (P_2)

Remarque1 : si $(D)//(P)$ alors Tout vecteur directeur de (D) est alors un vecteur directeur de (P)

Remarque2: Il existe plusieurs façons de montrer qu'une droite (D) est incluse dans un plan (P). Une première méthode consiste à montrer dans un premier temps que (D) est parallèle à (P) puis dans un deuxième temps qu'un point de (D) appartient à (P).

3)position relative de deux plans :

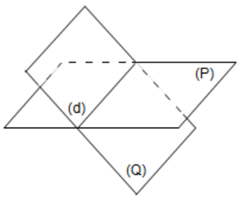


Proposition : Soient deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes:

$(P): ax+by+cz+d=0$ et

$(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$

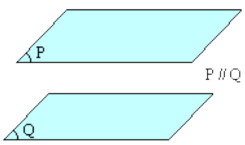
1) (P) et (P') se coupent si et seulement si



$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$

et leur intersection est une droite

2) $(P)//(P')$ si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0$



si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$

$(P)//(P') \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

Exemple1 :

L'espace est muni d'un repère $(O;\ \vec{i};\vec{j};\ \vec{k})$

Soient deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes:

$(P): 2x+y-z+2=0$ et $(P'): 3x+y+4z-1=0$

Etudier la position relatif de (P) et (P')

Solution : on a : $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc (P) et (P') se coupent suivant une droite (D)

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et (P')

(D) a pour système d'équations cartésiennes :

$M(x;y;z) \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ 3x+y+4z-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+y=z-2 \\ 3x+y=-4z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3z+3 \\ y=-5z-8 \end{cases}$ et on pose $(z=t)$

Donc : $(D)\begin{cases} x=3+3t \\ y=-8-5t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$

(D) est la droite qui passe par le point $A(-3;-8;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-5;1)$

Exemple2 :

L'espace est muni d'un repère $(O;\ \vec{i};\vec{j};\ \vec{k})$

Soient deux plans (Q) et (Q') d'équations cartésiennes:

$(Q): (1-\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + z - \sqrt{2} = 0$ et

$(Q'): (\sqrt{2}-2)x - y + \sqrt{2}z - 2 = 0$

Etudier la position relatif de (Q) et (Q')

Solution : on a : $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}-2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ et

$\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$

donc (Q) // (Q')

et puisque : $-\sqrt{2} \neq -2$

(Q) et (Q') sont strictement parallèles

4/ Droite d'intersection de deux plans

Il est souvent demandé dans les exercices de trouver la représentation paramétrique d'une droite qui est l'intersection de deux plans.
Ou encore de montrer qu'une droite dont on connaît la représentation paramétrique est l'intersection de deux plans donnés. Voyons les différentes stratégies qu'il est possible d'employer :

Exemple: Soient les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives :

$(P): x-y-3z-2=0 \quad (Q): 2x+y+z-1=0$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et de (Q).
Solutions :(D) a pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x-y-3z-2=0 \\ 2x+y+z-1=0 \end{cases}$$

Il va donc falloir être capable de passer de ce système à une représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x-y-3z-2=0 \\ 2x+y+z-1=0 \end{cases}$$

Une technique consiste à prendre une des coordonnées comme paramètre,
par exemple puis à exprimer les deux autres coordonnées en fonction de z.

$$\begin{cases} x=y+3z+2 \\ 2(y+3z+2)+y+z-1=0 \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3z+2 \\ 3y+7z+3=0 \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-\frac{7}{3}z+3z+2 \\ y=-1-\frac{7}{3}z \\ z=z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\frac{2}{3}z \\ y=-1-\frac{7}{3}z \\ z=z \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de (D) est

donc : $(D)\begin{cases} x=1+\frac{2}{3}k \\ y=-1-\frac{7}{3}k \\ z=0+1k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

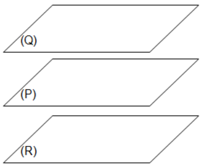
(D) passe donc par le point A (1 ; -1 ; 0) et a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{2}{3};\frac{-5}{3};1\right)$

5/ Intersection de trois plans(méthodes)

Soient (P), (Q) et (R), 3 plans de l'espace.

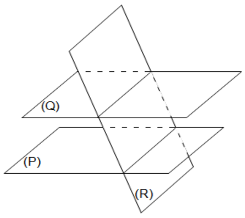
Cas n° 1 : les plans (P) et (Q) sont parallèles.

Sous cas n° 1.1 : (P) et (R) sont parallèles.



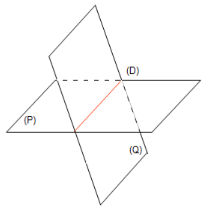
Alors, (R) est également parallèle à (Q).
L'intersection entre (P), (Q) et (R) est alors l'ensemble vide.

Sous cas n° 1.2 : (P) et (R) sont sécants.



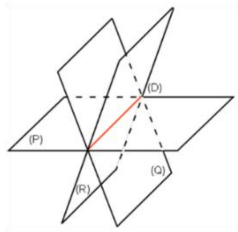
Alors, (R) et (Q) sont également sécants
L'intersection entre (P), (Q) et (R) est alors l'ensemble vide.

Cas n° 2 : les plans (P) et (Q) sont sécants suivant la **droite** (D)



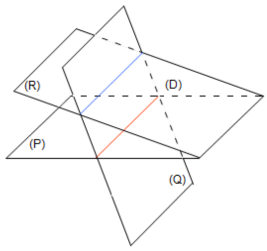
Sous cas n° 2.1 : (D) est parallèle à (R).

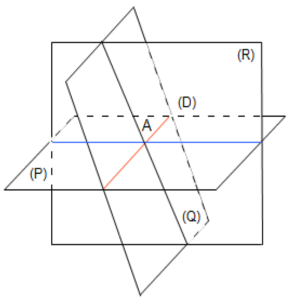
Sous cas n° 2.1.1 : (D) est contenue dans (R).
L'intersection entre (P), (Q) et (R) est alors la droite (D).



Sous cas n° 2.1.2 : (D) est strictement parallèle à (R).
L'intersection entre (P), (Q) et (R) est alors l'ensemble vide.

Sous cas n° 2.2 : (D) et (R) sont sécants.





L'intersection entre (P) et (Q) est alors un point.
Pour trouver les coordonnées de ce point, on pourra commencer par trouver une représentation paramétrique de (D) puis, chercher le point d'intersection entre (D) et (R).

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

PRODUIT SCALAIRE de l'espace

Leçon : PRODUIT SCALAIRE dans l'espace

Présentation globale

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

1) Le produit scalaire de deux vecteurs l'espace

Définition 1 :Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Et soient A ; B et C trois points l'espace tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ dans le plan ABC, noté $\vec{u}.\vec{v}$

remarques: 1) $\vec{u}.\vec{v}$ est un **nombre réel** définit par

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

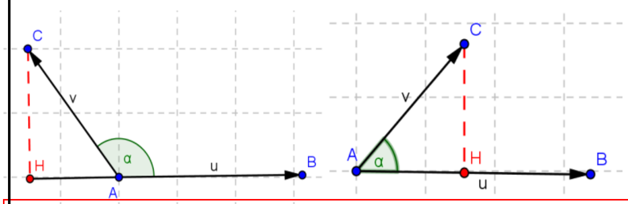
Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et alors

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AH} \times \overline{AB}$ c a d

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH \times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AH \times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire

2)toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont aussi vraies dans l'espace

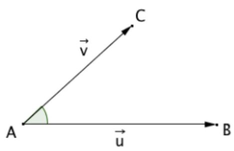


Définition2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$, dans le cas contraire.

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".



2°Vecteurs orthogonaux

Définition :On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux dans l'espace si $\vec{u}.\vec{v}=0$

Et on écrit : $\vec{u}\perp\vec{v}$

Exemples : Soit ABCDEFGH un cube de côté a

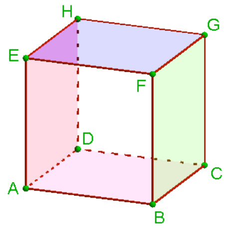
Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}$

Réponse :1)calcul de $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}$:on a : $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EA}$ car ABCDEFG cube

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AE}=-AE\times AE=-a^2$

(car E est le projeté orthogonales de F sur (AE)



2)calcul de $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}$:

Puisque ABCD est un carré

on a : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

donc : $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BA}=-AB\times AB=-a^2$

(car B est le projeté orthogonales de F sur (AB)

3)calcul de $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}$: Puisque DCGH est un carré

on a : $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}=0$ ($\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{DC}$)

4)calcul de $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}$:

$\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{HD}=0$ ($\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{EH}$)

donc : $\overrightarrow{EH}\perp\overrightarrow{GC}$

5)calcul de $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}$:

On a : $(AE)\perp(ABC)$ donc $(AE)\perp(DB)$ car $(DB)\subset(ABC)$ donc : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}=0$

3) Produit scalaire et norme

3-1 Définition: Soit un vecteur $\vec{u}$ de l'espace.et deux points A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB.

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$$

$$\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2=\overrightarrow{AB}^2=AB^2$$

3-2) propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace., on a

1) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

2) $\vec{u}.(k\vec{v})=k\vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.

3) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

4) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

5) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

6) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

7) $\|\vec{u}\|=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$

8) $\|k\vec{u}\|=|k|\|\vec{u}\|$

9) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

10) $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

11) $|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

12)Soit A, B et C trois points de l'espace.

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Application : 1) Soit A , B et C des points de l'espace tel que $AB=\sqrt{5}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3$

Calculer $(-2\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{BC}$:

$(-2\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}^2-2\times3$

$=2AB^2-2\times3=2\times5-6=4$

2) sachant que $\|\vec{u}\|=2$ et $\|\vec{v}\|=3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=5$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$:

On a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(5^2-4-9^2\right)=6$

4) repère orthonormé de l'espace base orthonormé de l'espace

Soit O un point de l'espace

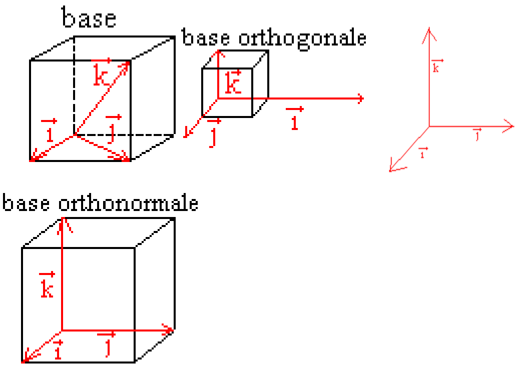
On pose : $\vec{i}=\overrightarrow{0I}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{0J}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{0K}$

Définition1 : on dit qu'un triplet $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$de vecteur dans l'espace est base orthonormé si et seulement si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires et normés et orthogonaux deux a deux c a d : $\|\vec{i}\|=1$ et $\|\vec{j}\|=1$ et $\|\vec{k}\|=1$ et $\vec{i}.\vec{j}=0$ et $\vec{j}.\vec{k}=0$ et $\vec{i}.\vec{k}=0$

Définition2 : on dit que $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est un repère orthonormé dans l'espace et seulement si $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est une base orthonormé

Exemples :

(La figure représente un cube dans les trois cas)



Coordonnées d'un vecteur relativement à une base :

si $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est une base orthonormé et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace

Il existe un triplet unique (x ; y ; z) de réels tels que : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

Ce triplet (x ; y ; z) est appelé coordonnées du vecteur $\vec{u}$ relativement à la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

Voyons maintenant comment exprimer le produit scalaire dans l'espace à l'aide des coordonnées des vecteurs.

5) analytique du produit scalaire dans l'espace :

$\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ Est une base orthonormé (dans tout ce qui va suivre)

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ deux vecteurs de l'espace

$\vec{u}.\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$

$\vec{u}.\vec{v}=xx'\vec{i}\vec{i}+yy'\vec{j}\vec{j}+zz'\vec{k}\vec{k}$ car $\vec{i}.\vec{j}=0$ et $\vec{j}.\vec{k}=0$ et $\vec{i}.\vec{k}=0$

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ puisque: $\left\|\vec{i}\right\|=1$ et $\left\|\vec{j}\right\|=1$ et $\left\|\vec{k}\right\|=1$

On a donc la propriété suivante :

Propriété :

Dans une base orthonormé on considère deux vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ alors :

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

. $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Exemple : si, dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}(1;2;3)$ et $\vec{v}(5;-1;4)$ alors

$\vec{u}.\vec{v}=1\times5+2\times(-1)+3\times4=15$

et $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, soient A et B de coordonnées respectives $(x_A;y_A;z_A)$ et $(x_B;y_B;z_B)$

alors

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

L'ensemble $\mathscr{E}$ des points

6) L'ensemble des points dans l'espace tq : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$

Propriété :

soit $\vec{u}(a;b;c)$ un vecteur et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $k\in\mathbb{R}$

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ dans l'espace tq : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ c'est un plan d'équation qui s'écrit sous la forme : $ax+by+cz+d=0$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

RPEUVE : $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A;z-z_A)$

$\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=k$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-(ax_A+by_A+cz_A+k)=0$

L'ensemble des points dans l'espace tq :

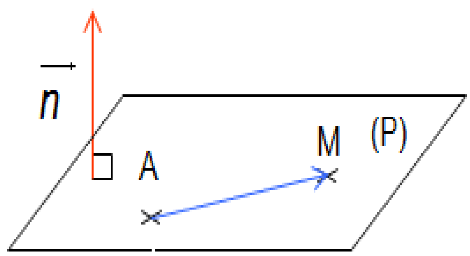
$\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ c'est un plan d'équation qui s'écrit sous la forme : $ax+by+cz+d=0$ avec :

$d=-(ax_A+by_A+cz_A+k)$

7) Equation cartésienne d'un plan definit par un point et un vecteur normal

Définition :

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit **normal** au plan $\mathscr{P}$ si, pour tous points A et M de $\mathscr{P}$, on a $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$



Remarque : Il existe évidemment une infinité de vecteurs normaux à un plan : ce sont tous les vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{n}$.

Propriété :

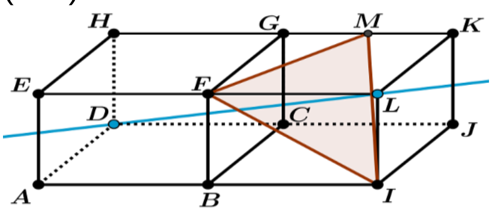
Un vecteur est dit normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.
Cette propriété va nous permettre d'une part de vérifier facilement qu'un vecteur est normal à un plan et, d'autre part, de déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à un plan.

Démonstration :

La propriété directe découle de la définition. Nous n'allons donc prouver que la réciproque.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathscr{P}$, $\vec{w}$ un vecteur de $\mathscr{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il existe donc deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
Ainsi $\vec{w}.\vec{n} = a\vec{u}.\vec{n} + b\vec{v}.\vec{n} = 0$
Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à tous les vecteurs du plan $\mathscr{P}$. Il lui est par conséquent orthogonal.

Exemple1 : On souhaite déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à un plan dirigé par $\vec{u}(2,-1,3)$ et $\vec{v}(4,0,2)$.
Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires : une coordonnée est nulle pour l'un mais pas pour l'autre.
On note $\vec{n}(x,y,z)$.
Puisque $\vec{n}$ est normal au plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors $\vec{u}.\vec{n} = 0$ et $\vec{u}.\vec{n} = 0$.
On obtient ainsi les deux équations
$2x - y + 3z = 0$ et $4x + 2z = 0$
A l'aide de la deuxième équation, on obtient $z = -2x$. On remplace dans la première :
$2x - y - 6x = 0 \Leftrightarrow -4x - y = 0 \Leftrightarrow y = -4x$.
On choisit, par exemple $x = 1$ et on trouve ainsi .
$\vec{v}(1;-4;-2)$
On vérifie : $\vec{u}.\vec{n} = 2 + 4 - 6 = 0$ ✓ et
$\vec{v}.\vec{n} = 4 + 0 - 4 = 0$ ✓.
Un vecteur normal au plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{n}(1;-4;-2)$

Exemple2 : Deux cubes d'arête 1, sont disposés comme indiqué sur la figure.
M est le milieu du segment [GK].
La droite (DL) est-elle perpendiculaire au plan (FMI)?



Solution : on se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ orthonormé

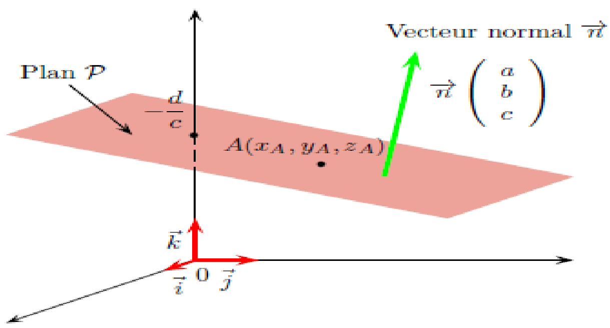
Voyons si $\overrightarrow{DL}$ est un vecteur normal au plan (FMI)
Il suffit de calculer: $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FI}$
On a : $\overrightarrow{DL} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc : $\overrightarrow{DL}(2;-1;1)$
On a : $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{FM}\left(\frac{1}{2};1;0\right)$
On a : $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{FI}(1;0;-1)$
$\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FM} = 0$ et $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FI} = 1 \neq 0$
Donc : (DL) n'est pas perpendiculaire au plan (FMI)

Exercice1: $ABCDEFGH$ un cube tel que : $AB = 1$ avec I le milieu du segment $[EH]$ et J le milieu de $[EF]$

1)Montrer que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB} = 0$ et que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED} = 0$
2) En déduire que le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est normal au plan (BDE)
3) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux
4)l'espace étant rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$
a) déterminer les coordonnées des points F ; C ; I et J
B)Montrer que $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{CJ} = 0$
et en déduire que $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux

Propriété :

Soient a et b et c des réels tous nuls quelconque . L'ensemble (P) des points $M(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}(a;b;c)$.



Exemple1 : On considère le plan d'équation $4x - 2y + 3z - 1 = 0$. Un vecteur normal à ce plan est $\vec{n}(4;-2;3)$. Le point $A(2;-1;-3)$ appartient au plan car : $4\times 2-2\times(-1)+3\times(-3)-1=0$.

Exemple2 : On cherche une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(4;2;-3)$ dont un vecteur normal est $\vec{n}(1;-2;-1)$:

Une équation du plan $\mathscr{P}$ est de la forme .
$x-2y-z+d=0$

Le point A appartient au plan. Ses coordonnées vérifient donc l'équation :
$4-2\times 2-(-3)+d=0 \Leftrightarrow 3+d=0 \Leftrightarrow d=-3$

Une équation de $\mathscr{P}$ est donc $x-2y-z-3=0$

Exemple3: $ABCDEFGH$ un cube tel que : $AB=1$ avec I le milieu du segment $[AE]$

On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$

1) déterminer un vecteur normal au plan (CHI)

2) En déduire une équation cartésienne du plan (CHI)

Solution :1) soit un $\vec{n}(x;y;z)$ un vecteur normal au plan (CHI) donc $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{CH}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{CI}=0\end{cases}$

On a : $\overrightarrow{CH}(-1;0;1)$ et $\overrightarrow{CI}\left(-1;-1;\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\begin{cases}-x+z=0\\ -x-y+\frac{1}{2}z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\ -x-y+\frac{1}{2}x=0\end{cases}$

$\begin{cases}z=x\\ y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$ Puisque on veut un seul vecteur normal

Alors on donne par exemple : $x=2$ on trouve

$\begin{cases}z=2\\ y=1\end{cases}$ donc un vecteur normal est $\vec{n}(2;-1;2)$

2)l'équation du plan s'écrit sous forme :
$ax+by+cz+d=0$

Donc : $2x-y+2z+d=0$

Et puisque : $C(1;1;0)\in(CIH)$ donc :

$2-1+0+d=0 \Leftrightarrow d=-1$

Donc : (CIH): $2x-y+2z-1=0$

8) positions relatifs de deux plans dans l'espace

Proposition :

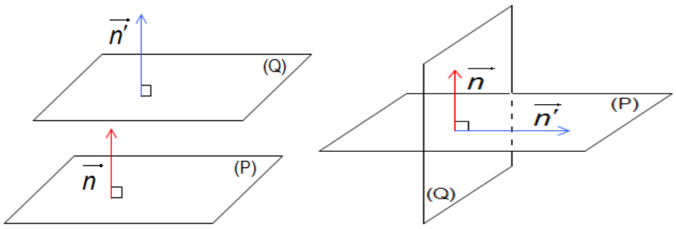
Soient : (P) : $ax+by+cz+d=0$ et $(P)'$: $a'x+b'y+c'z+d'=0$ deux plans dans l'espace

Et $\vec{n}(a;b;c)$ et $\vec{n'}(a';b';c')$ deux vecteurs normaux respectivement a (P) et $(P)'$

1)Les plans (P) et $(P)'$ sont parallèles ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires

2)Les plans (P) et $(P)'$ sont sécants ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non colinéaires

3)Les plans (P) et $(P)'$ sont perpendiculaires ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux



Exemple1 : On considère les plans d'équations :

(P) $2x-4y+z+1=0$ et (P') $x+y+2z-3=0$

1)Monter que : $(P)\perp(P')$

2)Déterminer l'équation cartésienne du plan (Q) parallèle au plan (P) passant par le point $A(1;-1;1)$

Solutions :1) $\vec{n}(2;-4;1)$ et $\vec{n'}(1;1;2)$ les deux vecteurs normaux respectivement de (P) et $(P)'$

On a : $\vec{n}.\vec{n'}=2-4+2=0$

Donc $\vec{n}\perp\vec{n'}$ par suite : $(P)\perp(P')$

2) $(P)\|(Q)$ et $\vec{n}$ est normal a (P) donc est un vecteur normal a (Q)

Donc une équation cartésienne du plan (Q) est :

$2x-4y+z+d=0$

Et puisque : $A(1;-1;1)\in(Q)$ donc :

$2+4+1+d=0 \Leftrightarrow d=-7$

Donc : (Q): $2x-4y+z-7=0$

9) distance d'un point à un plan

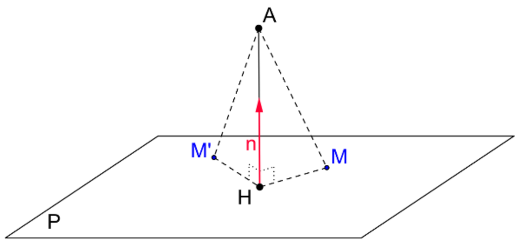
Proposition :

Soient : $A(x_A;y_A;z_A)$ un point et (P) :

$ax+by+cz+d=0$ un plan dans l'espace avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et H est le projeté orthogonal de A sur le plan

la distance du point A au plan (P) est la distance AH et on a : $d(A;(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Remarque : pour tout point M du plan (P) on a AH $\leq$AM



RPEUVE : $\vec{n}(a;b;c)$ est normal a (P) pour tout point M du plan on a $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=\vec{n}.\overrightarrow{AH}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=\|\vec{n}\|\times\|\overrightarrow{AH}\|\times\cos(\vec{n};\overrightarrow{AH})$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\|\overrightarrow{AH}\|\times\cos(\vec{n};\overrightarrow{AH})$

Or $M\in(P)$ donc $ax+by+cz+d=0$

Donc : $ax+by+cz=-d$

$\Leftrightarrow -ax_A-by_A-cz_A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\|\overrightarrow{AH}\|\times\cos(\vec{n};\overrightarrow{AH})$

$\Leftrightarrow -ax_A-by_A-cz_A-d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\|\overrightarrow{AH}\|\times(\mp1)$

$\Rightarrow|-ax_A-by_A-cz_A-d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times AH\times|(\mp1)|$

$$\Rightarrow AH=\frac{|ax_Aby_Acz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exercice : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère le plan (P) d'équation

$x+2y-z-1=0$

1)Les points A(1;1;2) et B(2;1;1) appartiennent-ils au plan (P) ?

2)Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan (P).

3)Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan (P) ?

Solution : $1+2\times1-2-1=0$ donc les coordonnées du point A vérifient l'équation de. On en déduit que A appartient au plan (P)

et donc que : $2+2\times1-1-1=2\neq0$

donc les coordonnées du point B ne vérifient pas l'équation de (P) On en déduit que B n'est pas un point de (P).

2) $AB=\sqrt{(2-1)^2+1(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$

Calculons $d(A;(P))$ et $d(B;(P))$.

On a : $A\in(P)$ donc : $d(A;(P))=0$

$d(B;(P))=\frac{|2+2\times1-1-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|2|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

on a : $\overrightarrow{AB}(1;0;-1)$

3)Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}(1;2;-1)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\overrightarrow{AB}$ n'est pas orthogonal au plan (P).

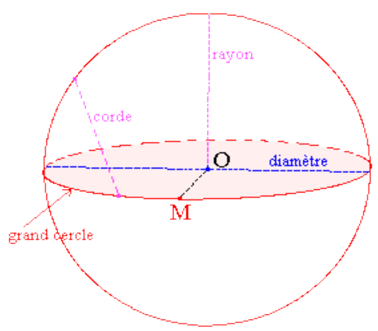
Le point A n'est donc pas le projeté orthogonal de B sur (P) .

10) Etude analytique de LA SPHERE

Dans tout ce qui va suivre, l'espace euclidien $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé.

10-1) Définition d'une sphère.

Définition : Soit Ω un point dans l'espace $(\mathcal{E})$, R et un réel positif. La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M dans $(\mathcal{E})$, tels que $\Omega M = R$



On la note par : $S(\Omega,\ R)$.

$S(\Omega,\ R)=\{M\in\mathcal{E}\ /\ \Omega M=\ R\}$

10-2) Equation cartésienne d'une sphère.

Soit $\Omega(a,\ b,\ c)$ un point dans l'espace et $r\geq0$

$M(x,\ y,\ z)\in S(\Omega,\ R)\Leftrightarrow\Omega M=R$

$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

Propriété :

Soit $\Omega(a, b, c)$ un point dans l'espace et $R \geq 0$, la sphère $S(\Omega, R)$ à une équation cartésienne de la forme :$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ (1)

Exemple :

1)Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(1, -1,2)$ et de rayon $R=3$

2)Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(0, -3,0)$ et qui passe par $A(2,1, -1)$.

Solution : 1) l'équation cartésienne de la sphère est : $(x-1)^2+(y-(-1))^2+(z-2)^2=3^2 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$

2) $S(\Omega, R)$ la sphère de centre $\Omega(1, -2,0)$ et qui passe par $A(2,1, -1)$.

Donc : $\Omega A = R$

$=\sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2}$

$\Omega A = R = \sqrt{2^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{21}$

Donc l'équation cartésienne de la sphère est :

$(x-0)^2+(y-(-3))^2+(z-0)^2=\sqrt{21}^2 \Leftrightarrow$

$x^2+(y+3)^2+z^2=21 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+6y-12=0$

10-3) REPRESENTATION PARAMETRIQUE D'UNE SPHERE

Proposition :

Soient : $S(\Omega;R)$ la sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R

Le système $\begin{cases} x=a+R\sin\varphi\cos\theta \\ y=b+R\sin\varphi\sin\theta \\ z=c+R\cos\varphi \end{cases} \quad (\varphi;\theta)\in\mathbb{R}^2$

s'appelle une représentation paramétrique du sphère (S)

Exemple1 : Déterminer une représentation paramétrique de la sphère de centre $\Omega(-1, 0,2)$ et de rayon $R=3$

Solution : Le système $\begin{cases} x=-1+3\sin\varphi\cos\theta \\ y=3\sin\varphi\sin\theta \\ z=2+3\cos\varphi \end{cases}$

$(\varphi;\theta)\in\mathbb{R}^2$ une représentation paramétrique de la sphère

Exemple2 : Déterminer (S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que

$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+2\sin\varphi\cos\theta \\ y=-1+2\sin\varphi\sin\theta \quad (\varphi;\theta)\in\mathbb{R}^2 \\ z=1+2\cos\varphi \end{cases}$

Solution :soit $M(x;y;z)\in(S)$

Donc : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-(-1))^2+(z-1)^2=$

$=(2\sin\varphi\cos\theta)^2+(2\sin\varphi\sin\theta)^2+(2\cos\varphi)^2$

$=4\sin\varphi^2(\cos\theta^2+\sin\theta^2)+4\cos\varphi^2$

Donc : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-(-1))^2+(z-1)^2=2^2$

(S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ est donc la sphère de centre

$\Omega(1/2, -1,1)$ et de rayon $R=2$

10-4 L'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Proposition :

Soit : (S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ avec

a ; b ; c et d des réelles

- Si : $a^2+b^2+c^2-d \succ 0$ alors (S) est une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$
- Si : $a^2+b^2+c^2-d=0$ alors $S=\{\Omega(a;b;c)\}$
- Si : $a^2+b^2+c^2-d \prec 0$ alors $S=\varnothing$

PREUVE : $M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2+z^2-2cz+c^2+d-a^2-b^2-c^2=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d=0$

- Si : $a^2+b^2+c^2-d \succ 0$ alors (S) est une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$
- Si : $a^2+b^2+c^2-d=0$ alors $S=\{\Omega(a;b;c)\}$
- Si : $a^2+b^2+c^2-d \prec 0$ alors $S=\varnothing$

Exemple : Déterminer (S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ dans les cas suivants :

1) (S_1) : $x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z=0$

2) (S_2) : $x^2+y^2+z^2-6x+4y+6z+22=0$

3) (S_3) : $x^2+y^2+z^2-2x+3y+z+7=0$

Solution : 1)soit $a=1$ et $b=3$ et $c=2$ et $d=0$

$a^2+b^2+c^2-d=1+9+4=14$

Puisque $a^2+b^2+c^2-d=14\succ 0$

Donc : L'ensemble des points $M(x;y;z)$ est donc la sphère (S_1) de centre

$\Omega(1,3,2)$ et de rayon $R=\sqrt{14}$

2) (S_2) : $x^2+y^2+z^2-6x+4y+6z+22=0$

$M(x;y;z)\in(S_2)$

$\Leftrightarrow(x^2-6x)+(y^2+4y)+(z^2+6z)+22=0\Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ et $y+2=0$ et $z+3=0$

$\Leftrightarrow x=3$ et $y=-2$ et $z=-3$

alors $S_2=\{\Omega(3;-2;-3)\}$

3) (S_3) : $x^2+y^2+z^2-2x+3y+z+7=0$

$M(x;y;z)\in(S_3)$

$\Leftrightarrow(x^2-2x)+(y^2+3y)+(z^2+z)+7=0\Leftrightarrow$

$(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{7}{2}$ alors $S_3=\varnothing$

10-5 L'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Proposition :

Soit : $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace

L'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère (S) d'équation cartésienne :

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

Avec $[AB]$ un diamètre du sphère (S)

PREUVE : $M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AI}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=0\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})=0$

$(\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$ Car I le milieu du segment $[AB]$

$M\in(S)\Leftrightarrow MA^2-IA^2=0\Leftrightarrow MA=IA$

Donc (S) est la sphère de centre le milieu du segment $[AB]$ et de rayon : IA

Soient les points : $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ et $M(x;y;z)$

$\overrightarrow{MA}(x_A-x;y_A-y;z_A-z)$ et

$\overrightarrow{MB}(x_B-x;y_B-y;z_B-z)$

$M\in(S)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow$

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

C'est l'équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$

Exemple : Soit : $A(-1;2;1)$ et $B(1;-1;0)$ deux points de l'espace

Déterminer l'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Solution : $(x+1)(x-1)+(y-2)(y+1)+(z-1)z=0$

$\Leftrightarrow x^2-1+y^2-y-2+z^2-z=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-y-z-3=0$

$\Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$

Donc (S) est la sphère de centre $\Omega\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{7/2}$

10-6) L'intersection d'une sphère (S) et une droite (D)

Exemple1 : Soient (S) une sphère :

$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

et (D) une droite : $\begin{cases}x=1-t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Solution :

$$M(x;y;z)\in(S)\cap(D)\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=1-t\\y=1+t\\z=1+t\\(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9\end{cases}$$

Donc : $t^2+t^2+(t-1)^2=9\Leftrightarrow 2t^2-2t-8=0$

$\Leftrightarrow t=2$ ou $t=\frac{-4}{3}$

$x=7/3; y=-1/3; z=-1/3$ ou $x=-1; y=3; z=3$

la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points $A\left(\frac{7}{3};\frac{-1}{3};\frac{-1}{3}\right)$ et $B(-1;3;3)$

Exemple2 : Soient (S) une sphère :

$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=0$

et (D) une droite : $\begin{cases}x=2+3t\\y=4+t\\z=-2+5t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Solution :

$$M(x;y;z)\in(S)\cap(D)\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=2+3t\\y=4+t\\z=-2+5t\\x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=0\end{cases}$$

Donc :

$(2+3t)^2+(4+t)^2+(-2+5t)^2-2(2+3t)-4(4+t)+2(-2+5t)t-8=0$

$\Leftrightarrow 25t^2=0 \quad \Leftrightarrow t=0$ Donc : $x=-2; y=4; z=-2$

la droite (D) coupe la sphère (S) en un seul point $A(2;4;-2)$ on dit que la droite (D) est tangente à (S) en $A(2;4;-2)$

Exemple3 : Soient (S) une sphère :

$x^2+y^2+z^2+2x-2y-1=0$

et (D) une droite : $\begin{cases}x=-1+t\\y=1+2t\\z=2\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Solution :

$$M(x;y;z)\in(S)\cap(D)\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=-1+t\\y=1+2t\\z=2\\x^2+y^2+z^2+2x-2y-1=0\end{cases}$$

Donc : $(-1+t)^2+(1+2t)^2+2^2+2(-1+t)-2(1+2t)-1=0$

$\Leftrightarrow 5t^2+1=0$ Pas de solutions

Donc la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

Proposition :

Soient (D) une droite de l'espace et (S) une sphère de centre O et de rayon R , H le projeté orthogonal du point O sur la droite (D).

Notons d = OH :

Si d > R alors la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

Si d = R alors la droite (D) et la sphère (S) ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que la droite (D) est tangente en H à (S)

Si d < R alors la droite (D) et la sphère (S) en deux points en commun A et B symétriques par rapport au point H, dans ce cas on dit que la droite (D) est sécante à (S). (OA = OB = R)

10-7) L'intersection d'une sphère (S) et un plan (P)

Proposition :

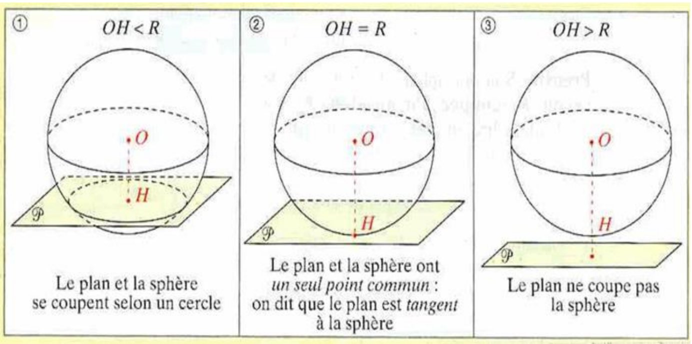
Soient (S) une sphère de centre O et de rayon R, (P) un plan de l'espace, nommons H le projeté orthogonal de O sur le plan (P)

et d = OH, la distance du point O au plan (P).

- Si d > R alors le plan (P) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

• Si d = R alors le plan (P) et la sphère (S) ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que le plan (P) est tangent en H à (S)

• Si d < R alors l'ensemble des points commun au plan (P) et la sphère (S) est le cercle du plan (P) de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-d^2}$ (Théorème de Pythagore), dans ce cas on dit le plan (P) est sécant à (S).



Exemple1 : Soient (S) une sphère :

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$

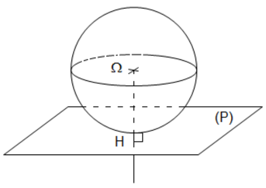
Et le plan d'équation $(P): 2x-y-z+5=0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P)

Solution :Déterminons le centre et le rayon de la sphère :On a : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$ donc

$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\sqrt{6}^2$

(S) est donc une sphère de centre $\Omega(1;1;0)$ et de rayon $R=\sqrt{6}$



Et puisque : $d(\Omega;(P))=R=\sqrt{6}$

Alors le plan (P) et la sphère (S) ont un unique point en commun donc le plan (P) est tangent en H à (S)

Déterminons le point de tangence H qui est la projection de Ω sur le plan (P)

Soit $\vec{n}(2;-1;-1)$ Un vecteur normal à ce plan (P)

$$\exists k\in\mathbb{R} / \begin{cases}\overrightarrow{\Omega H}=k\vec{n}\\ H\in(P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+2k\\ y=1-k\\ z=-k\\ 2x-y-z+5=0\end{cases}$$

Donc : $2(1+2k)-(1-k)-(-k)+5=0 \Leftrightarrow k=-1$ Donc :

$x=-1; y=2; z=1$ Donc $H(-1;2;1)$

Exemple2 : Soient (S) une sphère :

$x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$

Et le plan d'équation $(P): x-y+z-3=0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P)

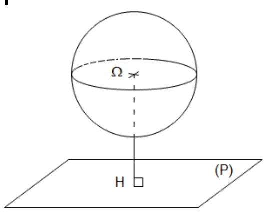
Solution :Déterminons le centre et le rayon de la sphère :On a : $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ donc

$(S):(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1^2$

(S) est donc une sphère de centre $\Omega(1;0;-1)$ et de rayon $R=1$

Et puisque : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|1-0-1-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}\succ R$

Alors le plan (P) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.



$(S)\cap(P)=\varnothing$

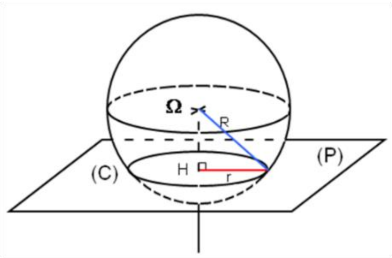
Exemple3 : Soient (S) une sphère :

$(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$

Et le plan d'équation $(P): 2x-y+3z-2=0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P) **Solution :**(S) est donc une sphère de centre $\Omega(2;1;-3)$ et de rayon $R=3$

Et puisque : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|4-1-9-2|}{\sqrt{4+1+9}}=\dfrac{8}{\sqrt{14}}\prec R$



Alors la sphère (S) coupe le plan (P) suivant un cercle de centre H qui est la projection orthogonal du point Ω sur le plan (P) et de rayon

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\dfrac{62}{14}}$

Déterminons le centre $H(x;y;z)$ du cercle

Soit $\vec{n}(2;-1;3)$ Un vecteur normal à ce plan (P)

$$\exists k\in\mathbb{R}/\begin{cases}\overrightarrow{\Omega H}=k\vec{n}\\ H\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+2k\\ y=1-k\\ z=-3+3k\\ 2x-y+3z-2=0\end{cases}$$

Donc : $2(2+2k)-(1-k)+3(-3+3k)-2=0$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{4}{7}$ Donc : $x=\dfrac{22}{7};y=\dfrac{3}{7};z=-\dfrac{9}{7}$

Donc $H\left(\frac{22}{7};\frac{3}{7};-\frac{9}{7}\right)$

10-8) le plan (P) tangent a une sphère (S) en un point :

Proposition :

Soient (S) une sphère de centre Ω et $A\in(S)$

Il existe un plan (P) unique de l'espace tangent a la sphère en A et définie par :

$M\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

Exemple : Soie (S) une sphère :

$(S):x^2+y^2+(z+2)^2=3$

Et soit le point $A(1;-1;-1)$

Vérifier que $A\in(S)$ et Déterminer l'équations cartésienne du plan (P) tangent a la sphère (S) en A

Solution : $1^2+(-1)^2+(-1+2)^2=1+1+1=3$

donc $A\in(S)$

$\Omega(0;0;-2)$ est le centre de la sphère (S) et de rayon $R=3$ Et on a : $\overrightarrow{A\Omega}(-1;1;-1)$

Donc : $M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

$\Leftrightarrow-(x-1)+(y+1)-(z+1)=0$

Donc l'équation de : $(P):x-y+z-1=0$

Exercice1: on considère les plans d'équations respectives (P) $x-y+z=0$ et (Q) $2x+3y+z-6=0$

et la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;4)$ et tangente au plan (P) et soit la droite (Δ) qui passant par Ω et perpendiculaire au plan (Q)

1) monter que les plans (P) et (Q) sont orthogonaux

2)a) déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S)

b)déterminer le point de tangence de (P) et (S)

3)a) déterminer le point d'intersection de (Δ) et (Q)

b) Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

Solutions :1)On a : $\vec{n}(1;-1;1)$ Un vecteur normal à (P) et $\vec{n}'(2;3;1)$ Un vecteur normal à (P)

Et on a : $\vec{n}.\vec{n}'=1\times2+(-1)\times3+1\times1=0$

Donc $\vec{n}\perp\vec{n}'$ donc (P) et (Q) sont orthogonaux

2)a)puisque la sphère (S) est tangente au plan (P) Alors : $d(\Omega;(P))=R$

Et on a : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|1-2+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\sqrt{3}$

Donc : $R=\sqrt{3}$

Donc l'équation cartésienne de la sphère (S) est : $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=3$

2)b) le point de tangence H de (P) et (S) est la projection orthogonal Ω sur le plan (P)

donc H est le point d'intersection entre la droite (D) perpendiculaires a (P) passant par Ω et on a : $\vec{n}(1;-1;1)$ Un vecteur normal à (P) donc c'est un vecteur directeur de la droite (D)

la représentation paramétrique de (D) est

$$(D):\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=4+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

$H\in(D)\cap(P)$ Donc : $(1+t)-(2-t)+4+t=0$

$\Leftrightarrow t=-1$ donc : $H(0;3;3)$

3)a) puisque $(\Delta)\perp(Q)$ alors :

$\vec{n}(1;-1;1)$ Un vecteur directeur de (Δ)

Et on a : $\Omega\in(\Delta)$ donc la représentation paramétrique de (Δ) est $(\Delta):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=4+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

$W(x;y;z)\in(\Delta)\cap(Q)$

donc : $2(1+2t)+3(2+3t)+4+t-6=0$

$\Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{7}$ donc : $W\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{5}{7};\dfrac{18}{7}\right)$

3°b) Montrons que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

on a : $d(\Omega;(Q))=\dfrac{|2+6+4-6|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{13}}\prec\sqrt{3}$

le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle de centre H qui est la projection orthogonal du point Ω sur le plan (Q)

et puisque (Δ) passe par Ω est perpendiculaires a (Q) en W alors $W\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{5}{7};\dfrac{18}{7}\right)$ est le centre du cercle (C) et le rayon du cercle (C) est $r=\sqrt{R^2-d^2}$

avec $d=d(\Omega;(Q))$ Donc : $r=\sqrt{\dfrac{3}{13}}$

Exercice2: on considère l'ensemble (S_m) des points $M(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient l'équations :

(S_m) : $mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0$

Avec m un paramètre non nul

1) monter que (S_m) est une sphère pour tout $m\in\mathbb{R}^*$

2) monter que tous les sphères se coupent suivant un seul cercle dont on déterminera le centre et le rayon

Solution : 1) $mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\left(\frac{m-1}{m}\right)x+\frac{2}{m}y+\frac{2}{m}z=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\left(1-\frac{1}{m}\right)x+\frac{2}{m}y+\frac{2}{m}z=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1+\frac{1}{m}\right)^2+\left(y+\frac{1}{m}\right)^2+\left(z+\frac{1}{m}\right)^2-\left(1-\frac{1}{m}\right)^2-\frac{2}{m^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1+\frac{1}{m}\right)^2+\left(y+\frac{1}{m}\right)^2+\left(z+\frac{1}{m}\right)^2=\left(1-\frac{1}{m}\right)^2+\frac{2}{m^2}$$

Et puisque : $\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^2+\dfrac{2}{m^2}\succ 0$

Alors : (S_m) est une sphère pour tout $m\in\mathbb{R}^*$

de centre $\Omega_m\left(1-\dfrac{1}{m};-\dfrac{1}{m};-\dfrac{1}{m}\right)$ et de rayon

$$R_m=\sqrt{\left(1-\frac{1}{m}\right)^2+\frac{2}{m^2}}$$

2)soit $M(x;y;z)\in(S_m)\quad\forall m\in\mathbb{R}^*$

Donc : $mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0\Leftrightarrow$

$m(x^2+y^2+z^2-2x)+(2x+2y+2z)=0:\forall m\in\mathbb{R}^*\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2=1 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$$

Donc le cercle chercher et l'intersection entre : la sphère (S): $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ et le plan (P) : $2x+2y+2z=0$

en effet le cercle existe car :

$$d(\Omega;(Q))=\frac{|1+0+0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\prec 1$$

le centre H du cercle est l'intersection entre (P) et la droite (Δ) qui passe par Ω est perpendiculaires a (P) et puisque $(\Delta)\perp(P)$ alors : $\vec{n}(1;1;1)$ Un vecteur directeur de (Δ) Et on a : $\Omega\in(\Delta)$ donc la représentation paramétrique de (Δ) est

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

$H(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$

donc : $(1+t)+t+t=0$

$\Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$ donc : $H\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

et le rayon du cercle (C) est :

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Donc : tous les sphères se coupent suivant le cercle (C)

Exo2: dans l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé On considère les plan (P_m) d'équations $x+y-z-m=0$ avec m paramètre réel Et la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;1)$ et le rayon $R=\sqrt{3}$

1)Etudier et discuter suivant le paramètre m la position relative de la sphère (S) et les plan (P_m)

2)soit (E) l'ensemble des réels m tels que : (P_m) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C_m)

Déterminer l'ensemble des centres des cercles (C_m) lorsque m varie dans (E)

Solution : 1) (P_m) : $x+y-z-m=0$

$$d_m=d(\Omega;(P_m))=\frac{|1+2-1-m|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}$$

$\Leftrightarrow |2-m|\prec 3\Leftrightarrow -3\prec 2-m\prec 3\Leftrightarrow -5\prec -m\prec 1$

$\Leftrightarrow -1\prec m\prec 5$

le plan (P_m) coupe la sphère (S) suivant des cercles de centre C_m qui est la projection orthogonal du point Ω sur le plan (P_m)

soit (Δ) la doite qui passe par Ω est perpendiculaires a (P_m) et puisque $(\Delta)\perp(P_m)$ alors : $\vec{n}(1;1;-1)$ Un vecteur directeur de (Δ) Et on a : $\Omega\in(\Delta)$ donc la représentation paramétrique de (Δ) est $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

le centre C_m est le point d'intersection de (Δ) et (P_m)

on va donc résoudre le system $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z-m=0 \end{cases}$

$1+t+2+t-(-t+1)-m=0\Leftrightarrow 3t+2-m=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{m-2}{3}$ donc les coordonnées du centre du cercle d'intersection est $\begin{cases} x=1+\frac{m-2}{3}=\frac{m+1}{3} \\ y=2+\frac{m-2}{3}=\frac{m+4}{3} \\ z=1-\frac{m-2}{3}=\frac{-m+5}{3} \end{cases}$

$C_m\left(\frac{m+1}{3};\frac{m+4}{3};\frac{-m+5}{3}\right)$ et le rayon est :

et le rayon du cercle (C) est :

$r=\sqrt{R^2-d_m{}^2}$ avec $d_m=\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}$ et $R=\sqrt{3}$

$$r_m=\sqrt{3-\left(\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}\right)^2}\Leftrightarrow r_m=\sqrt{3-\left(\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow r_m=\sqrt{\frac{9-(2-m)^2}{3}}=\sqrt{\frac{9-(m^2-4m+4)}{3}}=\sqrt{\frac{-m^2+4m+5}{3}}$$

2cas : Si $d(\Omega;(P_m))=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |2-m|=3\Leftrightarrow 2-m=3$ ou $2-m=-3$

$\Leftrightarrow m=-1$ ou $m=5$

la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;4)$ et tangente au plan (P_m)

si $m=-1$: le point de tangence T_1 est est le point d'intersection de (Δ) et (P_{-1})

on va donc résoudre le system $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$

$1+t+2+t-(-t+1)+1=0 \Leftrightarrow 3t+2+1=0$

$\Leftrightarrow t=-1$ donc les coordonnées du point de tangence est $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ donc $T_1(0;1;2)$

si $m=5$: le point de tangence T_2 est est le point d'intersection de (Δ) et (P_5)

on va donc résoudre le system $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z-5=0 \end{cases}$

$1+t+2+t-(-t+1)-5=0 \Leftrightarrow 3t+2-5=0$

$\Leftrightarrow t=1$ donc les coordonnées du point de tangence est $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases}$ donc $T_2(2;3;0)$

3cas : Si $d(\Omega;(P_m)) \succ \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} \succ \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |2-m| \succ 3 \Leftrightarrow 2-m \succ 3$ ou $2-m \prec -3$

$\Leftrightarrow m \prec -1$ ou $m \succ 5$

$(P_m) \cap (S) = \varnothing$

2) les coordonnées des centres des cercles d'intersections sont $\begin{cases} x=\frac{m+1}{3} \\ y=\frac{m+4}{3} \\ z=\frac{-m+5}{3} \end{cases}$ et $-1 \prec m \prec 5$

c'est une portion de droite

Exo3: dans l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé on considère l'ensemble (S_m) des points $M(x;y;z)$ tq : (S_m) :

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

avec m paramètre réel

1) Montrer que (S_m) est une sphère $\forall m \in \mathbb{R}$

2) Déterminer l'ensemble des centres des (S_m) lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

3) Montrer qu'il existe un cercle (C) incluse dans tous les sphères (S_m) $\forall m \in \mathbb{R}$ et Déterminer le plan (P) qui contient ce cercle (C)

4) Soit un point $M_0(x_0;y_0;z_0)$ dans l'espace tq $M_0 \notin (P)$

Montrer qu'il existe une sphère unique qui passe par M_0

5) Montrer qu'il existe deux sphères (S_m) tangentes au plan $(O;x;y)$

Solution : 1)

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2\frac{m}{2}x+\left(\frac{m}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2+2(m-1)y+(m-1)^2-(m-1)^2$

$+2\left(\frac{m+4}{2}\right)z+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2-\left(\frac{m+4}{2}\right)^2+1=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y+m-1)^2+\left(z+\frac{m+4}{2}\right)^2=\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2+(m-1)^2-1$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y+m-1)^2+\left(z+\frac{m+4}{2}\right)^2=\frac{4(m-1)^2+(m+4)^2+m^2-4}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y+m-1)^2+\left(z+\frac{m+4}{2}\right)^2=\frac{6m^2+16}{4}=R^2$

Et puisque : $\frac{6m^2+16}{4} \succ 0$

Alors : (S_m) est une sphère pour tout $m \in \mathbb{R}$ de centre $\Omega_m\left(-\frac{m}{2};1-m;-\frac{m+4}{2}\right)$ et de rayon

$R_m=\sqrt{\frac{6m^2+16}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{6m^2+16}$

2) Déterminons l'ensemble des centres des (S_m) lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

les coordonnées des centres des cercles

d'intersections sont $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}m \\ y=-m+1 \\ z=-\frac{1}{2}m-2 \end{cases} \quad (m\in\mathbb{R})$

c'est une droite de vecteur directeur

$\vec{u}\left(-\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right)$ et qui passe par $A(0;1;-2)$

3)Montrons qu'il existe un cercle (C) incluse dans tous les sphères (S_m) $\forall m\in\mathbb{R}$:

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+mx+2my-2y+mz+4z+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2y+4z+1+m(x+2y+z)=0 \quad \forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (S): x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0 \\ (P): x+2y+z=0 \end{cases}$

Donc le cercle chercher et l'intersection entre :

la sphère (S): $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2^2$ et le plan (P) : $x+2y+z=0$

en effet le cercle existe car : $\Omega(0;1;-2)$

$d(\Omega;(P))=\frac{|0+2-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=0\prec 2$ donc $\Omega\in(P)$

donc le centre du cercle (C) est : $\Omega(0;1;-2)$

et le rayon est : $R=2$

et tous les sphères se coupent suivant le cercle (C)

et le plan (P) qui contient ce cercle (C) est :

(P) : $x+2y+z=0$

4) soit $M_0(x_0;y_0;z_0)$ dans l'espace tq $M_0\notin(P)$:

$x+2y+z=0$ donc $x_0+2y_0+z_0\neq 0$

Montrons qu'il existe une sphère unique qui passe par M_0 :c d a l'existence d'un unique m ?

$M_0\in(S)\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2+mx_0+2(m-1)y_0+(m+4)z_0+1=0$

$M_0\in(S)\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2+mx_0+2(m-1)y_0+(m+4)z_0+1=0$

$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2-2y_0+4z_0+1+m(x_0+2y_0+z_0)=0$

$\Leftrightarrow m(x_0+2y_0+z_0)=-(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2y_0+4z_0+1)$

$\Leftrightarrow m=\frac{-(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2y_0+4z_0+1)}{x_0+2y_0+z_0}$

6)Montrons qu'il existe deux sphères (S_m) tangentes au plan $(O;x;y)$:

L'équation du plan : $(O;x;y)$ est : $z=0$ donc

$d(\Omega_m;(O;x;y))=\frac{1}{2}\sqrt{6m^2+16}\Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{m+4}{2}\right|}{\sqrt{1}}=\frac{1}{2}\sqrt{6m^2+16}$

$\Leftrightarrow |m+4|=\sqrt{6m^2+16}\Leftrightarrow (m+4)^2=6m^2+16$

$\Leftrightarrow m^2+8m+16=6m^2+16$

$\Leftrightarrow 5m^2-8m=0 \Leftrightarrow m(5m-8)=0$

$\Leftrightarrow m=0$ ou $m=\frac{8}{5}$ donc il existe deux sphères (S_m) tangentes au plan $(O;x;y)$:

(S_0): $x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0$

$\left(S_{\frac{8}{5}}\right)$: $x^2+y^2+z^2+\frac{8}{5}x+2\left(\frac{8}{5}-1\right)y+\left(\frac{8}{5}+4\right)z+1=0$

Cad : $x^2+y^2+z^2+\frac{8}{5}x+\frac{6}{5}y+\frac{28}{5}z+1=0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

Prof : Atmani najib

Le PRODUIT VECTORIEL

I) ORIENTATION DE L'ESPACE

1)Le bonhomme d'Ampère

L'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé et $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ la base qui lui est associée.

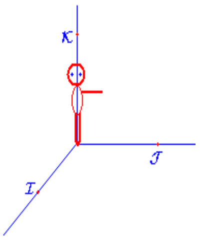
On pose un observateur (imaginaire) sur l'axe $[Oz)$ et il regarde vers l'axe $[ox)$; On aura deux positions pour l'axe $[Oy)$:

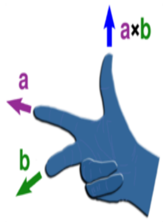
1er cas : $[Oy)$ est à la droite de l'observateur

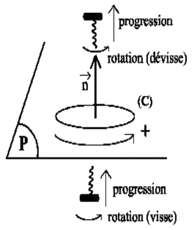
On dit que la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est **indirecte** de même pour le Repère $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

2eme cas : $[Oy)$ est à la gauche de l'observateur

On dit que la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est **directe** de même pour le Repère $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$







2) Remarques

1)Soit B$\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base **directe.**

Les bases : $\left(\vec{i};\vec{k};\vec{j}\right)$; $(\left(\vec{k};\vec{j};\vec{i}\right)$; $\left(\vec{j};\vec{i};\vec{k}\right)$ obtenues par la permutation de deux vecteurs sont des bases indirectes.

2)Les bases $\left(-\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$; $\left(\vec{i};-\vec{j};\vec{k}\right)$; $\left(\vec{i};\vec{j};-\vec{k}\right)$ sont des base indirectes

3)les bases : $\left(\vec{j};\vec{k};\vec{i}\right)$;$\left(\vec{k};\vec{i};\vec{j}\right)$ obtenues par une rotation circulaire, sont des bases directes.

4)Soit B$\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base **directe,** B'$\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ une autre base de $\mathcal{V}3$; la base B' est directe si et seulement si $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right) \succ 0$

II) DEFINITION DU PRODUIT VECTORIEL.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}3$.

1)On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.
Soit A un point dans l'espace ; ils existent deux points dans l'espace C et D tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$,les points A, B et C étant non alignés, ils définissent un plan (P) dans l'espace $(\mathcal{E})$.

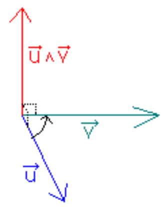
Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ tel que : $(AD) \perp (P)$

La base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)$ est directe.

$AD = AB \times AC \times sin\alpha$ où α la mesure de l'angle $\left(\widehat{BAC}\right)$

Le vecteur $\vec{w}$ est indépendant du choix des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ; on pose que leur produit vectoriel est $\vec{0}$



On note $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$

Exemple : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$\left\|\vec{u}\right\|=1$ et $\left\|\vec{v}\right\|=3$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

Calculer : $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|$

$$\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\sin\theta=1\cdot 3\sin\frac{\pi}{3}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

III) PROPRIETES DU PRODUIT VECTORIEL

1) Propriétés :

1)$\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$

2)Le produit vectoriel est antisymétrique **:**
$\vec{v}\wedge\vec{u}=-\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$

3)Le produit vectoriel est bilinéaire :

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\wedge\vec{w}=\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)+\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$

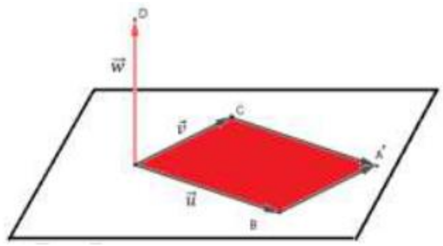
$\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)+\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$

$\left(\lambda\vec{u}\right)\wedge\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)=\vec{u}\wedge\left(\lambda\vec{v}\right)$

2) Interprétation géométrique : Surface d'un triangle.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}3$, qu'on suppose non colinéaires

tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AD}=\vec{u}\wedge\vec{v}$
on a d'après la
Définition du produit vectoriel : $AD = AB \times AC \times sin\alpha$ où α la mesure
de l'angle $\widehat{BAC}$



D'autre part, la surface du triangle ABC est :

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH$

et on a : $\sin\alpha = \frac{BH}{AB}$ donc : $BH = AB\sin\alpha$ et par suite :

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times AB \times \sin\alpha$

et donc $AD = 2S_{ABC} = S_{ABCD}$

Propriété 1: Soient A, B et C trois points non alignés on a $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$: est la surface du parallélogramme $ABA'C$

Propriété 2 :

Soient A, B et C trois point non alignés, la surface du triangle ABC est :

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$

IV) L'EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

Soit $\mathrm{B}\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathcal{V}3$,

Considérons deux vecteurs $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\overrightarrow{u'}\left(x';y';z'\right)$ dans l'espace vectoriel V_3 on a donc : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

par suite :

$\vec{u} \wedge \overrightarrow{u'} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \wedge \left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right)$

$\vec{u} \wedge \overrightarrow{u'} = xx'\left(\vec{i} \wedge \vec{i}\right) + xy'\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) + xz'\left(\vec{i} \wedge \vec{k}\right) +$

$+yx'\left(\vec{j} \wedge \vec{i}\right) + yy'\left(\vec{j} \wedge \vec{j}\right) + yz'\left(\vec{j} \wedge \vec{k}\right) +$

$+zx'\left(\vec{k} \wedge \vec{i}\right) + zy'\left(\vec{k} \wedge \vec{j}\right) + zz'\left(\vec{k} \wedge \vec{k}\right)$

On a : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$ et $\vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}$ et $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ et $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ et $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

$\vec{u} \wedge \overrightarrow{u'} = xx'\vec{0} + xy'\vec{k} - xz'\vec{j} +$

$-yx'\vec{k} + yy'\vec{0} + yz'\vec{i} + +zx'\vec{j} - zy'\vec{i} + zz'\vec{0}$

D'où :

$\vec{u} \wedge \overrightarrow{u'} = \left(yz' - zy'\right)\vec{i} - \left(xz' - zx'\right)\vec{j} + \left(xy' - yx'\right)\vec{k}$

Propriété : Soient $\mathrm{B}\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathcal{V}3$, et deux vecteurs $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\overrightarrow{u'}\left(x';y';z'\right)$ on a :

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{u'} = \begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'} \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ \cancel{y} & \cancel{y'} \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ \cancel{z} & \cancel{z'} \end{vmatrix}\vec{k}$$

Exemple1 : $\vec{u}\left(1;1;1\right)$ et $\vec{v}\left(2;1;2\right)$ deux vecteurs:

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$

Exemple2 : $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$

V) APPLICATIONS.

1) Alignement de 3 points.

Propriété : Soient A, B et C trois point dans l'espace, A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ce qui est équivalent à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

2) Equation d'un plan.

Soient A, B et C trois point dans l'espace, le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal sur (ABC) donc :

$M(x,\ y,\ z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$

Cette équivalence détermine l'équation cartésienne du plan (ABC)

Exemple : dans l'espace muni d'un repère orthonormée directe $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ on considère les points $A\left(0;1;2\right)$ et $B\left(1;1;0\right)$ et $C\left(1;0;1\right)$

1)Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et vérifier que les points A et B et C sont non alignés

2)Calculer la surface du triangle ABC

3)Déterminer une équation cartésienne du plan $\left(ABC\right)$

Solution :1) $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right)$

$\overrightarrow{AB}\left(1;0;-2\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(1;-1;-1\right)$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ Donc les points A et B et C sont non alignés

2) $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

Donc : $S_{ABC}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

3) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}-1\vec{j}-1\vec{k}$ un vecteur normal du plan ABC

Donc une équation cartésienne du plan ABC est de la forme :

$ax+by+cz+d=0$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-2;-1;-1)$ donc $a=-2$ et $b=-1$ et $c=-1$

Donc : $-2x-1y-1z+d=0$ (ABC)

Et on a : $A(0;1;2)\in(P)$ donc : $0-1-2+d=0$

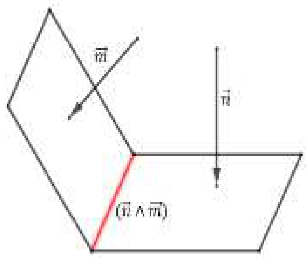
donc $d=3$

Donc (ABC) : $-2x-1y-1z+3=0$

Donc (ABC) : $2x+y+z-3=0$

3) Intersection de deux plans

Soient (P) et (Q) deux plan sécants dans l'espace suivant une droite (Δ), Soient $\vec{n}$ un vecteur normal sur (P) et $\vec{m}$ un vecteur normal sur (Q)



Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ) alors : $\vec{n}.\vec{u}=0$ et $\vec{m}.\vec{u}=0$ et on sait que :

$\vec{m}.\left(\vec{n}\wedge\vec{m}\right)=\vec{n}.\left(\vec{n}\wedge\vec{m}\right)=0$ on en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{n}\wedge\vec{m}$ sont colinéaires et par suite $\vec{n}\wedge\vec{m}$ est un vecteur directeur de (Δ)

Propriété : Soient (P) et (Q) deux plan dans l'espace où $\vec{n}$ est un vecteur normal sur (P) et $\vec{m}$ est un vecteur normal sur (Q), si $\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont non colinéaires alors (P) et (Q) se coupent selon une droite (Δ) dirigée par $\vec{n}\wedge\vec{m}$

Exemple : L'espace est muni d'un repère orthonormé

Quelle est l'intersection des plans d'équations respectives

(P) $x-y+2z+1=0$ et (P') $2x+y-z+2=0$

Solution : $\vec{n}(1;-1;2)$ et $\vec{n'}(2;1;-1)$ deux vecteurs normaux respectivement de (P) et $(P)'$

On a : $\vec{u}=\vec{n}\wedge\vec{n'}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$

Donc : $\vec{u}=\vec{n}\wedge\vec{n'}=-\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}\neq\vec{0}$

les plans (P) et $(P)'$ sont sécants suivant une droite (D)

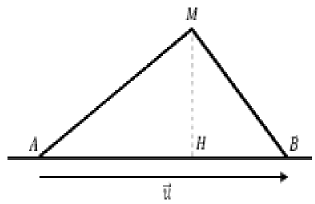
et $\vec{u}(-1;5;3)$ est un vecteur directeur de (D)

et la droite (D) passe par $A(-1;5;3)$ (il suffit de donner par exemple $z=0$ et résoudre le système et calculer x et y)

Donc : une représentation paramétrique de (D) est $(D):\begin{cases}x=-1+t\\ y=5t\\ z=3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

4) Distance d'un point par rapport à une droite.

Soit $D\left(A;\vec{u}\right)$: la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point dans l'espace.



- Si $M\in(D)$ alors $d\left(A;(D)\right)=0$
- Si $M\notin(D)$ on pose : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

Soit H la projection orthogonale de M sur la droite (D). on a :

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}MH\times AB=$

On en déduit que : $d\left(M;(D)\right)=MH=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{AB}$

Propriété : Soient $D\left(A;\vec{u}\right)$: une droite dans l'espace et M un point ; la distance du point M à la droite (D) est/ $d\left(M;(D)\right)=MH=\frac{\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

(Cette propriété reste vraie si $M\in(D)$)

Exemple : L'espace est muni d'un repère orthonormé

calculer la distance du point $M(-1;0;1)$ à la droite (D) dont une représentation paramétrique est : $(D):\begin{cases}x=-1+t\\ y=5t\\ z=3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

Solution : la droite (D) passe par : $A(1;-1;0)$

et $\vec{u}(2;-1;2)$ est un vecteur directeur de (D)

et $\overrightarrow{AM}(-2;1;1)$

$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$

Donc : $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$

Donc : $d(M;(D)) = \dfrac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$

Exercice : soit ABCDEFGH un cube dans L'espace orienté muni d'un repère orthonormé directe $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})$

Soit I milieu du segment $[EF]$ et K centre de gravité du carré ADHE

1)a)Montrer que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

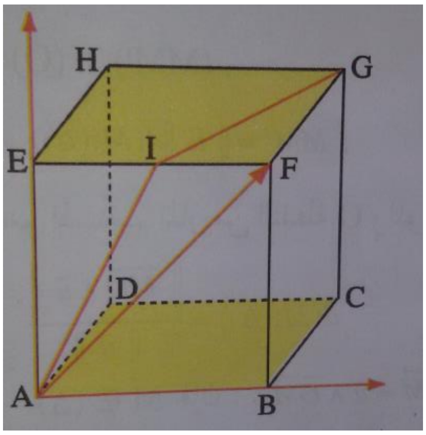
b) En déduire la surface du triangle IGA

2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et soit Ω un point tel que : $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{BT}$

2)a) comparer les distances : BD et ΩT et comparer la surface des triangles ABD et $A\Omega T$

2)b) Montrer que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$

Solution : 1) a) dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})$



On a : $A(0;0;0)$ et $B(1;0;0)$ et $D(0;1;0)$ et $E(0;0;1)$ et $F(1;0;1)$

et $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$ et $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et

$K\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

donc : $\overrightarrow{BK}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IG}\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ et $\overrightarrow{IA}\left(-\frac{1}{2};0;-1\right)$

$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{AB} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{AD} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ cad $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

b) $S_{IGA} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

2)a) on a : BD $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{BT}$ donc $BT\Omega D$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{\Omega T} = \overrightarrow{DB}$

Donc $\Omega T = DB$

Soit M la projection orthogonal de A sur la droite (BD) donc (AM) c'est la hauteur des deux triangles ABD et $A\Omega T$ donc :

$S_{ABD} = \frac{1}{2}AM \times BD$ et $S_{A\Omega T} = \frac{1}{2}AM \times \Omega T$

Et puisque : $\Omega T = DB$ alors $S_{A\Omega T} = S_{ABD}$

2)b) Montrons que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \left(\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{T\Omega}\right) = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{T\Omega}$

On a : $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AT} = \vec{0}$ car les points A et C et T sont alignés

$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$ (car $\overrightarrow{T\Omega} = \overrightarrow{BD}$)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien