1) العبارة

العبارة هي كل نص رياضي صحيح لغويا و معناه يمكن أن يكون صحيحا أو خاطئا و لا يمكن أن يكون صحيحا و خاطئا في نفس الوقت

2) الدالة العبارية

هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة و يصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة

3) المكممات

المكمم الكوني

لتكن $P(x)$ ؛ $x \in E$

العبارة $(\forall x \in E): \quad P(x)$ تقرأ مهما يكن x من E لدينا $P(x)$ أو تقرأ لكل x من E لدينا $P(x)$ و هي تعني أن جميع عناصر المجموعة E تحقق $P(x)$

الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني

المكمم الوجودي

لتكن $P(x)$ ؛ $x \in E$

- العبارة $(\exists x \in E): \quad P(x)$ تعني يوجد عنصر x على الأقل من E يحقق $P(x)$

الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي

- العبارة $(\exists! x \in E): \quad P(x)$ تعني يوجد عنصر وحيد x من E يحقق $P(x)$

الرمز $\exists!$ يسمى المكمم الوجودي بالوحدانية

إذا كانت المكممات من نفس الطبيعة فترتيبها غير مهم أما إذا كانت من طبيعيتين مختلفتين فترتيبها مهم

مبادئ في المنطق

4) العمليات المنطقية

نفي عبارة

نفي عبارة P هي عبارة نرمز لها ب $\overline{P}$ أو $nonP$

$\overline{P}$ تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت P صحيحة

	$\overline{P}$
1	0
0	1

نفي عبارات مكممة

- **نفي العبارة :** $(\forall x \in E): \quad P(x)$ **هي العبارة :** $(\exists x \in E): \quad \overline{P(x)}$
- **نفي العبارة :** $(\exists x \in E): \quad P(x)$ **هي العبارة :** $(\forall x \in E): \quad \overline{P(x)}$
- **نفي العبارة :** $(\forall x \in E)(\forall y \in F): \quad P(x,y)$ **هي العبارة :** $(\exists x \in E)(\exists y \in F): \quad \overline{P(x,y)}$
- **نفي العبارة :** $(\forall x \in E)(\exists y \in F): \quad P(x,y)$ **هي العبارة :** $(\exists x \in E)(\forall y \in F): \quad \overline{P(x,y)}$

الإستدلال بالمثال المضاد:

- ✓ **للبرهنة على أن عبارة ما P خاطئة يكفي أن نبرهن أن نفيها $\overline{P}$ صحيح**
- ✓ **للبرهنة على أن العبارة $(\forall x \in E): \quad P(x)$ خاطئة يكفي إيجاد على الأقل عنصر x من E بحيث تكون $\overline{P(x)}$ صحيحة**

الفصل المنطقي

نرمز لفصل عبارتين P و Q بالرمز : (Q أو P) أو $(P \vee Q)$ و هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين P و Q صحيحة.

P	Q	$(P \vee Q)$
		1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

العطف المنطقي

نرمز لعطف عبارتين P و Q بالرمز : (Q و P) أو $(P \wedge Q)$ و هو عبارة تكون صحيحة فقط في حالة إذا كانت العبارتين P و Q صحيحتين معا .

P	Q	$(P \wedge Q)$
		1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الإستلزام

نرمز لإستلزام عبارتين P و Q بالرمز : $P \Rightarrow Q$ و نقرأ P تستلزم Q أو إذا كان P فإن Q و هو يكون خاطئا في حالة واحدة هي أن تكون P صحيحة و Q خاطئة

P	Q	$P \Rightarrow Q$
		1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

التكافؤ المنطقي

نرمز لتكافؤ عبارتين P و Q بالرمز : $P \Leftrightarrow Q$
و نقرأ (P تكافئ Q) أو (P تعني Q) أو (P إذا وفقط إذا كان Q)
و هو يعني ($P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$)
ويكون التكافؤ صحيحا إذا كانت ل P و Q نفس قيم الحقيقية

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
		1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

5) القوانين المنطقية

قوانين مورغان

لتكن P و Q عبارتين ، لدينا :

$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$ $\qquad$ $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$

لتكن P و Q و R ثلاث عبارات ، لدينا :

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

قانون التكافؤات المتتالية

العبارة $\left[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)\right] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ قانون منطقي

قانون الإستلزام المضاد للعكس

العبارة $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$ قانون منطقي

قانون الخلف

العبارة $\left[\left(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}\right) \wedge \left(\overline{P} \Rightarrow Q\right)\right] \Rightarrow P$ قانون منطقي

قانون فصل الحالات

العبارة $\left[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\right] \Rightarrow \left[(P \vee Q) \Rightarrow R\right]$ قانون منطقي

مبدأ الترجع

لتكن $P(n)$ خاصية لمتغير صحيحي طبيعي n

- إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث تكون $P(n_0)$ صحيحة
- إذا كانت العبارة $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $(\forall n \geq n_0)$ صحيحة

فإن العبارة $P(n)$ $(\forall n \geq n_0)$ صحيحة

I. التناسبية

1) النسب المئوية

E مجموعة عدد عناصرها n و A جزء من E عدد عناصره m

النسبة المئوية التي تمثلها A في E هو العدد p الذي يحقق : $p = \frac{m}{n} \times 100$ و نرمز له ب $p\%$

- لحساب ما يمثله كسر $\frac{p}{q}$ من x نضرب x في $\frac{p}{q}$:

$x \times \frac{p}{q}$ هي قيمة ما يمثله $\frac{p}{q}$ من x

- للحصول على النسبة المئوية التي يمثلها الكسر $\frac{p}{q}$ نكتب الكسر $\frac{p}{q}$ على شكل كسر مقامه 100

مثلا $\frac{40}{100} = \frac{2 \times 20}{5 \times 20} = \frac{2}{5}$ إذن $\frac{2}{5}$ يمثل نسبة 40%

2) حساب زيادة أو تخفيض $p\%$

- للحصول على القيمة الجديدة y بعد الزيادة في القيمة الأولى x بنسبة $p\%$ نضرب x في $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ و هكذا فإن :

$$y = \left(1+\frac{p}{100}\right) \times x$$

- للحصول على القيمة الجديدة y بعد التخفيض في القيمة الأولى x بنسبة $p\%$ نضرب x في $\left(1-\frac{p}{100}\right)$ و هكذا فإن :

$$y = \left(1-\frac{p}{100}\right) \times x$$

الحساب العددي

3) التناسب و التناسب العكسي

a و b و c و d أعداد حقيقية غير منعدمة

- يكون a و b متناسبين مع c و d إذا كان : $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
- يكون a و b متناسبين عكسيا مع c و d إذا كان : $\frac{a}{\frac{1}{c}}=\frac{b}{\frac{1}{d}}$ أي $ac=bd$
- تكون الأعداد a و b و c و d في هذا الترتيب تناسبا إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
- الرابع المتناسب للأعداد a و b و c هو العدد x بحيث تكون الأعداد a و b و c و x في هذا الترتيب تناسبا أي $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$
- الواسط المتناسب لعددين a و b هو العدد x بحيث تكون الأعداد a و b و x و x في هذا الترتيب تناسبا أي $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ أي $x^2=ab$

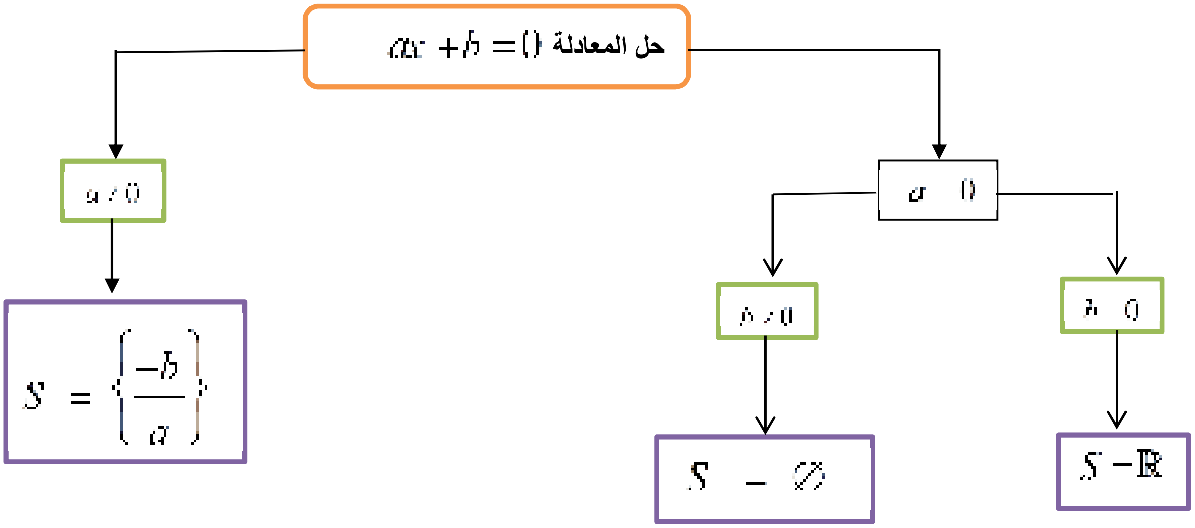
إذا كانت الأعداد a_1 و a_2 و a_3 متناسبة مع الأعداد عير المنعدمة b_1 و b_2 و b_3 فإن :

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3}$ مع α_1 و α_2 و α_3 أعداد حقيقية بحيث : $\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3\neq 0$

II. المعادلات – المتراجحات – النظمات

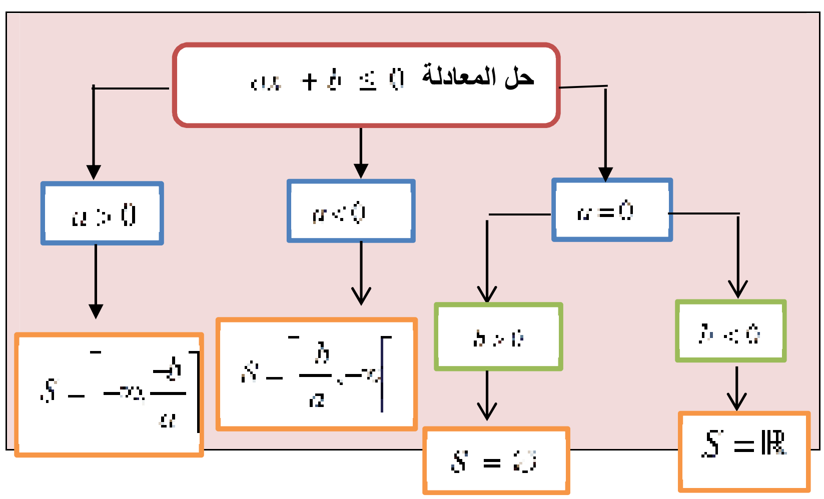
1) معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هي كل معادلة يمكن أن تكتب على شكل $ax+b=0$ حيث x هو المجهول و a و b عددان حقيقيان معلومان



2) متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد في $\mathbb{R}$ هي كل متراجحة يمكن أن تكتب على شكل $ax+b\geq 0$ أو $ax+b>0$ أو $ax+b\leq 0$ أو $ax+b<0$ حيث x هو المجهول و a و b عددان حقيقيان معلومان



3) جدول إشارة الحدانية $ax+b$

نعتبر الحدانية $ax+b$ حيث $a\neq 0$

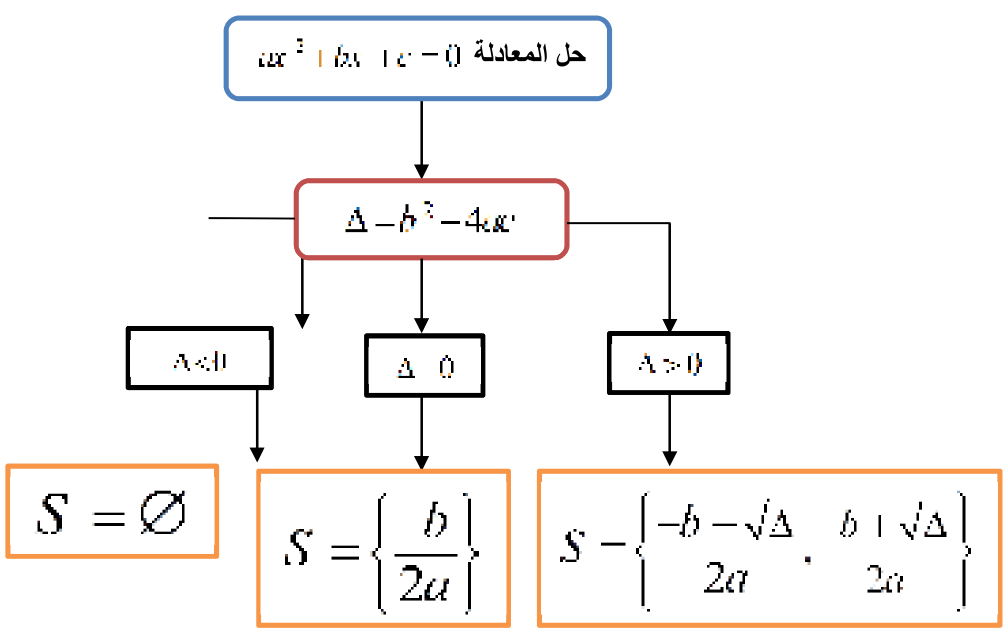
- إذا كان $x\geq\frac{-b}{a}$ فإن إشارة $ax+b$ هي إشارة a
- إذا كان $x\leq\frac{-b}{a}$ فإن إشارة $ax+b$ هي عكس إشارة a

4) معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد

الكتابة $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right]$ تسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c حيث a و b و c أعداد حقيقية بحيث $a\neq 0$

- كل معادلة على الشكل $ax^2+bx+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية بحيث $a\neq 0$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{R}$
- العدد $\Delta=b^2-4ac$ يسمى مميز هذه المعادلة أو مميز ثلاثية الحدود ax^2+bx+c

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ بحيث $a\neq 0$ و لتكن S مجموعة حلولها و Δ مميزها .



درس

5) تعميل ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية

نعتبر ثلاثية الحدود ax^2+bx+c و ليكن Δ مميزها

- إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 و لدينا :
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$
- إذا كان $\Delta=0$ فإن :
$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$
- إذا كان $\Delta<0$ فإن ثلاثية الحدود ax^2+bx+c لا يمكن تعميلها إلى جداء حدوديتين من الدرجة الأولى في $\mathbb{R}$

6) إشارة ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية

نعتبر ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$ و Δ مميزها

- إذا كان $\Delta>0$ فإن إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a خارج الجذرين ، و إشارة $P(x)$ هي عكس إشارة العدد a داخل الجذرين
- إذا كان $\Delta=0$ فإن إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a لكل x مخالف للعدد $\dfrac{-b}{2a}$
- إذا كان $\Delta<0$ فإن إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a لكل x من $\mathbb{R}$

7) نظمة معادلتين من الدرجة الأولى

النظمة $(S):\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ تسمى نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y حيث a و b و c و a' و b' و c' أعداد حقيقية .

العدد $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة (S).

$$(S):\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

- إذا كان : $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ فإن النظمة تقبل حلا وحيدا هو الزوج (x,y) حيث : $x=\dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$
- إذا كان $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=0$ فإنه قد لا يكون لهذه النظمة أي حل وقد يكون لها ما لا نهاية من الحلول

1) متتالية عددية

- المتتالية العددية هي كل دالة عددية معرفة على جزء من $\mathbb{N}$
- إذا رمزنا للدالة ب u فإننا نرمز للمتتالية ب (u_n)
- الحد u_n هو صورة n بالدالة u

2) عدد حدود متتالية

إذا كانت (u_n) متتالية عددية فإن عدد الحدود المتتابعة :

$u_p;u_{p+1};......;u_n$ $(n > p)$ يساوي : $n-p+1$

3) المتتالية الحسابية

(u_n) حسابية أساسها r إذا كان $u_{n+1}-u_n=r$

<u>الحد العام لمتتالية حسابية :</u>

إذا كانت (u_n) حسابية أساسها r فإن : $u_n=u_p+(n-p).r$

<u>ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية :</u>

a و b و c في هذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني أن $b=\frac{a+c}{2}$

<u>حساب المجموع :</u>

إذا كانت (u_n) حسابية فإن : $u_p+u_{p+1}+.........+u_m=\frac{(m-p+1)\times(u_p+u_m)}{2}$

المتتاليات

4) المتتالية الهندسية

(u_n) هندسية أساسها q إذا كان $u_{n+1} = q \times u_n$

الحد العام لمتتالية هندسية :

إذا كانت (u_n) هندسية أساسها q فإن : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية :

a و b و c في هذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني أن $b^2 = a \times c$

حساب المجموع :

إذا كانت (u_n) هندسية أساسها q $(q \neq 1)$ فإن : $u_p + u_{p+1} + \dots\dots\dots + u_m = u_p \times \left(\dfrac{1-q^{m-p+1}}{1-q}\right)$

العددية

1) الدالة العددية

E و F مجموعتان غير فارغتين من $\mathbb{R}$.

- كل علاقة f تربط كل عنصر x من E بعنصر على الأكثر من F تسمى دالة من E نحو F
- x يسمى المتغير و y المتغير المرتبط ب x

و نكتب $y = f(x)$ ، كما نقول إن y صورة x ب f و x سابق y ب f

2) التمثيل المبياني لدالة عددية

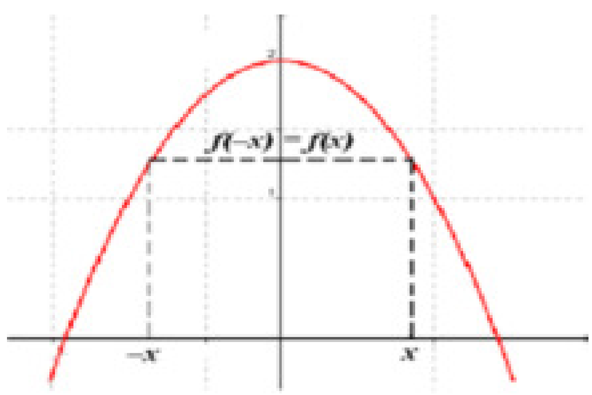
لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها و (O, i, j) معلما في المستوى.

- التمثيل المبياني لدالة f و يسمى أيضا منحنى f نرمز له ب C_f و هو مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى بحيث : $x \in D_f$ و $y = f(x)$

3) زوجية دالة عددية

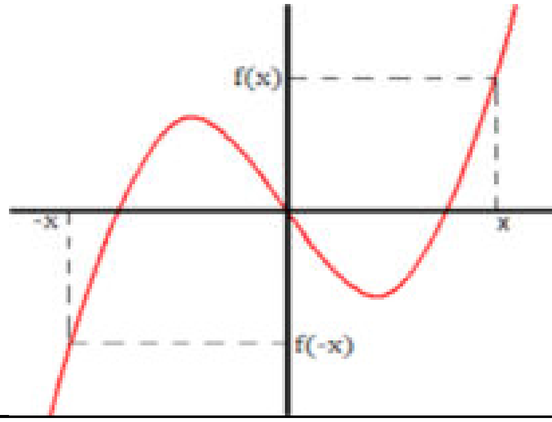
لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها.

- f زوجية إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f : $-x \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$



عموميات حول الدوال

- f فردية إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f : $-x \in D_f$ و $f(-x) = -f(x)$



لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في معلم متعامد (O, i, j)

- f زوجية يعني أن C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب
- f فردية يعني أن C_f متماثل بالنسبة لأصل المعلم

4) الدالة المكبورة – الدالة المصغورة – الدالة المحدودة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- نقول إن f مكبورة على I إذا وجد عدد حقيقي M بحيث : $f(x) \leq M$ لكل x من I
- نقول إن f مصغورة على I إذا وجد عدد حقيقي m بحيث : $m \leq f(x)$ لكل x من I
- نقول إن f محدودة إذا كانت f مكبورة و مصغورة

5) مقارنة دالتين

تتم مقارنتين دالتين f و g على مجال I بإحدى التقنيات التالية :

- حساب الفرق $(f(x) - g(x))$ و دراسة إشارته على المجال I
- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g)
  - ✓ يكون $f(x) < g(x)$ عندما يقع (C_g) فوق (C_f)
  - ✓ أفاصيل نقط تقاطع (C_f) و (C_g) إذا وجدت هي حلول المعادلة $f(x) = g(x)$

6) رتابة دالة

f دالة عددية و I مجالا ضمن D_f.

- f تزايدية على I يعني أنه لكل عنصرين a و b من I : إذا كان $a \leq b$ فإن $f(a) \leq f(b)$
- f تزايدية قطعا على I يعني أنه لكل عنصرين a و b من I : إذا كان $a < b$ فإن $f(a) < f(b)$
- f تناقصية على I يعني أنه لكل عنصرين a و b من I : إذا كان $a \leq b$ فإن $f(a) \geq f(b)$
- f تناقصية قطعا على I يعني أنه لكل عنصرين a و b من I : إذا كان $a < b$ فإن $f(a) > f(b)$

f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها و a و b عنصران مختلفان من D_f

العدد $T = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ يسمى معدل تغير f بين a و b

لتكن f دالة عددية و $T = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ معدل تغيرها بين عنصرين مختلفين a و b من مجال I ضمن D_f

- إذا كان $T \geq 0$ فإن f تزايدية على I
- إذا كان $T > 0$ فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كان $T \leq 0$ فإن f تناقصية على I
- إذا كان $T < 0$ فإن تناقصية قطعا على I

f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة للعدد 0

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}^+$ ضمن D_f و I' مماثل I بالنسبة للعدد 0

- في حالة f دالة زوجية ، لدينا :
  - ✓ إذا كانت f تزايدية على I فإنها تناقصية على I'
  - ✓ إذا كانت f تناقصية على I فإنها تزايدية على I'
- في حالة f دالة فردية ، لدينا :
  f لها نفس منحى التغيرات على كل من I و I'.

7) مطاريف دالة

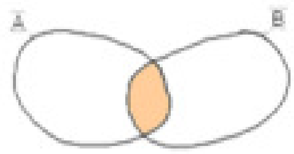
لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من المجال I

- نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I ، إذا كان : $f(x) \leq f(a)$ لكل x من I
- نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I ، إذا كان : $f(x) \geq f(a)$ لكل x من I

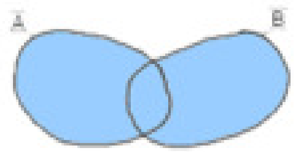
1) مبادئ أساسية حول التعداد

E مجموعة و A و B جزءان من E

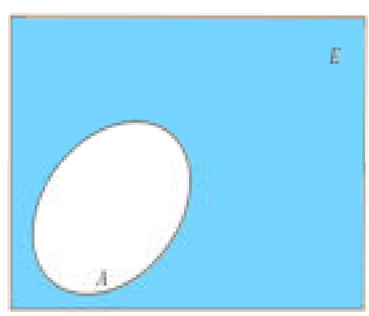
- تقاطع A و B هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و B في نفس الوقت (أي العناصر المشتركة بينهما) ، و نرمز لها ب : $A \cap B$
  و لدينا : لكل x من E :
  $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ و $x \in B$



- اتحاد A و B هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B و نرمز لها ب : $A \cup B$
  و لدينا : لكل x من E :
  $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ أو $x \in B$

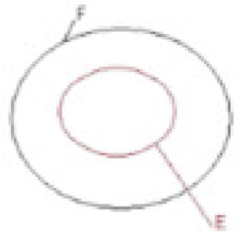


- متممة A في E هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى E و لا تنتمي إلى A و نرمز لها ب : $\overline{A}$
  و لدينا : لكل x من E :
  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$



التعداد

- نقول إن مجموعة E ضمن مجموعة F إذا كان كل عنصر من E هو عنصر من F و نكتب $E \subset F$



2) تجزئة مجموعة

E مجموعة و A_1 و A_2 و .... و A_p أجزاء من E

نقول إن الأجزاء A_1 و A_2 و .... و A_p تحدد تجزئة (أو تكون تجزيئا) للمجموعة E إذا كان :

- ✓ الأجزاء A_1 و A_2 و .... و A_p منفصلة مثنى مثنى
- ✓ كل من الأجزاء A_i $(1 \leq i \leq p)$ غير فارغ
- ✓ اتحاد هذه الأجزاء هو المجموعة E

ملاحظة :

- ❖ نرمز ب $\mathscr{P}(E)$ لمجموعة أجزاء المجموعة E
- ❖ $A \in \mathscr{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$

3) رئيسي مجموعة

لتكن E مجموعة منتهية (أي تحتوي على عدد منته من العناصر) .

نسمي عدد عناصر E رئيسي E و نرمز له ب : $cardE$

ملاحظة

$$card\varnothing = 0$$

4) مبدأ الجمع

لتكن E مجموعة منتهية و A_1 و A_2 و .... و A_p تجزئة ل E .

لدينا : $cardE = cardA_1 + cardA_2 + ...+ cardA_p$

لتكن E مجموعة و A و B جزءان من E، لدينا :

- إذا كان $A \cap B = \varnothing$ فإن : $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$
- في جميع الحالات :

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

- $card(\overline{A}) = card(E) - card(A)$

ملاحظة :

$A \subset E$ و $A \neq \varnothing$ و $A \neq E$

A و $\overline{A}$ تحددان تجزئة ل E

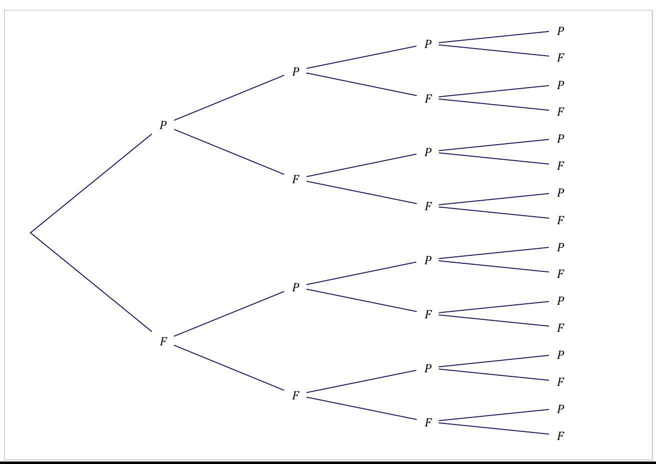
5) مبدأ الجداء (المبدأ الأساسي للتعداد)

إذا كانت في وضعية للتعداد مكونة من p مرحلة و كان عدد الاختيارات في كل مرحلة هو n_1 و n_2 و .... و n_p على التوالي

فإن عدد الإمكانيات في هذه الوضعية هو : $n_1 \times n_2 \times ....\times n_p$

ملاحظة

تساعد شجرة الإختيار في بعض الحالات على تنظيم عملية العد و استيعابها



مثال: رمي قطعة نقدية أربع مرات

6) عدد التبديلات

عدد التبديلات هو العدد $n!$ المعرف بما يلي :

$$\begin{cases} 0!=1 \\ 1!=1 \\ n!=1\times2\times.....\times(n-1)\times n \quad (n\geq 2) \end{cases}$$

7) عدد الترتيبات

p عنصر من n هو العدد A_n^p حيث $n\geq p$ و هو معرف بما يلي :

$$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}=(n-p+1)\times.........\times(n-1)\times n$$

8) عدد التأليفات

عدد التأليفات ل p عنصر من n هو العدد C_n^p حيث $n\geq p$ و هو معرف بما يلي : $C_n^p=\frac{n!}{p!\times(n-p)!}=\frac{A_n^p}{p!}$

لكل n و p من $\mathbb{N}$. بحيث $1\leq p\leq n-1$ لدينا : $C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$

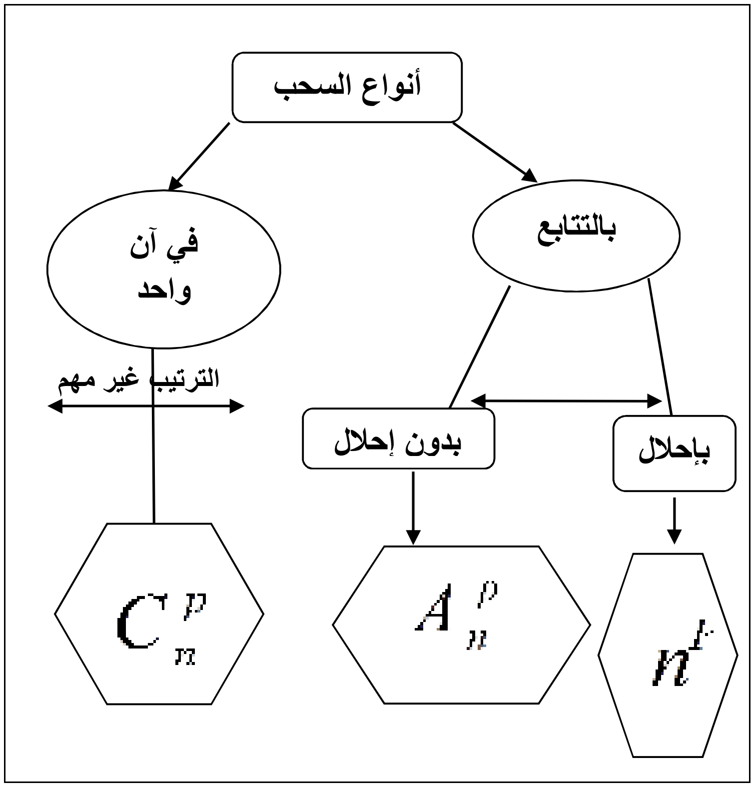
لكل n و p من $\mathbb{N}$. بحيث $0\leq p\leq n$ لدينا : $C_n^p=C_n^{n-p}$

حدانية نيوتن

x و y عددان حقيقيان و $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$(x+y)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+..........+C_n^px^{n-p}y^p+.........+C_n^{n-1}xy^{n-1}+C_n^ny^n$$

9) أنواع السحب



الترتيب مهم درس ا

1) نهايات الدوال المرجعية في الصفر

- $\lim_{x \to 0} x = 0$
- $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$
- $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$

2) النهاية المنعدمة لدالة عددية في الصفر

نقول إن دالة عددية f ، معرفة على مجال منقط مركزه الصفر ، تؤول إلى الصفر عندما يؤول x إلى الصفر إذا كانت $f(x)$ تقترب من الصفر كلما اقترب x من الصفر ، و نكتب $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

3) النهاية المنتهية في نقطة

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ تكافئ $\lim_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0$

- إذا كانت P دالة حدودية فإنه لكل x_0 من $\mathbb{R}$ ، لدينا : $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$
- إذا كانت R دالة حدودية فإنه لكل x_0 من مجموعة تعريفها ، لدينا : $\lim_{x \to x_0} R(x) = R(x_0)$

4) نهاية على اليمين ، نهاية على اليسار في نقطة

- الدوال المعرفة على يمين x_0 ، هي الدوال المعرفة على مجال من نوع $]x_0, a[$ حيث $a > x_0$.
- الدوال المعرفة على يسار x_0 ، هي الدوال المعرفة على مجال من نوع $]b, x_0[$ حيث $b < x_0$.

- نقول إن الدالة f تقبل النهاية l على اليمين في x_0 ، إذا كانت تنطبق على يمين x_0 مع دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 تكون نهايتها هي l عند x_0 .
  و نكتب : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$ أو $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$
- لدينا تعريف مشابه بالنسبة للنهاية على اليسار في النقطة x_0 ، و نكتب $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$ أو $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ تكافئ ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$)

5) النهاية المنتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

نهايات مقلوبات الدوال المرجعية في $+\infty$ و $-\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

النهاية المنعدمة لدالة عددية في $+\infty$ أو $-\infty$

- نهاية f هي الصفر عندما يؤول x إلى $+\infty$ تعني أنه كلما كبر العدد x و كان موجبا كلما اقترب العدد $f(x)$ من الصفر . و نكتب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- نهاية f هي الصفر عندما يؤول x إلى $-\infty$ تعني أنه كلما كبرت القيمة المطلقة للعدد x و كان سالبا كلما اقترب العدد $f(x)$ من الصفر . و نكتب : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

النهاية المنتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ تكافئ $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - l) = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ تكافئ $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - l) = 0$

6) النهاية اللامنتهية في نقطة

النهايات اللامنتهية لدوال مرجعية

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

النهاية اللامنتهية في نقطة

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ تعني أن عندما يقترب العدد x من x_0 فإن العدد $f(x)$ يصبح كبيرا

إذا كان $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^+$ فإن $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$

✓ إذا كان $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^-$ فإن $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty$

7) النهاية اللامنتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

نهايات الدوال المرجعية في $+\infty$ أو $-\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} x = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$

8) العمليات على النهايات

حالة النهايات المنتهية

إذا كان لدينا : $\lim_{x \to a} f(x) = l$ و $\lim_{x \to a} g(x) = m$ فإن :

- $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = l+m$
- $\lim_{x \to a} kf(x) = kl$
- $\lim_{x \to a}(f.g)(x) = l \times m$
- $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$ $(m \neq 0)$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{m}$ $(m \neq 0)$

حالة النهايات اللامنتهية :

✓ **إذا كان لدينا :** $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ **فإن :**

- إذا كان $k > 0$ فإن : $\lim_{x \to a} kf(x) = +\infty$
- إذا كان $k < 0$ فإن : $\lim_{x \to a} kf(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

✓ إذا كان لدينا : $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ و كانت f موجبة فإن : $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

✓ إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to a} g(x) = m$ فإن :

- $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = +\infty$
- إذا كان $m > 0$ فإن : $\lim_{x \to a}(f.g)(x) = +\infty$
- **إذا كان** $m < 0$ فإن : $\lim_{x \to a}(f.g)(x) = -\infty$

✓ إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to a}(f.g)(x) = +\infty$

- نهاية دالة حدودية بجوار ما لانهاية هي نهاية حدها الأعلى درجة أي :

$$\lim_{|x| \to +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 = \lim_{|x| \to +\infty} a_n x^n \quad \text{مع} \quad (a_n \neq 0)$$

- نهاية دالة جذرية بجوار ما لانهاية هي نهاية خارج حديها الأعلى درجة
- الكتابة $|x| \to +\infty$ تعني $x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$

9) الأشكال الغير المحددة

- الكتابات التالية : "$\frac{0}{0}$" أو "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" أو "$0\times(\pm\infty)$" أو "$(+\infty)+(-\infty)$" تسمى أشكال غير محددة
- في حالة الحصول على شكل غير محدد فإننا نلجأ إلى تغيير طريقة حساب النهاية و غالبا ما نقوم إما بالتعميل أو النشر أو الضرب في المرافق .

1) العدد المشتق في x_0

- نقول إن الدالة f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$
- العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 و نكتب : $l=f'(x_0)$

2) التأويل الهندسي للعدد المشتق

f دالة قابلة للإشتقاق في x_0 ، و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

- معادلة المماس لمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 هي :

$$y=f'(x_0).(x-x_0)+f(x_0)$$

3) الدالة المشتقة – اشتقاق بعض الدوال الإعتيادية

- نقول إن دالة f قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I ، إذا كانت قابلة للإشتقاق في كل نقطة من المجال I.
- الدالة المعرفة على I بما يلي : $\begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على المجال I و نرمز لها ب f'

بعض الدوال المشتقة لبعض الدوال الإعتيادية

$f(x)$	$f'(x)$	المجال
k	0	$\mathbb{R}$
ax		
$ax+b$	a	
x^2	x	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$

$]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$

4) عمليات على الدوال المشتقة

	$u+v$	$+$	الجمع
	$k\,u'$	$k\,u$	الضرب في عدد حقيقي k
	$u\ v+u\,v$	$u.v$	الجداء
u لا تنعدم في I	$\frac{-u'}{u}$	$\frac{1}{u}$	المقلوب
v لا تنعدم في I	$\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	الخارج
	$2u'.u$	u	المربع
	$nu'.u^{n-1}$	$u^n \quad n\in\mathbb{N}^*)$	الأس

5) مطاريف دالة قابلة للإشتقاق على مجال

- رتابة دالة و إشارة مشتقتها :

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$ و f قابلة للإشتقاق على I .

- f ثابتة على I $\Leftrightarrow$ $f'(x)=0$ لكل x من I
- f تزايدية على I $\Leftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$ لكل x من I
- f تناقصية على I $\Leftrightarrow$ $f'(x)\leq 0$ لكل x من I

- إذا كانت f قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I ، و تقبل مطرافا في النقطة x_0 $(x_0\in I)$ فإن : $f'(x_0)=0$
إذا كانت $f'(x_0)=0$ و كانت f' تغير إشارتها بجوار x_0 فإن f تقبل مطرافا في x_0

التأويل الهندسي :

- ✓ **العدد** $f'(x_0)$ **هو ميل مماس المنحنى** (C_f) **عند النقطة** $M_0(x_0, f(x_0))$
- ✓ **إذا كان** $f'(x_0) = 0$ **فإن هذا المماس يكون موازيا لمحور الأفاصيل**

1) :

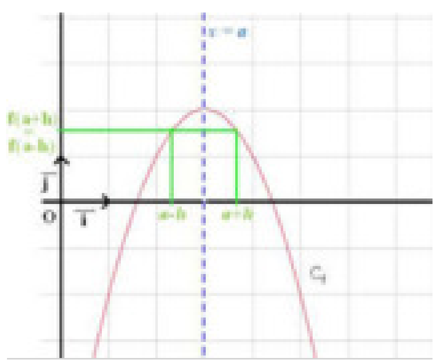
الحدوديات من الدرجتين الثانية و الثالثة

1) مجموعة التعريف

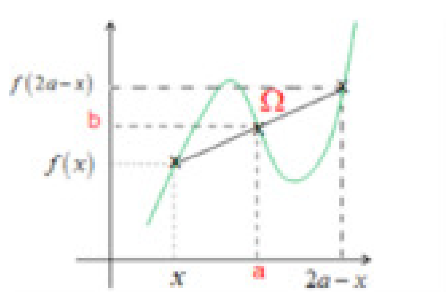
- مجموعة تعريف دالة حدودية هي : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

2) التماثل و منحنى دالة

- المستقيم ذي المعادلة $x = a$ محور تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : & 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f : & f(2a-x) = f(x) \end{cases}$



- النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : & 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f : & f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$



3) تصميم مقترح لدراسة دالة عددية

تحديد مجموعة التعريف و منه مجموعة الدراسة
- حساب نهايات الدالة عند محدات مجموعة التعريف (أو مجموعة الداسة)
- حساب الدالة المشتقة و دراسة إشارتها
- وضع جدول التغيرات
- حساب صور بعض الأعداد
- إنشاء المنحنى

4) النهايات في المحدات

- نهاية دالة حدودية في $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

5) حساب مشتقة دالة حدودية

- لحساب مشتقة دالة حدودية يلزمنا الصيغ المبينة في الجدول :

الدالة			x	$f(x)+g(x)$	$f(x)-g(x)$	$\alpha f(x)$
مشتقتها		a	nx^{n-}	$f'(x)+g'(x)$	$f'\ x)-g'(x)$	$\alpha f'\ x)$

6) المعادلة $f(x)=c$ و المتراجحة $f(x)\leq c$

f دالة عددية و (C_f) منحناها و c عدد حقيقي

- حلول المعادلة $f(x)=c$ هي أقاصيل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم ذي المعادلة $y=c$
- حلول المتراجحة $f(x)\leq c$ هي المجالات التي يكون فيها المنحنى (C_f) تحت المستقيم ذي المعادلة $y=c$
- حلول المتراجحة $f(x)\geq c$ هي المجالات التي يكون فيها المنحنى (C_f) فوق المستقيم ذي المعادلة $y=c$

دراسة و تمثيل الدوال العددية (2) :
الدالة المتخاطة : $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

1) دراسة دالة متخاطة

f دالة عددية معرفة ب : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ مع $ad-bc\neq 0$ و $c\neq 0$

لدراسة الدالة f نتبع الخطوات التالية :

- **تحديد مجموعة تعريف f :**

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/cx+d\neq 0\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}=\left]-\infty,\frac{-d}{c}\right[\cup\left]\frac{-d}{c},+\infty\right[$$

- **حساب النهايات عند محدات D_f:**

$$\lim_{x\to-\infty}f(x) \text{ و } \lim_{x\to+\infty}f(x) \text{ و } \lim_{\substack{x\to\frac{-d}{c}\\ x>\frac{-d}{c}}}f(x) \text{ و } \lim_{\substack{x\to\frac{-d}{c}\\ x<\frac{-d}{c}}}f(x)$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}}$$

- **حساب الدالة المشتقة f'**

$$\boxed{f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}}$$

- **دراسة إشارة $f'(x)$**
- **و ضع جدول تغيرات الدالة f**
- **حساب صور بعض الأعداد**

إنشاء المقاربات

- إنشاء المنحنى

منحنى دالة متخاطة يسمى هذلولا

2) المستقيم المقارب و الموازي لمحور الأفاصيل

إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ فإن المستقيم ذا المعادلة $y = l$ يسمى مقاربا للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$

- إذا كان $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ فإن المستقيم ذا المعادلة $y = l$ يسمى مقاربا للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$

3) المستقيم المقارب الموازي لمحور الأراتيب

- إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x = x_0$ يسمى مقاربا عموديا للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
- إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x = x_0$ يسمى مقاربا عموديا للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

4) مركز تماثل هذلول

- منحنى الدالة $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ مع $ad-bc \neq 0$ و $c \neq 0$ هو هذلول مركزه النقطة $\Omega\left(\dfrac{-d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$