# مبادئ في المنطق

العبارة هي كل نص رياضي صحيح لغويا و معناه يمكن أن يكون صحيحا أو خاطئا و لا يمكن أن يكون صحيحا و خاطئا في نفس الوقت

## الدالة العبارية

هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة و ي
المجموعة

## المكممات

### المكمم الكوني

لتكن $x$ $E$ $P$ $x$

العبارة $(\forall x \in E): \; P(x)$ تقرأ مهما يكن $x$ من $E$ لدينا $P(x)$ أو تقرأ لكل $x$ من $E$ لدينا $P(x)$ و هي تعني أن جميع عناصر المجموعة $E$ تحقق $P(x)$

الرمز يسمى المكمم الكوني

### المكمم الوجودي

لتكن $x$ $E$ $P$ $x$

- العبارة $(\exists x \in E): \; P(x)$ تعني يوجد عنصر $x$ على الأقل من $E$ يحقق $P(x)$

الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي

- العبارة $(\exists! x \in E): \; P(x)$ تعني يوجد عنصر وحيد $x$ من $E$ يحقق $P(x)$

الرمز يسمى المكمم الوجودي بالوحدانية

إذا كانت المكممات من نفس الطبيعة فترتيبها غير م

## نفي عبارة

نفي عبارة $P$ هي عبارة نرمز لها ب $\overline{P}$ أو $nonP$

$\overline{P}$ تكون صحيحة إذا كانت $P$ خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت $P$ صحيحة

| $P$ | $\overline{P}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

## نفي عبارات مكممة

- نفي العبارة : $\forall x \in E \qquad P \quad x$ هي العبارة : $\exists x \in E \quad : \quad \overline{P \quad x}$
- نفي العبارة : $(\exists x \in E): \quad P(x)$ هي العبارة : $(\forall x \in E): \quad \overline{P(x)}$
- نفي العبارة : $(\forall x \in E)(\forall y \in F): \quad P(x,y)$ هي العبارة : $(\exists x \in E)(\exists y \in F): \quad \overline{P(x,y)}$
- نفي العبارة : $(\forall x \in E)(\exists y \in F): \quad P(x,y)$ هي العبارة : $(\exists x \in E)(\forall y \in F): \quad \overline{P(x,y)}$

**الإستدلال بالمثال المضاد:**

- ✓ للبرهنة على أن عبارة ما $P$ خاطئة يكفي أن نبرهن أن نفيها $\overline{P}$ صحيح
- ✓ للبرهنة على أن العبارة $(\forall x \in E): \quad P(x)$ خاطئة يكفي إيجاد على الأقل عنصر $x$ من $E$ بحيث تكون $\overline{P(x)}$ صحيحة

## الفصل المنطقي

نرمز لفصل عبارتين $P$ و $Q$ بالرمز : ( $Q$ أو $P$ ) أو و هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين $P$ و صحيحة.

| $P$ | $Q$ | ( |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

## العطف المنطقي

نرمز لعطف عبارتين $P$ و $Q$ بالرمز : ( $Q$ و $P$ ) أو و هو عبارة تكون صحيحة فقط في حالة إذا كانت العبارتين $P$ و $Q$ صحيحتين معا .

| $P$ | $Q$ | ( |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

## الإستلزام

نرمز لإستلزام عبارتين بالرمز : و نقرأ تستلزم أو إذا كان فإن و هو يكون خاطئا في حالة واحدة هي أن تكون $P$ صحيحة و خاطئة

| $P$ | $Q$ | $P$ $Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

## التكافؤ المنطقي

نرمز لتكافؤ عبارتين بالرمز :
و نقرأ ( $P$ تكافئ ) أو ( $P$ تعني ) أو ( $P$ إذا وفقط إذا كان
و هو يعني ( $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ )
ويكون التكافؤ صحيحا إذا كانت ل $P$ و $Q$ نفس قيم الحقيقية

| $P$ | $Q$ | $P$ $Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

## قوانين مورغان

لتكن عبارتين ، لدينا :

$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$ $\qquad$ $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$

لتكن ثلاث عبارات ، لدينا :

( ) ( ) ( )

( ) ( ) ( )

## قانون التكافؤات المتتالية

العبارة $\Leftrightarrow \quad \Rightarrow \rbrack \quad \Leftrightarrow \quad \wedge \quad \Leftrightarrow \quad \lbrack$ قانون منطقي

## قانون الإستلزام المضاد للعكس

العبارة $\Rightarrow ( \Leftrightarrow \quad \Rightarrow$ قانون منطقي

## قانون الخلف

العبارة $\Rightarrow \quad \Rightarrow ( \wedge \quad \Rightarrow ($ قانون منطقي

## قانون فصل الحالات

العبارة $\Rightarrow \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \wedge$ قانون منطقي

لتكن خاصية لمتغير صحيحي طبيعي $n$

- ❖ إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي $n_0$ بحيث تكون $P(n_0)$ صحيحة
- ❖ إذا كانت العبارة $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\quad (\forall n \geq n_0)$ صحيحة

فإن العبارة $P(n)$ $\quad (\forall n \geq n_0)$ صحيحة

- المجموعة هي تجمع لأشياء أو عناصر مادية أو غير مادية ، واقعية أو خيالية .

يمكن وصف مجموعة بذكر جميع عناصرها ( )

معرفة

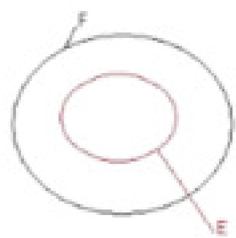
مثال : $\{0,1,2,........\}=\mathbb{N}$ { أحمر ، أسود } $\{0,1\}$ $\{x\in\mathbb{R}/|x-2|\leq 7\}$

- قد تكون مجموعة خالية من العناصر و تسمى $\varnothing$
- نرمز ب $x\in E$ إذا كان $x$ عنصر ينتمي للمجموعة $E$ و نرمز ب $x\notin E$ في حالة العكس.

في

**التضمن**

نقول أن $E$ ضمن $F$ و نكتب $E\subset F$ إذا كان كل عنصر من $E$ هو أيضا عنصر من $F$ أو بتعبير رياضي : $( \quad ):$ و نقول كذلك أن $E$ جزء من $F$




- لكل مجموعة $E$ لدينا : $E\subset E$ و $\varnothing\subset E$
- لتكن $A$ و $B$ و $C$ ثلاث مجموعات ، لدينا : $(A\subset B \text{ و } B\subset C)\Rightarrow A\subset C$

**التساوي**

$F$ $E$ تكافئ $E\subset F$ و $F\subset E$ تكافئ $x\in E\Leftrightarrow x\in F$

**مجموعة أجزاء $E$**

نرمز لها ب : $\mathscr{P}(E)$ و هي المجموعة المكونة من جميع أجزاء $E$

مثال : $E=\{1,2,3\}$ $\mathscr{P}(E)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

لتكن مجموعة

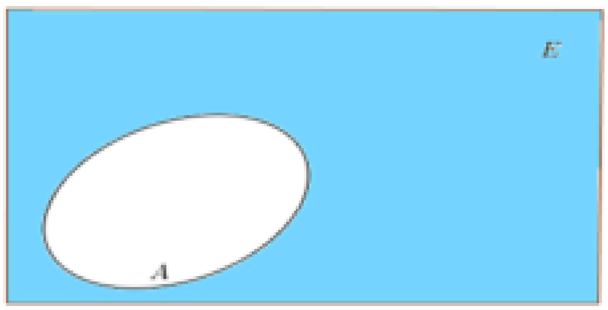
- $A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathscr{P}(E)$
- $E \in \mathscr{P}(E)$ و $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$

## متممة مجموعة

إذا كان $A \subset E$

مجموعة عناصر $E$ التي لا تنتمي ل $A$ تسمى متممة $A$ في $E$ : $C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$

و نرمز لها كذلك ب : $E \setminus A$ أو $\overline{A}$

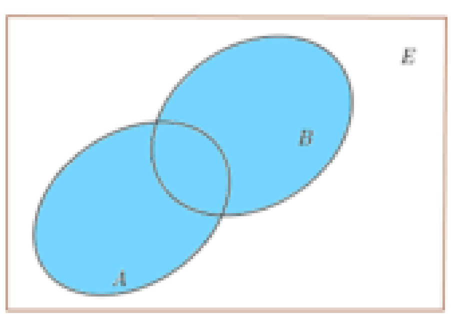



- $\overline{\overline{A}}$ $A$
- $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
- $C_E^E = \emptyset$ و $C_E^{\emptyset} = E$

## الإتحاد

لتكن $A$ و $B$ مجموعتين ضمن $E$

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ أو } x \in B\}$$



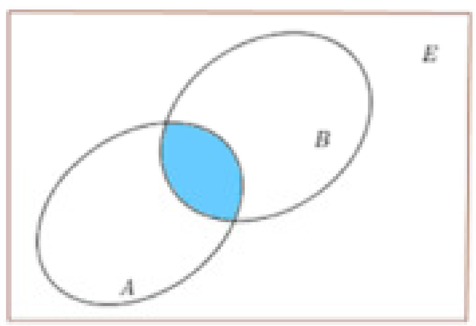
لتكن $A$ و $B$ و $C$ ثلاثة أجزاء من المجموعة $E$

- $B \subset A \cup B$ و $A \subset A \cup B$
- $A \cup B = B \cup A$ و $A \cup \varnothing = A$ و $A \cup A = A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

## التقاطع

لتكن $A$ و $B$ مجموعتين ضمن $E$

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \in \mathrm{B}\}$$

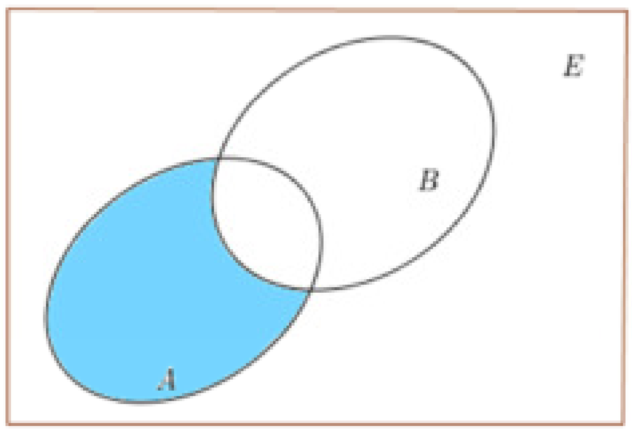



لتكن $A$ و $B$ و $C$ ثلاثة أجزاء من المجموعة $E$

- $A \cap B \subset B$ و $A \cap B \subset A$
- $A \cap B \subset A \cup B$
- $A \cap B = B \cap A$ و $A \cap \varnothing = \varnothing$ و $A \cap A = A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \bigcap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

## فرق مجموعتين

لتكن $A$ و $B$ جزأين من المجموعة $E$
فرق المجموعتين $A$ و $B$ في هذا الترتيب هو مجموعة العناصر من $E$ التي تنتمي إلى $A$ و لا تنتمي إلى $B$ و نرمز له ب :
\ و لدينا : $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \notin B\}$




- $A \setminus B = A \cap C_E^B$
- $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$
- الفرق التماثلي : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

## الجداء الديكارتي

لتكن $E$ و $F$ مجموعتين
الجداء الديكارتي ل $E$ و $F$ نرمز له ب : $E \times F$ و هو مجموعة الأزواج $(x, y)$ حيث $x \in E$ و $y \in F$
مثال :

$$^2 = \times = \{(x, y) / x \in \text{ و } y \in \}$$

$$[1,4] \times = \{(x, y) / 1 \le x \le 4 \text{ و } y \in \}$$

## التطبيقات

نسمي تطبيق $f : E \quad F$ كل علاقة تربط عنصرا $x$ من $E$ بعنصر وحيد من $F$

### تساوي تطبيقين

ليكن تطبيقين

$$(\forall x \in E) \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow f \quad g$$

### التمثيل المبياني للتطبيق $f : E \longrightarrow F$

$$\Gamma_f = \quad x \; f(x \quad \in E \times F \quad x \in E$$

### مركب تطبيقين

ليكن $f : E \to F$ و $g : F \to G$ إذن $g \circ f : E \to G$ هو التطبيق المعرف ب :

$$g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

### التطبيق المطابق

$$Id_E : \; E \qquad E$$
$$x \qquad x$$

### الصورة المباشرة – الصورة العكسية

لتكن $A \subset E$ و ليكن التطبيق $f : E \to F$
الصورة المباشرة ل $A$ بالتطبيق $f$ نرمز لها ب : $f(A)$ و هي معرفة بما يلي : $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$

ليكن $f$ تطبيقا من $E$ نحو $F$ و $A$ و $B$ جزأين من المجموعة $E$ ، لدينا :

- $f(A) \subset F$
- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

- 
- $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

---

لتكن $B\subset F$ و ل

يكن التطبيق $f:E\to F$

الصورة العكسية ل $B$ بالتطبيق $f$ نرمز لها ب : $f^{-1}(B)$ و هي معرفة بما يلي : $f^{-1}(B)=\{x\in E / f(x)\in B\}$

---

ليكن $f$ تطبيقا من $E$ نحو $F$ و $A$ و $B$ جزأين من المجموعة $E$ ، لدينا :

- $f^{-1}(B)\subset E$
- $A\subset B \Rightarrow f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

## تطبيق تبايني – تطبيق شمولي – تطبيق تقابلي

لتكن $E$ و $F$ مجموعتين و ليكن التطبيق $f:E\to F$

- $f$ تبايني $\Leftrightarrow$ $(\forall(a,b)\in E^2)\ \left[f(a)=f(b)\Rightarrow a=b\right]$
- $f$ شمولي $\Leftrightarrow$ $(\forall y\in F)(\exists x\in E): y=f(x)$ ( $f(E)=F$ )
- $f$ تقابل $\Leftrightarrow$ $(\forall y\in F)(\exists! x\in E): y=f(x)$ ( $f$ تبايني و شمولي )

---

إذا كان $f$ تقابل فإنه و تقابله العكسي $f^{-1}$ يحققان :

$f^{-1}\ \ f=Id_E$ $\qquad ^{1}=\quad _{F}$

---

ليكن $f:E\to F$ و $g:F\to G$ تطبيقين تقابليين

التطبيق $g\circ f$ تقابل و لدينا : $(g\circ f)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

# المجموعات و التطبيقات

## 1) المجموعا ت

### -1 كتابة مجموعة بتفصيل أو بإدراك

أنشطة -1 لتكن $D_6$ مجموعة القواسم الموجبة للعدد6 لدينا $D_6 = \{x \in \mathbb{N} /\ 6 \text{يقسم} x\}$

ولدينا $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

الكتابة الأولى تسمى كتابة $D_6$ بإدراك والكتابة الثانية تسمى كتابة $D_6$ بتفصيل

-2 لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعيةالتي مربعاتها أصغر من 30

أكتب A بتفصيل و بإدراك

خلاصة لتكن E مجموعة

يمكن كتابة المجموعة E بطريقتين

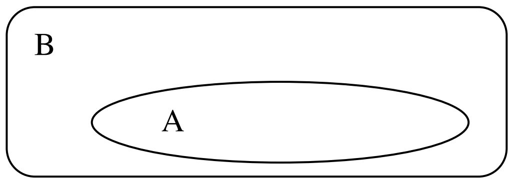
- بتفصيل أي بكتابة جميع عناصر E
- بإدراك وذلك بتحديد علاقةمميزة لعناصرها

### 2 - التضمن

لتكن A و B مجموعتين

نقول ان A ضمن B أو B يتضمن A اذا كان كل عنصر من A هوأيضا عنصر من B

أي أن $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$




ملاحظة

لكل مجموعة $E$ $E \subset E$ و $\varnothing \subset E$

خاصية $A$ و $B$ و $C$ ثلاث مجموعات $(A \subset B$ و $B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

### 3 - مجموعة أجزاء مجموعة

لتكن $E$ مجموعة ؛ المجموعة المكونة من جميع أجزاء $E$ تسمى مجموعة أجزاء $E$ ونرمز لها ب $\mathscr{P}(E)$

أي أن $A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathscr{P}(E)$

ملاحظة $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$ و $E \in \mathscr{P}(E)$

مثال $E = \{a, b, c\}$ حدد المجموعة $\mathscr{P}(E)$

### 4 - تساوي مجموعتين

لتكن A و B جزئين من المجموعة E

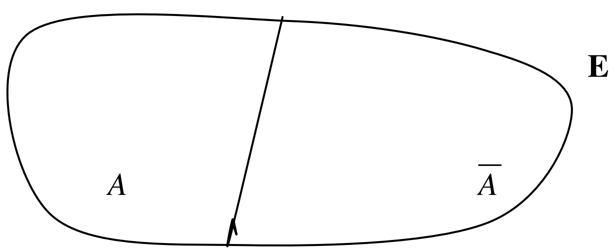
نقول أن A و B متساويتان و نكتب A=B اذا و فقط اذا كان $A \subset B$ و $B \subset A$ أي $x \in A \Leftrightarrow x \in B$

### 5 - المتممة

تعريف لتكن A جزءا من المجموعة E

مجموعة عناصر E التي لا تنتمي إلى A تسمى متممة A في E

ونرمز لها ب $\overline{A}$ أو $C_E^A$ $C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$



**خاصية** -1 $\overline{\overline{A}} = A$

-2 $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

-3 $C_E^{\varnothing} = E$ و $C_E^E = \varnothing$

برهان ......

## 6 - التقاطع و الإتحاد

**أ -التقاطع تقاطع المجموعتين A و B هو المجموعة التي نرمز لها ب** $A \cap B$ و المكونة من العناصر التى تنتمي إلي $A$ و إلي $B$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \in B$$

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \in B\}$$

**مثال حدد المجموعة** $D_6 \cup D_8$ **تقاطع مجموعة القواسم الموجبة ل6** $D_6$ ومجموعة القواسم الموجبة ل8 $D_8$

**خاصيات لتكن A وB و C أجزاء من المجموعة E**

**-1** $A \cap B \subset A$ وَ $A \cap B \subset B$

**-2** $A \cap B = B \cap A$ وَ $A \cap \varnothing = \varnothing$ وَ $A \cap A = A$

**-3** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

**-4** $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

**ب -الإتحاد إتحاد المجموعتين A و B هو المجموعة التي نرمز لها ب** $A \cup B$ و المكونة من العناصر التى تنتمي إلي $A$ أو تنتمي إلي $B$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ أو } x \in B$$

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

مثال أكتب بتفصيل $D_6 \cup D_8$

**خاصيات لتكن A وB و C أجزاء من المجموعة E**

**-1** $A \subset A \cup B$ و $B \subset A \cup B$ و $A \cap B \subset A \cup B$

**-2** $A \cup B = B \cup A$ وَ $A \cup \varnothing = A$ وَ $A \cup A = A$

**-3** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

**-4** $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

### ج - التقاطع والإتحاد

**خاصية 1**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

**خاصية 2 –(قانون موركان loi de morgan)**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

## 7 - فرق مجموعتين

**نعريف**

**لتكن A وB جزئين من المجموعة E**

**فرق المجموعتين A و B في هذا الترتيب هوالمجموعة المكونة من** العناصر التي تنتمي إلي $A$ ولا تنتمي إلي $B$

ونرمز لها ب $A \backslash B$ $\quad$ $A \backslash B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \notin B\}$

**مثال** $D_8 \backslash D_6 = .........$

**خاصية**

$$A \backslash B = A \cap C_E^B$$
$$A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$$

**ملاحظة** **المجموعة** $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$

تسمي الفرق التماثلي للمجموعتين $A$ و $B$ ونرمز له ب $A\Delta B$

## 8 - الجداء الديكارتي

**تعريف** $E$ و $F$ مجموعتين

**الجداء الديكارتي** $E\times F$ **للمجموعتين** $E$ و $F$ هو مجموعة الأزواج $(x,y)$ حيث $x\in E$ و $y\in F$

$$E\times F=\{(x,y)/x\in E \text{ و } y\in F\}$$

$$(x,y\in)E\times F\Leftrightarrow x\in E \text{ و } y\in F$$

**ملاحظة -**

**1-** $E\times E=E^2$ هي المربع الديكارتي للمجموعة $E$

**2-** إذا كان $E=\varnothing$ أو $F=\varnothing$ فإن $E\times F=\varnothing$

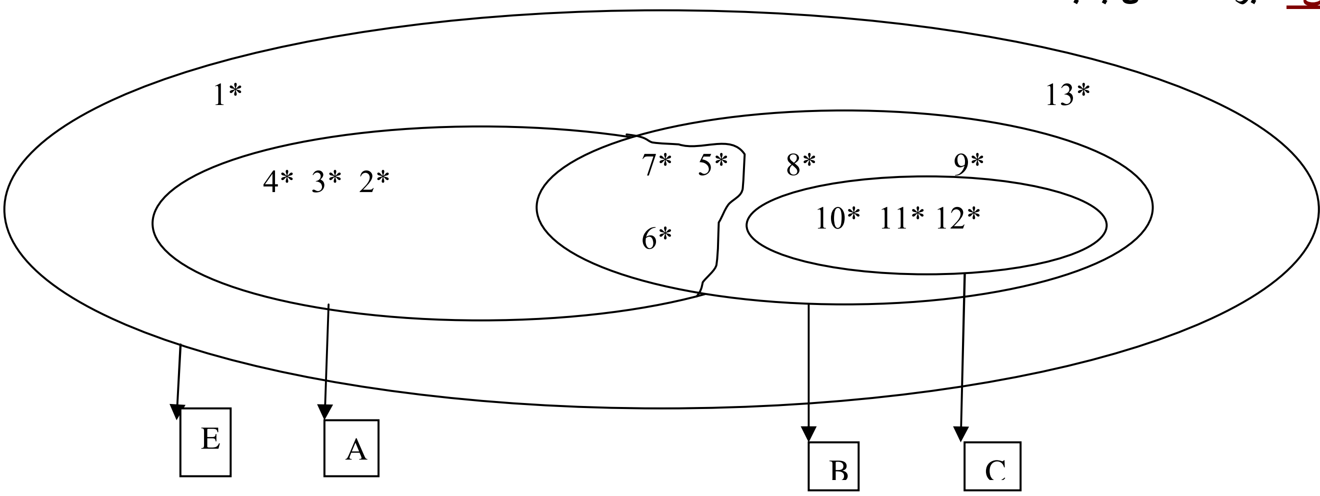
**مثال**

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y)/x\in\mathbb{R} \text{ و } y\in\mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{N}^2=\{(x,y)/x\in\mathbb{N} \text{ و } y\in\mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{N}\times\mathbb{Z}=\{(x,y)/x\in\mathbb{N} \text{ و } y\in\mathbb{Z}\}$$

**تطبيق** **نعتبر مخطط فان جانبه**




**1- حدد بتفصيل المجموعات التالية** $A$ و $B$ و $E$ و $A\cap B$ و $A\cup B$ و $(B\backslash A)$ و $(A\backslash B)$ ونرمز له ب $A\Delta B$

**2- بين أن** $C\subset B$ وحدد $B\backslash C$ ثم بين أن $B\backslash C=C_B^C$

**3- حدد بتفصيل** $C_E^A$ و $C_E^B$ و $C_E^{A\cap B}$ و $C_A^{A\cap B}$ و $C_E^{A\cup B}$

**4- حدد** $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ و $(A\backslash B)\cap(B\backslash A)$

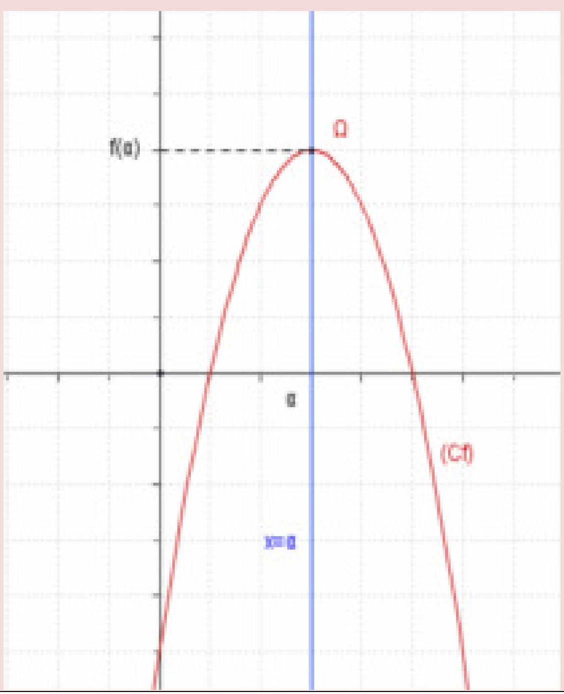
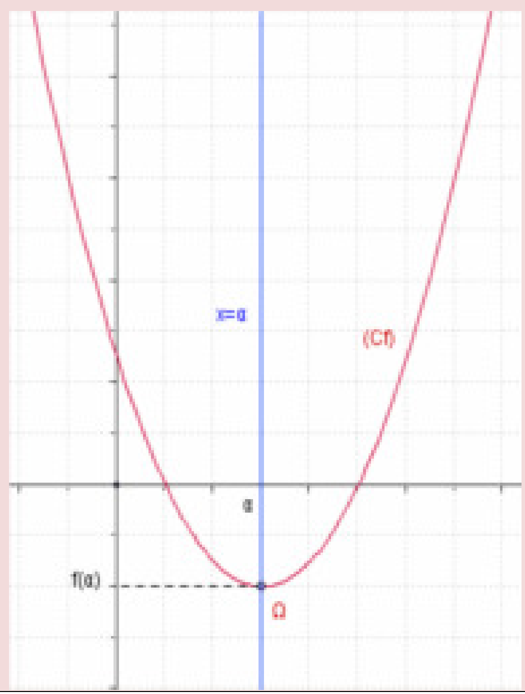
**5- حدد** $A\Delta B$ و $A\Delta E$ و $C\Delta B$

## تذكير : دراسة بعض الدوال الإعتيادية

### دراسة و تمثيل الدالة $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ $\quad a \neq 0$

نضع $\alpha \quad \frac{b}{2a}$

التمثيل المبياني للدالة $x \mapsto ax^2 + bx + c$ عبارة عن شلجم رأسه $\Omega(\alpha, f(\alpha))$ و محوره هو المستقيم الذي معادلته
$x$

| 0 | 0 |
|---|---|
| $x$: $-\infty$ … $-b/2a$ … $+\infty$ ; $f(x)$: ↗ $f(-b/2a)$ ↘ | $x$: $-\infty$ … $-b/2a$ … $+\infty$ ; $f(x)$: ↘ $f(-b/2a)$ ↗ |
|  |  |

$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

نعتبر الدالة $f \ : x \ \mapsto \frac{ax \quad b}{cx \quad d}$

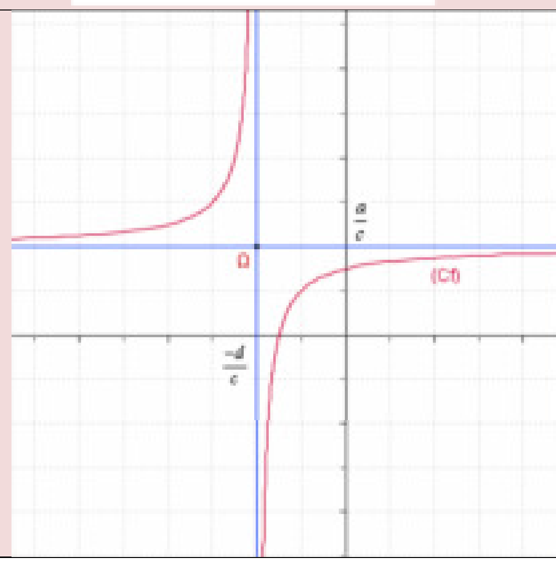
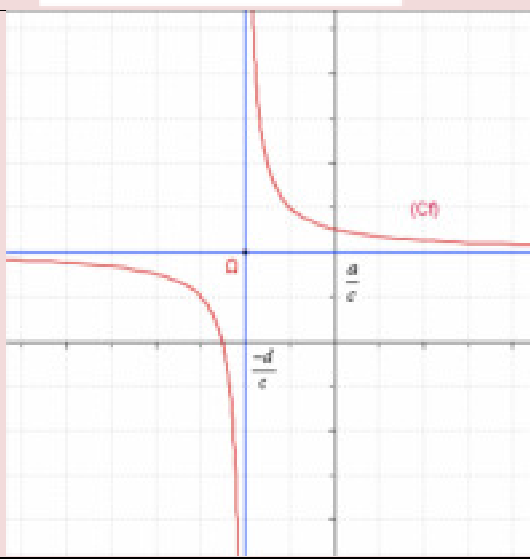
الدالة $f$ تسمى دالة متخاطة

لدينا $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} = \left] -\infty, \frac{-d}{c} \right[ \cup \left] \frac{-d}{c}, +\infty \right[$

التمثيل المبياني للدالة $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ عبارة عن هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ و مقارباه هما المستقيمان اللذين معادلتاهما :

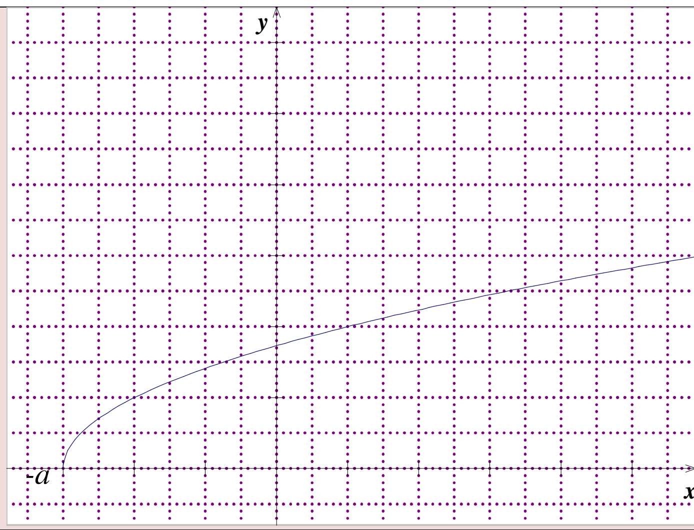
$\frac{d}{\ }$ و $y \quad \frac{a}{\ }$

العدد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ يسمى محددة الدالة $f \ : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

| | |
|---|---|
| $\begin{vmatrix} & \\ c & d \end{vmatrix} \quad 0$ | $\begin{vmatrix} & \\ c & d \end{vmatrix} \quad 0$ |
| $x$: $-\infty$ $-d/c$ $+\infty$ ; $f(x)$: ↗ ‖ ↗ | $x$: $-\infty$ $-d/c$ $+\infty$ ; $f(x)$: ↘ ‖ ↘ |
|  |  |

$f : x \mapsto \sqrt{x+a}$

نعتبر الدالة $f : x \mapsto \sqrt{x+a}$
لدينا $D_f = [-a, +\infty[$

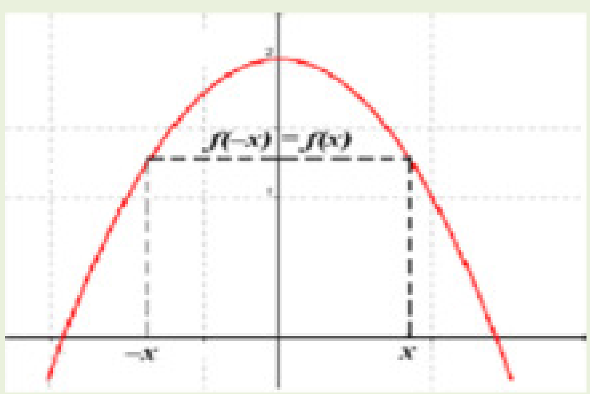



| $x$ | $-a$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $0 \nearrow$ |

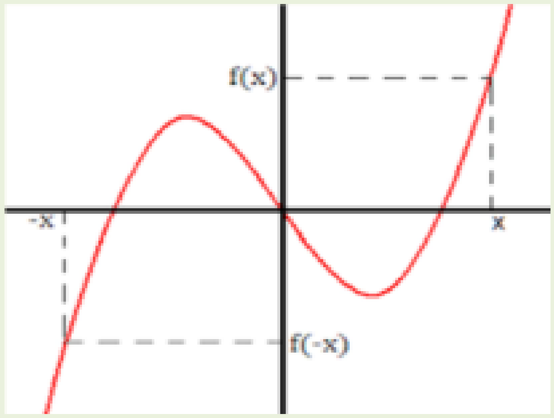
## الدالة الزوجية – الدالة الفردية

لتكن $f$ دالة عددية و $D_f$ مجموعة تعريفها.

- $f$ زوجية إذا وفقط إذا كان لكل $x$ من $D_f$ : $-x \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$



- $f$ فردية إذا وفقط إذا كان لكل $x$ من $D_f$ : $-x \in D_f$ و $f(-x) = -f(x)$




لتكن $f$ دالة عددية و $C_f$ منحناها في معلم متعامد $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

- $f$ زوجية يعني أن $C_f$ متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب
- $f$ فردية يعني أن $C_f$ متماثل بالنسبة لأصل المعلم

## الدالة المكبورة – الدالة المصغورة – الدالة المحدودة

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$.

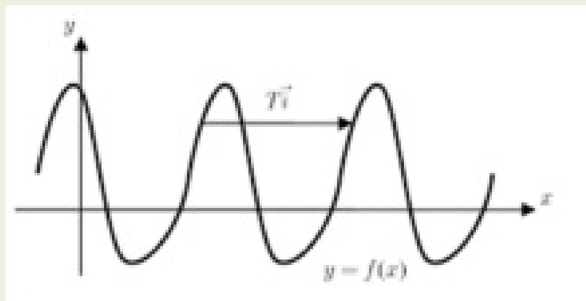
- نقول إن $f$ مكبورة على $I$ إذا وجد عدد حقيقي $M$ بحيث : $f(x) \leq M$ لكل $x$ من $I$
- نقول إن $f$ مصغورة على $I$ إذا وجد عدد حقيقي $m$ بحيث : $m \leq f(x)$ لكل $x$ من $I$
- نقول إن $f$ محدودة إذا كانت $f$ مكبورة و مصغورة

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$.

تكون $f$ دالة محدودة على $I$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب $k$ بحيث : $|f(x)| \leq k$ لكل $x$ من $I$

نقول إن $f$ دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي $T$ موجب قطعا بحيث :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f): x+T \in D_f \\ (\forall \quad \in \quad _f): \quad ( \quad + \quad ) = \quad ( \quad ) \end{cases}$$




ا $T$ يسمى دور للدالة $f$

أصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالة $f$

إذا كان $T$ دورا لدالة عددية $f$ فإنه لكل $k$ من $\mathbb{Z}$ : $(\forall x \in D_f) \quad f(x+kT)=f(x)$

## مطاريف دالة عددية

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ و $a$ عنصرا من المجال $I$

- نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة $f$ على المجال $I$ ، إذا كان : $f(x) \leq f(a)$ لكل $x$ من $I$
- نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة $f$ على المجال $I$ ، إذا كان : $f(x) \geq f(a)$ لكل $x$ من $I$

## – التأويل الهندسي

لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين و $D_f$ و $D_g$ على التوالي مجموعة تعريفهما.

$$f \quad g \Leftrightarrow \begin{cases} D_f = D_g \\ (\forall x \in D);f(x) = g(x) \end{cases}$$ حيث $D = D_f = D_g$

لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين معرفتين على مجال $I$ .

نقول إن $f$ أصغر من أو تساوي $g$ على $I$ ، إذا وفقط إذا كان : $(\forall x \in I);f(x) \leq g(x)$

هندسيا : منحنى الدالة $f$ على $I$ يوجد تحت منحنى الدالة $g$ على $I$.

## مركب دالتين

لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على $D_f$ و $D_g$

نضع $D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f , \mathrm{f}(\mathrm{x}) \in D_g\}$

الدالة العددية $h$ المعرفة على $D$ بما يلي : $h(x) = g(f(x))$ ، تسمى مركب الدالتين $f$ و $g$ في هذا الترتيب و يرمز لها بالرمز $g \circ f$

## رتابة دالة عددية

$f$ دالة عددية و $I$ مجالا ضمن $D_f$.

- $f$ تزايدية على $I$ يعني أنه لكل عنصرين $a$ و $b$ من $I$ : إذا كان $a \leq b$ فإن $f(a) \leq f(b)$
- $f$ تزايدية قطعا على $I$ يعني أنه لكل عنصرين $a$ و $b$ من $I$ : إذا كان $a < b$ فإن $f(a) < f(b)$
- $f$ تناقصية على $I$ يعني أنه لكل عنصرين $a$ و $b$ من $I$ : إذا كان $a \leq b$ فإن $f(a) \geq f(b)$
- $f$ تناقصية قطعا على $I$ يعني أنه لكل عنصرين $a$ و $b$ من $I$ : إذا كان $a < b$ فإن $f(a) > f(b)$

$f$ دالة عددية و مجالا ضمن $D_f$.
- $f$ رتيبة على $I$ يعني $f$ تزايدية أو تناقصية على $I$.
-

$f$ دالة عددية و $D_f$ مجموعة تعريفها و $a$ و $b$ عنصران مختلفان من $D_f$

العدد $T = \frac{f(b) \quad f(a)}{-}$ يسمى معدل تغير $f$ بين $a$ و $b$

لتكن $f$ دالة عددية و $T = \frac{f \quad b \quad -f \quad a}{b-a}$ معدل تغيرها بين عنصرين مختلفين $a$ و $b$ من مجال $I$ ضمن $D_f$

- إذا كان $T \geq 0$ فإن $f$ تزايدية على $I$
- إذا كان $T > 0$ فإن $f$ تزايدية قطعا على $I$
- إذا كان $T \leq 0$ فإن $f$ تناقصية على $I$
- إذا كان فإن تناقصية قطعا على

$f$ دالة عددية مجموعة تعريفها $D_f$ متماثلة بالنسبة للعدد $0$

ليكن $I$ مجالا من $\mathbb{R}^+$ ضمن $D_f$ و $I'$ مماثل $I$ بالنسبة للعدد $0$

- في حالة $f$ دالة زوجية ، لدينا :
  - إذا كانت $f$ تزايدية على $I$ فإنها تناقصية على $I'$
  - إذا كانت $f$ تناقصية على $I$ فإنها تزايدية على $I'$

- في حالة $f$ دالة فردية ، لدينا :
  $f$ لها نفس منحى التغيرات على كل من

## رتابة مركب دالتين

لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على مجالين $I$ و $J$ بحيث : $f(x) \in J$ لكل $x$ من $I$ ( $f(I) \subset J$ ) ، لدينا :

- إذا كانت $f$ تزايدية قطعا على $I$ و $g$ تزايدية قطعا على $J$ فإن $g \circ f$ تزايدية قطعا على $I$
- إذا كانت $f$ تزايدية قطعا على $I$ و $g$ تناقصية قطعا على $J$ فإن $g \circ f$ تناقصية قطعا على $I$
- إذا كانت $f$ تناقصية قطعا على $I$ و $g$ تزايدية قطعا على $J$ فإن $g \circ f$ تناقصية قطعا على $I$
- إذا كانت $f$ تناقصية قطعا على $I$ و $g$ تناقصية قطعا على $J$ فإن $g \circ f$ تزايدية قطعا على $I$

# عموميات حول الدوال العددية

# أنشطـــة

## أنشطة تذكيرية

### نشاط1

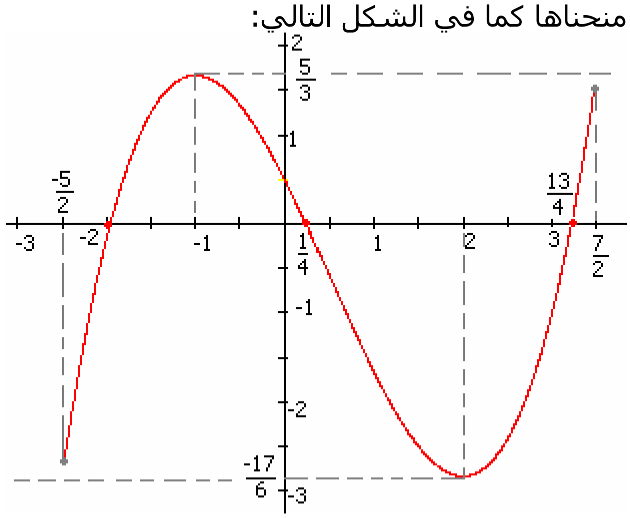
حدد مجموعة تعريف الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي في الحالات التالية:

أ/ $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x^2-x+2}$ ب/ $f(x)=\sqrt{1-2x}$

ج/ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{2x-1}$

### نشاط2

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $\left[\dfrac{-5}{2};\dfrac{7}{2}\right]$ و $(C)$ منحناها كما في الشكل التالي:




1- حدد القيمة القصوى و القيمة الدنيا لدالة $f$ على المجال $\left[\dfrac{-5}{2};\dfrac{7}{2}\right]$

2- استنتج أن $\dfrac{-17}{6}\leq f(x)\leq\dfrac{5}{3}$ $\forall x\in\left[\dfrac{-5}{2};\dfrac{7}{2}\right]$

3- حل مبيانيا أ- $f(x)=0$ ب- $f(x)\geq 0$

4- حدد مبيانيا عدد حلو المعادلة $f(x)=1$

### نشاط3

I/ لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $f(x)=x^2-2x$

و $C_f$ منحنى الدالة $f$ في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- تأكد أن $f(x)=(x-1)^2-1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

أ/ بين أن المنحنى $C_f$ صورة المنحنى $(C)$ الممثل للدالة المعرفة بـ $x\to x^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(1;-1)$

ب/ حدد طبيعة $C_f$ و أنشئه

II/ لتكن $g$ دالة عددية لمتغير حقيقي معرفتين بـ $g(x)=x|x|-2x$

1- بين أن $f$ دالة فردية

2- حدد جدول تغيرات الدالة $f$

3- أنشئ $C_g$ في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

### نشاط4

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي معرفتين بـ $f(x)=\dfrac{-2x-1}{x-1}$

و $C_f$ منحنى الدالة $f$ في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ- حدد $D_f$

ب- تحقق أن $f(x)=-2+\dfrac{-3}{x-1}$ لكل $x$ من $D_f$

2- أ- بين أن $C_f$ صورة المنحنى $(C)$ الممثل للدالة المعرفة بـ $x\to\dfrac{-3}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(1;-2)$

ب- أنشئ $C_f$

3- نعتبر $g$ الدالة المعرفة بـ $g(x)=\dfrac{-2|x|-1}{|x|-1}$

أ- حدد $D_g$ و أدرس زوجية $g$

ب- أنشئ $C_g$

### نشاط5

لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$f(x)=\dfrac{3x-2}{2x-1}$ و $g(x)=\dfrac{-2x+1}{x+1}$

1- أعط جدول تغيرات كل من $f$ و $g$

2- حدد طبيعة $C_f$ و $C_g$ مع إعطاء عناصرها المميزة

## أنشطة التقدم

### نشاط6 (دالة مكبورة- دالة مصغورة – دالة محدودة)

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

$f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$

1- بين بين أن $f(x)\prec 2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

2- أ/ بين أن $1\leq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ب/ حل المعادلة $1=f(x)$ $x\in\mathbb{R}$

3- استنتج أن $1\leq f(x)\prec 2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

**نشاط7** (مقارنة دالتين)

نعتبر $f$ و $g$ الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي

المعرفتين بـ $f(x)=x^2-3x$ ; $g(x)=\dfrac{-x+3}{x+2}$

$C_f$ و $C_g$ المنحنيين الممثلين لـ $f$ و $g$ على

التوالي في مستوى منسوب إلى معلم م.م.

1- حدد تقاطع $C_f$ و $C_g$.

2- أنشئ $C_f$ و $C_g$.

3- حل مبيانيا المتراجحة $f(x)\geq g(x)$

4- تحقق جبريا من حلول المتراجحة $f(x)\geq g(x)$

**نشاط8** ( الدالة الدورية )

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

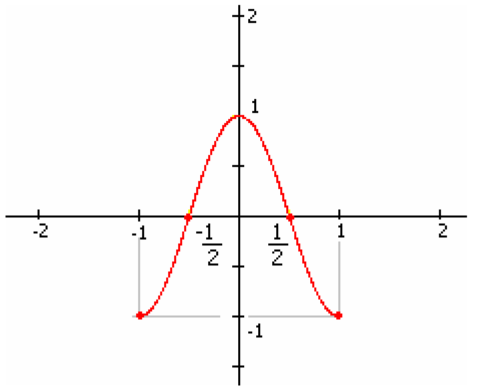
$f(x)=\cos(\pi x)$

1- بين أن $f(x+2)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

2- أنشئ جزء المنحنى الدالة $f$ على المجال

$[-6;6]$ علما أن جزء المنحنى الدالة $f$

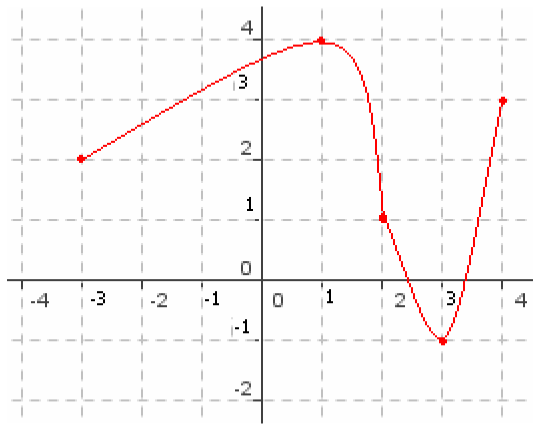
على المجال $[-1;1]$ كما يلي




**نشاط9** (صورة مجال)

الشكل التالي يمثل دالة عددية معرفة على المجال

$[-3;4]$




1- أ/ بين أن $1\leq f(x)\leq 4$ $\forall x\in[-3;2]$

ب/ ليكن $y\in[1;4]$

بين أن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا في $[-3;2]$

ج/ استنتج أن $f([-3;2])=[1;4]$

2- حدد مبيانيا صورة المجال $[-3;1]$ ثم $[2;4]$

**نشاط10** (مركب دالتين)

نعتبر $f$ و $g$ الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي

المعرفتين بـ $f(x)=\sqrt{x}$ ; $g(x)=-x+2$

1- أحسب $g(3)$ و $g(6)$ و $g\left(\dfrac{7}{4}\right)$ ثم أحسب

$f(g(3))$ و $f(g(6))$ و $f\left(g\left(\dfrac{7}{4}\right)\right)$

2- حدد مجال $I$ بحيث لكل $x$ من $I$ يمكن

حساب $f(g(x))$ حدد $f(g(x))$ لكل $x$ من $I$

**نشاط11** (التمثيل المبياني لدالة $x\to\sqrt{x+a}$)

نعتبر $f$ و $g$ الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي

المعرفتين بـ $f(x)=\sqrt{x}$ ; $g(x)=\sqrt{x+1}$

1- حدد مجموعة تعريف كل من الدالتين $f$ و $g$

2- أدرس تغيرات كل من $f$ و $g$

3- أ/ أتمم الجدول التالي

| $x$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | 2 | $\frac{9}{4}$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

ب/ مستعينا بالجدول أنشئ $(C_f)$

4- أ/ بين أن المنحنى $(C_g)$ صورة المنحنى $(C_f)$

بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(-2;0)$

ب/ أنشئ $(C_g)$

**نشاط12** (التمثيل المبياني لدالة $x\to ax^3$)

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

$f(x)=2x^3$

1- بين أن $f$ فردية

2- أدرس تغيرات $f$ و أعط جدول تغيرات $f$

3- أ/ أتمم الجدول التالي

| $x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{5}{4}$ | $\frac{3}{2}$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

ب/ أنشئ $(C_f)$

بالإتباع نفس الخطوات مثل مبيانيا

الدالة $g(x)=-x^3$

# عموميات حول الدوال العددية

## I – تذكير

### 1/ A- الدالة الزوجية- الدالة الفردية

**أ- تعريف**

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي و $D_f$ حيز تعريفها

* نقول ان $f$ دالة زوجية اذا تحقق الشرطان التاليان : * لكل $x$ من $D_f$ $-x \in D_f$

* لكل $x$ من $D_f$ $f(-x)=f(x)$

* نقول إن $f$ دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان : * لكل $x$ من $D_f$ $-x \in D_f$

* لكل $x$ من $D_f$ $f(-x)=-f(x)$

**ب- التأويل الهندسي**

**خاصية**

لتكن $f$ دالة عددية و $C_f$ منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

*- تكون $f$ دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل للمنحنى $C_f$

*- تكون $f$ دالة فردية إذا وفقط إذا كان المنحنى $C_f$ متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

### 2- تغيرات دالة

**a- تعريف**

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن $D_f$

- تكون $f$ تزايدية علىI إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و$x_2$ منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1)\le f(x_2)$
- تكون $f$ تزايدية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و$x_2$ منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1)\prec f(x_2)$
- تكون $f$ تناقصية علىI إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و$x_2$ منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1)\ge f(x_2)$
- تكون $f$ تناقصية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و$x_2$ منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1)\succ f(x_2)$

**b- معدل التغير**

**أ- تعريف**

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي و $x_1$ و$x_2$ عنصرين مختلفين $D_f$

العدد $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ يسمى معدل تغير الدالة $f$ بين $x_1$ و$x_2$.

**ب- معدل التغير و الرتابة**

**خاصية**

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن $D_f$ و $T=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ معدل تغير الدالة $f$ بين $x_1$ و$x_2$.

- تكون $f$ تزايدية علىI إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و$x_2$ مختلفين منI $T \ge 0$
- تكون $f$ تزايدية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و$x_2$ مختلفين منI $T \succ 0$
- تكون $f$ تناقصية علىI إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و$x_2$ مختلفين منI $T \le 0$
- تكون $f$ تناقصية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و$x_2$ مختلفين منI $T \prec 0$

**c- الرتابة وزوجية دالة**

**خاصية**

لتكن $f$ دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $(J=\{-x / x \in I\})$

- إذا كانت $f$ تزايدية على I فان $f$ تناقصية على J.
- إذا كانت $f$ تناقصية على I فان $f$ تزايدية على J.

خاصية

لتكن $f$ دالة فردية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $(J=\{-x / x \in I\})$

- إذا كانت $f$ تزايدية على I فان $f$ تزايدية على J.
- إذا كانت $f$ تناقصية على I فان $f$ تناقصية على J.

ملاحظة: لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^+$ ثم استنتاج تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^-$

## 3- مطاريف دالة

### أ- تعريف

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على مجال $I$ و $a$ عنصر من $I$

- نقول إن $f(a)$ هو القيمة القصوى لـ $f$ على مجال $I$ إذا كان $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in I$ نكتب $f(a)=\underset{x\in D_f}{Max}\, f(x)$
- نقول ان $f(a)$ هو القيمة الدنيا لـ $f$ على مجال $I$ إذا كان $f(x) \geq f(a)$ $\forall x \in I$ نكتب $f(a)=\underset{x\in D_f}{Min}\, f(x)$

### ب- خاصية

ليكن $a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية حيث $a \prec b \prec c$ و $f$ دالةعددية لمتغير حقيقي

إذا كانت $f$ تزايدية على $[a;b]$ و تناقصية على $[b;c]$ فان $f$ تقبل قيمة قصوى عند $b$

إذا كانت $f$ تناقصية على $[a;b]$ و تزايدية على $[b;c]$ فان $f$ تقبل قيمة دنيا عند $b$

## B / - دراسة بعض الدوال الاعتيادية

### 1- الدالة الحدودية من الدرجة الثانية

#### خاصيات

لتكن $f$ دالة حدودية من الدرجة الثانية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ و $a \neq 0$

* يوجد عددان حقيقيان $\alpha$ و $\beta$ حيث $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ هذه الكتابة تسمى الشكل القانوني للدالة $f$

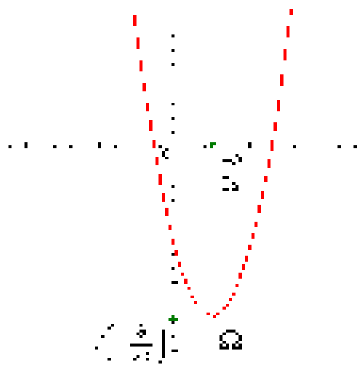
* المنحنى $C_f$ هو صورة المنحنى $(C)$ الممثل للدالة $x \to ax^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* $C_f$ منحنى $f$ في معلم متعامد هو شلجم رأسه $\Omega(\alpha;\beta)$ و محور تماثله المستقيم ذا $x=\alpha$

**ملاحظة:** $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ و $\beta=f(\alpha)$

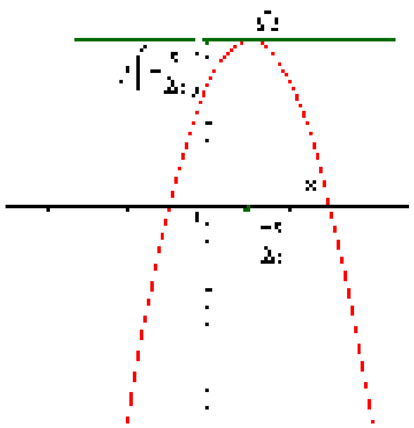
-* إذا كان $a \succ 0$ فان:

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $\frac{-b}{2a}$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f$ | $\searrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ $\nearrow$ |



* إذا كان $a \prec 0$ فان:

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $\frac{-b}{2a}$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f$ | $\nearrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ $\searrow$ |



## 2- الدالة المتخاطة

لتكن $f$ الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$

* توجد أعداد حقيقية $\alpha$ و $\beta$ و $\lambda$ حيث $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل $x$ من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

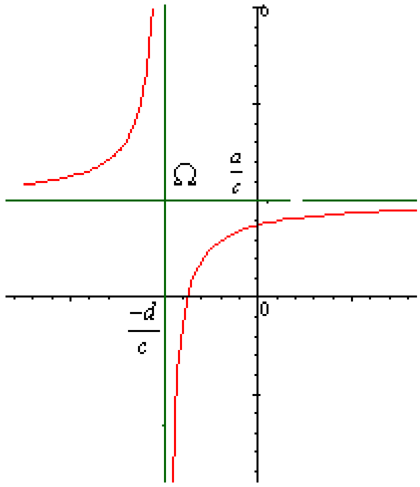
* المنحنى $C_f$ هو صورة المنحنى $(C)$ الممثل للدالة $x\to\frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* $C_f$ منحنى $f$ في معلم متعامد هو هدلول مركزه $\Omega(\alpha;\beta)$ و مقارباه هما المستقيمان المعرفان بـ $x=\alpha$ و $y=\beta$

**ملاحظة:** $\alpha=\frac{-d}{c}$ و $\beta=\frac{a}{c}$

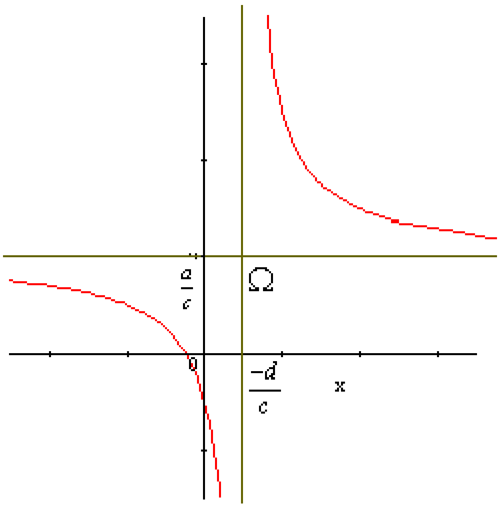
-* إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}\succ 0$ فان

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-d}{c}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\nearrow$ | $\Vert$ | $\nearrow$ |




-* إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}\prec 0$ فان

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-d}{c}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ |




## II– الدالة المكبورة –الدالةالمصغورة – الدالة المحدودة

### 1/ نشاط6

### 2/ تعاريف

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال $I$

-* نقول إن $f$ مكبورة على $I$ اذا وجد عدد حقيقي $M$ حيث: $f(x)\leq M$ لكل $x$ من $I$

-* نقول إن $f$ مصغورة على $I$ اذا وجد عدد حقيقي $m$ حيث: $f(x)\geq m$ لكل $x$ من $I$

-* نقول إن $f$ محدودة على $I$ اذا وجد عددين $M$ و $m$ حيث: $m\leq f(x)\leq M$ لكل $x$ من $I$

خاصية

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال $I$

نقول إن $f$ محدودة على $I$ اذا وجد عدد حقيقي موجب $s$ حيث: $|f(x)|\leq s$ لكل $x$ من $I$

تمرين

نعتبر $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة ب $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$

1- حدد $D_f$

2- بين أن الدالة مكبورة على $]2,+\infty[$ بالعدد 2 و مصغورة على $]2,+\infty[$ بالعدد1

## III– مقارنة دالتين- التأويل الهندسي

**1/نشاط7**

**2/ أ/ تساوي دالتين**

**- تعريف**

| |
|---|
| نعتبر $f$ و $g$ دالتين عدديتين و $D_f$ و $D_g$ مجموعتي تعريفهما على التوالي |
| نقول إن $f$ تساوي $g$ و نكتب $f=g$ اذا و فقط اذا كان: * $D_g=D_f$ و * $f(x)=g(x)$ مهما كانت $x$ من $D_f$ |

**ب/ مقارنة دالتين**

**- تعريف**

| |
|---|
| نعتبر $f$ و $g$ دالتين معرفتين مجال $I$ |
| نقول إن $f$ أصغر أو تساوي $g$ على $I$ اذا كان: $f(x)\le g(x)$ مهما كانت $x$ من $I$ نكتب $f\le g$ على $I$ |

**ج/ التأويل الهندسي**

$f\le g$ على $I$ يعني هندسيا أن منحنى الدالة $f$ تحت منحنى $g$ على $I$

**د/ الدالة الموجبة- الدالة السالبة**

| |
|---|
| نعتبر $f$ دالة معرفة على مجال $I$ |
| * $f$ دالة موجبة على $I$ $\Leftrightarrow \left(\forall x\in \mathrm{I}\ ; f(x)\ge 0\right)$ |
| * $f$ دالة سالبة على $I$ $\Leftrightarrow \left(\forall x\in \mathrm{I}\ ; f(x)\le 0\right)$ |

## IV– الدالة الدورية

**1- نشاط8**

**2- تعريف**

| |
|---|
| نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث |
| $\forall x\in D_f \qquad x+T\in D_f\ ;\quad x-T\in D_f \qquad f(x+T)=f(x)$ |
| العدد T يسمى دور لدالة f .اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالةf |

**أمثلة**

* الدالتان $x\to\cos x$ و $x\to\sin x$ دوريتان و دورهما $2\pi$ * الدالة $x\to\tan x$ دورية دورها $\pi$

* الدالتان $x\to\cos ax$ و $x\to\sin ax$ (حيث $a\ne 0$) دوريتان و دورهما $\dfrac{2\pi}{|a|}$

* الدالة $x\to\tan ax$ ( حيث $a\ne 0$) دورية دورها $\dfrac{\pi}{|a|}$

**3- خاصية**

| |
|---|
| إذا كانت للدالة f دور T فان $\qquad f(x+nT)=f(x) \qquad \forall x\in D_f ,\forall n\in\mathbb{Z}$ |

**4- ملحوظة**

إذا كانت f دالة دورية و T دورا لها فانه:

- يكفي دراسة الدالةf على $D_f\cap[0,T[$ أو $D_f\cap\left[\dfrac{-T}{2},\dfrac{T}{2}\right[$
- يستنتج جزء منحنى الـدالة f على $D_f\cap\left[\dfrac{-T}{2}+nT;\dfrac{-T}{2}+(n+1)T\right[$ حيث $n\in\mathbb{Z}$ من جزئ منحنى على $D_f\cap\left[\dfrac{-T}{2},\dfrac{T}{2}\right[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(nT;0)$ حيث n عدد صحيح نسـبي.

## V– صورة مجال بدالة

**1- نشاط9**

**2- تعريف**

| |
|---|
| لتكن $f$ دالة عددية للمتغير حقيقي و $I$ مجال ضمن من $D_f$ |
| صورة المجال $I$ بالدالة $f$ هي مجموعة جميع صور عناصر $I$ بالدالة $f$ نرمز له بـ $f(I)$ |
| $f(I)=\{f(x)/x\in I\}$ |

**ملحوظة:**

* $y \in f(I) \Leftrightarrow \exists x \in I \quad / f(x) = y$

* $f$ دالة عددية و $I$ مجال ضمن من $D_f$ $J$ مجال ضمن $\mathbb{R}$

$$f(I) \subset J \Leftrightarrow \forall x \in I \quad \exists y \in J \quad / f(x) = y$$

$$J \subset f(I) \Leftrightarrow \forall y \in J \quad \exists x \in I \quad / f(x) = y$$

## VI– مركب دالتين

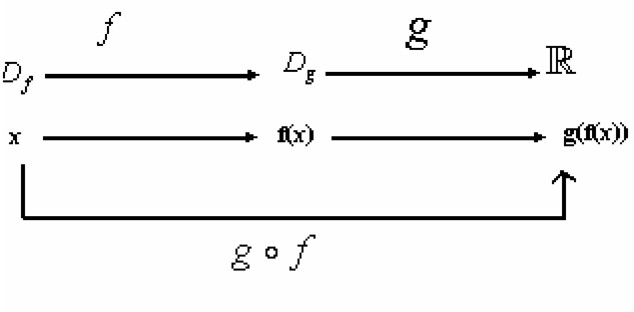
**1- نشاط10**

**2- تعريف**

لتكن $f$ و $g$ دالتين حيث $f(D_f) \subset D_g$

مركبة الدالتين $f$ و $g$ في هذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $g \circ f$ حيث لكل $x \in D_f$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$




مجموعة تعريف $g \circ f$ :

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \ / \ f(x) \in D_g\}$$

**تمرين**

لتكن $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = 2x - 1$

حدد $g \circ f$ و $f \circ g$ ثم قارنهما

**ملاحظة :** على العموم $g \circ f \neq f \circ g$

**تمرين** $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \quad ; \quad g(x) = 2x - 1$ $\qquad h(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 1}{8x^2 - 8x + 1}$

1- حدد $f \circ g \ ; g \circ f \ ; h \circ g$

2- حدد دالة $t$ حيث $h = t \circ g$

3 - حدد دالة $l$ حيث $f = l \circ g$

3 - مركيب دالتين و الرتابة

لتكن $f$ و $g$ دالتين و $I$ و $J$ مجالين ضمن $D_f$ و $D_g$ على التوالي حيث $f(I) \subset J$

- إذا كان $f$ تزايدية على $I$ و $g$ تزايدية على $J$ فان $g \circ f$ تزايدية على $I$
- إذا كان $f$ تناقصية على $I$ و $g$ تناقصية على $J$ فان $g \circ f$ تزايدية على $I$
- إذا كان $f$ تزايدية على $I$ و $g$ تناقصية على $J$ فان $g \circ f$ تناقصية على $I$
- إذا كان $f$ تناقصية على $I$ و $g$ تزايدية على $J$ فان $g \circ f$ تناقصية على $I$

**تمرين**

نعتبر $f$ و $g$ الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ

$$f(x) = 3x - 1 \quad ; \quad g(x) = x^2 + 1$$

باستعمال تغيرات $f$ و $g$ حدد تغيرات $f \circ g$ و $g \circ f$

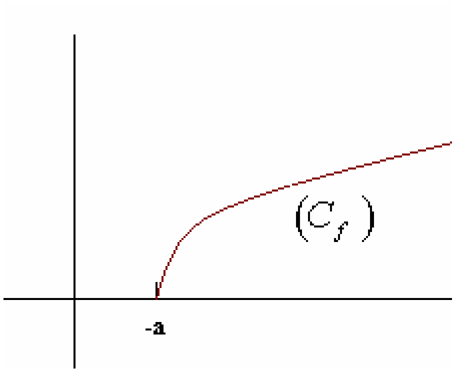
## VI– تمثيل الدالتين $x \to ax^3$ و $x \to \sqrt{x+a}$

**1- الدالة $x \to \sqrt{x+a}$**

**نشاط11**

**خاصية**

الدالة $f : x \to \sqrt{x+a}$ معرفة و تزايدية قطعا على $\left[-a;+\infty\right[$




أمثلة : في نفس المعلم أنشئ $C_f$ من أجل $a=0$ و $a=2$ و $a=-1$

**تمرين**

لتكن $f$ و $g$ الدالتين المعرفتين بـ $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\sqrt{-x^2+1}$

1- أعط جدول تغيرات $f$ و أنشئ $(C_f)$

2- حدد $D_g$ ثم حدد تغيرات الدالة $g$ باستعمال مركب دالتين

**2- الدالة** $x \to ax^3$

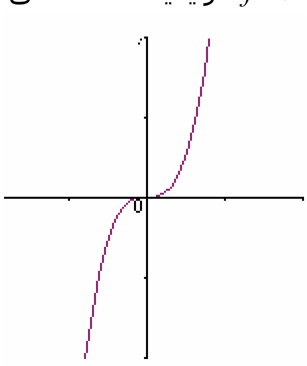
**نشاط12**

**خاصية**

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x)=ax^3$ و $a \in \mathbb{R}^*$

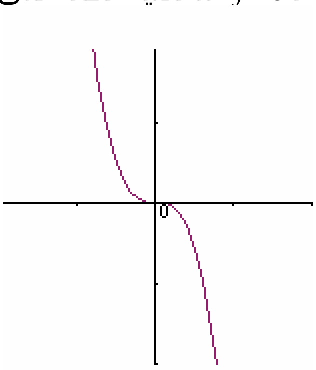
*- إذا كان $a \succ 0$ فان $f$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

*- $a \succ 0$




*- إذا كان $a \prec 0$ فان $f$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

*- $a \prec 0$



# المرجح

## القدرات المنتظرة

ـ استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي؛
ـ إنشاء مرجح $n$ نقطة $(2 \le n \le 4)$؛
ـ استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى؛
ـ استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمات؛
ـ استعمال المرجح في حل مسائل هندسية وفيزيائية.

## I- مرجح نقطتين

### 1- النقطة المتزنة

**تعريف**

لتكن $A$ نقطة من المستوى و $\alpha$ عددا حقيقيا
الزوج $(A;\alpha)$ يسمى نقطة متزنة. نقول كذلك النقطة $A$ معينة بالمعامل $\alpha$. أو العدد $\alpha$ وزن النقطة $A$.

### 2- مرجح نقطتين

**أنشطة**

I) لتكن $A$ و $B$ نقطتين مختلفتين
1- بين أنه توجد نقطة وحيدة $G$ حيث $\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ثم أنشئها
2- بين أنه توجد نقطة وحيدة $G$ حيث $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ثم أنشئها
II) لتكن $A$ و $B$ نقطتين مختلفتين و $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقيين غير منعدمين
1- بين اذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فان توجد نقطة وحيدة $G$ حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
2- إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فانه لا توجد أية نقطة $G$ حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

**مبرهنة و تعريف**

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ نقطتين متزنتين من المستوى حيث $\alpha + \beta \neq 0$.
توجد نقطة وحيدة $G$ من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
النقطة $G$ تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$

**ملاحظة**

إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فان النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ لا تقبلان مرجحا.

### 3- مركز ثقل نقطتين

**تعريف**

مركز ثقل نقطتين $A$ و $B$ هو مرجح $A$ و $B$ المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

**خاصية**

مركز ثقل نقطتين $A$ و $B$ هو منتصف $[AB]$

### 4- الصمود

ليكن $k \in \mathbb{R}^*$

$G$ مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ $\quad \alpha + \beta \neq 0$

$\Leftrightarrow k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad k\alpha + k\beta \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $G$ مرجح النقطتين المتزنتين $(A;k\alpha)$ و $(B;k\beta)$

**خاصية**

مرجح نقطتين لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

تمرين

حدد $\alpha$ و $\beta$ حيث $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ في الحالتين
أ- $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = 5\overrightarrow{AB}$
ب- $A$ مركز ثقل $G$ و $B$.

## 5- الخاصية المميزة

نشاط

ليكن $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقيين حيث $\alpha+\beta\neq 0$

1- بين أن $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ تكافئ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ $\forall M\in(P)$

2- ننسب المستوى $(P)$ إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ/ بين أن $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

ب/ استنتج إحداثيتي $G$ علما أن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

ح/ حدد إحداثيتي $G'$ مرجح مرجح $(A;-5)$ و $(B;2)$ حيث $A(-2;3)$ و $B(1;4)$

**مبرهنة**

$\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$

تكون $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان لكل $M$ من المستوى

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

**نتيجة**

$\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$

تكون $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}$

تكون $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{BA}$

**ملاحظة**

مرجح نقطتين مختلفتين $A$ و $B$ تنتمي إلى المستقيم $(AB)$

## 6- إحداثيتا مرجح نقطتين

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ . لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ و $G(x_G;y_G)$

إذا كان $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ فان $\begin{cases} {}_G=\frac{\alpha\ {}_A+\beta\ {}_B}{\alpha+\beta} \\ =\frac{\alpha\ {}_A+\beta}{\alpha+\beta}\end{cases}$

تمرين

أنشئ $G$ مرجح $(A;-2)$ و $(B;3)$ ثم أنشئ $G'$ مرجح $(A;2)$ و $(B;1)$

أحسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

تمرين

أنشئ $I$ مرجح $(A;2)$ و $(C;1)$ ثم $J$ مرجح $(A;1)$ و $(B;2)$ و $K$ مرجح $(C;1)$ و $(B;-4)$

1- أثبت أن $B$ مرجح $(C;1)$ و $(K;3)$

2- بين أن $J$ منتصف $[KI]$.

تمرين

لتكن $A\neq B$

1- حدد مجموعة النقط $M$ حيث $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=0$

2- حدد مجموعة النقط $M$ حيث $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|$

تمرين حدد إحداثيتي $G$ مرجح $(A;-2)$ و $(B;6)$ حيث $A(-1;2)$ و $B(-4;3)$

## II- مرجح ثلاث نقط

### 1- أنشطة

نشاط1

لتكن $A$ و $B$ و $C$ ثلث نقط من المستوى

1- أنشئ $G$ حيث $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

2- هل يمكن إنشاء $G$ حيث $\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

نشاط2

لتكن $A$ و $B$ و $C$ نقط مختلفة و $\alpha$ و $\beta$ و $\lambda$ أعداد حقيقية

نحدد $G$ حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ $(*)$

الجواب

لدينا $(*)$ تكافئ $(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$

-* إذا كان $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$ فان $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{(\alpha+\beta+\lambda)}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{(\alpha+\beta+\lambda)}\overrightarrow{AC}$

ومنه توجد نقطة وحيدة $G$ حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

-* إذا كان $\alpha+\beta+\lambda=0$ فان $\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

- إذا كان $\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فانه لا توجد نقطة $G$ حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- إذا كان $\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ فان جميع نقط المستوى تحقق $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

## 2- مبرهنة و تعريف

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ نقط متزنة من المستوى حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$.

توجد نقطة وحيدة $G$ من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

النقطة $G$ تسمى مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$

**ملاحظة**

إذا كان $\alpha+\beta+\lambda=0$ فان النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ لا تقبل مرجحا

## 3- مركز ثقل ثلاث نقط

**تعريف**

مركز ثقل ثلاث نقط $A$ و $B$ و $C$ هو مرجح $A$ و $B$ و $C$ المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

**خاصية**

مركز ثقل ثلاث نقط $A$ و $B$ و $C$ هو مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

**خاصية**

متوسطات مثلث $ABC$ تتلاقى في نقطة وحيدة $G$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$

و تحقق $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

اذا كان $A'$ و $B'$ و $C'$ منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي فان $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ و

$\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ و $\overrightarrow{CG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

## 4- خاصية

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

## 5- الخاصية المميزة

نشاط

$\alpha$ و $\beta$ و $\lambda$ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta\quad\lambda\quad 0$

1- بين أن $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ تكافئ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{MG}$

2- ننسب المستوى $(P)$ إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ/ بين أن $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\lambda}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\lambda}\overrightarrow{OB}+\dfrac{\lambda}{\alpha+\beta+\lambda}\overrightarrow{OC}$

ب/ استنتج إحداثيتي $G$ علما أن $A(x_A;y_A)$ و $B(\ _B;\ _B)$

**مبرهنة**

$\alpha$ و $\beta$ و$\lambda$ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$
تكون $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ إذا و فقط إذا كان لكل $M$ من المستوى
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{MG}$

## 6- إحداثيتا مرجح ثلاث نقط

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ . لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ و $C(x_C;y_C)$ و $G(x_G;y_G)$ إذا كان $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ فان

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\lambda x_C}{\alpha+\beta+\lambda} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\lambda y_C}{\alpha+\beta+\lambda} \end{cases}$$

## 7- خاصية التجميعية

$\alpha$ و $\beta$ و$\lambda$ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$
$G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و$(C;\lambda)$ ومنه $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{MG}$
* لو كان $\alpha+\beta\neq 0$ فان $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ تقبل مرجحا $G_1$ ومنه $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG_1}$
وبالتالي $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG_1}+\lambda\overrightarrow{MC}=((\alpha+\beta)+\lambda)\overrightarrow{MG}$
إذن $G$ مرجح $(G_1;\alpha+\beta)$ و $(C;\lambda)$
* بنفس الطريقة نبين أن $G$ مرجح $(G_2;\alpha+\lambda)$ و $(B;\beta)$ حيث $G_2$ مرجح $(A;\alpha)$ و$(C;\lambda)$
* بنفس الطريقة نبين أن $G$ مرجح $(G_3;\beta+\lambda)$ و $(A;\alpha)$ حيث $G_2$ مرجح $(B;\beta)$ و$(C;\lambda)$

**خاصية**

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم.

تمرين

أنشئ $G$ مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$
أنشئ $G'$ مرجح $(A;-3)$ و $(B;2)$ و $(C;-1)$

تمرين

$ABC$ مثلث و $G$ مرجح $(A;1)$ و $(B;4)$ و $(C;-2)$ و $D$ نقطة حيث $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$
أنشئ الشكل
بين أن $D$ و $C$ و $G$ مستقيمية

تمرين

$ABC$ مثلث. حدد مجموعة النقط $M$ حيث $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

# III- مرجح أربع نقط

## 1- مبرهنة و تعريف

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و$(D;\mu)$ نقط متزنة من المستوى حيث
$\alpha+\beta+\lambda+\mu\neq 0$.
توجد نقطة وحيدة $G$ من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}+\mu\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
النقطة $G$ تسمى مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha+\beta+\lambda+\mu=0$ فان النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ لا تقبل مرجحا

## 2- مركز ثقل أربع نقط

**تعريف**

مركز ثقل أربع نقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ هو مرجح $A$ و $B$ و $C$ و $D$ المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

**خاصية**

مركز ثقل أربع نقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ هو مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$ و $(D;1)$

**3- خاصية**

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

**4- الخاصية المميزة**

**مبرهنة**

$\alpha$ و $\beta$ و $\lambda$ و $\mu$ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda+\mu\neq 0$

تكون $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ إذا و فقط إذا كان لكل $M$ من المستوى

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}+\mu\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda+\mu)\overrightarrow{MG}$

**5- خاصية التجميعية**

**خاصية**

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها معينا بمجموع معاملاتها.

تمرين

$ABCD$ متوازي الأضلاع

أنشئ $G$ مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$ و $(D;1)$

بين أن $G\in(AC)$

# الحساب المثلثي

**القدرات المنتظرة:**

. التمكن من مختلف صيغ التحويل؛

. التمكن من حل معادلات ومتراجحات مثلثية تؤول في حلها إلى المعادلات والمتراجحات الأساسية؛

. التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية.

## 1- أنشطة

### a/ أنشطة تذكيرية

**نشاط1**

بسط التعابير التالية

$$A=\sin(11\pi-x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)\cdot\cos(5\pi-x)$$

$$B=\tan\frac{\pi}{5}+\tan\frac{2\pi}{5}+\tan\frac{3\pi}{5}+\tan\frac{4\pi}{5}$$

**نشاط2**

1/ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

أ- $\sin x=\frac{1}{2}$ ب- $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج- $\tan x=-1$

2/ حل المتراجحات

أ- $\cos x\geq\frac{1}{2}$ $x\in]-\pi;\pi]$ ب - $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{1}{2}$ $x\in[-\pi;\pi]$

ج- $\tan x\prec 1$ $x\in[0;2\pi]$

### b/ أنشطة التقديم

**أنشطة**

نعتبر $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم مباشر مرتبط بالدائرة المثلثية $(C)$. ليكن $x$ و $y$ عددين حقيقيين. و $M$ و $M'$ نقطتين من $(C)$ أفصوليهما المنحنيين $x$ و $y$ على التوالي

1- بين أن $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$

2- أ/ بين أن $(\overline{OM'};\overline{OM})\equiv x-y\quad[2\pi]$ ثم استنتج أن $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=\cos(x-y)$

ب/ استنتج أن $\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$

3/ استنتج أن $\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$

$\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y$

$\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$

4/ بين أن $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x+y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq 1$.

استنتج أن $\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x-y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq -1$.

5/ استنتج أن $\sin 2x=2\sin x\cos x$ و $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ و $k\in\mathbb{Z}$

## 2/ صيغ التحويل

### a/ خاصيات

$$\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$$
$$\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$$

$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $x+y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq 1$

$\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $x-y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq -1$

**b/ نتائج**

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ حيث $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$ و $k\in\mathbb{Z}$

**تمرين**

أحسب النسب المثلثية للعدد $\dfrac{\pi}{8}$

**تمرين**

بين أن $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ و $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

c/ تحويل مجموع إلى جداء – تحويل جاء إلى مجموع

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y$$
$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$$
$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y$$

بوضع $x+y=p$ و $x-y=q$ أي أن $x=\dfrac{p+q}{2}$ و $y=\dfrac{x-y}{q}$

نحصل على النتائج

**تحويل مجموع إلى جداء**

$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

**تحويل جداء الى مجموع**

مما سبق نستنتج أن

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$$
$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$$

**تمرين**

أكتب $\cos 3x+\cos 7x$ على شكل جداء

**تمرين**

في مثلث مثلث $ABC$

بين أن $\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}=4\cos\frac{\widehat{A}}{2}\times\cos\frac{\widehat{B}}{2}\times\cos\frac{\widehat{C}}{2}$

**تمرين**

بين أن $\sin^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=-\sin 4x.\sin x$

**تمرين**

أكتب على شكل مجموع الجداء: $\sin 2x.\sin 3x.\sin 5x$

**3- تحويل** $a\cos x+b\sin x$

ليكن التعبير $a\cos x+b\sin x$ حيث $a\neq 0$ أو $b\neq 0$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

نلاحظ أن $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$

ومنه يوجد $\alpha$ من $]-\pi;\pi]$

حيث $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x\right)$$
$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$ أو $b\neq 0$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

حيث $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad$ $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

**ملاحظة:**

يمكننا تحويل $a\cos x+b\sin x$ لحل المعادلات من شكل $a\cos x+b\sin x=c$

أو المتراجحات $a\cos x+b\sin x\leq c$ أو $a\cos x+b\sin x\geq c$

**تمرين**

1/ حل المعادلة $\cos x+\sqrt{3}\sin x=-1$ $\quad x\in\mathbb{R}$

2/ حل المتراجحة التالية

$x\in[-\pi;2\pi]$ $\quad\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x\succ-\sqrt{2}$

**إضافة**

تحديد النسب المثلثية للعدد $x$ بدلالة $t=\tan\frac{x}{2}$

لدينا $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

نقسم البسط و المقام بالعدد $\cos^2\frac{x}{2}$ مع اعتبار شروط الوجود

ومنه $\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ أي $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

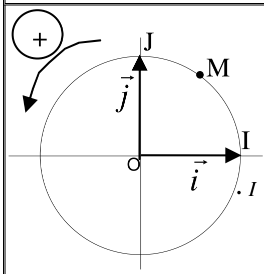
باستعمال العلاقات $\sin x=2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$ و نفس الطريقة نحصل على $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

بوضع $\tan\frac{x}{2}=t$

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

| الأولى ب ع رياضية | الحساب المثلثي<br>ملخص الدرس | ح.بوعيون |
|---|---|---|

## I- الأفاصيل المنحنية




1) *) ليكن $(o,\vec{i},\vec{j})$ م م م. ولتكن $U$ الدائرة التي مركزها $o$ وشعاعها 1

*)نختار المنحى المعاكس لعقربي الساعة كمنحى موجب. ولتكن $I(1,0)$ .

*) الدائرة $U$ تسمى الدائرة المثلثية التي أصلها $I$.

2) لتكن $M$ نقطة من $U$. للحصول على أفصول منحني لـــ $M$.

نختار قوسا تؤدي من $I$ نحو $M$ ونقيس طولها.
ليكن $\alpha$ طول هذه القوس.

*) إذا كان الانتقال من $I$ نحو $M$ يتم حسب المنحى الموجب فإن $\alpha$ أفصول منحني للنقطة $M$.

*) إذا كان الانتقال من $I$ نحو $M$ يتم حسب المنحى السالب فإن $-\alpha$ أفصول منحني للنقطة $M$.

3) للحصول على جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة $M$ يكفي أن نتعرف على أحد هذه الأفاصيل فقط (عادة نختار أقصر قوس تؤدي من $I$ إلى $M$).
وإذا كان $\alpha$ أحد هذه الأفاصيل فإن الأفاصيل المنحنية للنقطة $M$ هي الأعداد التي تكتب على شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

4) يكون العددان $\alpha$ و$\beta$ أفصولين منحنين لنفس النقطة إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha=\beta-2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ونكتب $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

ملاحظة: 1)
$$\alpha\equiv\beta[2\pi]\Leftrightarrow\alpha=\beta+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow\alpha-\beta=2k\pi$$
$\Leftrightarrow$ ($\alpha$ و$\beta$ أفصولين منحنين لنفس النقطة)

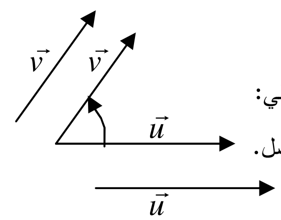
2) *) $\alpha\equiv\alpha+2n\pi\quad[2\pi]$

*) $\alpha\equiv\beta\,[2\pi]\Leftrightarrow\alpha\equiv\beta+2n\pi\ [2\pi]$

5) من بين جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة $M$ يوجد أفصول منحني وحيد $\alpha_0$ يحقق $-\pi\langle\alpha_0\langle\pi$ . $\alpha_0$ يسمى الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة $M$
( ونحصل عليه باختيار أقصر قوس تؤدي من $I$ نحو $M$).

6) نعتبر الأعداد $\alpha+\frac{2k\pi}{n}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.
عدد النقط التي أفاصيلها المنحنية هي هذه الأعداد هو $n$. ومن أجل إنشائها يكفي تعويض $k$ ب $n$ قيمة متتابعة. عادة نعوض $k$ بالقيم $0,1,2,....(n-1)$
و هذه النقط تكون مضلعا منتظما محاطا بالدائرة $U$.

## II- قياس الزوايا الموجهة




1) لتكن $\vec{u},\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين.
من أجل تحديد قياسات الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نتبع ما يلي:

*) نزيح المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل.

*) المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تحددان زاويتين هندسيتين نختار إحداهما
(عادة نختار الزاوية الحادة) ونحدد قياسها الهندسي بالرديان. ليكن $\alpha$ هذا القياس.

$\longleftarrow$) إذا التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $\alpha+2k\pi$ هو قياس لهذه الزاوية ونكتب
$\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\alpha+2k\pi$ أو $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\alpha[2\pi]$ .

$\longleftarrow$) إذا كان التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $-\alpha+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ هو قياس لهذه الزاوية.
ونكتب $\overline{(\vec{u},\vec{v})}=-\alpha+2k\pi$ أو $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv-\alpha[2\pi]$ .

### 2) خاصيات.

a) من بين قياسات $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ يوجد قياس وحيد يحقق $-\pi\langle\alpha_0\le\pi$ ويسمى القياس الرئيسي.

b) $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\overline{(\vec{u},\vec{w})}+\overline{(\vec{w},\vec{v})}\ [2\pi]$ (علاقة شال).

c) $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv-(\vec{v},\vec{u})\quad[2\pi]$ .

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما نفس المنحى فإن $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv0[2\pi]$

e) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما منحيان متعاكسان فإن $(\vec{u},\vec{v})\equiv\pi[2\pi]$

f) يكون $\alpha$و$\beta$ قياسين لنفس الزاوية إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha\equiv\beta[2\pi]$ .

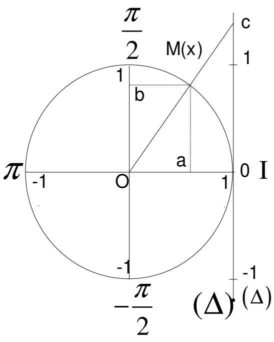
**ملاحظة:**

1) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملاهما متوازيين.

2) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\rangle0$) مستقيمان ولهما نفس المعنى.

3) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\langle0$) مستقيمان ولهما منحيان متعاكسان.

## III- الدوال المثلثية




**1)تعريف**

لتكن $U$ الدائرة المثلثية التي أصلها $I$.
وليكن $(\Delta)$ المحور المماس ل $U$ في $I$.
ندرج المحور $(\Delta)$ بنفس وحدة معلم وأصله $I$.

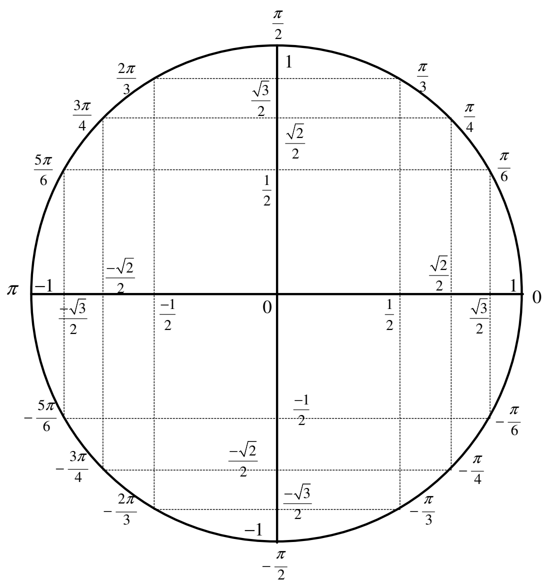
*) ليكن $x$ من $\mathbb{R}$ و $M$ النقطة التي أفصولها المنحني هو $x$
ليكن $a$ أفصول ل $M$ و $b$
ارتوب $M$ يعني $M(a,b)$.
$c$ أفصول تقاطع $(OM)$ مع $(\Delta)$ على المحور $(\Delta)$ لدينا

$$\cos x=a\qquad \sin x=b\qquad \tan x=c$$

**2) خاصيات**

(a

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan x$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\times$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |



b) تكون $\tan(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x\neq \dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x\neq -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ يعني $x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$

c) $\boxed{1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x} \qquad \cos^2 x+\sin^2 x=1 \qquad \tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}}$

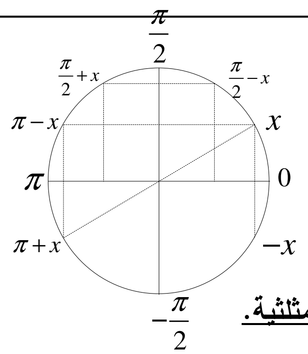
d) $\boxed{\tan(x+k\pi)=\tan x \qquad \sin(x+2k\pi)=\sin x \qquad \cos(x+2k\pi)=\cos x}$

e) $\boxed{\tan(-x)=-\tan x \qquad \sin(-x)=-\sin x \qquad \cos(-x)=\cos x}$

f)
$$\begin{aligned}\cos(\pi-x)&=-\cos x\\ \sin(\pi-x)&=\sin x\\ \tan(\pi-x)&=-\tan x\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\cos(\pi+x)&=-\cos x\\ \sin(\pi+x)&=-\sin x\\ \tan(\pi+x)&=\tan x\end{aligned}$$

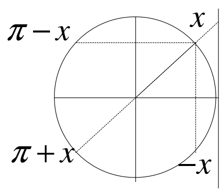
g)
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\cos x\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\frac{1}{\tan x}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=\cos x\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=-\frac{1}{\tan x}\end{aligned}$$

h) $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}):-1\le \cos x\le 1 \quad ; \quad -1\le \sin x\le 1}$




## 3) المعادلات المثلثية.

a)
$$\begin{aligned}&\cos x=1\Leftrightarrow x=2k\pi\\ &\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \qquad \cos x=\cos\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+2k\pi\\ x=-\alpha+2k\pi\end{cases}\\ &\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{aligned}$$




b)
$$\begin{aligned}&\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ &\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ &\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\\ &\sin x=\sin\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+2k\pi\\ x=\pi-\alpha+2k\pi\end{cases}\end{aligned}$$

c) $\boxed{\tan x=\tan\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi}$

**ملاحظات.**

1) إذا كان $\alpha\notin[-1,1]$ فإن المعادلتين $\cos x=a$ و $\sin x=a$ ليس لهما حل.

2) تكون المعادلة $\tan(u(x))=a$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases}u(x) \text{ معرفة}\\ u(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$

3)
$$\begin{aligned}&-\tan\alpha=\tan(-\alpha) \qquad -\sin\alpha=\sin(-\alpha) \qquad -\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha)\\ &\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad \sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\end{aligned}$$

## 4) المتراجحات المثلثية. (انظر التمارين)

**ملاحظة**

1) نضع $f(x)=a\cos(u(x))+b$ أو $f(x)=a\sin(u(x))+b$

* إذا كان $a$ و $b$ غيرمتقابلين وغير متساويين فإن $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x)=0$

* إذا كان $a$ و $b$ متقابلين أو متساويين فإن $f(x)$ لها إشارة ثابتة

2) نضع $f(x):a\tan(u(x))+b$ $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x)=0$ وفي الأعداد التي تكون غير معرفة فيها.

## 5) صيغ التحويل

a)
$$\begin{aligned}\cos(a+b)&=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \cos(a-b)&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\\ \sin(a+b)&=\sin a\cos b+\cos a\sin b\\ \sin(a-b)&=\sin a\cos b-\cos a\sin b\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\tan(a+b)&=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}\\ \tan(a-b)&=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\cos(2a)&=\cos^2 a-\sin^2 a\\ &=2\cos^2 a-1\\ &=1-2\sin^2 a\\ \sin(2a)&=2\sin a\cos a\\ \tan(2a)&=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\cos^2 a&=\frac{1+\cos(2a)}{2}\\ \sin^2 a&=\frac{1-\cos(2a)}{2}\\ \sin a\cos a&=\frac{1}{2}\sin(2a)\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\cos a\cos b&=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]\\ \sin a\sin b&=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]\\ \sin a\cos b&=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}\cos p+\cos q&=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}\\ \cos p-\cos q&=-2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}\\ \sin p+\sin q&=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}\\ \sin p-\sin q&=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

f) نضع $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ : لدينا .

$$\boxed{\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}}$$

g) من أجل تحويل $f(x)=a\cos x+b\sin x$ نتبع ما يلي:

$$\begin{aligned}f(x)&=a\cos x+b\sin x\\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)\\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x\right)\\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha\right)\\ &=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)\end{aligned}$$

مع $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

# تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

## I ـ الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم :

### 1 ) تذكير وإضافات :

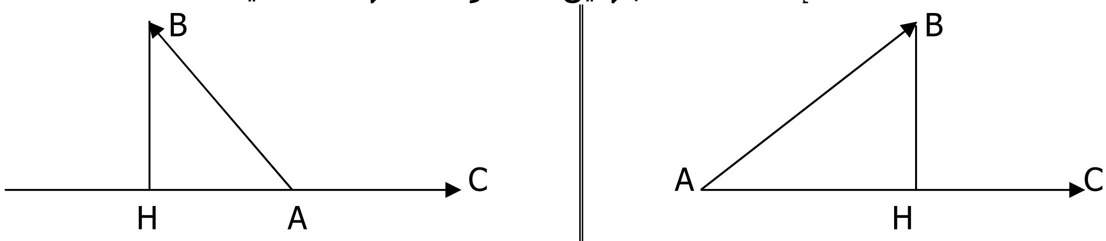
#### أ ـ تعريف الجداء السلمي لمتجهتين :

**صيغة الجداء السلمي باستعمال الإسقاط العمودي :**

لتكن $A$ و $B$ و $C$ ثلاث نقط في المستوى و $H$ المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستقيم $(AC)$ .

الجداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو العدد الحقيقي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ والذي يحقق :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AH\times AC$ إذا كانت المتجهتين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى .
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AH\times AC$ إذا كانت المتجهتين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما المنحيان متعاكسان .




$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AH\times AB$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AH\times AB$

**الصيغة المثلثية للجداء السلمي :**

- لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين في المستوى لدينا : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ .
- لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين في المستوى لدينا : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$ .

#### ب ـ المعلم المتعامد الممنظم المباشر ـ الأساس المتعامد الممنظم المباشر :

**تعاريف :**

1. نقول إن متجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$ تكونان أساسا في المستوى إذا كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مستقيميتين . ونكتب $(\vec{i};\vec{j})$ أساس في المستوى . والمستوى مزود بأساس $(\vec{i};\vec{j})$ .
   نعتبر$(\vec{i};\vec{j})$ أساسا في المستوى و O نقطة من المستوى .
2. نقول إن $(\vec{i};\vec{j})$ أساس متعامد ممنظم إذا كان : $\vec{i}.\vec{j}=0$ و $\|\vec{i}\|=1$ و $\|\vec{j}\|=1$ .
3. نقول إن المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم إذا كان $(\vec{i};\vec{j})$ أساسا متعامدا ممنظما .
4. إذا كان $(\vec{i};\vec{j})$ أساس متعامد ممنظم و $\overline{(\vec{i};\vec{j})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ فإننا نقول إن $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

**ملاحظة :** في كل هذا الدرس نعتبر المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر .

### 2 ) الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم :

**نشاط تمهيدي :**

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين في المستوى بحيث : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

1) انشر ثم بسط ما يلي : $(x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j})$ واستنتج : $\vec{u}\cdot\vec{v}$ .

2) بين أن : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$ .

**خاصية 1 :**

إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متجهتين في المستوى فإن : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$ .

أمثلة : نعتبر المتجهات : $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ و $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ و $\vec{w}=5\vec{i}+3\vec{j}$

حساب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{u}\cdot\vec{w}$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}$ .

**خاصية 2 :**

تكون المتجهتان $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متعامدتين إذا وفقط إذا كان : $xx'+yy'=0$ .

## 3 ) الصيغة التحليلية لمنظم متجهة ولمسافة نقطتين :

### أ ــ منظم متجهة :

لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ متجهة في المستوى لدينا : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$ .

### ب ــ المسافة بين نقطتين :

لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتين في المستوى ، لدينا : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ .

## 4 ) صيغة $Cos\theta$ و $Sin\theta$ :

### نشاط تمهيدي :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين في المستوى بحيث : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ و $\theta$ قياس الزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$

1 ) احسب بطريقتين مختلفتين الجداء السمي احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ .

2 ) استنتج $\cos\theta$ بدلالة $x$ و $y$ و $x'$ و $y'$ .

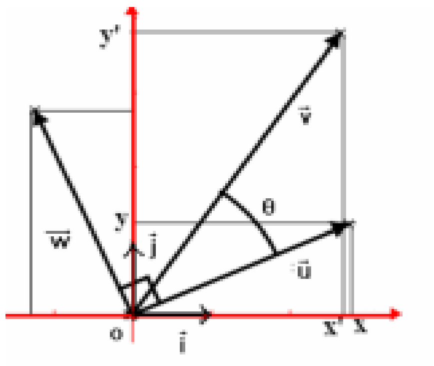
3 ) نعتبر المتجهة $\vec{w}$ بحيث : $\overline{(\vec{u};\vec{w})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$ .

أ ــ بين أن : $\overline{(\vec{v};\vec{w})}\equiv\frac{\pi}{2}-\theta[2\pi]$ .

ب ــ احسب الجداء السلمي $\vec{v}\cdot\vec{w}$ ثم استنتج أن : $\sin\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

ج ــ تحقق أن $\vec{w}(-y;x)$ ثم احسب $\sin\theta$ بدلالة $x$ و $y$ و $x'$ و $y'$

د ــ تحقق أن : $\sin\theta=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$ .




### خاصية :

لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متجهتين غير منعدمتين في المستوى و $\theta$ قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$. لدينا : $Cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}$ و $Sin\theta=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}$ .

### تمارين تطبيقية :

1 ) حدد قيمة العدد الحقيقي $m$ بحيث تكون المتجهتان $\vec{u}(2;m)$ و $\vec{v}(3;-2)$ متعامدتين .

2 ) نعتبر المتجهة $\vec{u}(2;-3)$ حدد المتجهات $\vec{v}(x;y)$ بحيث يكون $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$ و $\|\vec{v}\|=2$ .

3 ) نعتبر النقط $A(-3;-1)$ و $B(1;1)$ و $C(-5;3)$ . بين أن المثلث $ABC$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين في $A$

4 ) نعتبر النقط $A(5;0)$ و $B(2;1)$ و $C(6;3)$ .

أ ــ احسب $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ و $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ .

ب ــ استنتج قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ .

## 5 ) نتائج :

### نشاط تمهيدي :

ليكن $ABC$ مثلثا في المستوى و $H$ المسقط العمودي ل $C$ على $(AB)$ .

1 ) حدد $\sin\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ واحسب $\sin\hat{A}$ ( حيث $\hat{A}$ زاوية هندسية )

2 ) احسب المساحة $S$ للمثلث $ABC$ بدلالة $AB$ و $AC$ و $\sin\hat{A}$ .

3 ) استنتج أن : $S=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|$

4 ) نعتبر النقطة $D$ بحيث يكون $ABDC$ متوازي أضلاع محدد بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ .

احسب مساحة متوازي الأضلاع $ABDC$ .

**خاصية 1 :**

ليكن $ABC$ مثلثا في المستوى و $S$ مساحته ، لدينا :
$S=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\right|$ .

**خاصية 2 :**

مساحة متوازي الأضلاع $ABDC$ المحدد بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هي : $S_{ABCD}=\left|\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|$ .

**تمارين تطبيقية :**

1 ) نعتبر النقط $A(5;0)$ و $B(2;1)$ و $C(6;3)$ .
أ ــ تحقق أن النقط $A$ و $B$ و $C$ غير مستقيمية .
ب ــ احسب مساحة المثلث $ABC$ .
ج ـ نعتبر النقطة $D$ بحيث يكون $ABDC$ متوازي أضلاع . حدد زوج إحداثيتي النقطة $D$ ثم احسب مساحة متوازي الأضلاع $ABDC$ .
2 ) نعتبر النقط $A(0;6)$ و $B(-2;0)$ و $C(2;1)$ .
احسب مساحة المثلث $ABC$ بطريقتين مختلتين .

## II ــ المستقيم في المستوى ( دراسة تحليلة ) :

### 1 ) المتجهة المنظمة على مستقيم :

**نشاط تمهيدي :**

1 ) نعتبر المستقيم $(D)$ ذي المعادلة : $x+2y+1=0$ .
أ ــ حدد متجهة موجهة $\vec{u}$ للمستقيم $(D)$ .
ب ــ نعتبر المتجهة $\vec{n}(1;2)$ احسب الجداء السلمي $\vec{n}\cdot\vec{u}$ . ماذا تستنتج ؟
المتجهة $\vec{n}$ تسمى متجهة منظمة على المستقيم $(D)$ .
2 ) نعتبر المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة : $ax+by+c=0$ .
أ ــ بين أن المتجهة $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمة على المستقيم $(\Delta)$ .
ب ــ تطبيق : حدد متجهة منظمة على المستقيم $(D)$ ذو المعادلة : $x-y+2=0$ .

**تعريف :**

ليكن $(D)$ مستقيما في المستوى و $\vec{u}$ متجهة موجهة له .
نقول إن متجهة غير منعدمة $\vec{n}$ منظمة على المستقيم $(D)$ إذا كانت تحقق : $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ .

**خاصية :**

ليكن $(D)$ مستقيما في المستوى معادلته $ax+by+c=0$ .
المتجهة $\vec{n}(a;b)$ منظمة على المستقيم $(D)$

### 2 ) المعادلة الديكارتية لمستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمة عليه :

**نشاط تمهيدي :**

نعتبر $\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_A;y_A)$ نقطة من المستوى .
حدد معادلة ديكارتية للمستقيم $(D)$ المار من $A(x_A;y_A)$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمة عليه .

**خاصية**

معادلة المستقيم $(D)$ المار من $A(x_A;y_A)$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمة عليه هي :
$a(x-x_A)+b(y-y_B)=0$

**تمارين تطبيقية :**

1 ) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم $(D)$ المار من $A(1;1)$ و $\vec{n}(2;3)$ متجهة منظمية عليه .

2 ) ليكن $ABC$ مثلثا في المستوى بحيث $A(3;1)$ و $B(-1;5)$ و $C(-2;2)$ .

أ ــ حدد معادلة ديكارتية لارتفاع المثلث المار من الرأس $C$ .

ب ــ حدد معادلة ديكارتية لواسط القطعة $[AB]$ .

## 3 ) تعامد مستقيمين :

نعتبر مستقيمين $(D)$ و $(D')$ معادلتهما على التوالي : $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمية على $(D)$ و $\vec{n}'(a';b')$ متجهة منظمية على $(D')$ .

يكون $(D)$ و $(D')$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\vec{n}(a;b)$ و $\vec{n}'(a';b')$ متعامدين أي : $aa'+bb'=0$

**خاصية :**

يكون المستقيمان $(D)$ و $(D')$ اللذان معادلتهما $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ على التوالي متعامدين إذا وفقط إذا كان : $aa'+bb'=0$ .

**تمرين تطبيقي :**

لتكن النقط $A(7;4)$ و $B(5;-2)$ و $C(2;1)$ من المستوى .

1 ) تحقق أن $3x-y-17=0$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم $(AB)$

2 ) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم $(D)$ المار من $C$

## 4 ) مسافة نقطة عن مستقيم :

**تعريف :**

نعتبر مستقيما $(D)$ و $A$ نقطة لا تنتمي إلى $(D)$ و $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على $(D)$ .
المسافة $AH$ تسمى المسافة بين $A$ و $(D)$ ونرمز لها بالرمز: $d(A;(D))$ ونكتب : $d(A;(D))=AH$

**نشاط تمهيدي :**

نعتبر مستقيما $(D)$ معادلته الديكارتية : $ax+by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة لا تنتمي إلى $(D)$ .
نعتبر $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على $(D)$ .

1 ) لتكن $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمية على المستقيم $(D)$ و $B$ النقطة من المستوى بحيث : $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$ .

بين أن لكل نقطة $M$ من $(D)$ لدينا : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$

2 ) احسب $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$ بدلالة $x$ و $y$ و $x_A$ و $y_A$ و $a$ و $b$ .

3 ) بين أن $AH\cdot AB=|ax_A+ay_B+c|$

4 ) استنتج أن : $d(A;(D))=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

**خاصية :**

ليكن $(D)$ مستقيما معادلته الديكارتية : $ax+by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة من المستوى .
مسافة النقطة $A$ عن المستقيم $(D)$ هي : $d(A;(D))=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

**تمارين تطبيقية :**

1 ) نعتبر المستقيم $(D)$ الذي معادلته $x+y+2=0$ والنقطتين $A(1;-1)$ و $B(0;-2)$ .

احسب $d(A;(D))$ و $d(B;(D))$ .

2 ) نعتبر النقطتين $A(-1;-3)$ و $B(3;2)$ .

أ ــ تحقق أن $5x-4y-7=0$ هي معادلة المستقيم $(AB)$ .

ب ــ احسب مسافة النقطة $O$ عن المستقيم $(AB)$ .

ج ـ استنتج مساحة المثلث $OAB$ .

## III ـ الدائرة ( دراسة تحليلية ) :

### 1 ) معادلة ديكارتية لدائرة :

**نشاط تمهيدي :**

نعتبر الدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(1;1)$ وشعاعها 2 .

1 ) من بين النقط التالية حدد تلك التي تنتمي إلى الدائرة $(C)$ : $A(3;1)$ ؛ $B(2;2)$ ؛ $C(\sqrt{3}+1;2)$ ؛ $D(-1;-1)$

2 ) لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوى .

أ ـ احسب المسافة $\Omega M$ بدلالة $x$ و $y$ .

ب ـ بين أن $M$ تنتمي إلى الدائرة $(C)$ إذا وفقط إذا كان : $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ .

المعادلة : $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ تسمى معادلة ديكارتية للدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(1;1)$ وشعاعها 2 .

3 ) بإتباع نفس خطوات السؤال السابق حدد معادلة ديكارتية لدائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها $R$ $(R \succ 0)$.

**خاصية :**

معادلة الدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها $R$ $(R \succ 0)$ هي : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ .
وتكتب أيضا : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ حيث : $c=a^2+b^2-R^2$ .

**تمارين تطبيقية :**

1 ) حدد معادلة ديكارتية للدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(1;-1)$ وشعاعها $\sqrt{2}$ .

2 ) حدد معادلة ديكارتية للدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(2;1)$ وتمر من النقطة $A(-1;1)$ .

3 ) حدد معادلة ديكارتية للدائرة $(C)$ التي تمر من النقط $A(-1;0)$ و $B(1;2)$ و $C(7;4)$ .

### 2 ) معادلة دائرة معرفة بأحد أقطارها :

**نشاط تمهيدي :**

لتكن $(C)$ دائرة مركزها $\Omega$ وشعاعها $R$ و $[AB]$ أحد أقطارها . ولتكن $M$ نقطة من المستوى .

1 ) بين أن : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\Omega M^2-R^2$ .

2 ) استنتج أن $(C)$ هي مجوعة النقط $M$ التي تحقق : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ .

3 ) نعتبر $A(2;3)$ و $B(-4;5)$ و $M(x;y)$ نقطة من $(C)$ . حدد معادلة ديكارتية للدائرة $(C)$ .

**خاصية :**

لتكن $A$ و $B$ نقطتين مختلفتين من المستوى .
مجموعة النقط النقط $M$ من المستوى التي تحقق : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ هي الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$ ؛
ومعادلتها هي : $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$ .

**تمرين تطبيقي :**

حدد معادلة ديكارتية للدائرة $(C)$ التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث : $A(1;3)$ و $B(-1;1)$

### 3 ) تمثيل برامتري لدائرة :

**نشاط تمهيدي :**

نعتبر الدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها $R$ و $M$ نقطة من $(C)$ حيث : $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{\Omega M})\equiv\theta[2\pi]$ $(\theta \in IR)$ .

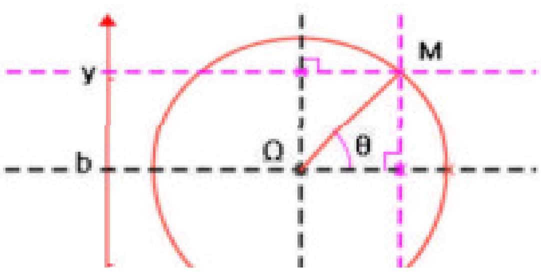
1 ) أ ـ بين أن : $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{\Omega M}=R\cos\theta$ .

ب ـ بين أن : $\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{\Omega M}=R\sin\theta$ .

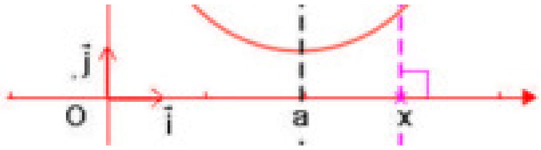
2 ) ليكن $(x;y)$ زوج إحداثيتي النقطة $M$ .

أ ـ حدد زوج إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{\Omega M}$ .

ب ـ احسب $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{\Omega M}$ بدلالة $x$ و $y$ و $a$ و $b$



ج ـ استنتج أن : $/(\theta \in IR)$ $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$




النظمة $/(\theta \in IR)$ $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتريا للدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها $R$ .

**خاصية وتعريف :**

الدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها $R$ $(R \succ 0)$ هي مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق : $/(\theta \in IR)$ $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$ $(S)$ . النظمة $(S)$ تسمى تمثيلا بارامتريا للدائرة $(C)$ .

**تمارين تطبيقية :**

1 ) حدد تمثيلا بارامتريا للدائرة $(C)$ التي معادلتها الديكارتية : $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 23 = 0$ .

2 ) حدد مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق : $/(\theta \in IR)$ $\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = 3 + 2\sin\theta \end{cases}$ .

## 4 ) دراسة مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ :

نعتبر $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ .

حدد طبيعة $(\Gamma)$ .

لدينا :
$$\begin{aligned} M(x;y) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \end{aligned}$$

نعتبر النقطة $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ . لدينا : $M(x;y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$ .

- إذا كان : $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \prec 0$ فإن المتساوية $\Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$ غير صحية وفي هذه الحالة : $(\Gamma) = \Phi$
- إذا كان : $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = 0$ فإن $\Omega M^2 = 0$ أي $\Omega = M$ ومنه فإن : $(\Gamma) = \{\Omega\}$
- إذا كان : $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \succ 0$ فإن $\Omega M = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$ وفي هذه الحالة : $(\Gamma)$ هي الدائرة التي مركزها $\Omega$ وشعاعها $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ .

**خاصية :**

لتكن $a$ و $b$ و $c$ أعدادا حقيقية و $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ .

- تكون $(\Gamma)$ دائرة إذا وفقط إذا كان : $a^2 + b^2 - 4c \succ 0$ ومركزها هو $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ وشعاعها $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ .
- إذا كان : $a^2 + b^2 - 4c \prec 0$ فإن $(\Gamma) = \Phi$ .

* إذا كان : $a^2+b^2-4c=0$ فإن $(\Gamma)=\{\Omega\}$ ؛ حيث : $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ .

**تمرين تطبيقي :**

حدد طبيعة المجموعة $(C)$ مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق المعادلات التالية :

1 ) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ .

2 ) $x^2+y^2-x-10y+25=0$ .

3 ) $x^2+y^2+4x-y+\frac{17}{4}=0$

## 5 ) داخل وخارج الدائرة :

**تعاريف :**

لتكن $(C)$ دائرة مركزها $\Omega$ وشعاعها $R$ $(R\succ 0)$ و $M$ نقطة من المستوى .

* تكون $M$ نقطة من الدائرة $(C)$ إذا وفقط إذا كان : $\Omega M=R$ .
* تكون $M$ نقطة داخل الدائرة $(C)$ إذا وفقط إذا كان : $\Omega M\prec R$ .
* تكون $M$ نقطة خارج الدائرة $(C)$ إذا وفقط إذا كان : $\Omega M\succ R$ .

**نتيجة :**

لتكن $(C)$ دائرة معادلتها الديكارتية : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $M(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى .

* تكون $M$ نقطة من الدائرة $(C)$ إذا وفقط إذا كان : ${x_0}^2+{y_0}^2+ax_0+by_0+c=0$ .
* تكون $M$ نقطة داخل الدائرة $(C)$ إذا وفقط إذا كان : ${x_0}^2+{y_0}^2+ax_0+by_0+c\prec 0$ .
* تكون $M$ نقطة خارج الدائرة $(C)$ إذا وفقط إذا كان : ${x_0}^2+{y_0}^2+ax_0+by_0+c\succ 0$ .

**تمرين تطبيقي :**

1 ) لتكن $(C)$ الدائرة التي مركزها $\Omega(-1;2)$ وشعاعها $R=3$ . حدد وضع النقطتين $A(3;-1)$ و $B(0;1)$ بالنسبة للدائرة $(C)$ .

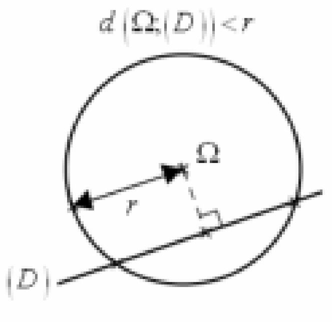
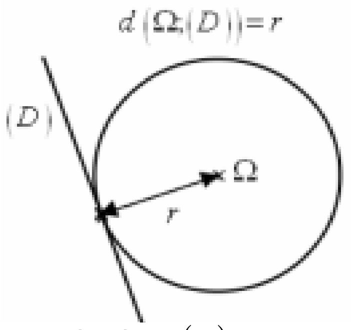
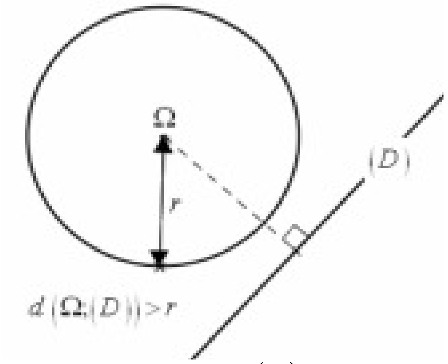
2 ) حل مبيانيا المتراجحات التالية :

أ ـ $x^2+y^2+6x-8y+23\geq 0$ .

ب ـ $x^2+y^2-6x\prec 0$ .

## 6 ) الأوضاع النسبة لدائرة ومستقيم :

لدراسة الوضع النسبي لدائرة $(C)$ مركزها $\Omega$ وشعاعها $r$ مع مستقيم $(D)$ ؛ يمكن حساب مسافة $(D)$ عن $\Omega$ ومقارنتها مع $r$ .

| | | |
|---|---|---|
|   المستقيم $(D)$ يقطع الدائرة في نقطتين . |   المستقيم $(D)$ يقطع الدائرة في نقطة واحد . نقول إن المستقيم $(D)$ مماسا للدائرة . |   المستقيم $(D)$ لا يقطع الدائرة |

**تمرين تطبيقي :**

ادرس الوضع النسبي للدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(-1;2)$ وشعاعها $R=2$ مع المستقيم $(D)$ في كل حالة من الحالات التالية : 1 ) $(D) : x+y+3=0$ ؛ 2 ) $(D) : x-y+3+2\sqrt{2}=0$ ؛ 3 ) $(D) : 2x+y+1=0$

## 7 ) معادلة المماس لدائرة في نقطة :

### نشاط تمهيدي :

نعتبر الدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها $R$ و $A(x_0;y_0)$ نقطة من الدائرة $(C)$ . وليكن $(T)$ المستقيم المماس للدائرة $(C)$ في $A$ .

1 ) حدد متجهة منظمية على $(T)$ .

2 ) بين أن معادلة ديكارتية للمستقيم $(T)$ هي : $(x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$ .

**الجواب :**

1 ) يكون المستقيم $(T)$ مماسا للدائرة $(C)$ في $A$ إذا وفقط إذا كان $(T)$ عموديا على المستقيم $(A\Omega)$ .

إذن المتجهة $\overrightarrow{A\Omega}$ منظمية على المستقيم $(T)$ .

2 ) تحديد معادلة ديكارتية ل $(T)$ :

لدينا : $M(x;y)\in(T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0$

$\Leftrightarrow (x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$

**خاصية 1 :**

نعتبر الدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها $R$ و $A(x_0;y_0)$ نقطة من الدائرة $(C)$ .
معادلة المماس للدائرة $(C)$ في $A$ هي : $(x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$ .

**ملاحظة :**

إذا كانت الدائرة معرفة بمعادلتها الديكارتية $x^2+y^2+ax+by+c=0$ فإن مركزها هو $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ في هذه الحالة معادلة المماس للدائرة $(C)$ في $A$ هي : $(x-x_0)\left(\frac{a}{2}+x_0\right)+(y-y_0)\left(\frac{b}{2}+y_0\right)=0$ .

**خاصية 2 :**

نعتبر الدائرة $(C)$ التي معادلتها الديكارتية $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $A(x_0;y_0)$ نقطة من الدائرة $(C)$ .
معادلة المماس للدائرة $(C)$ في $A$ هي : $(x-x_0)\left(\frac{a}{2}+x_0\right)+(y-y_0)\left(\frac{b}{2}+y_0\right)=0$

**تمارين تطبيقية :**

1 ) نعتبر الدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(-1;-2)$ وشعاعها $R=2$ .

أ ــ تحقق أن النقطة $A(1;-2)$ تنتمي إلى الدائرة $(C)$ .

ب ــ حدد معادلة المماس للدائرة $(C)$ في $A$ .

2 ) نعتبر الدائرة $(C)$ التي معادلتها الديكارتية : $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ .

أ ــ تحقق أن النقطة $A(1;2)$ تنتمي إلى الدائرة $(C)$ .

ب ــ حدد معادلة المماس للدائرة $(C)$ في $A$ .

# المتتاليات

**القدرات المنتظرة**

. توظيف الاستدلال بالترجع؛
. التمكن من دراسة متتالية (إكبار، إصغار، رتابة)؛
. التعرف على متتالية حسابية أو هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول؛
. حساب مجموع $n$ حدا متتابعة من متتالية حسابية أو متتالية هندسية.
. التعرف على وضعيات لمتتاليات حسابية أو هندسية؛
. استعمال المتتاليات الحسابية والهندسية في حل مسائل.

## I- عموميات حول المتتاليات

### 1- تعاريف و مصطلحات

#### a/ أنشطة

1/ لاحظ ثم أتمم خمسة أعداد ملائمة لتسلسل كل لائحة من اللوائح التالية:

-a   1، 3، 5، 7، 9، 11،......

-b   1، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{6}$ ،.....

-c   -3 ، $-\frac{3}{2}$ ، $-\frac{3}{4}$ ، $-\frac{3}{8}$ ، $-\frac{3}{16}$ ، $-\frac{3}{32}$ ،....

-d   $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{6}{7}$،....

-e   -2 ، 3 ، 1 ، 4 ،5 ، 9 .....

- كل لائحة من اللوائح تسمى متتالية و الاعداد المكونة لكل لائحة تسمى حدود المتتالية
- نلاحظ أن لوائح أعلاه تسير بانتظام معين

اللائحة a هي الاعداد الفردية في ترتيب تصاعدي

اللائحة b هي أعداد على شكل $\frac{1}{n}$ بتعويض $n$ بعدد صحيح طبيعي غير منعدم

اللائحة c هي أعداد على شكل $\frac{-3}{2^n}$ بتعويض $n$ بعدد صحيح طبيعي

اللائحة d هي أعداد على شكل $\frac{n}{n+1}$ بتعويض $n$ بعدد صحيح طبيعي غير منعدم

اللائحة e هي أعداد حصلنا فيها على الحد الثالث بمجموع الحدين اللذين قبله و الحد الرابع بمجموع الحد ين اللذين قبله وهكذا..........

2/ في كل لائحة من اللوائح a و b و c اذا رمزنا لأول عدد من اللائحة بـ $u_0$ و الثاني بـ $u_1$ و الثالث بـ $u_2$ و هكذا دواليك فاننا نحصل على اللائحة $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ،........

أ/ ما رتبة $u_8$            ب/ حدد قيمة $u_8$

ج/ ما رتبة $u_n$ ، حدد $u_n$

- $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ،........ تسمى حدود متتالية
- اذا كان الحد الاول هو $u_0$ فان رتبة $u_0$ هي 1 و رتبة $u_1$ هي 2 و هكذا....... رتبة $u_n$ هي $n+1$

ج- a/ $u_n = 2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$      b/ $u_n = \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$      c/ $u_n = \frac{-3}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$u_n$ يسمى الحد العام للمتتالية

3/ في اللائحة d إذا رمزنا لأول عدد من اللائحة بـ $v_1$ و الثاني بـ $v_2$ و الثالث بـ $v_3$ و هكذا دواليك فإننا نحصل على اللائحة $v_1$ ، $v_2$ ، $v_3$ ،........

ما رتبة $v_n$ ، حدد $v_n$

رتبة $v_n$ هي $n$ و $v_n = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

4/ حد صيغة التي تسير عليها اللائحة e

لاحظنا أن في اللائحة e أعداد حصلنا فيها على الحد الثالث بمجموع الحدين اللذين قبله و الحد الرابع بمجموع الحد ياللذين قبلهما وهكذا.........
اذا اعتبرنا أن $w_1$ ، $w_2$ ، $w_3$ ،........ حدود متتالية الائحة e فان $w_3 = w_1 + w_2$ و $w_4 = w_2 + w_3$ ...
$w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

**ملاحظة:**
المتتاليات في a و b و c و d أعطينا حدها العام بصيغة صريحة أي لحساب أي حد نعوض $n$ و نحصل على النتيجة أم في e أعطينا حدها العام بدلالة حدود للمتتالية أي لحساب حد يجيب أن نرجع إلى حدين قبلهما

**b/ تعريف**

ليكن $n_0$ عددا صحيحا طبيعيا و $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ جزء من $\mathbb{N}$
كل دالة من $I$ نحو $\mathbb{R}$ تسمى متتالية عددية

اصطلاحات
-* $u: \quad I \to \mathbb{R}$ متتالية عددية
يرمز لصورة $n$ بواسطة $u_n$ عوض $u(n)$ . العدد $u_n$ يسمى حد المتتالية ذا المدل $n$ ويسمى أيضا الحد العام.
يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\in I}$ عوض $u$.
-* اذا كان $I = \mathbb{N}$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 0}$ أو $(u_n)$
-* اذا كان $I = \mathbb{N}^*$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 1}$
-* اذا كان $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ فانه يرمز للمتتالية أيضا بـ $(u_n)_{n\geq n_0}$

**أمثلة**
نعتبر المتتاليات العددية $(u_n)$ و $(v_n)_{n\geq 2}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$$u_n = (-2)^n + 3n \quad \text{و} \quad v_n = 2n^2 - 3n \quad \text{و} \quad \begin{cases} w_1 = -2 \\ w_{n+1} = 2w_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

أحسب الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتاليات $(u_n)$ و $(v_n)_{n\geq 2}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$

## 2- تحديد متتالية
تحدد المتتالية اذا علمت حدودها أو الوسيطة التي تمكن من حساب أي حد من حدودها.
و هناك عدة طرق منها على الخصوص:

### أ- المتتالية المحددة بالصيغة الصريحة للحد العام.
أمثلة
نعتبر المتتاليات العددية $(u_n)$ و $(v_n)$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$$u_n = 2n - 6 \quad \text{و} \quad v_n = a \text{ حيث } a \text{ عدد حقيقي} \quad \text{و} \quad w_n = \frac{(-2)^n}{n+1}$$

$(u_n)$ و $(v_n)$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ متتاليات محددة بالصيغة الصريحة
أحسب الحد الثالث لكل من المتتاليات $(u_n)$ و $(v_n)$ و $(w_n)_{n\geq 1}$

### ب – المتتالية الترجعية: أي لحساب حد من حدودها نرجع لحدود أخرى
أمثلة
نعتبر المتتاليات العددية $(u_n)$ و $(v_n)$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1}} \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \quad v_1 = -1 \\ v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1} \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} w_3 = 1 \\ w_{n+1} = 3w_n - 1 \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$(u_n)$ و $(v_n)$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ متتاليات ترجعية
/1 أحسب $u_1$ ; $u_2$ ; $u_3$ ; $v_2$ ; $v_3$ ; $w_2$ ; $w_0$

/2 بين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\dfrac{2}{2n+1}$

## II- المتتاليات المحدودة – المتتاليات الرتيبة

### 1-المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة – المتتالية المحدودة

**أنشطة**

نعتبر المتتاليات العددية $(u_n)$ و $(v_n)$ حيث $u_n=\dfrac{2}{3}n-1$ و $v_n=\dfrac{n+1}{2n+3}$

/1 أحسب $u_0$ و $u_1$ و $v_0$ و $v_1$

/2 بين أن $u_n\geq 3\quad \forall n\in\mathbb{N}$ و $v_n\leq 1\quad \forall n\in\mathbb{N}$

.............................................................................................

لدينا $u_n\geq 3\quad \forall n\in\mathbb{N}$ نقول إن المتتالية $(u_n)$ مصغورة بالعدد 3

$v_n\leq 1\quad \forall n\in\mathbb{N}$ نقول إن المتتالية $(u_n)$ مكبورة بالعدد 1

**تعريف**

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي $M$ بحيث $\forall n\in I\quad u_n\leq M$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي $m$ بحيث $\forall n\in I\quad u_n\geq m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة اذا وفقط اذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة و مصغورة

**ملاحظة** $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\Leftrightarrow\quad \exists k\in\mathbb{R}_+^*\quad \forall n\in I\quad |u_n|\leq k$

تمرين

نعتبر المتتاليات العددية $(u_n)$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$u_n=2n-1$ و $\begin{cases} v_1=2\\ v_{n+1}=\dfrac{1}{3}v_n+2\end{cases}$ و $w_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$

بين أن $(u_n)$ مصغور ة و $(v_n)_{n\geq 1}$ مكبورة بالعدد3 و $(w_n)_{n\geq 1}$ محدودة.

### 2- المتتالية الرتيبة

**تعريف**

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية اذا وفقط اذا كان لكل $n$ و $m$ من $I$ : $n\succ m$ تستلزم $u_n\geq u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية قطعا اذا وفقط اذا كان لكل $n$ و $m$ من $I$ : $n\succ m$ تستلزم $u_n\succ u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية اذا وفقط اذا كان لكل $n$ و $m$ من $I$ : $n\succ m$ تستلزم $u_n\leq u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية قطعا اذا وفقط اذا كان لكل $n$ و $m$ من $I$ : $n\succ m$ تستلزم $u_n\prec u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تابثة اذا وفقط اذا كان لكل $n$ و $m$ من $I$ لدينا $u_n=u_m$

أمثلة

أدرس رتابة المتتاليتين العدديتين $(u_n)$ و $(v_n)$ حيث $u_n=2n-1$ و $v_n=-3n+5$

نشاط

برهن أن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow\quad \forall n\in I\quad u_{n+1}\geq u_n$

**خاصيات**

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حيث $I=\{n\in\mathbb{N}/n\geq n_0\}$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow\quad \forall n\in I\quad u_{n+1}\geq u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية قطعا $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1}\succ u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1}\leq u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية قطعا $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1}\prec u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية ثابتة $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1}=u_n$

**تمرين**

نعتبر المتتاليات العددية $(u_n)$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$u_n=\frac{n}{n+1}$ و $v_n=\frac{2^n}{n}$ و $\begin{cases} w_1=1 \\ w_{n+1}=\frac{1}{2}w_n+1 \end{cases}$

1- أدرس رتابة $(u_n)$ و $(v_n)_{n\geq 1}$

2- أ- بين أن $w_n\prec 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

ب- بين أن $(w_n)_{n\geq 1}$ تزايدية .

## III- المتتالية الحسابية - المتتالية الهندسية

### A- المتتالية الحسابية

#### 1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابية اذا كان يوجد عدد حقيقي $r$ بحيث $\forall n\geq n_0 \quad u_{n+1}=u_n+r$

العدد $r$ يسمى أساس المتتالية .

أمثلة

نعتبر المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث $u_n=-2n+1$ و $v_n=\frac{1}{n}$

بين أن $(u_n)$ متتالية حسابية محددا أساسها.

هل $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية؟

#### 2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

**نشاط**

$(u_n)_{n\geq p}$ حسابية أساسها $r$ و حدها الأول $u_p$

1/ بين بالترجع أن $\forall n\geq p \quad u_n=u_p+(n-p)r$

2/ نضع $S_n=u_p+u_{p+1}+..........u_{n-1}$

أ- بين بالترجع أن $1+2+3...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

ب- ما عدد حدود المجموع $S_n$

ت- بين أن $S_n=\frac{(n-p)(u_p+u_{n-1})}{2}$

**خاصية**

اذا كان $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية حسابية أساسها $r$ فان $\forall n\geq p \quad u_n=u_p+(n-p)r$

**ملاحظة**

- اذا كان $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r$ فان $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=u_0+nr$
- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها $r$ فان $\forall n\geq 1 \quad u_n=u_1+(n-1)r$
- اذا كان $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية حسابية أساسها $r$ فان $\forall n\geq q\geq p \quad u_n=u_q+(n-q)r$

**خاصية**

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$ فان $S_n = \dfrac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع $S_n$ و $u_p$ هو الحد الأول للمجموع $S_n$ و $u_{n-1}$ هو الحد الأخير للمجموع $S_n$

**ملاحظة**

- اذا كان $(u_n)$ متتالية حسابية فان $S_n$ مجموع $n$ حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية فان $S_n$ مجموع $n$ حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

**تمرين**

لتكن $(u_n)$ متتالية حسابية اساسها3 و حدها الأول $u_0 = -2$

1 / أحسب $u_n$ بدلالة $n$ و أحسب $u_{200}$

2/ أحسب مجموع 100 حدا أولا للمتتالية

**تمرين**

لتكن $(u_n)$ متتالية حسابية حيث $u_{50} = 20$ و $u_{30} = -40$

1/ حدد أساس ثم الحد العام للمتتالية $(u_n)$

2/ أحسب المجموع $S = u_{15} + u_{16} + \ldots + u_{54}$

**تمرين**

أحسب $S_n = 1+3+5+\ldots.+(2n+1)$

**تمرين**

نعتبر المتتاليتين المعرفتين بـ

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- بين أن $(v_n)$ متتالية ثابتة .

2- استنتج أن $(u_n)$ متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة .

3- أحسب $u_n$ بدلالة $n$. ثم أحسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة $n$.

## B- المتتالية الهندسية

### 1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هندسية اذا كان يوجد عدد حقيقي $q$ بحيث $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \geq n_0$

العدد $q$ يسمى أساس المتتالية .

**أمثلة**

$(u_n)$ متتالية حيث $u_n = 3(2)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

بين أن $(u_n)$ متتالية هندسية محددا أساسها

**تمرين**

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$ و $u_1 = 1$ و $v_n = u_n - 2$

بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية محددا أساسها

## 2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

**نشاط**

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها $q$

1/ بين بالترجع أن $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

2/ نعتبر $q \neq 1$ و $S_n = u_p + u_{p+1} ............... + u_{n-1}$

أ- بين أن $S_n - qS_n = u_p - u_n$

ب- استنتج أن $S_n = u_p \left( \frac{1-q^{n-p}}{1-q} \right)$

**خاصية**

اذا كان $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها $q$ فان $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0} \quad \forall n \ge n_0$

**ملاحظة**

- اذا كان $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $q$ فان $u_n = u_0 q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- اذا كان $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية هندسية أساسها $q$ فان $u_n = u_1 q^{n-1} \quad \forall n \ge 1$
- اذا كان $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها $q$ فان $u_n = u_p q^{n-p} \quad \forall n \ge p \ge n_0$

**أمثلة**

* لتكن $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية $(u_n)$ بدلالة $n$

* لتكن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها $u_5 = -2$

حدد الحد العام للمتتالية $(v_n)$ بدلالة $n$

**خاصية**

لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها $q$ يخالف 1

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} ............... + u_{n-1}$ فان $S_n = u_p \left( \frac{1-q^{n-p}}{1-q} \right)$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع $S_n$ و $u_p$ هو الحد الأول للمجموع $S_n$

**ملاحظة**

- إذا كان $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $q$ يخالف 1 فان $S_n$ مجموع $n$ حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 ............... + u_{n-1} = u_0 \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

- اذا كان $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية هندسية أساسها $q$ يخالف 1 فان $S_n$ $S_n$ مجموع $n$ حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 ............... + u_n = u_1 \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

**حالة خاصة**

إذا كانت $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها 1 فان $S_n = u_p + u_{p+1} ............... + u_{n-1} = u_p (n-p)$

**تمرين**

1/ لتكن $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية $(u_n)$ بدلالة $n$

2/ لتكن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها $u_5 = -2$

حدد الحد العام للمتتالية $(v_n)$ بدلالة $n$

**تمرين**

أحسب بدلالة $n$ المجموع $S = 2+4+8+16........+2^n$

**تمرين**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $u_0 = -3$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 4$ لكل $n \in \mathbb{N}$

نضع $v_n = u_n + 6$

1. بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية وحدد أساسها $q$ وحدها الأول $v_0$
2. احسب $v_n$ ثم $u_n$ بدلالة $n$
3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$
   احسب $S_n$ بدلالة $n$

## المتتالية الحسابية

**تعريف:** حسابية $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}-u_n=r$ **(** $r$ أساس

**كتابة** $(u_n)$ **بدلالة** $n$ **:** $u_n=u_p+(n-p)r$

$$u_n=u_0+nr$$

$$u_n=u_1+(n-1)r$$

**حساب المجموع :** $u_p+u_{p+1}+.......+u_m=(m-p+1).\left(\frac{u_p+u_m}{2}\right)$

## المتتالية الهندسية

**تعريف:** $v$ هندسية $\Leftrightarrow$ $v_{n+1}=qv_n$ **(** $q$ أساس $v$ **)**

**كتابة** $(v_n)$ **بدلالة** $n$ **:** $v_n=v_p.q^{n-p}$

$$v_n=v_0.q^n$$

$$v_n=v_1.q^{n-1}$$

**حساب المجموع :**

$$v_p+v_{p+1}+.......+v_m=v_p.\frac{1-q^{m-p+1}}{1-q}$$

## رتابة متتالية

$(u$ **تزايدية** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}-u_n\geq 0$

$(u_n)$ **تناقصية** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}-u_n\leq 0$

$(u_n)$ **ثابتة** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}=u_n$

## متتالية مصغورة

$(u$ **مصغورة بالعدد** $m$ $\Leftrightarrow$ $m\leq u_n$

( **مكبورة بالعدد** $M$ $\Leftrightarrow$ $u_n\leq M$

$(u_n)$ **محدودة** $\Leftrightarrow$ $m\leq u_n\leq M$

# الحسابيات

## I- قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

### أنشطة

**نشاط1** ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا فرديا

بين أن8 يقسم $n^2-1$ لكل عدد صحيح الطبيعي فردي $n$

**الحل**

ليكن $n$ عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد $k$ من $\mathbb{N}$ حيث $n=2k+1$

لدينا $n^2-1=(n-1)(n+1)$ ومنه $n^2-1=4k(k+1)$

وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)

فانه يوجد $k'$ من $\mathbb{N}$ حيث $k(k+1)=2k'$ و بالتالي $n^2-1=8k'$

إذن 8 يقسم $n^2-1$

**نشاط2**

بين أن لكل n من IN العدد $n^3-n$ يقبل القسمة على 3

**الحل**

لدينا $n^3-n=n(n-1)(n+1)$

ليكن n من IN و منه يوجد $k\in\mathbb{N}$ حيث $n=3k$ أو $n=3k+1$ أو $3k+2$

و بالتالي $n^3-n=3k(3k-1)(3k+1)$ أو $n^3-n=(3k+1)(3k)(3k+2)$

أو $n^3-n=(3k+2)(3k+1)(3k+3)=3(3k+2)(3k+1)(k+1)$

و في جميع هذه الحالات $n^3-n=3k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$

اذن $n^3-n$ يقبل القسمة على 3

**نشاط3**

أنشر $\left(10^6-1\right)^3$ ثم استنتج باقي القسمة للعدد $999999^3$ على 5

**نشاط4**

حدد الأرقام $x$ و $y$ بحيث العدد الصحيح الطبيعي $11x1y$ قابل للقسمة على28

### 1- تعريف

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}$

نقول إن $b$ يقسم $a$ و نكتب $b/a$ إذا وجد $k$ في $\mathbb{Z}$ حيث $a=kb$

$$(a;b)\in\mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \quad a=kb$$

### 2- ملاحظات

*- إذا كان $b$ يقسم $a$ إننا نقول إن $b$ قاسم لـ $a$ أو $a$ مضاعف لـ $b$

*- ليكن $b\in\mathbb{Z}$ مجموعة مضاعفات العدد $b$ هي المجموعة $b\cdot\mathbb{Z}=\{k\cdot b/k\in\mathbb{Z}\}$

*- ليكن $a\in\mathbb{Z}^*$ $b\in\mathbb{Z}$ : $b/a\Rightarrow |b|\le|a|$

### 3- خاصيات العلاقة " $b/a$ "

*- $a/a$ $\forall a\in\mathbb{Z}$ نقول إن العلاقة" $b/a$ " انعكاسية

*- $\begin{cases} b/a \\ a/c \end{cases} \Rightarrow b/c$ $\forall(a;b;c)\in\mathbb{Z}^3$ نقول إن العلاقة" $b/a$ " متعدية

*- $\begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases} \Rightarrow |a|=|b|$ $\forall(a;b;c)\in\mathbb{Z}^3$

ملاحظة

$\begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases} \Rightarrow a=b$ $\forall(a;b;c)\in\mathbb{N}^3$ نقول إن العلاقة" $b/a$ " تخالفية في $\mathbb{N}$

تمرين

1- بين أن $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow a\cdot\mathbb{Z}\subset b\cdot\mathbb{Z}$

2- بين أن $\forall(a;x_1;x_2;y_1;y_2)\in\mathbb{Z}^5 \quad a/(x_1-y_1) \quad\wedge\quad a/(x_2-y_2)\Leftrightarrow a/(x_1x_2-y_1y_2)$

## II- القسمة الاقلبدية في $\mathbb{Z}$

### 1- القسمة الاقليدية في $\mathbb{N}$

مبرهنة

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{N}$ حيث $a\neq b$
يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث $a=bq+r$ حيث $0\leq r\prec b$

اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد $(q;r)$ بحيث $a=bq+r$ حيث $0\leq r\prec b$ تسمى القسمة الاقليدية لـ $a$ على $b$ في $\mathbb{N}$

العدد $a$ يسمى المقسوم و العدد $b$ يسمى المقسوم عليه و العدد $q$ الخارج و $r$ الباقي.

### 2- القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة

ليكن $a$ من $\mathbb{Z}$ و $b$ في $\mathbb{N}^*$ حيث $a\neq b$
يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ حيث $a=bq+r$ حيث $0\leq r\prec b$

اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد $(q;r)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ بحيث $a=bq+r$ حيث $0\leq r\prec b$ تسمى القسمة الاقليدية لـ $a$ على $b$ في $\mathbb{Z}$

العدد $a$ يسمى المقسوم و العدد $b$ يسمى المقسوم عليه و العدد $q$ الخارج و $r$ الباقي

تمرين

حدد الأعداد الصحيحة النسبية $x$ بحيث يكون للقسمة الاقليدية لـ $x$ على 7 خارج $q$ و باقي $q^2$

تمرين

بين إذا كان للقسمة الاقليدية لـ $a$ على $b$ و القسمة الاقليدية لـ $a'$ على $b$ نفس الخارج $q$ و كان $a\prec x\prec a'$ فان $q$ خارج القسمة الاقليدية لـ $x$ على $b$

## - الأعداد الأولية

### 1- تعاريف

#### أ- القواسم الفعلية لعدد صحيح نسبي

تعريف

ليكن $a\in\mathbb{Z}$
نقول إن العدد $d$ قاسم فعلي للعدد $a$ إذا و فقط إذا كان $d$ يقسم $a$ و $d\notin\{-1;1;-a;a\}$

أمثلة

*- القواسم الفعلية للعدد 6 هي 2 و -2 و 3 و -3
*- لدينا $D_7=\{1;-1;7;-7\}$ العدد 7 لا يقبل قواسم فعلية

#### ب- الأعداد الأولية

تعريف

ليكن $a\in\mathbb{Z}$
نقول إن العدد $a$ أولي إذا و فقط إذا كان $a$ يخالف 1 و -1 و ليس له قواسم فعلية
$a$ أولي $\Leftrightarrow$ $D_a=\{1;-1;a;-a\}$ و $|a|\neq 1$

نرمز لمجموعة الأعداد الأولية بـ P

### 2- خاصيات

أ- إذا كان $p$ و $q$ عددين أوليين و $|q| \neq |p|$ فان قاسمهما المشترك الأكبر هو 1 ( العكس غير صحيح)

ب- ليكن $a$ عددا غير أولي في $\mathbb{Z}^*$ و يخالف 1 و -1 .
أصغر قاسم فعلي موجب للعدد $a$ هو عدد أولي

د- مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

البرهان

نبرهن أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

لتكن $P^+$ مجموعة الأعداد الأولية الموجبة

$P^+ \neq \varnothing$ لأن $2 \in P^+$

لنفترض أن $P^+$ منتهية و ليكن $p$ أكبر عنصر من $P^+$ . لنعتبر $m = p!+1$ لدينا $m \succ p$

و منه $m \notin P^+$ أي $m$ ليس أوليا و بالتالي للعدد $m$ قاسم أولي $q$ ومنه $q \in P^+$ و $q \leq p$

$q \leq p$ يستلزم $q$ يقسم $p!$ لأن( $q$ أحد عوامل $p!$ )

لدينا $q/m$ و $q/p!$ ومن $q/(m-p!)$ أي $q/1$ وهذا يتناقض مع كون $q$ أولي

ومنه $P^+$ غير منتهية إذن $P$ غير منتهية

3- طريقة عملية لتحديد الأعداد الأولية

مبرهنة

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

إذا كان $n$ غير أولي فانه يوجد عدد أولي موجب $p$ يقسم $n$ و $p^2 \leq n$

البرهان

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ و $n$ غير أولي و ليكن $p$ أصغر قاسم فعلي موجب لـ$n$ إذن $p$ أولي ومنه يوجد $k$ من $\mathbb{N}^*$ حيث $n = pk$

بما أن $1 \prec p \prec n$ فان $1 \prec k \prec kp = n$ إذن $k$ قاسم فعلي موجب للعدد $n$ و بالتالي $p \leq k$

إذن $p^2 \leq pk = n$

ملاحظة

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

لتأكد من أن $n$ هل أولي أم لا. نرى هل يقبل القسمة على أحد الأعداد الأولية $p$ حيث $p^2 \leq n$

- فإذا كان يقبل القسمة على أحدهم فان $n$ غير أولي
- و إذا كان لا يقبل القسمة على أي واحد مهن فان $n$ عدد أولي

( عمليا نتوقف عندما تكون $p^2 \succ n$ )

مثال العدد 179 لا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد الأولية التالية 2 و 3 و 5 و7 و 11 و 13

$17^2 = 289 \quad ; \quad 13^2 = 169$

4- خاصيات

خاصية

*- إذا كان عدد أولي يقسم جداء أعداد صحيحة نسبية فانه يقسم أحد عوامل هذا الجداء

نتيجة

لتكن $p_1$ و $p_2$ ......و$p_n$ أعداد أولية موجبة و $p$ عددا أوليا

$p / p_1 \times p_2 \times ...... \times p_n \Rightarrow \exists i \in \{1;2;....;n\} \quad p = p_i$

5- التفكيك الى جداء من عوامل أولية

1- مبرهنة

كل عدد صحيح نسبي $n$ غير منعدم ومخالف لـ1 و -1 يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل

$n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ حيث $p_1$ و $p_2$ ......و$p_n$ أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و $\alpha_1$

و $\alpha_2$......و$\alpha_n$ أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة و $\varepsilon = \pm 1$

ملاحظة عندما نكتب $n$ على شكل $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ فاننا نقول اننا فككنا $n$ الى جداء عوامل أولية

مثال فكك العدد-1752 إلى جداء عوامل أولية

2- تطبيقات

(A) نتيجة1

ليكن $n=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times......\times p_k^{\alpha_k}$ حيث $p_1$ و $p_2$ ......و $p_n$ أعداد أولية
يكون عدد $d$ قاسما للعدد $n$ اذا وفقط اذا كان تفكيك $d$ الى عوامل جداء أولية على شكل

$$d=\varepsilon p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times......\times p_k^{\beta_k}$$

حيث $0\le\beta_i\le\alpha_i$ لكل $i$ من $\{1;2;....;k\}$

نتيجة2

ليكن $n=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times......\times p_k^{\alpha_k}$ حيث $p_1$ و $p_2$ ......و $p_n$ أعداد أولية
يكون عدد $m$ مضاعفا للعدد $n$ إذا وفقط إذا كان تفكيك $m$ إلى عوامل جداء أولية على شكل

$$d=\varepsilon p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times......\times p_k^{\lambda_k}$$

حيث $0\le\alpha_i\le\lambda_i$ لكل $i$ من $\{1;2;....;k\}$

## IV- القاسم المشترك الأكبر

نرمز لمجموعة قواسم العدد الصحيح النسبي $a$ بالرمز $D_a$

1- تعريف

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}^*$
القاسم المشترك الأكبر للعددين $a$ و $b$ هو أكبر قاسم مشترك موجب قطعا لـ $a$ و $b$ يرمز له
بـ $a\wedge b$

$$\delta=a\wedge b\Leftrightarrow\begin{cases}\delta\in D_a\cap D_b\\ \forall x\in D_a\cap D_b\qquad x\le\delta\end{cases}$$

2- خاصيات

ليكن $a$ و $b$ و $c$ من $\mathbb{Z}^*$

$$a\wedge b=b\wedge a$$

$$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$$

$$a\wedge a=|a|$$

مثال $48\wedge60=12$

3- خوارزمية اقليدس أو طريقة " القسمات المتتالية " لتحديد القاسم المشترك

أ- ملاحظة

* $\forall a\in\mathbb{Z}^*\quad D_a=D_{-a}$

* $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^{*2}\quad a\wedge b=|a|\wedge|b|$ ومنه تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين نسبيين يرجع إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين.

ب- ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{N}^*$

- إذا كان $b/a$ فان $a\wedge b=b$
- إذا كان $b$ لا يقسم $a$ فانه يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ حيث $a=bq+r$ و $0\prec r\prec b$

بما أن $r=a-bq$ فان كل قاسم مشترك لـ $a$ و $b$ يقسم $r$
و بالتالي قاسم مشترك لـ $a$ و $b$ هو قاسم مشترك لـ $b$ و $r$ أي $D_a\cap D_b\subset D_r\cap D_b$
عكسيا كل قاسم مشترك لـ $b$ و $r$ يقسم $a$ ( لأن $a=bq+r$ )
ومنه كل قاسم مشترك لـ $b$ و $r$ هو قاسم مشترك لـ $a$ و $b$ أي $D_r\cap D_b\subset D_a\cap D_b$
إذن $D_a\cap D_b=D_r\cap D_b$ و بالتالي $a\wedge b=r\wedge b$

تمهيدة

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{N}^*$ بحيث $b$ لا يقسم $a$ و $r$ باقي القسمة الاقليدية لـ $a$ على $b$

$a \wedge b = r \wedge b$

ج- ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{N}^*$ نفترض أن $b \prec a$

بإجراء القسمة الاقليدية لـ $a$ على $b$ نحصل على $a = bq_1 + r_1$ حيث $0 \le r_1 \prec b$

❖ إذا كان $r_1 = 0$ فان $b/a$ و منه $a \wedge b = b$

❖ اذا كان $r_1 \succ 0$ نجري القسمة الاقليدية لـ $b$ على $r_1$ و نحصل على $b = r_1 q_2 + r_2$ و $0 \le r_1 \prec r_2$

اذا كان $r_2 = 0$ فان $b \wedge r_1 = r_1$ و منه $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1$

إذا كان $r_2 \succ 0$ نجري القسمة الاقليدية لـ $r_1$ على $r_2$ و نحصل على $r_1 = r_2 q_3 + r_3$ و $0 \le r_3 \prec r_2$

.................

بإجراء العملية n مرة نحصل على

$$a = bq_1 + r_1 \ ، \ 0 \prec r_1 \prec b \ ، \ a \wedge b = b \wedge r_1$$
$$b = r_1 q_2 + r_2 \ ، \ 0 \prec r_2 \prec r_1 \ ، \ b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \ ، \ 0 \prec r_3 \prec r_2 \ ، \ r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3$$
$$\vdots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \ ، \ 0 \prec r_n \prec r_{n-1} \ ، \ r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n$$

و منه نستنتج $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3 = ............ = r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n$ ،

$0 \prec r_n \prec r_{n-1} ...... \prec r_3 \prec r_2 \prec r_1 \prec b$

نضع $A = \{r_1; r_2; r_3 ........ r_n; .....\}$

$A$ جزء من $\mathbb{N}$ مكبور بالعدد $b$ و منه $A$ مجموعة منتهية

إذن $r_p \ne 0 \quad ; \quad r_{p+1} = 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} /$

بما أن $r_{p+1} = 0$ فان $r_{p-1} = r_p q_{p+1}$ و منه $r_{p-1} \wedge r_p = r_b$

إذن $a \wedge b = r_p$

نتيجة

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{N}^*$
القاسم المشترك الأكبر للعددين $a$ و $b$ هو اخر باقي غير منعدم في طريقة القسمات المتتالية لـ $a$ على $b$

مثال باستعمال طريقة القسمات المتتالية، نحدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1640 و 156

$$1640 = 156 \times 10 + 80$$
$$156 = 80 \times 1 + 76$$
$$80 = 76 \times 1 + 4$$
$$76 = 4 \times 19 + 0$$

إذن $1640 \wedge 156 = 4$

1- خاصيات

أ- مبرهنة

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta = a \wedge b$
يوجد عددان $u$ و $v$ من $\mathbb{Z}$ حيث $\delta = au + bv$

البرهان

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta = a \wedge b$

نعتبر $A = \{ n \in \mathbb{N}^* / n = au + bv \quad ; \quad (u;v) \in \mathbb{Z}^2 \}$

لدينا $A \ne \emptyset$ لأن $a^2 + b^2 \in A$

$A \subset \mathbb{N}$ و بالتالي $x \ge p \quad \forall x \in A \quad \exists p \in A$

ليكن $p = au_0 + bv_0$ نبرهن أن $\delta = p$

❖ بما أن $\delta/a$ و$\delta/b$ فان $\delta/p$ و منه $\delta \le p$

❖ بإنجاز القسمة لـ $a$ على $p$ نحصل على $0 \le r \prec p$ ; $a = pq + r$ $\exists(q;r) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$

❖ ومنه $r = a - q(au_0 + bv_0) = a(1 - qu_0) + b(-qv_0)$

إذا كان $r \succ 0$ فان $r \in A$ و منه $r \ge p$ و هذا يتناقض مع كون $r \prec p$

و بالتالي $r = 0$ أي $p/a$ وبنفس الطريقة نبرهن أن $p/b$

ومنه $p$ قاسم مشترك لـ $a$ و $b$ وبالتالي $\delta \ge p$

لدينا $\delta \le p$ و $\delta \ge p$ إذن $\delta = p$

ب- استنتاجات

* من البرهان السابق نستنتج $\delta = a \wedge b$ هو أصغر عدد موجب قطعا من المجموعة

$B = \{ n \in \mathbb{Z}^* / n = au + bv \quad ; \quad (u;v) \in \mathbb{Z}^2 \}$

* بما أن $\delta$ قاسم مشترك لـ $a$ و $b$ فان أي قاسم لـ $\delta$ يقسم $a$ و $b$

عكسيا اذا كان $c$ قاسم مشترك لـ $a$ و $b$ فان $b = k_2c$ ; $a = k_1c$ $\exists(k_1;k_2) \in \mathbb{Z}^2$

بما أن $\delta = a \wedge b$ فانه $\delta = au + bv$ $\exists(u;v) \in \mathbb{Z}^2 /$

ومنه $\delta = (k_1u + k_2v)c$ أي $c$ يقسم $\delta$

مبرهنة

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta = a \wedge b$

مجموعة قواسم $\delta$ هي مجموعة القواسم المشتركة لـ $a$ و $b$ $(D_a \cap D_b = D_\delta)$

نتيجة

إذا كان $a$ و $b$ و$c$ أعداد من $\mathbb{Z}$ فان

$a \wedge b = \delta \Rightarrow ca \wedge cb = |c|\delta$

خاصية

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}^*$ حيث $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ......\times p_k^{\alpha_k}$ و $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ......\times p_k^{\beta_k}$

وحيث $p_1$ و $p_2$ ......و$p_n$ أعداد أولية

القاسم المشترك الأكبر للعددين $a$ و $b$ هو العدد $\delta = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times ......\times p_k^{\lambda_k}$

حيث $\lambda_i = \inf(\alpha_i;\beta_i)$ و $i$ تنتمي $\{1;2;....;k\}$

مثال حدد $-180 \wedge 1170$

2- القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد

تعريف

$a_1$ و $a_2$ و$a_3$.....و $a_k$ أعداد من $\mathbb{Z}^*$

أكبر عدد صحيح طبيعي يقسم في آن واحد $a_1$ و $a_2$ و$a_3$.....و $a_k$ يسمى القاسم المشترك الأكبر لـ$a_1$

و $a_2$ و$a_3$.....و $a_k$

مثال $12 \wedge -18 \wedge 15 = 3$

نتيجة

إذا كان $\delta$ هو القاسم المشترك الأكبر لـ$a_1$ و $a_2$ و$a_3$.....و $a_k$ فانه توجد اعداد $\alpha_1$ و $\alpha_2$ و$\alpha_3$.....

و $\alpha_k$ من $\mathbb{Z}$ حيث $\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i a_i$

VI- المضاعف المشترك الأصغر

1- تعريف

ليكن $(a;b) \in \mathbb{Z}^{*2}$

المضاعف المشترك الأصغر لـ $a$ و $b$ هو أصغر مضاعف مشترك موجب لـ $a$ و $b$ نرمز له بـ $a \vee b$

2- خاصيات

أ- *- ليكن $a$ و $b$ و $c$ من $\mathbb{Z}^*$

$a \vee b = b \vee a$

$(a \vee b)|c| = ac \vee bc$

$a \wedge a = |a|$

$b/a \Leftrightarrow a \vee b = |a|$

ب- *- ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}^*$ و$a \vee b = m$

كل مضاعف مشترك لـ $a$ و $b$ هو مضاعف للعدد $m$

ج- مبرهنة

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}^*$ و$a \vee b = m$ و $a \wedge b = \delta$

$m\delta = |ab|$

نتيجة

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}^*$

$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |ab|$

خاصية

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}^*$ حيث $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ و $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ...... \times p_k^{\beta_k}$ وحيث $p_1$ و$p_2$ ...... $p_n$ أعداد أولية

المضاعف المشترك الأصغر للعددين $a$ و $b$ هو العدد $m = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times ...... \times p_k^{\lambda_k}$

حيث $\lambda_i = \sup(\alpha_i;\beta_i)$ و $i$ تنتمي $\{1;2;....;k\}$

مثال حدد $-180 \vee 1170$

## 3- المضاعف المشترك لعدة أعداد

تعريف

$a_1$ و $a_2$ و$a_3$ .....و $a_k$ أعداد من $\mathbb{Z}^*$

أصغر مضاعف مشترك موجب للأعداد $a_1$ و $a_2$ و$a_3$ .....و $a_k$ يسمى المضاعف المشترك الأصغر لـ$a_1$ و $a_2$ و$a_3$ .....و $a_k$

و استنتج عدد قواسم عدد صحيح نسبي

## III- الموافقة بترديدn

1- تعريف

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}$ و $n$ من $\mathbb{N}$

نقول إن $a$ يوافق $b$ بترديد $n$ و نكتب $a \equiv b \quad [n]$ إذا كان n يقسم $a-b$

$$\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \quad a \equiv b \quad [n] \Leftrightarrow n/a-b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a-b = kn$$

2- خاصيات العلاقة " الموافقة بترديد n"

أ- $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \equiv a \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" انعاكسية

ب- $\forall (a;b) \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b \quad [n] \Rightarrow b \equiv a \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" تماثلية

ج- $\forall (a;b) \in \mathbb{Z} \quad (a \equiv b \quad [n]) et (b \equiv c \quad [n]) \Rightarrow a \equiv c \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" متعدية

نلخص الخاصيات أ و ب و ج بقولنا إن العلاقة " الموافقة بترديد n" علاقة تكافؤ

د- خاصية

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}$ و $n$ من $\mathbb{N}$

$a \equiv b \quad [n]$ تكافئ $a$ و $b$ لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على $n$

البرهان

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{Z}$ و $n$ من $\mathbb{N}$ بحيث $a=nq_1+r_1$ و $b=nq_2+r_2$ مع $0\le r_1 \prec n$ و $0\le r_2 \prec n$

❖ إذا كان $a$ و $b$ لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على $n$ أي $r_1=r_2$ فان $a-b=n(q_1-q_2)$

أي أن $a\equiv b \quad [n]$

❖ عكسيا إذا كان $a\equiv b \quad [n]$ فانه يوجد $k$ من $\mathbb{Z}$ حيث $a-b=nk$

و منه $r_1-r_2=(k-q_1-q_2)n$ أي $n$ يقسم $r_1-r_2$

و لدينا $0\le r_1 \prec n$ و $0\le r_2 \prec n$ ومنه $|r_1-r_2| \prec n$

و بالتالي $r_1-r_2=0$ أي $r_1=r_2$

## 3- المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

* - $\forall(a;n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \quad \exists(q;r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \quad a=nq+r \quad et \quad 0\le r\prec n$

- $\forall(a;n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \quad \exists r\in\mathbb{N} \quad a\equiv r \quad [n] \quad et \quad r\in\{0;1;.....;n-1\}$

- المجموعة $\{x\in\mathbb{Z}/x\equiv r \quad [n]\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية التي لها نفس الباقي $r$ في القسمة الاقليدية على $n$ نرمز لها بـ $\overline{r}$

المجموعة $\overline{r}$ تسمى صنف تكافؤ $r$ بالنسبة للعلاقة " الموافقة بترديد n"في $\mathbb{Z}$

- $x\in\overline{r} \Leftrightarrow x\equiv r \quad [n]$

* - $\forall a\in\mathbb{Z} \quad \exists r\in\{0;1;....;n-1\}/ \quad a\equiv r \quad [n]$ أي $\forall a\in\mathbb{Z} \quad \exists r\in\{0;1;....;n-1\}/ \quad \overline{a}=\overline{r}$

* - إذا كان $\overline{r}=\overline{r'}$ و $0\le r\prec n$ و $0\le r'\prec n$ فان $r=r'$

* - $\forall(x;n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \quad \exists r\in\{0;1;..;n-1\}/ \quad x\in\overline{r}$ ( $r$ باقي القسمة الاقليدية على $n$)

اذن $\mathbb{Z}=\overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2}\cup....\cup\overline{(n-1)}$

المجموعة $\{\overline{0};\overline{1};.....;\overline{n-1}\}$ برمز لها بالرمز $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

عناصر $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ منفصلة مثنى مثنى

أمثلة

* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1}\}$ حيث $\overline{0}=2\cdot\mathbb{Z}$ و $\overline{1}=\{x\in\mathbb{Z}/x=2k+1 \quad (k\in\mathbb{Z})\}$

* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{6}\}$ حيث $\overline{0}=7\cdot\mathbb{Z}$ و $\overline{1}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+1 \quad (k\in\mathbb{Z})\}$

و $\overline{2}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+2 \quad (k\in\mathbb{Z})\}$ و $\overline{3}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+3 \quad (k\in\mathbb{Z})\}$

و ................و $\overline{6}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+6 \quad (k\in\mathbb{Z})\}$

في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ لدينا $\overline{532}=\overline{4}$ لأن $532\equiv 4 \quad [7]$

$\overline{-36}=\overline{6}$ لأن $-36\equiv 6 \quad [7]$

## 4- انسجام العلاقة " الموافقة بترديد n" مع الجمع والضرب

### أ- خاصية

ليكن $x$ و $y$ و $z$ و $t$ من $\mathbb{Z}$ و $n$ من $\mathbb{N}$

إذا كان $x\equiv y \quad [n]$ و $z\equiv t \quad [n]$ فان $x+z\equiv y+t \quad [n]$

إذا كان $x\equiv y \quad [n]$ و $z\equiv t \quad [n]$ فان $x\times z\equiv y\times t \quad [n]$

نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" منسجمة مع الجمع والضرب

### ب- نتائج

-* إذا كانت $x\in\overline{r}$ و $x'\in\overline{r'}$ فان $x+x'\in\overline{r+r'}$ و $x\times x'\in\overline{r\times r'}$ نكتب $\overline{r+r'}=\overline{r}+\overline{r'}$

و $\overline{r\times r'}=\overline{r}\times\overline{r'}$

-* $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2 \quad \forall(p;n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N} \quad a\equiv b \quad [n]\Rightarrow a^p\equiv b^p \quad [n]$

أمثلة

* في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ $\quad \overline{3}+\overline{4}=\overline{7}=\overline{2}$ , $\overline{0}+\overline{1}+\overline{2}+\overline{3}+\overline{4}=\overline{10}=\overline{0}$ , $\overline{3}\times\overline{4}=\overline{12}=\overline{2}$

تمرين

حدد مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $x$ حيث في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ $\quad \overline{x}+\overline{5}=\overline{2}$

تمرين

1- أعط جدول الجمع ثم الضرب في $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

2- بين أن العدد $2^{70}+3^{70}$ قابلة للقسمة على 13

تمرين

3- بين أن $[n]$ $\quad n(n^4-1)\equiv 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

4- بين أن 17 يقسم $3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$

3- ليكن $n$ من $\mathbb{N}$ ، حدد بواقي القسمة الاقليدية للأعداد $1^n+2^n+3^n+4^n$ على4

# Arithmétique dans Z
# الحسابيات في Z

## I . القسمة الأقليدية / قابلية القسمة / الموافقة : ammarimaths

| الموافقة بترديد n: | قابلية القسمة: | خاصية القسمة الأقليدية: |
|---|---|---|
| نعتبر عددا طبيعيا غير منعدم n . a و b عددان صحيحان نسبيان؛ نقول أن العدد a موافق للعدد b بترديد n ، إذا وجد عدد صحيح k بحيث: $a-b=k.n$ نكتب : a≡b[modulo] | a و b عددان صحيحان؛ نقول أن b يقسم a ( أو a مضاعف لـ b )؛ إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح q بحيث: $a=b.q$ | مهما يكن العدد الصحيح النسبي a ، ومهما يكن العدد الصحيح الطبيعي غير المنعدم، b ، يوجد عددان صحيحان وحيدان q و r ، بحيث : $a=b.q+r$ و $0\le r\prec b$ |

## II . خاصيات قابلية القسمة و الموافقة : ammarimaths-bm

**قابلية القسمة:**

$$a/a$$
$$(a/b\ \ et\ \ c/d)\Rightarrow ac/bd$$
$$(a/b\ \ et\ \ b/c)\Rightarrow a/c$$
$$(a/b\ \ et\ \ b/a)\Rightarrow |a|=|b|$$
$$(\delta/a\ \ et\ \ \delta/b)\Rightarrow(\forall(\alpha,\beta)\in Z^2)\ ;\ \delta/\alpha.a+\beta.b$$
$$a^n/b\Rightarrow a/b$$

**الموافقة:**

$$a\equiv b[n]\Leftrightarrow a-b=k.n\Leftrightarrow n/a-b$$
$$\begin{cases}a\equiv b[n]\\ c\equiv d[n]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c\equiv b+d[n]\\ a.c\equiv b.d[n]\end{cases}$$

## III . القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر : ammarimaths-bm

**القاسم المشترك الأكبر:**

نرمز له : $d=pgdc(a,b)=a\wedge b$

يحقق القاسم المشترك الأكبر، الخاصيات التالية:

$$(d=a\wedge b)\ \Leftrightarrow\ (\exists(a',b')\in Z^2)\ ;\ \begin{cases}a=d.a'\\ b=d.b'\end{cases}\ et\ a'\wedge b'=1$$

$$\begin{cases}d'/a\\ d'/b\end{cases}\Rightarrow\ d'/a\wedge b$$

**المضاعف المشترك الأصغر:**

يحقق المضاعف المشترك الأصغر، الخاصيات التالية:

$$(m=a\vee b)\ \Rightarrow\ \begin{cases}a/m\\ b/m\end{cases}\ ;\ \begin{cases}a/c\\ b/c\end{cases}\Rightarrow\ a\wedge b/c$$

**خاصية مشتركة:**

$$\forall(a,b)\in Z^2;(a\vee b).(a\wedge b)=|a.b|$$

## IV . الأعداد الأولية فيما بينها / خاصيات :ammarimaths-bm

| خاصيات أخرى: | الأعداد الأولية فيما بينها: |
|---|---|

*Citation : « La mathématique est la rêne de la science et l'Arithmétique est la rêne des mathématique »*

**Arithmétique dans Z**
**الحسابيات في Z**

| | |
|---|---|
| *نقول أن العددين a b أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذاكان:* **pgcd (a,b)=1.** <br> **مبرهنة كوص:** <br> $(c/a.b \text{ et } c\wedge a=1) \Rightarrow (c/b)$ | $(a/c \text{ et } b/c \text{ et } a\wedge b=1) \Rightarrow (a.b/c)$ <br> $(a\wedge b=1 \text{ et } a\wedge c=1) \Rightarrow (a\wedge b.c)=1$ <br> $(a\wedge b=1) \Leftrightarrow \forall(m,n)\in IN^*xIN^* \;;\; (a^m\wedge b^n=1)$ <br> $(a=b.q+r \text{ et } 0\le r\prec b) \Rightarrow (a\wedge b=r\wedge b)$ |
| ***V. الأعداد الأولية / خاصيات :*** | **ammarimaths-bm** |
| *يكون عدد صحيح، عددا أوليا إذا وفقط إذا كان يقبل قاسمين موجبين بالضبط 2، 3 ، 5، 7 ... العددان 1 و -1 ليسا أوليان.* <br> ***مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية...*** | **خاصيات:** *ليكن p عددا أوليا، لدينا:* <br> $(p/a.b) \Rightarrow (p/a \quad ou \quad p/b)$ <br> $(p/a^n) \Rightarrow (p/a)$ <br> $(p/a_1.a_2...a_n) \Leftrightarrow \exists i\in(1,2,...,n) \;;\; (p/a_i)$ <br> $(p/a)\Rightarrow p\wedge a=p \text{ et } (p \text{ ne divise pas } a)\Rightarrow p\wedge a=1$ |

| | |
|---|---|
| ***I. خوارزمية أقليدس :*** | ammarimaths-bm |
| نعتبر العددين الصحيحين الطبيعيين a و b ، بحيث: <br> a >b <br> نقسم العدد a (العدد الأكبر) على العدد b ونجد: <br> $(1): \quad a=b.q_0+r_0 \quad \text{et} \quad 0\le r_0\prec b$ <br> إذا كان $r_0 = 0$ ، فإن pgcg(a,b) = b <br> إذا كان $r_0$ # 0 ، نقسم b على $r_0$ ، ونجد: <br> $(2): \quad b=r_0.q_1+r_1 \quad \text{et} \quad 0\le r_1\prec r_0\prec b$ <br> إذا كان $r_1=0$ ، فإن $pgcd(a,b)=pgcd(b,r_0)=r_0$ | إذا كان $r_1$ # 0 ، نقسم $r_0$ على $r_1$ ، ونجد: <br> الخ. <br> بعد عدد محدود من العمليات نحصل على باقي منعدم (ذلك لأن متتالية البواقي هي متتالية تناقصية لأعداد صحيحة) <br> ليكن $r_n$ آخر باقي غير منعدم ، يكون لدينا إذن: <br> $pgcd(a,b)=pgcd(b,r_0)=...=pgcd(r_{n-1}, r_n)=r_n$ |
| ***II. تفكيك عدد صحيح الى جداء عوامل أولية :*** | ammarimaths-bm |
| *كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم ومخالف للعدد1 ، يتفكك بشكل وحيد على شكل:* <br> $n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ | بحيث تكون الأعداد *pi أولية*، والأعداد $\alpha_i$ صحيحة غير منعدمة. |
| ***III. مجموعة أصناف التكافؤ : Z/n.Z*** | ammarimaths-bm |
| *علاقة التوافق:* <br> $a\equiv b[n] \Leftrightarrow a-b=k.n \Leftrightarrow n/a-b$ <br> هي علاقة تكافؤ في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية، منسجمة مع قانوني الجمع و الضرب: <br> $\begin{cases} a\equiv b[n] \\ c\equiv d[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c\equiv b+d\,[n] \\ a.c\equiv b.d\,[n] \end{cases}$ <br> صنف تكافؤ العدد الصحيح النسبي x ، هو المجموعة المعرفة كما يلي: <br> $\alpha=\bar{x}=\{y\in Z/ \quad y\equiv x[\text{modulo } n]\}$ | يرمز لمجموعة أصناف التكافؤ : $Z/n.Z$ <br> $Z/n.Z=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, ......, \overline{n-2}, \overline{n-1}\}$ <br> *يعرف الجمع والضرب في هذه المجموعة كما يلي:* <br> $\begin{cases} \bar{a}+\bar{b}\equiv\overline{a+b} \\ \bar{a}.\bar{b}\equiv\overline{a.b} \end{cases}$ <br> *(Z/n.Z , + , x ) حلقة واحدية تبادلية، بصفة عامة غير تكاملية.* <br> *إذا كان العدد n أوليا، فإن (Z/n.Z , + , x ) يكون جسما.* <br> $(\bar{a} \text{ inversible dans } Z/n.Z) \Leftrightarrow (a\wedge n=1)$ |
| ***IV. نظمة العد : Z/n.Z*** | ammarimaths-bm |
| *ليكن x عددا صحيحا أكبر من أو يساوي 2.* <br> كل عدد صحيح b يمكن أن يكتب على الشكل : <br> $b=a_n.x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+....+a_1.x+a_0$ | نكتب: <br> $(1): \quad b=\overline{a_na_{n-1}....a_1a_0}^{\,(x)}$ <br> ونقول أن هذه الكتابة هي الكتابة المختصرة للعدد b في |

*Citation : « **La mathématique est la rêne de la science et l'Arithmétique est la rêne des mathématique** »*

**Arithmétique dans Z**

**الحسابيات في Z**

| | |
|---|---|
| بحيث: $a_n \neq 0$ et $(\forall i \in [0,n])$ ; $a_i \in [0,n-1]$ | نظمة العد الذي أساسه x . |
| ***V . تحديد القاسم المشترك الأكبر والمصاعف المشترك الأصغر لعددين :*** | ammarimaths-bm |
| نعتبر : $a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$ التفكيك الى جداء عوامل أولية للعددينم a و b . نجد: | $a \wedge b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\inf(\alpha_i,\beta_{iç})}$ <br> $a \vee b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\sup(\alpha_i,\beta_{iç})}$ |

## رئيسي مجموعة:

### تعريف:

رئيسي مجموعة منتهية $E$ هو عدد عناصر المجموعة $E$ ويرمز له بالرمز: $CardE$

حالة خاصة: $Card\varnothing = 0$

### خاصية:

$A$ و $B$ مجموعتان منتهيتان

$Card(A \cup B) = CardA + CardB - Card(A \cap B)$

## متمم مجموعة:

### تعريف:

ليكن $A$ جزءا من مجموعة منتهية $E$
متمم $A$ بالنسبة للمجموعة $E$ هي المجموعة التي يرمز لها بالرمز: $\overline{A}$
حيث $\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$

### ملاحظات:

- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$
- $card\overline{A} = cardE - cardA$

## المبدأ الأساسي للتعداد:

نعتبر تجربة تتطلب نتائجها $p$ اختيارا $(p \in \mathbb{N}^*)$
إذا كان الاختيار الأول يتم ب $n_1$ كيفية مختلفة
و كان الاختيار الثاني يتم ب $n_2$ كيفية مختلفة
.......................................
و كان الاختيار $p$ يتم ب $n_p$ كيفية مختلفة
فإن عدد النتائج الممكنة هو الجداء : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_p$

## الترتيبات بتكرار - الترتيبات بدون تكرار:

### الترتيبات بتكرار:

ليكن $n$ و $p$ عنصرين من $\mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$
عدد الترتيبات بتكرار ل $p$ عنصر من بين $n$ عنصر هو: $n^p$

### الترتيبات بدون بتكرار:

- خاصية:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$ $(p \le n)$

عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو:

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{\text{من العوامل } p}$$

- حالة خاصة:

كل ترتيبة بدون تكرار ل n عنصر من بين n عنصر تسمى كذلك تبديلة ل n عنصر

و عددها : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

## التأليفات:

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها n

كل جزء A من E عدد عناصره p $(p \le n)$

يسمى تأليفة ل p عنصر من بين n عنصر

و عدد هذه التأليفات هو : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

## الأعداد: $n!$ و $A_n^p$ و $C_n^p$:

| | |
|---|---|
| $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$<br>$0! = 1$ | $n \in \mathbb{N}^*$ |
| $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ | $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ |
| $C_n^n = 1$ ، $C_n^1 = n$ | $C_n^0 = 1$ ، $C_n^{n-1} = n$ |
| $C_n^p = C_n^{n-p}$ | $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$ |

## عدد إمكانيات ترتيب n عنصر:

إذا كان لدينا n عنصر من بينها

$n_1$ عنصر من النوع A $(n_1 + n_2 + n_3 = n)$

و $n_2$ عنصر من النوع B

و $n_3$ عنصر من النوع C

فإن إمكانيات ترتيب هذه العناصر هو : $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3!}$

## بعض أنواع السحب:

نحسب p عنصر من بين n عنصر $(p \le n)$ و نلخص النتائج في الجدول التالي:

| نوع السحب | عدد السحبات الممكنة هو: | الترتيب |
|---|---|---|
| آني | $C_n^p$ | غير مهم |
| بالتتابع و بإحلال | $n^p$ | مهم |
| بالتتابع و بدون إحلال | $A_n^p$ | مهم |

- نقول عن مجموعة $E$ أنها منتهية إذا كانت فارغة أو إذا وجد عدد صحيح طبيعي $n$ و وجد تقابل من $\{1,2,......,n\}$ نحو $E$
- العدد $n$ يمثل عدد عناصر المجموعة $E$ و يسمى رئيسي $E$ و نرمز له ب : $card\left(E\right)$
- تعداد مجموعة منتهية $E$ هو تحديد رئيسها.

## عدد التطبيقات

لتكن $E$ و $F$ مجموعتين بحيث $card\ \ E\ \ =n$ و $card\left(F\right)=p$

عدد التطبيقات من $E$ نحو $F$ يساوي $n^p$

## عدد التبديلات

عدد التبديلات هو العدد $n\,!$ المعرف بما يلي :

$$\begin{cases} 0!=1 \\ 1!=1 \\ (\quad)\quad(\quad) \end{cases}$$

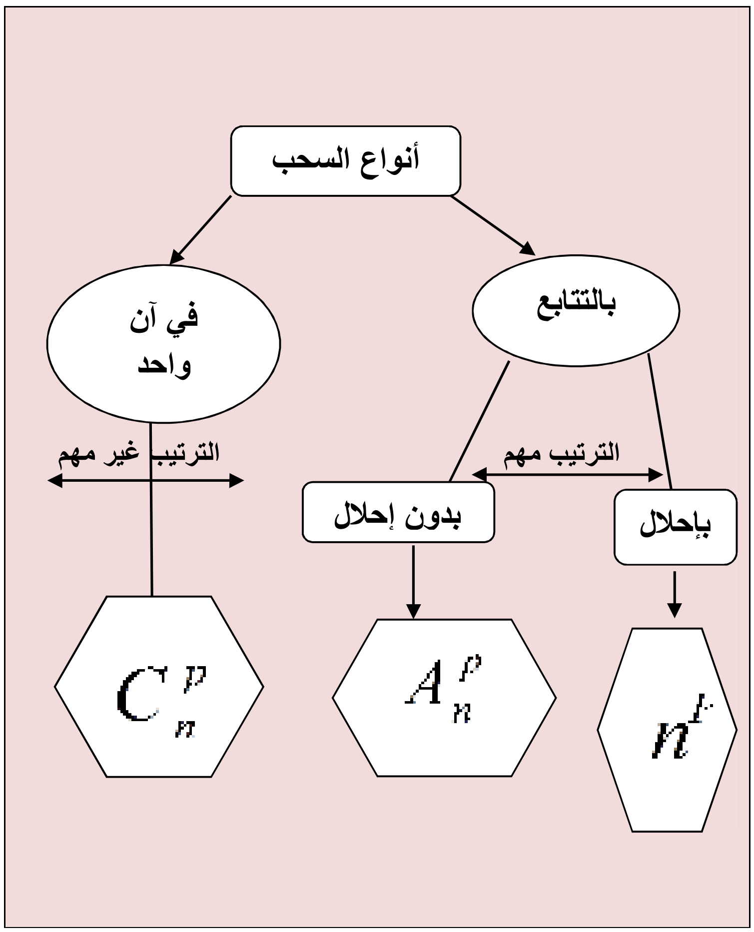
## عدد الترتيبات

عدد الترتيبات ل $p$ عنصر من $n$ هو العدد $A_n^p$ حيث $n\geq p$ و هو معرف بما يلي :

$$\quad{}_n^p\quad \frac{n\,!}{(\qquad)!}\quad(\qquad 1)\ .........\ (\quad 1)$$

التعداد مجموعة منتهية الأول $n$ $n$ $n$

عدد التأليفات ل $p$ عنصر من $n$ هو العدد $C_n^p$ حيث $n \geq p$ و هو معرف بما يلي : $C_n^p = \dfrac{n!}{p! \times (n-p)!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$



# النهـــايات

| الدورة الثانية الدرس الأول<br>10 ساعة | القدرات المنتظرة<br>. حساب نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية والدوال اللاجذرية؛<br>. حساب نهايات الدوال المثلثية البسيطة باستعمال النهايات الاعتيادية |
|---|---|

## 1- النهاية لا منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

### نشاط

نعتبر الدالة $f$ حيث $f(x)=x^3$

1- أرسم $C_f$

2- أتمم الجدول التالي

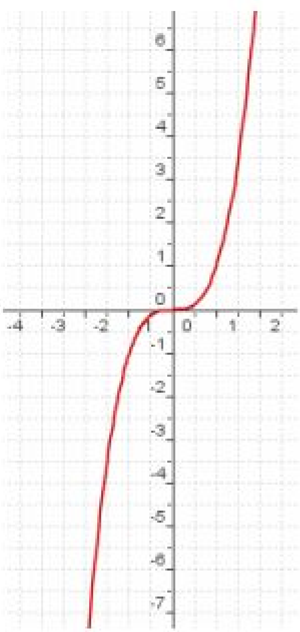
| $x$ | $-10^{10^{100}}$ | $-10^{10^{12}}$ | $-10^{10^{9}}$ | $-10^{100}$ | $-10$ | $10$ | $10^{100}$ | $10^{10^{9}}$ | $10^{10^{12}}$ | $10^{10^{100}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | |

من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ $x$ قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ $x$ قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$

---



نلاحظ من خلال الجدول و المنحنى عندما يأخذ $x$ قيما أكبر فأكبر و موجبة فان $f(x)$ تأخذ قيما أكبر فأكبر و موجبة وتؤول الى $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$

نقول إن نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$

نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نلاحظ من خلال الجدول و المنحنى عندما يأخذ $x$ قيما أصغر فأصغر و سالبة فان $f(x)$ تأخذ قيما أصغر فأصغر و سالبة وتؤول الى $-\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$

نقول إن نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$

نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

## كتابات و نهايات اعتيادية

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $[a;+\infty[$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=-\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty;a]$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=+\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=-\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$

**نهايات اعتيادية**

ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ إذا كان $n$ زوجي

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ إذا كان $n$ فردي

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

أمثلة $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

## 2- النهاية منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

**نشاط**

نعتبر الدالة $f$ حيث $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

1- باستعمال احد البرامج المعلوماتية أرسم $C_f$

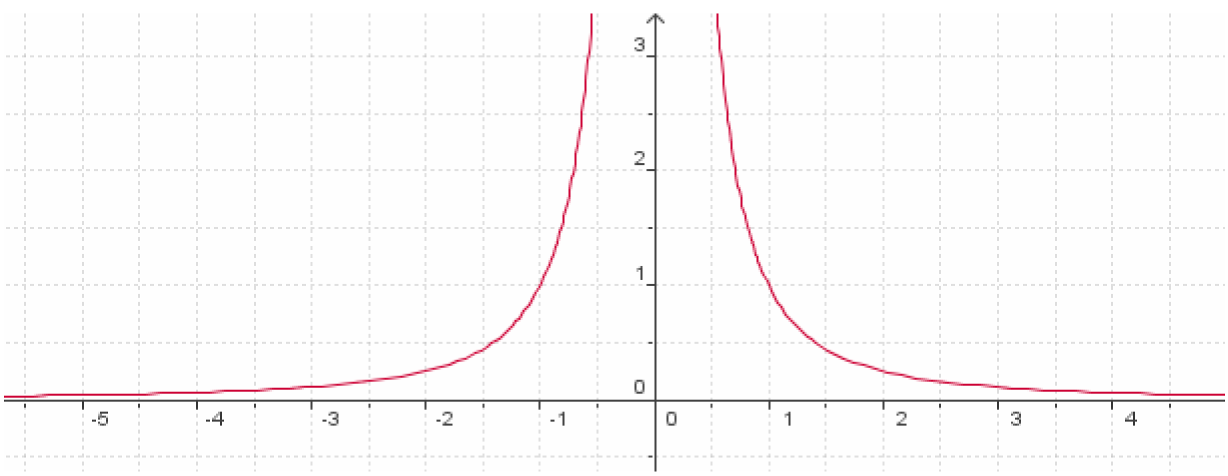
2- أتمم الجدول التالي

| $x$ | $-10^{10^{100}}$ | $-10^{10^{12}}$ | $-10^{10^9}$ | $-10^{100}$ | -10 | 10 | $10^{100}$ | $10^{10^9}$ | $10^{10^{12}}$ | $10^{10^{100}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | |

من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ $x$ قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ $x$ قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$




نلاحظ في كلتا الحالتين $f(x)$ يؤول إلى 0 نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

## نشاط

نعتبر الدالة $f$ حيث $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

1- أرسم $C_f$

2- خذ قيما أكبر فأكبر وموجبة و أملئ بها الجدول

| $x$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | |

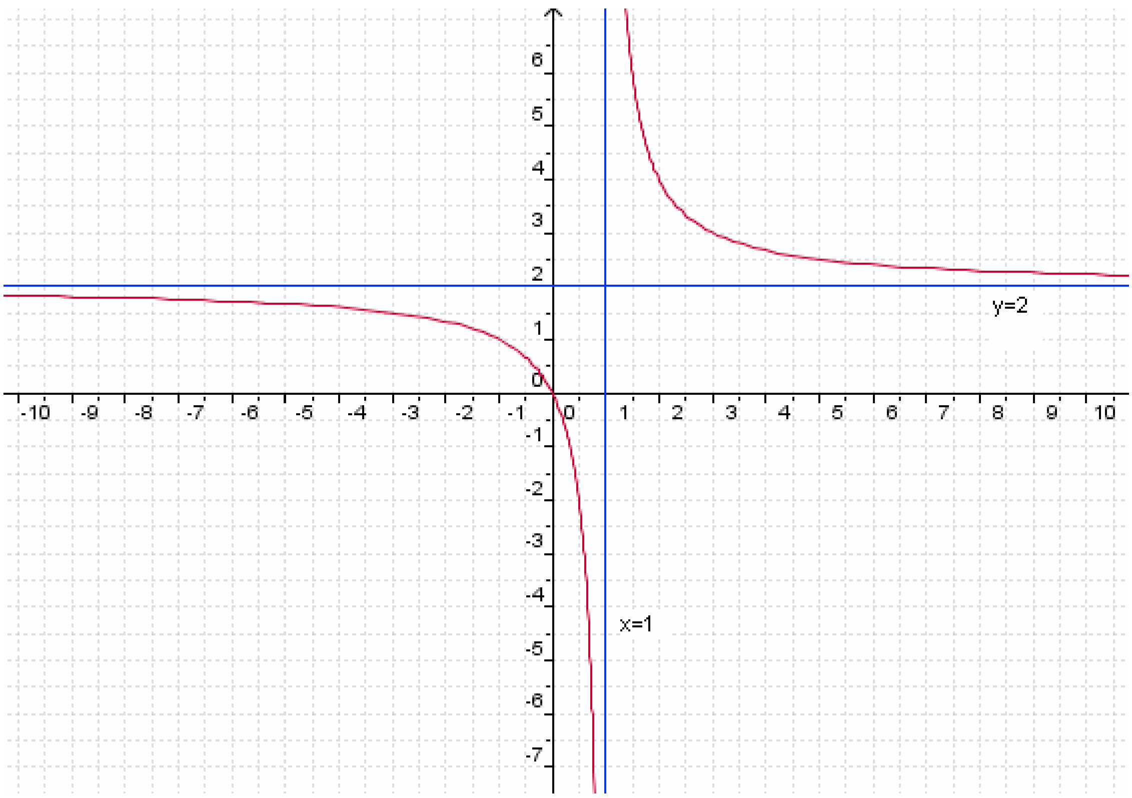
من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ $x$ قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$

خذ قيما أصغر فأصغر وسالبة و أملئ بها الجدول

| $x$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | |

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ $x$ قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$




نلاحظ في كلتا الحالتين $f(x)$ يؤول إلى 2 نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

### النهاية منتهية عند $+\infty$

لتكن $f$ يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a;+\infty[$

اذا كان $f(x)$ تؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=l$

### النهاية منتهية عند $-\infty$

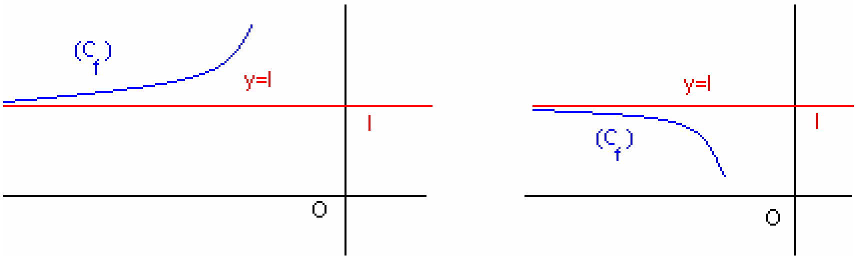
لتكن $f$ يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]-\infty;a[$

اذا كان $f(x)$ تؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=l$

## ملاحظات

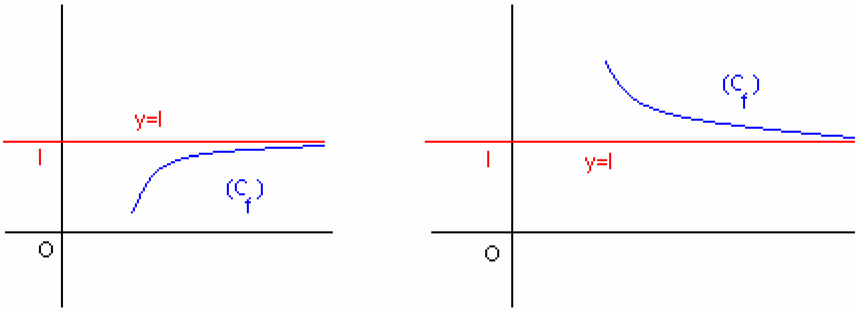
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ *

منحنى الدالة يقترب أكثر و أكثر من المستقيم ذا المعادلة $y=l$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$




$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ *

منحنى الدالة يقترب أكثر و أكثر من المستقيم ذا المعادلة $y=l$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$




*- إذا كانت $f$ زوجية فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

*- إذا كانت $f$ فردية فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

## نهايات اعتيادية

| |
|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\forall(k;n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$ |

## خاصية

لتكن $f$ دالة عددية و $l$ عددا حقيقيا

- اذا كانت $f$ تقبل نهاية $l$ في $+\infty$ أو $(-\infty)$ فان هذه النهاية وحيدة
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-l\right) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)-l\right) = 0$

## تمرين

نعتبر $f(x) = \dfrac{-3x^2+1}{x^2}$

بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$

------------------------

الجواب

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-3) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+1}{x^2}+3 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

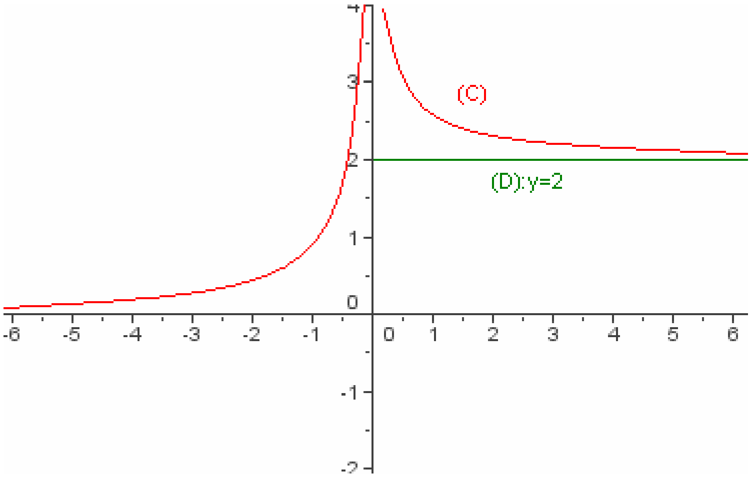
اذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

**تمرين : قراءة نهايات مبيانيا**

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$

من خلال الشكل

حدد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$




من خلال الشكل

المنحنى يقترب من المستقيم $(D): y=2$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

المنحنى يقترب من محور الأفاصيل عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

## 3- نهاية منتهية و لا منتهية لدالة في نقطة

**نشاط**

نعتبر الدالة $f$ حيث $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{x^2}$

1- أ/ أرسم $C_f$

ب/ أتمم الجدول التالي

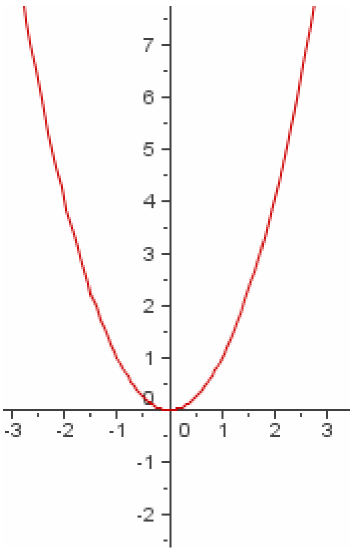
| $x$ | -0,2 | $-0,1$ | $-0,001$ | $-10^{-30}$ | $10^{-30}$ | 0,001 | 0,1 | 0,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | |

من خلال الشكل و الجدول ماذا تلاحظ استنتج $\lim_{x\to0} f(x)$

2- أتمم الجدول التالي

| $x$ | -0,2 | $-0,1$ | $-0,001$ | $-10^{-30}$ | $10^{-30}$ | 0,001 | 0,1 | 0,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | | | | | | | |

من خلال الجدول ماذا تلاحظ تضن $\lim_{x\to0} g(x)$



----------------------------

1/ من خلال الشكل و الجدول

نلاحظ أن $f(x)$ تؤول إلى 0 عندما يؤول $x$ إلى 0

نقول إن نهاية $f(x)$ هي 0 عند 0

نكتب $\lim_{x\to0} f(x)=0$

2/ من خلال الجدول

نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيما أكبر فأكبر وموجبة أي تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى 0

نقول إن نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عند 0

نكتب $\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$

## نهاية منتهية لدالة في نقطة

ليكن $a$ و $l$ عددين حقيقين و $f$ دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[$ أو مجموعة من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{a} f=l$

## خاصية

ليكن $a$ و $l$ عددين حقيقين $\lim\limits_{x\to 0} x^n=0$

إذا كان $f(x)$ تقبل $l$ في $a$ عان النهاية وحيدة

## نهايات اعتيادية

ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$\lim\limits_{x\to 0} x^n=0$

أمثلة $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ $\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$

## نهاية لامنتهية لدالة في نقطة

ليكن $a$ و $l$ عددين حقيقين و $f$ دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[$ أو مجموعة من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{a} f=+\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{a} f=-\infty$

## 3-النهاية على اليمين- النهاية على اليسار

### نشاط

نعتبر الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{|x-1|(x+2)}{x-1}$

حدد $D_f$

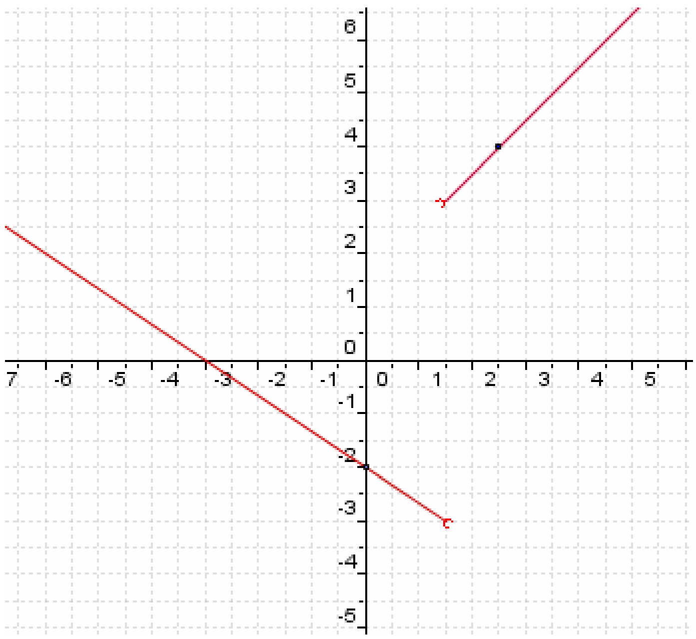
أنشئ $C_f$

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب $x$ من 1 على اليمين

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب $x$ من 1 على اليسار

------------------

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$




نلاحظ أن كلما اقتربنا من 1 على اليمين إلا و $f(x)$ تقترب من 3 نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول $x$ إلى 1 على اليمين هي 3 نكتب

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x)=3$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 1 على اليسار إلا و $f(x)$ تقترب من -3 نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول $x$ إلى 1 على اليسار هي -3 نكتب

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\ 3$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)=\ 3$

## نشاط

نعتبر الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x)=\frac{1}{x}$

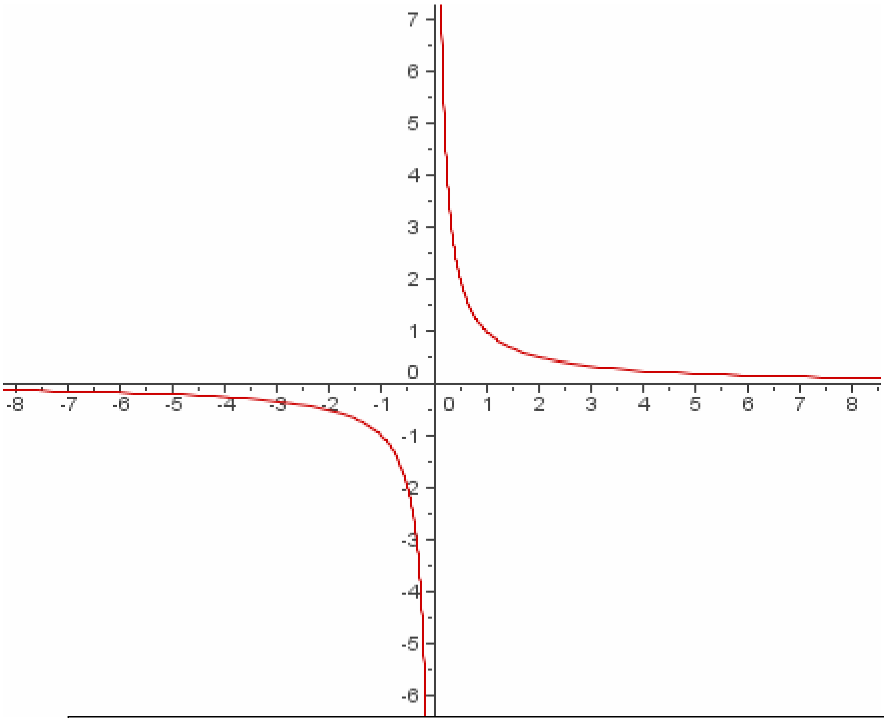
حدد $D_f$

أنشئ $C_f$

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب $x$ من 0 على اليمين

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب $x$ من 0 على اليسار

-------------------




$D_f=\mathbb{R}^*$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 0 على اليمين فان $f(x)$ تؤول $+\infty$ نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول $x$ إلى 0 على اليمين هي $+\infty$ نكتب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

أو $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x)=+\infty$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 0 على اليسار فان $f(x)$ تؤول $-\infty$ نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول $x$ إلى 0 على اليسار هي $-\infty$ نكتب $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

أو $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} f(x)=-\infty$

ليكن $a$ و $l$ عددين حقيقيين

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليمين فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=l$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليسار فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=l$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليمين فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=+\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليسار فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=+\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليمين فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=-\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليسار فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=-\infty$

## نهايات اعتيادية

ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$$

| | |
|---|---|
| $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ | إذا كان $n$ زوجيا |
| $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ | إذا كان $n$ فرديا |
| $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ | $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ |

أمثلة

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$ $\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$

مبرهنة

لتكن $f$ دالة عددية

$\lim_{x\to a} f(x) = l$ تكافئ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l$

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ تكافئ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ تكافئ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

**تمرين**

لتكن $f$ دالة عددية حيث

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & x \succ 0 \\ f(x) = x^3 & x \le 0 \end{cases}$$

حدد $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ استنتج $\lim_{x\to 0} f(x)$

------------------------------------------------------------

الجواب

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ و $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3 = 0$ ومنه $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

إذن $\lim_{x\to 0} f(x)$

**تمرين**

لتكن $f$ دالة عددية حيث $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x+2|}$

1- بين أن $\lim_{x\to -2} x - 2 = -4$ و $\lim_{x\to -2} -x + 2 = 4$

2- استنتج $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ و $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

3- هل الدالة $f$ تقبل نهاية في $-2$

--------------------------

الجواب

1- نبين أن $\lim_{x\to -2} x - 2 = -4$

نضع $X = x + 2$ أي $X - 2 = x$

عندما يؤول $x$ أي -2 فان $X$ تؤول إلى 0

$\lim_{x\to -2} x - 2 = \lim_{X\to 0} X - 4$

و حيث أن 0 $\lim_{X\to 0} X$ 4 ) $\lim_{X\to 0} (X - 4)$ فان $\lim_{X\to 0} X - 4 = -4$ اذن $\lim_{x\to -2} x - 2 = -4$

نبين أن $\lim_{x\to -2} -x + 2 = 4$

$\lim\limits_{x\to -2} -x+2 = \lim\limits_{X\to 0} -X+4$

وحيث أن $\lim\limits_{x\to -2} -x-2=4$ اذن $\lim\limits_{X\to 0} -X+4 = 44 \lim\limits_{X\to 0}\left[(-X+4)-4\right] = \lim\limits_{X\to 0} -X = 0$

2/ نستنتج $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

لدينا $\forall x \succ -2 \qquad f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x+2|}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}=x-2$

ومنه $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} x-2=-4$

لدينا $\forall x \prec -2 \qquad f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x+2|}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)}=-x+2$

ومنه $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} -x-2=4$

3/ لدينا $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ إذن الدالة $f$ لا تقبل نهاية في $-2$

## 4- العمليات على النهايات

نقبل جميع العمليات الاتية

نعتبر دالتين $f$ و $g$.

عند $x_0$ أو عند $x_0$ على اليمين أو عند $x_0$ على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ تكون لدينا النتائج التالية:

### أ- نهاية مجموع

| نهاية $f$ | نهاية $g$ | نهاية $f+g$ |
|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $l+l'$ |
| $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $l$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | شكل غير محدد |

### ب- نهاية جداء

| نهاية $f$ | نهاية $g$ | نهاية $f\times g$ |
|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $l\times l'$ |
| $l \quad l\neq 0$ | $+\infty$ | $\infty$ مع وضع إشارة $l$ |
| $l \quad l\neq 0$ | $-\infty$ | $\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$ |
| 0 | $+\infty$ | شكل غير محدد |
| 0 | $-\infty$ | شكل غير محدد |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |

**ملاحظة:**

لحساب نهاية $\lambda f$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ يمكن اعتبار $\lambda f$ كجداء الدالة

الثابتة $x \to \lambda$ التي نهايتها هي $\lambda$ و الدالة $f$

## ج- نهاية خارج

| نهاية $\frac{f}{g}$ | نهاية $g$ | نهاية $f$ |
|---|---|---|
| $\frac{l}{l'}$ | $l'$ و $l' \neq 0$ | $l$ |
| 0 | $+\infty$ | $l$ |
| 0 | $-\infty$ | $l$ |
| $+\infty$ | $0^+$ | $l \succ 0$ أو $+\infty$ |
| $-\infty$ | $0^+$ | $l \prec 0$ أو $-\infty$ |
| $-\infty$ | $0^-$ | $l \succ 0$ أو $+\infty$ |
| $+\infty$ | $0^-$ | $l \prec 0$ أو $-\infty$ |
| شكل غير محدد | 0 | 0 |
| شكل غير محدد | $+\infty$ | $+\infty$ |
| شكل غير محدد | $-\infty$ | $-\infty$ |
| شكل غير محدد | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\infty$ مع وضع إشارة $l$ | $l$ حيث $l \neq 0$ | $+\infty$ |
| $\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$ | $l$ حيث $l \neq 0$ | $-\infty$ |

## د- نهاية دالة حدودية – دالة جدرية

لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a) \qquad \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$ في حالة $Q(a) \neq 0$

إذا كانت $ax^n$ و $bx^m$ هما على التوالي حديتي $P(x)$ و $Q(x)$ الأكبر درجة فان

$$\lim_{x \to +\infty} ax^n = \lim_{x \to +\infty} P(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} ax^n = \lim_{x \to -\infty} P(x)$$

و $$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

## أمثلة

$$\lim_{x \to 2} x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2^3 - 2^2 + 6 - 1 = 9$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{-3x^2 - x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 3} = \frac{-3(-1)^2 - (-1) + 1}{3(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} -4x^5 + 3x^2 - 5x + 1 = \lim_{x \to +\infty} -4x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} -3x^7 + 7x^3 - x + 31 = \lim_{x \to -\infty} -3x^7 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5+3x^2-5x+1}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{3}x^3=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7+7x^3-x+31}{x^9+3x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7}{x^9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x^2}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5+3x^2-5x+1}{3x^5-x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5}{3x^5}=\frac{7}{3}$$

## تمرين

حدد النهايات

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-x}{x^2+x-6}\qquad \lim_{x\to+\infty}7x^5+3+\frac{1}{\sqrt{x}}\qquad \lim_{x\to-\infty}(1-x)^5\left(-2x^2+5\right)$$
$$\lim_{x\to2^-}\frac{1}{x-2}\qquad \lim_{x\to1^+}\frac{2x-5}{x-1}\qquad \lim_{x\to0^+}\frac{3}{-x^2+x}\qquad \lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}$$
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}\ ;\ \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$$
$$\lim_{x\to1^-}\frac{3x-2}{x^2-3x+2}\qquad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$$

## الجواب

نحدد النهايات

* لدينا $\lim_{x\to3}x^2-x=9-3=6$ و $\lim_{x\to3}x^2+x-6=9+3-6=6$ ومنه $\lim_{x\to3}\frac{x^2-x}{x^2+x-6}=\frac{6}{6}=1$

* $\lim_{x\to+\infty}7x^5+3=\lim_{x\to+\infty}7x^5=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}7x^5+3+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

* $\lim_{x\to-\infty}-2x^2+5=\lim_{x\to-\infty}-2x^2=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}(1-x)^5=\lim_{x\to-\infty}-x^5=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}(1-x)^5\left(-2x^2+5\right)=-\infty$

*إذا كان $x\prec2$ فان $x-2\prec0$ ومنه $\lim_{x\to2^-}x-2=0^-$ إذن $\lim_{x\to2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$

* نحدد $\lim_{x\to1^+}\frac{2x-5}{x-1}$

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | - | 0 | + | |

ومنه $\lim_{x\to1^+}x-1=0^+$ و لدينا $\lim_{x\to1^+}2x-5=-3$ إذن $\lim_{x\to1^+}\frac{2x-5}{x-1}=-\infty$

* نحدد $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}$

نحصل على الشكل الغير المحدد $(+\infty-\infty)$

$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$ وحيث $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-1=+\infty$ فان $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}=\infty$

* نحدد $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$ بتعويض $x$ نحصل على الشكل الغير المحدد $\frac{0}{0}$

$$\frac{x+1}{x^2-2x-3}=\frac{x+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{1}{x-3}\qquad \forall x\in\mathbb{R}-\{-1;3\}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x-3}=-\dfrac{1}{4}$

* نحدد $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$ بتعويض $x$ نحصل على الشكل الغير المحدد $\dfrac{0}{0}$

ومنه الحدوديتان $x^2+x-2$ و $2x^2+x-3$ تقبلان القسمة على $x-1$

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{2x+3}=\frac{3}{5}$$

* نحدد $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ و منه نحصل على الشكل الغير المحدد $(+\infty-\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ وحيث $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

فان $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=-\infty$

*نحدد $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x-2}{x^2-3x+2}$

لدينا $\lim\limits_{x\to 1}x^2-3x+2=0$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1}3x-2=1$

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-3x+2$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

ومنه $\lim\limits_{x\to 1^-}x^2-3x+2=0^-$ إذن $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x-2}{x^2-3x+2}=-\infty$

## 6 – نهايات الدوال اللاجدرية

### خاصية

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال من شكل $[a;+\infty[$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ و $l\geq 0$ فان $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ و $l\geq 0$ فان $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=+\infty$

**ملحوظة:**

الخاصية تبقى صحيحة اذا كان $x$ يؤول الى $+\infty$ أو الى $-\infty$ أو الى $a$ على اليمين أو $a$ على اليسار

أمثلة:

لنحسب $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{1-4x}$

لدينا $\lim\limits_{x\to -2}1-4x=9$ ومنه $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{1-4x}=\sqrt{9}=3$

لنحسب $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3x^2-5x+4}$

لدينا $\lim\limits_{x\to -\infty}3x^2=+\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty}3x^2-5x+4=$ ومنه $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3x^2-5x+4}=\infty$

لنحسب $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0^-}1-\dfrac{1}{x}=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=+\infty$

## 7- النهايات والترتيب

$f$ و $g$ و $h$ دوال عددية و $I = ]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[ - \{x_0\}$ ضمن حيز تعريف هذه الدوال

* إذا كان لكل $x$ من $I$ ، $|f(x) - l| \le u(x)$ و كان $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$ فان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

* إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ وكان $g \ge h \ge f$ على $I$ فان $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$

* إذا كان لكل $x$ من $I$ ، $f(x) \ge u(x)$ و كان $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$ فان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

* إذا كان لكل $x$ من $I$ ، $f(x) \le u(x)$ و كان $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty$ فان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

**ملاحظة**

الخاصيات السابقة تبقى صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند $x_0$ على اليمين أو عند $x_0$ على اليسار مع تعويض $I$ بالمجموعة المناسبة

**أمثلة**

* نحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sin x$

لدينا الدالة $x \to \sin^2 x$ لا تقبل نهاية

ونعلم أن $-1 \le \sin x \le 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ومنه $x - 1 \le x + \sin x \le x + 1$

و حيث $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ فان $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$

* نبين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} = 2$

لدينا $\left| \dfrac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} - 2 \right| = \left| \dfrac{\sin x - 2}{x^2 + 1} \right|$

$|\sin - 2| \le |\sin x| + |2|$ وحيث أن $|\sin x| \le 1$ فان $|\sin - 2| \le 3$

ومنه $\left| \dfrac{\sin x - 2}{x^2 + 1} \right| \le \dfrac{3}{x^2 + 1}$ أي $\left| \dfrac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} - 2 \right| \le \dfrac{3}{x^2 \quad 1}$

و حيث $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x^2 \quad 1} = 0$ فان $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + \sin x}{x^2 \quad 1} = 2$

## 8- نهايات مثلثة

### أ/ خاصية

لكل عدد حقيقي $a$

$\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin$ و $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos$

لكل عدد حقيقي $a$ حيث $a \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$

$\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan$

**أمثلة**

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 \quad 1$

$\lim\limits_{x \quad \pi} \tan x \quad \tan \pi \quad 0$

ب/ نقبل $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|$ $\quad \forall x \in \left] \dfrac{-\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2} \right[$

لنحدد $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

لدينا $|\sin x|\le|x|\le|\tan x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ومنه $\frac{1}{|\tan x|}\le\frac{1}{|x|}\le\frac{1}{|\sin x|}$ حيث $x\neq 0$

وبالتالي $\frac{|\sin x|}{|\sin x|}\le\frac{|\sin x|}{|x|}\le\frac{|\sin x|}{|\tan x|}$ أي أن $|\cos x|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le 1$

و حيث أن $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ و $x$ و $\sin x$ لهما نفس الإشارة بجوار 0 فان $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

* لنحدد $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

نضع $X=\frac{x}{2}$ ومنه $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{X\to 0}\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin X}{X}\right)^2=\frac{1}{2}$

* لنحدد $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

لدينا $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=1\times\frac{1}{1}=1$

**خاصية**

| |
|---|
| $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ و $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ |

**نتيجة**

| |
|---|
| $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}=1$ |

**تمرين**

حدد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{1+\sin x}$ ; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}$ ،

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

- $\underset{x\to a}{\ }f\ \ x\ =l$ تكافئ $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,\left|x-a\right|<\alpha\Rightarrow\left|f\ (x\ -l\right|<\varepsilon$
- $\lim\limits_{x\to a}f\ \ x\ =+\infty$ تكافئ $\forall A>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,\left|x-a\right|<\alpha\Rightarrow f\left(x\right)\geq A$
- $\lim\limits_{x\to a}f\ \ x\ =-\infty$ تكافئ $\forall B<0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,\left|x-a\right|<\alpha\Rightarrow f\left(x\right)\leq B$
- $\lim\limits_{x\to a^+}f\ \ x\ =l$ تكافئ $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,0<x-a<\alpha\Rightarrow\left|f\left(x\right)-l\right|<\varepsilon$
- $\lim\limits_{x\to a^-}f\ \ x\ =l$ تكافئ $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,-\alpha<x-a<0\Rightarrow\left|f\left(x\right)-l\right|<\varepsilon$
- $\lim\limits_{x\to a^+}f\ \ x\ =+\infty$ تكافئ $\forall A>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,0<x-a<\alpha\Rightarrow f\left(x\right)\geq A$
- $\lim\limits_{x\to a^-}f\ \ x\ =+\infty$ تكافئ $\forall A>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,-\alpha<x-a<0\Rightarrow f\left(x\right)\geq A$
- $\lim\limits_{x\to a^+}f\ \ x\ =-\infty$ تكافئ $\forall B<0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,0<x-a<\alpha\Rightarrow f\left(x\right)\leq B$
- $\lim\limits_{x\to a^-}f\ \ x\ =-\infty$ تكافئ $\forall B<0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,-\alpha<x-a<0\Rightarrow f\left(x\right)\leq B$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f\ \ x\ =l$ تكافئ $\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x\in D_f,\left(x\geq A\right)\Rightarrow\left|f\left(x\right)-l\right|<\varepsilon$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f\ \ x\ =l$ تكافئ $\forall\varepsilon>0,\exists B<0,\forall x\in D_f,\left(x\leq B\right)\Rightarrow\left|f\left(x\right)-l\right|<\varepsilon$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f\ \ x\ =+\infty$ تكافئ $\forall A>0,\exists B>0,\forall x\in D_f,x\geq B\Rightarrow f\left(x\right)\geq A$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f\ \ x\ =-\infty$ تكافئ $\forall A<0,\exists B>0,\forall x\in D_f,x\geq B\Rightarrow f\left(x\right)\leq A$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f\ \ x\ =+\infty$ تكافئ $\forall A>0,\exists B<0,\forall x\in D_f,x\leq B\Rightarrow f\left(x\right)\geq A$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f\ \ x\ =-\infty$ تكافئ $\forall A<0,\exists B<0,\forall x\in D_f,x\leq B\Rightarrow f\left(x\right)\leq A$

## نهاية لا منتهية لدالة عند أو عند

- دالة عددية معرفة على مجال $a$ حيث $a$
  إذا كان $f\left(x\right)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$

| | | | |
|---|---|---|---|
| • $\underset{x\to+\infty}{\ }x$ | • $\lim\limits_{x\to+\infty}x$ | • $\lim\limits_{x\to+\infty}x$ | • $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ |
| • $\underset{x\to-\infty}{\ }x$ | • $\lim\limits_{x\to-\infty}x$ | • $\lim\limits_{x\to-\infty}x$ | |

بنفس الطريقة يمكنك التعبير

- لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوجي} \\ -\infty & n \text{ فــردي} \end{cases}$

## نهاية منتهية لدالة عند

- لتكن دالة عددية معرفة على مجال حيث $a$ و ليكن $a$ و $l$ عددا حقيقيا.
  إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد $l$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ .
- لتكن دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty, b]$ حيث $b \in \mathbb{R}$ و ليكن $l'$ عددا حقيقيا.
  إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد $l'$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l'$ ..

| | | | |
|---|---|---|---|
| • $\lim\limits_{x} \frac{1}{} = 0$ | • $\lim\limits_{x} \frac{1}{} = 0$ | • $n \in \mathbb{N} \; ; \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ | • $n \in \mathbb{N} \; ; \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{n} = 0$ |

لتكن دالة عددية و عددا حقيقيا.
- إذا كانت تقبل نهاية $l$ في $+\infty$ ( أو في $-\infty$ ) فإن هذه النهاية وحيدة.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f \; x \; = l$ يكافئ $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - l) = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f \; x \; = l$ يكافئ $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - l) = 0$

## النهايات المنتهية و اللامنتهية لدالة في نقطة

لتكن دالة عددية و $a$ و $l$ عددين حقيقيين بحيث $f$ معرفة على مجال على الشكل $a - \alpha \; a + \alpha$ حيث $\alpha \in {}^{+}_{*}$ أو على مجموعة على الشكل $]a - \alpha, a + \alpha[ - \{a\}$
إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد $l$ عندما يؤول $x$ إلى العدد $a$ ، فإننا نكتب $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

لتكن دالة عددية و عددين حقيقيين.
إذا كانت تقبل نهاية ، فإن هذه النهاية وحيدة.

| | | | |
|---|---|---|---|
| • $\lim\limits_{x \to} x \quad 0$ | • $\lim\limits_{x \to 0} x \quad = 0$ | • $\lim\limits_{x \to 0} x \quad = 0$ | • $\lim\limits_{x \to} x^n = 0$ لكل $n$ من $^*$ |

لتكن دالة عددية و عددا حقيقيا .
إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ ، فإننا نكتب $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ .

## النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة في نقطة

لتكن دالة عددية و عددين حقيقيين.

- $f(x)$ يؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليمين فإننا نكتب $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$ أو $\lim_{x\to a^+} f(x)=l$
- $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ ( على التوالي إلى $-\infty$ ) عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليمين فإننا نكتب $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ( على التوالي $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty$ أو $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ )
- اليسار لدالة في نقطة.

- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty$
- $n$ $^*$; $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n}$

- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x}=-\infty$
- إذا كان زوجيا غير منعدم ،فإن :
  $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n}=+\infty$
- إذا كان فرديا غير منعدم ، فإن :
  $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n}=-\infty$

- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$
- $\sqrt{x}$ $\underset{x>0}{\to 0}$

لتكن دالة عددية .
$\lim_{x\ \ a}$ ( ) يكافئ $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$

## العمليات على النهايات

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| $-\infty$ | | | | | | lim |
| شكل غير محدد | | | | | | |

نعرف بنفس الطريقة النهاية

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| lim | | | | | | | | | |
| lim | | | | | | | | | 0 |
| | | | | | | | | | شكل غير محدد |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| $\frac{1}{}$ | $\frac{1}{}$ | | | | 0 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | 0 |
| lim— | — | | | | | | غير محدد | | | | $+\infty$ |

## نهاية دالة حدودية – نهاية دالة جذرية

- $P$ و $Q$ دالتين حدوديتين و $x_0$ عددا حقيقيا .
  - $\lim\limits_{x\to x} P\ \ x \quad P\ \ x_0$
  - $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P\ \ x}{Q\ \ x}=\frac{P(x_0)}{Q\ \ x_0}$ في حالة $Q(x_0)\neq 0$
- و إذا كانت $ax^n$ و $bx^m$ هما على التوالي حديتي $P$ و $Q$ الأكبر درجة ، فإن :
  - $\underset{x\to+\infty}{}P\ \ x\ = \underset{x\to+\infty}{}ax^n$
  - $\underset{x\to-\infty}{}P\ \ x\ = \underset{x\to-\infty}{}ax^n$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P\ \ x}{Q\ \ x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^n}{bx^m}$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P\ \ x}{Q\ \ x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{bx^m}$

## نهاية الدوال اللاجذرية

لتكن دالة عددية معرفة على مجال $a\ +\infty$ بحيث : $\forall x\in\ a\ +\infty \quad f\ \ x\ \geq$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ و $l\geq 0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

هذه الخاصية تبقى صالحة إذا كان $x$ يؤول إلى $-\infty$ أو إلى $a$ أو إلى $a$ على اليمين أو إلى $a$ على اليسار

- $\frac{\sin x}{\quad}$ $_{0}$
- $-$ $\frac{x}{\quad_{2}}$ $_{0}$
- $\frac{\tan x}{\quad}$ $_{0}$

- **لكل** $a$ **من** $\mathbb{R}^*$ : $\lim\limits_{x\quad 0}\frac{\sin\ ax}{\quad} = a$
- **لكل** $a$ **من** لدينا : $\sin a$ $\quad \lim\limits_{x\to a}\sin x$
- $\lim\limits_{x\to 0}\sin x \quad 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\tan x \quad 0$
- **لكل** $a$ **من** لدينا : $\cos a$ $\quad \lim\limits_{x\to a}\cos x$
- $\lim\limits_{x\to 0}\cos x \quad 1$
- **لكل )** $\frac{\quad}{2}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ( $\lim\limits_{x\to a}\tan x = \tan a$

## النهايات و الترتيب

**ليكن** $I$ **مجالا من النوع** $a$ $l$ **عددا حقيقيا و لتكن** $f$ **و** $u$ **و** $v$ **دوال عددية معرفة على المجال** $I$ **.**

**1) إذا كان :** $\begin{cases} (\forall x \in I); u(x) \le f(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$ **فإن :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

**2) إذا كان :** $\begin{cases} (\forall x \in I); u(x) \ge f(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$ **فإن :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

**3) إذا كان :** $\begin{cases} (\forall x \in I); |f(x) - l| \le u(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0 \end{cases}$ **فإن :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

**4) إذا كان :** $\begin{cases} (\forall x \in I); u(x) \le f(x) \le v(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l \end{cases}$ **فإن :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ **( مبرهنة الدرك )**

الخاصيات تبقى صالحة إذا كان $x$ يؤول إلى $-\infty$ أو إلى $a$ أو إلى $a$ على اليمين أو إلى $a$ على اليسار

# الاشتقاق و تطبيقاته

| القدرات المنتظرة | |
|---|---|
| . تقريب دالة بجوار نقطة بدالة تآلفية؛<br>. التعرف على أن العدد المشتق لدالة في $x_0$ هو المعامل الموجه لمماس منحناها في النقطة التي أفصولها $x_0$؛<br>. التعرف على المشتقة الأولى للدوال المرجعية<br>. التمكن من تقنيات حساب مشتقة دالة<br>. تحديد معادلة المماس لمنحنى دالة في نقطة وإنشاؤه؛<br>. تحديد رتابة دالة انطلاقا من دراسة إشارة مشتقتها؛<br>. تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني؛<br>. حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقيم القصوية ؛<br>. تطبيق الاشتقاق في حساب بعض النهايات | 1 ع رياضيات<br>الدرس 1 الدورة الثانية<br>12 ساعة<br><br>1 ع تجريبية<br>الدرس 3 الدورة الثانية<br>10 ساعات |

## 1- الاشتقاق في نقطة

### أ/نشاط

بينت تجربة الفيزياء هند السقوط الحر لجسم بدن سرعة بدئية أي $v_0 = 0$ في اللحظة $t = 0$ تكون حركته متغيرة بانتظام و محددة بالدالة الزمنية $d = f(t) = 5t^2$ حيث $t$ هي المدة بالثانية و $d = f(t)$ المسافة بالمتر

1- بين أن السرعة المتوسطة بين اللحظتين $t$ و $t+h$ حيث $h \neq 0$ و $t+h \succ 0$ هي $10t + 5h$

2- نضع $t = 0,5s$

أ/ أملئ الجدول التالي

| $h$ | -0,01 | -0,001 | -0,0001 | 0,0001 | 0,001 | 0,01 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t+h$ | | | | | | |
| السرعة المتوسطة بين $t$ و $t+h$ | | | | | | |

ب/ باستعمال الجدول تضنن نهاية السرعة المتوسطة عندما يؤول $h$ الى 0

ج/ أحسب $\lim_{h\to 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ ثم قارنها مع نتيجة ب

------------------------

العدد $\lim_{h\to 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ يسمى السرعة اللحظية للجسم عند اللحظة $t = 0,5s$

و يسمى أيضا العدد المشتق للدالة $f$ عي النقطة $t_0 = 0,5$

نكتب في هذه الحالة $f'(0,5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$

### ب- تعريف

لتكن $f$ دالة عددية معرفة في مجال مفتوح $I$ و $x_0$ عنصرا من $I$

نقول إن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ اذا وجد عدد حقيقي $l$ حيث $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l$ ونرمز لها.

العدد $l$ يسمى العدد المشتق لـ $f$ في $x_0$ ونرمز له ب $f'(x_0)$ .

نكتب $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

**ملاحظة:** $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

**مثال:** نعتبر $f(x)=x^2+2x$

بين أن $f$ قابلة للاشتقاق في 1 و حدد العدد المشتق في 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+3=4$$

إذن $f$ قابلة للاشتقاق في 1 و $f'(1)=4$

**ج) الدالة التألفية المماسة لدالة**

لتكن $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$

لدينا $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نضع $\varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$ ، $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$

$$\varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\Leftrightarrow f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)\quad / \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$$

أي أنه بجوار $x_0$ لدينا $f(x)\simeq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

الدالة $x\to f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التألفية المماسة لدالة $f$ في النقطة $x_0$

**تعريف**

لتكن $f$ دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه $x_0$

إذا كانت الدالة $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ فان الدالة التألفية المماسة لدالة $f$ في النقطة $x_0$

هي الدالة $g:x\to f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

**تمرين** نعتبر $f(x)=\sqrt{x}$

1) حدد الدالة التألفية المماسة لدالة $f$ في النقطة 1

2) استنتج قيمة مقربة لكل من $\sqrt{0,99}$ و $\sqrt{1,001}$

-------

الجواب

/1 لدينا $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

ومنه الدالة التألفية المماسة لدالة $f$ في النقطة 1 هي الدالة $g:x\to\frac{1}{2}(x-1)+1$

أي $g:x\to\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

/2لدينا $099\approx 1$ ومنه $\sqrt{0,99}=f(0,99)\simeq g(0,99)=0,5\times 099+0,5=....$

لدينا $1,001\approx 1$ ومنه $\sqrt{1,001}=f(1,001)\simeq g(1,001)=0,5\times 1,001+0,5=....$

**2 – الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار**

**أ- تعريف**

* لتكن $f$ دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين في $x_0$ إذا كانت للدالة $x\to\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية $l$ على اليمين في $x_0$ و نرمز لها بـ $f'_d(x_0)$ .

العدد $l$ يسمى العدد المشتق لـ $f$ على اليمين في $x_0$ نكتب $f'_d(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

* لتكن $f$ دالة معرفة على مجال من شكل $]x_0-\alpha;x_0]$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن $f$ قابلة للاشتقاق على اليسار في $x_0$ إذا كانت للدالة $x \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية $l$ على اليسار في $x_0$ نرمز لها ب $f_g'(x_0)$ .

العدد $l$ يسمى العدد المشتق ل $f$ على اليسار في $x_0$ نكتب $f'_g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ملاحظة

$$f'_g(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{و} \quad f'_d(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

**ب – خاصية**

تكون $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ إذا وفقط إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في $x_0$ والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

**تمرين** نعتبر $f(x)=x^2+|x|$ أدرس قابلية اشتقاق $f$ في 0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0^+}x+1=1$$

اذن $f$ قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $f_d'(0)=1$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}x-1=-1$$

اذن $f$ قابلة للاشتقاق على يسار 0 و $f_g'(0)=-1$

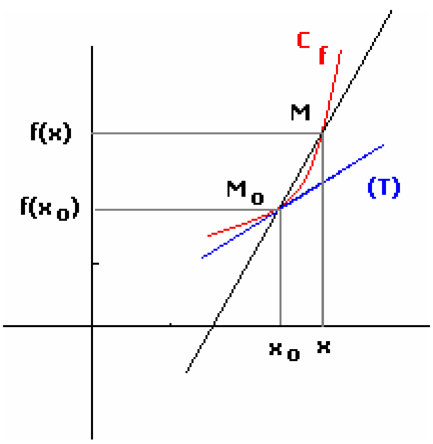
لدينا $f_d'(0)\neq f_g'(0)$ ومنه $f$ قابلة للاشتقاق في 0

## 4- التأويل الهندسي – معادلة المماس لمنحنى دالة

### أ- المماس

لتكن $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ و $C_f$ منحناها

نعتبر $M_0(x_0;f(x_0))$ و $M(x;f(x))$ نقطتين من $C_f$




المعامل الموجه للمستقيم $(MM_0)$ هو $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

نلاحظ عندما تقترب $M$ من $M_0$ ( أي $x$ تؤول إلى $x_0$ ) فان $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تؤول إلى $f'(x_0)$

و بالتالي المستقيم $(MM_0)$ يدور حول $M_0$ إلى أن ينطبق مع المستقيم $(T)$ ذا المعامل الموجه $f'(x_0)$.

المستقيم $(T)$ مماس للمنحنى $C_f$

معادلة $(T)$ هي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

**خاصية**

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه $x_0$ و $C_f$ منحناها

قابلية اشتقاق $f$ في $x_0$ تؤول هندسيا بوجود مماس لـ $C_f$ عند النقطة ذات الأفصول $x_0$

معادلته $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

**تمرين:** نعتبر $f(x)=x^3$

أدرس قابلية اشتقاق $f$ في 2 و حدد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ذات الأفصول2

الجواب

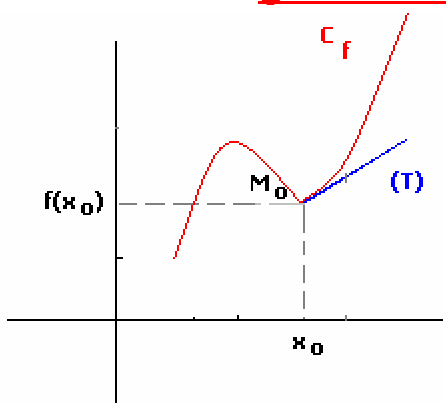
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=\lim_{x\to 2}x^2+2x+4=12$$

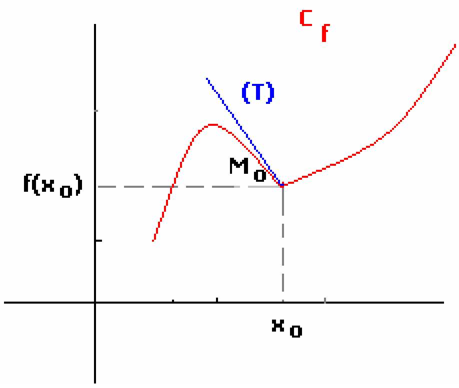
اذن $f$ قابلة للاشتقاق في 2 و $f'(2)=12$

ومنه معادلة المماس هي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ أي $y=12(x-2)+8$

$y=12x-16$

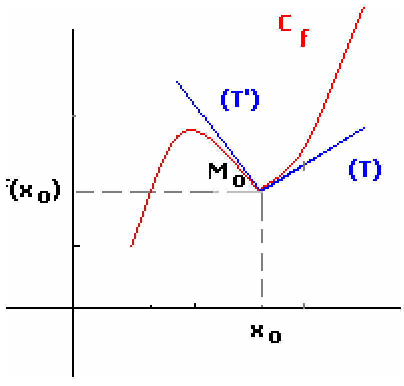
## ب- نصف المماس




$$\begin{cases}(T): y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\ x\geq x_0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(T): y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\ x\leq x_0\end{cases}$$




$M_0$ **نقطة مزواة**

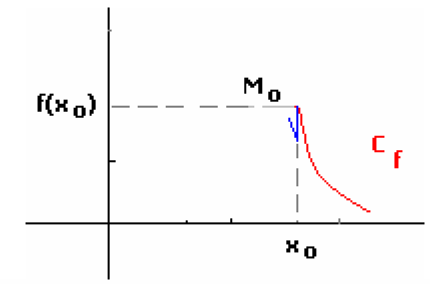
$$\begin{cases}(T): y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) & x\geq x_0\\ (T'): y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) & x\leq x_0\end{cases}$$

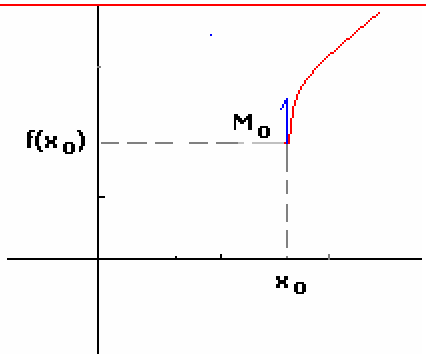
**خاصية**

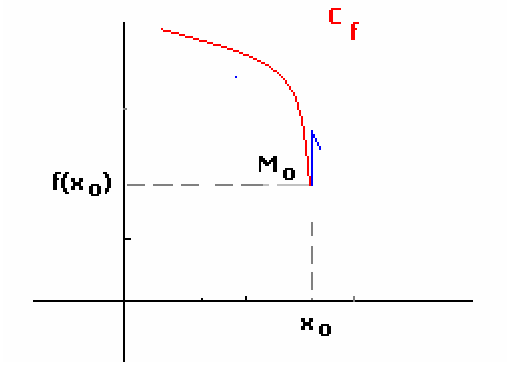
إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين في $x_0$ ( أو على اليسار في $x_0$ ) فان $C_f$ يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الافصول $x_0$ معامله الموجه $f_d'(x_0)$ ( أو $f_g'(x_0)$ )

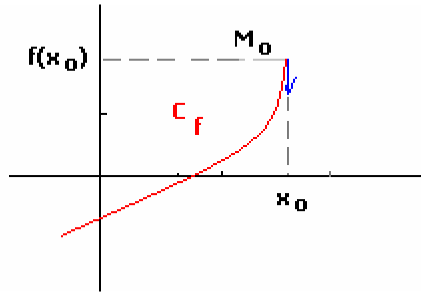
**خاصية**

إذا كانت نهاية $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $x \to$ هي $\pm\infty$ $f$ في $x_0$ ( على اليمين في $x_0$ أو على اليسار في $x_0$ ) فان $C_f$ يقبل مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول $x_0$ ( نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول $x_0$ )




**تمرين** نعتبر $f(x)=\left|x^2-1\right|$ و $g(x)=\sqrt{x}$

أدرس قابلية اشتقاق $f$ على يمين ويسار 1 و أول النتائج هندسيا

أدرس قابلية اشتقاق $g$ على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

الجواب

$$* \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left|x^2-1\right|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x+1=2$$

ومنه $f$ قابلة اشتقاق على يمين1 و $f_d'(1)=2$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left|x^2-1\right|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-x-1=-2$$

ومنه $f$ قابلة اشتقاق على يسار1 و $f_g'(1)=-2$

نلاحظ $f_d'(1)\neq f_g'(1)$ اذن $f$ غير قابلة للاشتقاق في 1

$(C_f)$ يقبل نصف مماس على يمين 1 معادلته $y=2(x-1)$ .

$(C_f)$ يقبل نصف مماس على يسار 1 معادلته $y=-2(x-1)$

$$* \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

ومنه $f$ غير قابلة للاشتقاق على يمين0 و $(C_g)$ يقبل نصف مماس عمودي على يمين 0

## 5- الدالـــة المشتقة

### أ- تعاريف

تعريف1

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نـقطة من I .

تعريف2

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ و على يمين $a$ و على يسار $b$ .

ملاحظة : بالمثل نعرف الاشتقاق على $]a;b]$ و على $[a;b[$

تعريف3

لتكن قابلة للاشتقاق على المجال I

الدالة التي تربط كل عنصر $x$ من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرمز لها بـ $f'$ .

**مثال :** نعتبر $f(x)=x^2$

ندرس قابلية اشتقاق $f$ و نحدد الدالة المشتقة

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} x+x_0 = 2x_0$ ومنه قابلة لاشتقاق في $x_0$ و $f'(x_0)=2x_0$

اذن $f$ قابلة للاشتقاق في $\mathbb{R}$ و $f'(x)=2x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

ملاحظة:

يكون للمنحنى الممثل لدالة $f$ قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I مماس عند كل نقطة من هذا المنحنى

### ب- المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية

لتكن $f$ قابلة للاشتقاق مجال I

إذا الدالة $f'$ قابلة للاشتقاق المجال I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية و نرمز لها بالرمز $f''$

إذا كانت $f''$ قابلة للاشتقاق المجال I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثالثة أو المشتقة من الرتبة 3 و نرمز لها بالرمز $f'''$ أو $f^{(3)}$

و هكذا ......................

نرمز للدالة المشتقة من الرتبة $n$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$ بالرمز $f^{(n)}$

**مثال :** نعتبر $f(x)=x^2$

رأينا أن $f'(x)=2x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ وحيث $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=2$ فان $f''(x)=2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

## 6- عمليات على الدوال المشتقة

*- لتكن $f$ و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

$f+g$ و $f\times g$ و $\lambda f$ و $f^n$ دوال قابلة للاشتقاق على المجال I

و اذا كانت $g$ لا تنعدم على I فان $\dfrac{1}{g}$ و $\dfrac{f}{g}$ قابلتان للاشتقاق على المجال I

$$\forall x\in I \quad (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

$$(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)'=\lambda f'(x)$$

$\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ $\forall x\in I$ بحيث $g$ لا تنعدم على I

*- لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

$\left(f^n\right)'(x)=n\left(f(x)\right)^{n-1}\times f'(x)$ $\forall x\in I$ ( نبين ذلك بالترجع)

نبرهن $(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$(f\times g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)$$

و حيث $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ و $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$ و $\lim_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$

فان $(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

## 7- الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية

* الدالة الثابتة: $f(x)=k$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ إذن $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f:x\to x$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1$ إذن $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f:x\to ax+b$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$ إذن $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=a$ $\forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f:x\to x^n$ $n\in\mathbb{N}^*$

$f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=nx^{n-1}(x)'=nx^{n-1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f:x\to\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{x\times x_0}=-\frac{1}{x_0^2}$ إذن $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

و $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

* الدالة $f:x\to\sqrt{x}$ لتكن $x_0\in\mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\ }_0}=-\frac{1}{2\sqrt{\ }_0}$$

إذن $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$

$f$ غير قابلة للاشتقاق في 0

* الدالة $f : x \to \sin x$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(2\cos(x_0+h)\right)\times 2\times \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x_0$$

إذن

$x \to \sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\sin'(x) = \cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to \cos x$

$x \to \cos x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\cos'(x) = -\sin x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to \tan x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\tan' x = \frac{(\sin x)'(\cos x)-(\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$$

إذن $\tan' x = 1+\tan^2 x \qquad \forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

$x \to \tan x$ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

و $\tan' x = 1+\tan^2 x \qquad \forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

**نتائج**

* الدالة الحدودية قابلة للاشتقاق في $\mathbb{R}$

* الدالة الجدرية قابلة للاشتقاق في كل نقطة من حيز تعريفها

أمثلة

نعتبر $f(x) = \dfrac{2x^3-3x}{x^2+x-2}$

$D_f = \mathbb{R}-\{1;-2\}$

$f$ الدالة الجدرية ومنه $f$ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}-\{1;-2\}$

و $f'(x) = \dfrac{(3x^2-3)(x^2+x-2)-(2x+1)(2x^3-3x)}{(x^2+x-2)^2} = \ldots. \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\{1;-2\}$

## 8- مشتقة $f(ax+b)$ - مشتقة $\sqrt{f}$

**مبرهنة**

ليكن المجال $J$ صورة المجال $I$ بالدالة التألفية $x \to ax+b$

إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق على $J$ فان $g : x \to f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على $I$ و

$g'(x) = af'(ax+b) \qquad \forall x \in I$

مثال: نعتبر $f(x) = \sin\left(5x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 5\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{3}\right) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

**خاصية**

لتكن $f$ دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I

الدالة $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على I و $\forall x \in I \quad \left(\sqrt{f}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

مثال: نعتبر $f(x) = \sqrt{-x^2 + x}$

$D_f = [0;1]$

$x \to -x^2 + x$ دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال $]0;1[$

إذن $f$ قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $\forall x \in ]0;1[ \quad f'(x) = \dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}}$

## جدول مشتقات بعض الدوال

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|
| $a$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $x^n \quad n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n \quad n \in \mathbb{Z}^{*-}$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan x$ | $1 + \tan^2 x$ | $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ |
| $\cos(ax+b)$ | $-a\sin(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(ax+b)$ | $a\cos(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ |

## تمارين

1- أدرس اشتقاق $f$ و حدد الدالة المشتقة في الحالات التالية:

* $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4$ * $f(x) = \dfrac{5}{x^2}$ * $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x-2}$ * $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2 -}$

* $f(x) = \left(x^2 + x\right)^5$ * $f(x) = (\cos x)^5$ * $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x - \sin}$

* $\begin{cases} f(x) = x^2 \quad x \quad x \quad 0 \\ f(x) \quad x^3 \quad x^2 \quad x \succ 0 \end{cases}$ * $f(x) = x^2 + x|x|$

2- نعتبر $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

أ- بين أن منحنى $f$ يقبل مماسين موازيين للمستقيم الذي معادلته $y = -3x$

ب- أكتب معادلتي هذين المماسين.

## 9- تطبيقات الدالة المشتقة

## a- قابلية الاشتقاق و المطراف

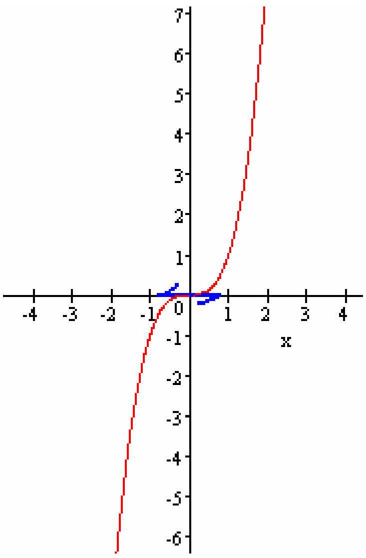
لتكن $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح $I$ و $x_0 \in I$
نعتبر $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ و تقبل مطرافا في $x_0$
لنفترض أن $f$ تقبل قيمة قصوى نسبية عند $x_0$
ومنه يوجد مجال مفتوح $J$ مركزه $x_0$ ضمن $I$ حيث $\forall x \in J \quad f(x) \leq f(x_0)$
$f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ ومنه $f'(x_0) = f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$
أي $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
و حيث $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in J$ فان $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x \geq x_0$ و $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \leq x_0$
ومنه $f_g'(x_0) \geq 0 \quad ; \quad f_d'(x_0) \leq 0$ أي أن $f'(x_0) \geq 0 \quad ; \quad f'(x_0) \leq 0$ اذن $f'(x_0) = 0$
( إذا كانت $f$ تقبل قيمة دنيا نسبية عند $x_0$ نتبع نفس الخطوات للحصول على نفس النتائج)

**مبرهنة**

لـتكن $f$ دالة معرفة على مجال فتوح I و $x_0 \in I$
اذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0$ و تقبل مطرافا في النقطة $x_0$ فان $f'(x_0) = 0$

**ملاحظة:**

المبرهنة لا تقبل المبرهنة العكسية
مثال $f(x) = x^3 \quad ; \quad x_0 = 0$
$f$ قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و $f'(0) = 0$
و مع ذلك $f$ لا تقبل مطرافا عند 0




## b- الاشتقاق ورتابة دالة

**مبرهنة**

لـتكن $f$ قابلة للاشتـــــقاق على مجال I
تكون $f$ تزايدية (قطعا) على I إذا وفقط اذا كانت الدالة المشتقة $f'$ موجبة علىI
أي $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ ($f'$ موجبة قطعا على I أي $f'(x) \succ 0 \quad \forall x \in I$ )
تكون $f$ تناقصية (قطعا) على I اذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة $f'$ سالبة علىI
أي $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ ($f'$ سالبة قطعا على I أي $f'(x) \prec 0 \quad \forall x \in I$)
تكون $f$ ثابتة على I إذا كانت الدالة المشتقة $f'$ منعدمة علىI أي $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

**مثال**

نعتبر $f(x) = x^3 - 6x + 1$
أدرس تغيرات $f$ و أعط جدول تغيرا $f$ في جدول التغيرات يجب تحديد النهايات)
حدد مطاريف $f$ ان وجدت

---------

الجواب
* مجموعة تعريف $D_f = \mathbb{R}$
* $f(x) = x^3 - 6x + 1$ ومنه $f'(x) = (x^3)' - (6x)' + (1)' = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
اشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2 - 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

ومنه $f'$ موجبة على كل $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ و $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$ و سالبة على $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

ومنه $f$ تزايدية على كل $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ و $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$ و تناقصية على $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $10\sqrt{2}+1$ | $\searrow$ | $-4\sqrt{2}+1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

من خلا جدول التغيرات نستنتج أن $f$ تقبل قيمة قصوى عند $-\sqrt{2}$ و دنيا عند $\sqrt{2}$

**ملاحظة** لتكن $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$

$f$ تقبل مطرافا في $x_0$ إذا و فقط إذا كانت $f'$ تنعدم في $x_0$ و تتغير إشارتها في مجال مفتوح يحتوي على $x_0$

## 10- المعادلة التفاضلية $y''+\omega^2 y=0$

تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة وتحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية

**تعريف**

ليكن $\omega$ عدد ا حقيقيا غير منعدم

المعادلة $y''+\omega^2 y=0$ تسمى معادلة تفاضلية.

كل دالة $f$ قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و تحقق $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة $y''+\omega^2 y=0$

أمثلة $y''+4y=0$ و $y''+\sqrt{2}y=0$ و $y''+\frac{3}{2}y=0$ معادلات تفاضلية

**خاصية**

ليكن $\omega$ عدد ا حقيقيا غير منعدم

الحل العام للمعادلة $y''+\omega^2 y=0$ هو مجموعة الدوال $y$ المعرفة كما يلي $x\to\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

**ملاحظة**

حل المعادلة $y''+\omega^2 y=0$ يرجع إلى تحديد الحل العام لهذه المعادلة

**مثال**

حل المعادلة $y''+4y=0$

لدينا $\omega^2=4$ ومنه $\omega=2$ يمكن أخذ $\omega=-2$ هذا لن يغير مجموعة الحلول

الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال $y:x\to\alpha\cos 2x+\beta\sin 2x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

**معادلة تفاضلية خاصة**

حل المعادلة $y''=0$

إذا كان $y''=0$ فان $y'$ دالة ثابتة ومنه الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال $y:x\to ax+b$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

# شتقاق

### – تأويلات هندسية

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ | $\leftrightarrow$ | $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in$ <br> $l = f'(a)$ | $\leftrightarrow$ | $(C$ يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ <br> معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : <br> ( |
| $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين | $\leftrightarrow$ | $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad l$ <br> $l = f_d'(a)$ | $\leftrightarrow$ | ) يقبل مماسا في النقطة <br> معامله الموجه $l = f_d'(a)$ و معادلته : <br> $y = f_d'(a).(x-a)+f(a)$ |
| $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار | $\leftrightarrow$ | $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in$ <br> $l = f_g'(a)$ | $\leftrightarrow$ | $(C$ يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ <br> معامله الموجه $l = f_g'(a)$ و معادلته : <br> $y = f_g'(a).(x-a)+f(a)$ |
| $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ | $\leftrightarrow$ | ✓ $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين <br> ✓ $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار <br> ✓ $f_d'(a) = f_g'(a) = f'(a)$ | $\leftrightarrow$ | $(C$ يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ <br> معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : <br> ( |

**إذاكانت $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين و $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار و $f_d(a) \neq f_g(a)$ فإن $f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ . في هذه الحالة $(C_f)$ يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a, f(a))$ معاملاهما الموجهان $f_d'(a)$ و $f_g'(a)$ و النقطة $A(a, f(a))$ تسمى نقطة مزواة**

- **إذا كانت $f'(a) = 0$ فإن $(C_f)$ يقبل مماس أفقي في $A(a, f(a))$**

| | |
|---|---|
| $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow$ $f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين <br> $(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a, f(a))$ | $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow$ $f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار <br> $(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a, f(a))$ |

| | |
|---|---|
| $a$ في $f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ $\Leftarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x-f\ a}{x\ \ a}$ على اليمين<br>$(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$ | $a$ في $f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ $\Leftarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x-f\ a}{x\ \ a}$ على اليسار<br>$(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$ |

**لتكن دالة عددية معرفة على مجال مفتوح** $I$
**نقول إن** $f$ **قابلة للإشتقاق على المجال** $I$ **، إذا كانت** $f$ **قابلة للإشتقاق في كل نقطة من** $I$ **.**

**لتكن** $f$ **دالة عددية معرفة على مجال** $a\ b$ **.**
**نقول إن** $f$ **قابلة للإشتقاق على المجال** $[a,b]$ **، إذا كانت** $f$ **قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح** $]a,b[$ **و قابلة للإشتقاق على اليمين في** $a$ **و قابلة للإشتقاق على اليسار في** $b$**.**

**لتكن دالة قابلة للإشتقاق على مجال** $I$
**الدالة المشتقة للدالة** $f$ **هي الدالة التي نرمز بالرمز** $f'$ و المعرفة كما يلي :

$$\begin{array}{llll} f': & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

| الدالة | الدالة المشتقة |
|---|---|
| $f$ | $f\ '$ |
| $f\quad g$ | $f\ '\quad g\ '$ |
| $f\quad g$ | $f\ '\quad g\quad f\quad g\ '$ |
| $\frac{1}{g}$ | $-\frac{g\ '}{g^2}$ |
| $\frac{f}{g}$ | $\frac{f\ 'g\quad fg\ '}{g^2}$ |
| $g\circ f$ | $f\ '\times g\ '\circ f$ |
| $\sqrt{f}$ | $\frac{f\ '}{2\sqrt{f}}$ |
| $n$ | $1$ |

| المجال | الدالة المشتقة | الدالة |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto 0$ | $x \mapsto k$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto nx^{n-1}$ | $x \quad x^{n} \quad n \in \quad ^{*}$ |
| $I = \quad -\infty$ أو $I = ] \quad +\infty$ | $x \mapsto nx^{n-1}$ | $x \mapsto x^{n} \quad n \in \mathbb{Z}^{*} \setminus \{-$ |
| $I = ] \quad +\infty$ | $x \mapsto rx^{r-1}$ | $x \mapsto x^{r} \quad r \in \mathbb{Q}^{*} \setminus \{-$ |
| $I = ] \quad +\infty$ | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $x \mapsto \sqrt{x}$ |
| $I = \quad -\infty$ أو $I = ] \quad +\infty$ | $x \quad \frac{1}{\quad 2}$ | $x \quad \frac{1}{\quad}$ |
| $\mathbb{R}$ | $\cos$ | $x \mapsto \sin x$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \quad \sin x$ | $\cos$ |
| $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ | $x \mapsto 1 + \tan^{2} x = \frac{1}{\cos^{2} x}$ | $\tan$ |

- 
- كل دالة ﺟ

- إذا كانت $f \quad x \quad \geq$ $\forall x \in I$ فإن $f$ تزايدية على $I$
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ فإن $f$ تناقصية على $I$
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$ فإن $f$ تزايدية قطعا على $I$
- ✓ إذا كانت فإن $f$ تناقصية قطعا على $I$

- إذا كانت $\forall x \in I \quad f \quad x \quad \geq$ و كانت $f'$ تنعدم في عدد منته من النقط على $I$ فإن $f$ تزايدية قطعا على $I$
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ و كانت $f'$ تنعدم في عدد منته من النقط على $I$ فإن $f$ تناقصية قطعا على $I$

## الدالة المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية

لتكن دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$
إذا كانت الدالة المشتقة $f'$ قابلة للإشتقاق على المجال $I$ فإن دالتها المشتقة على $I$ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة $f$ ، ونرمز لها بالرمز $f''$ .
إذا كانت $f''$ قابلة للإشتقاق على المجال $I$ فإن دالتها المشتقة على $I$ تسمى الدالة المشتقة الثالثة ( أو الدالة المشتقة من الرتبة 3 )
، و يرمز لها ب أو $^{(3)}$

ذرية قابلة للاشتقاق على

$y'' + \omega \ \ y = 0$

ليكن      عددا حقيقيا غير منعدم.

- المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ ذات المجهول $y$ حيث $y''$ مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية.
- كل دالة $f$ قابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و تحقق المتساوية $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$ .

ليكن      عددا حقيقيا غير منعدم.

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$ هو مجموعة الدوال $y$ المعرفة كما يلي : $y : x \mapsto \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ حيث

$\alpha \in$      $\beta \in$

**حالة خاصة :**

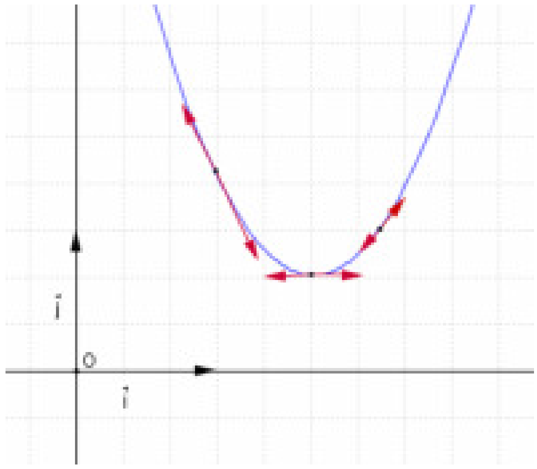
$\omega = 0$ : حل المعادلة التفاضلية $y'' = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $y : x \mapsto ax + b$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$

# التمثيل المبياني لدالة

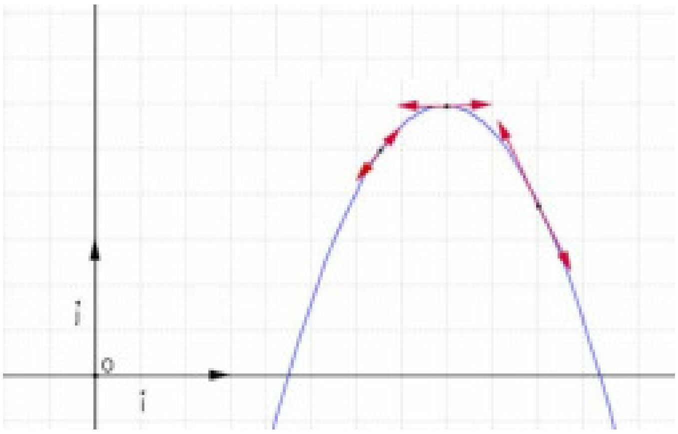
## 1- تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

### 1-1 تعـريف

لـتكن $f$ قابـلة للاشـتــــقاق على مجال I
نقول إن المنحنى $(C_f)$ محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماسـاته
نقول إن المنحنى $(C_f)$ مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماسـاته



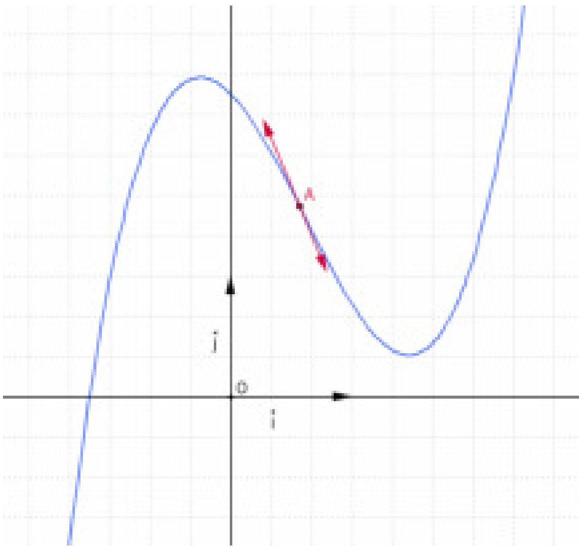
محدب



مقعر

### 2-1 تعـــريف

لتكن f دالة عددية قابلة للاشـتـــقاق على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.
نقول ان النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$ اذا تغير تقعر المنحنى $(C_f)$ عند $A$



### 3-1 خـــاصات

$f$ دالة قابلة الاشـتـــــقاق مرتين على مجال I
* إذا كانت " $f$ موجبة علىI فان $(C_f)$ يكون محدبا على I
* إذا كانت " $f$ سـالبة علىI فان $(C_f)$ يكون مقعرا على I
* اذا كانت " $f$ تـنعدم في $x_0$ من الـمجال I وكان يـوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث إشـارة " $f$ على $[x_0,x_0+\alpha[$ مخالـفة لإشارة " $f$ على$]x_0-\alpha,x_0]$ فان $M_0(x_0;f(x_0))$ نـقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$

ملاحظـــــــة قد لا تكون الدالة $f$ قابلة للاشتـقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

تمرين $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ و $g(x)=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$

1- أدرس تقعر $C_f$ و استنتج أن النقطة $A$ ذات الأفصول 1 نقطة انعطاف للمنحنى $C_f$

2 - أدرس تقعر $C_g$ و حدد نقط انعطاف المنحنى $C_g$

## 2- الفروع اللانهـــائية

### 1-2 تعريف

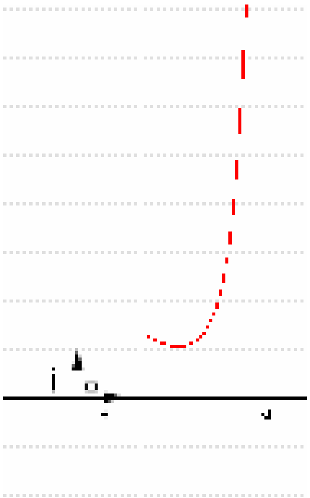
إذا آلت إحدى إحداثــيتي نقـطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهائيا.

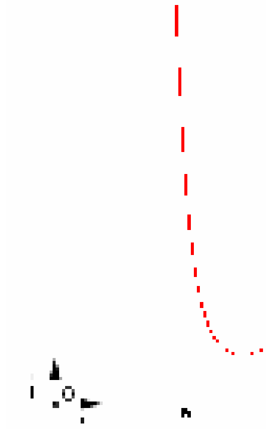
## 2-2 مستقيم مقارب لمنحنى

### أ- المقارب الموازي لمحور الأراتيب

تعريف

إذا كان $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب لـ $C_f$





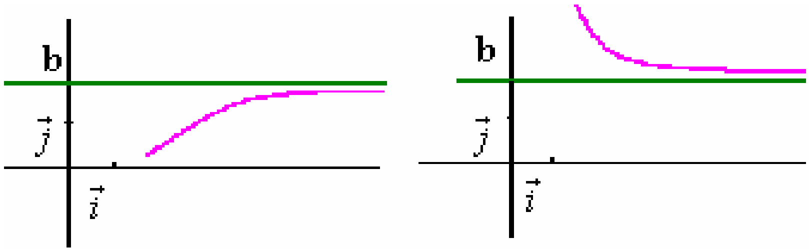
مثال $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

لدينا $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ و منه المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى

### ب- المقارب الموازي لمحور الأفاصيل

تعريف

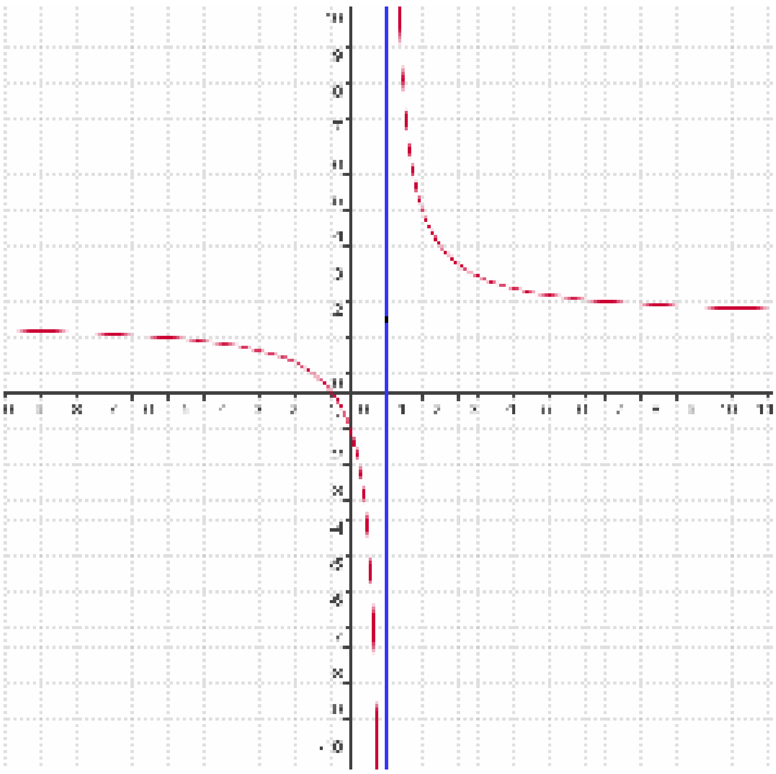
إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ فان المستقيم ذا المعادلة $y = b$ مقارب لـ $C_f$.




مثال $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

و منه المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى



## ج- المقارب المائل

تعريف

يكون المستقيم الذي معادلته y =ax + b مقارب للمنحنى $C_f$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

أو $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

خا صية

يكون المستقيم الذي معادلته y =ax + b مقارب للمنحنى $C_f$ إذا وفقط إذا كانت توجد دالة $h$ حيث يكون $f(x)=ax+b+h(x)$ و $(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0)$

مثال

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$$

لدينا $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x-1}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x-1}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى( بجوار $+\infty$)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x-1}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى( بجوار $-\infty$)

في كثير من الأحيان يصعب كتابة على شكل $f(x)=ax+b+h(x)$ حيث $\lim\limits_{x\to\pm\infty}h(x)=0$

تقنية تحديد مقارب مائل

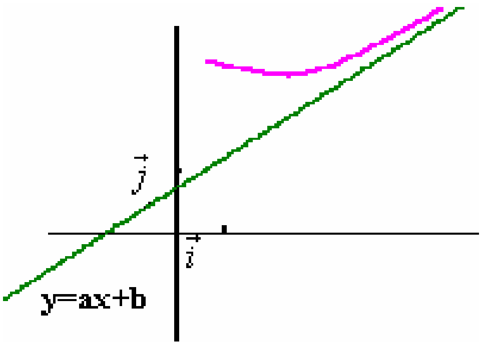
لنفترض أن $f(x)=ax+b+h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$

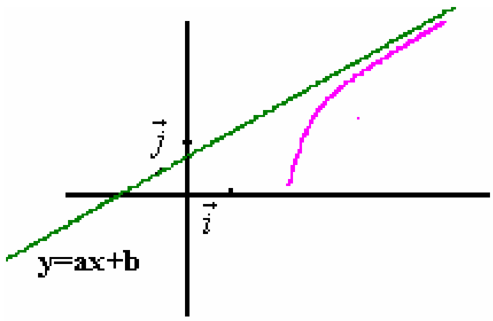
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x}h(x)\right)=a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}(b+h(x))=b$$

عكسيا إذا كان $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a \ ; \ \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b\right)$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

يكون المستقيم ذو المعادلة y = ax + b مقارب لمنحنى $C_f$ إذا وفقط إذا كان

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \ ; \ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b\right) \quad \text{أو} \quad \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a \ ; \ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b\right)$$




<u>ملاحظة</u> دراسة إشارة ( f (x) – (ax + b) ) تمكننا من معرفة وضع المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمقارب المائل.

مثال

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x-2}$$

حدد المقارب المائل بجوار $+\infty$ ثم بجوار $-\infty$

## 2- 3- الاتجاهات المقاربة

تعاريف

أ – إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب.

ب - إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ نقول إن $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الافاصيل

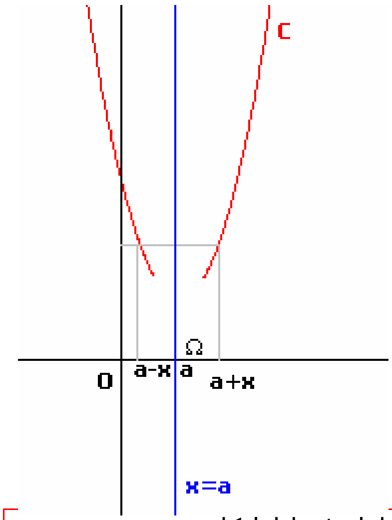
ج - إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ نقول إن $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذا المعادلة y= ax

بصفة عامة

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ نقول إن $(C_f)$ يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب.

## 3 - مركز تماثل – محور تماثل

### 3- 1 محور تماثل




اذا كان $(C_f)$ يقبل المستقيم الذي معادلته $x=a$ كمحور تماثل

فهذا يعني أن معادلة $(C_f)$ في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\Omega(a;0)$

هي على شكل $Y=f(a+X)=\varphi(X)$ حيث $\varphi$ دالة زوجية و $\begin{cases}X=x-a\\Y=y\end{cases}$

أي أن $\varphi(-X)=\varphi(X)\qquad \forall X\in D_\varphi$

أي $f(a-X)=f(a+X)\qquad \forall X\in D_\varphi$

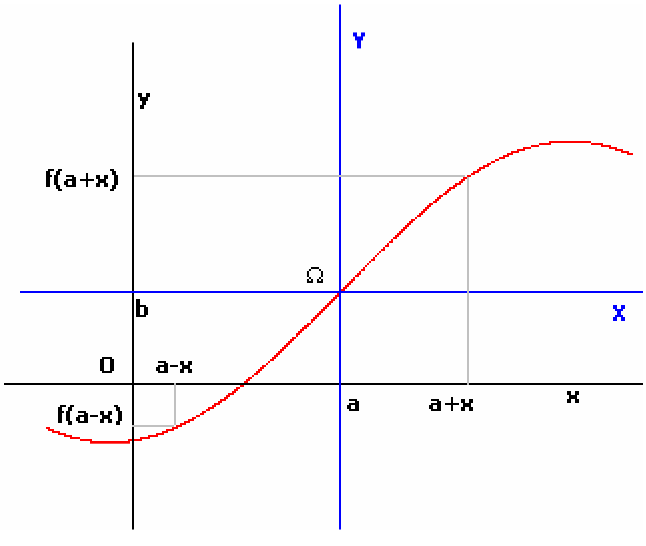
بما أن $X=x-a$ فان $f(2a-x)=f(x)\qquad \forall x\in D_f$

خاصية

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته x = a محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان

$$\forall x\in D_f \qquad (2a-x)\in D_f \quad ; \quad f(2a-x)=f(x)$$

### 3-2 مركز تماثل




اذا كان $(C_f)$ يقبل النقطة $\Omega(a;b)$ كمركز تماثل

فهذا يعني أن معادلة $(C_f)$ في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$

هي على شكل $Y+b=f(a+X)$

أي $Y=f(a+X)-b=\varphi(X)$

حيث $\varphi$ دالة فردية و $\begin{cases}X=x-a\\Y=y-b\end{cases}$

أي أن $\varphi(-X)=-\varphi(X)\qquad \forall X\in D_\varphi$

أي $f(a\quad X)\quad b\qquad f(a\quad X)\quad b\qquad \forall X\quad D_\varphi$

أي $f(a-X)=2b-f(a+X\qquad \forall X\in D_\varphi$

بما أن $X=x-a$ فان $(2\quad -\quad)=2\quad -\quad(\quad)\qquad \forall x\in\quad {}_f$

خاصية

في معلم ما,تكون النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل لدالة $f$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall x\in\quad {}_f \qquad (2\quad -\quad)\in\quad {}_f \quad ; \quad (2\quad -\quad)=2\quad -\quad(\quad)$$

تمرين

1) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ بين أن المستقيم $(D): x=1$ محور تماثل للمنحنى $(C_f)$

2) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-1}$ بين أن النقطة $\Omega(1;2)$ مركز تماثل للمنحنى $(C_f)$

## 4- الدالة الدورية

### 1-4 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث

$$\forall x \in D_f \qquad x+T \in D_f \; ; \quad x-T \in D_f \qquad f(x+T)=f(x)$$

العدد T يسمى دور الدالة f. أصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالة f

أمثلة

* الدالتان $x \to \cos x$ و $x \to \sin x$ دوريتان و دورهما $2\pi$
* الدالة $x \to \tan x$ دورية دورها $\pi$
* الدالتان $x \to \cos ax$ و $x \to \sin ax$ (حيث $a \neq 0$) دوريتان و دورهما $\dfrac{2\pi}{|a|}$
* الدالة $x \to \tan ax$ ( حيث $a \neq 0$) دورية دورها $\dfrac{\pi}{|a|}$

تمرين

حدد دورا للدوال $x \to \cos x - \sin x$ و $x \to 3-\cos\frac{1}{4}x$ و $x \to \tan 3x$ و $x \to \cos^2 x$

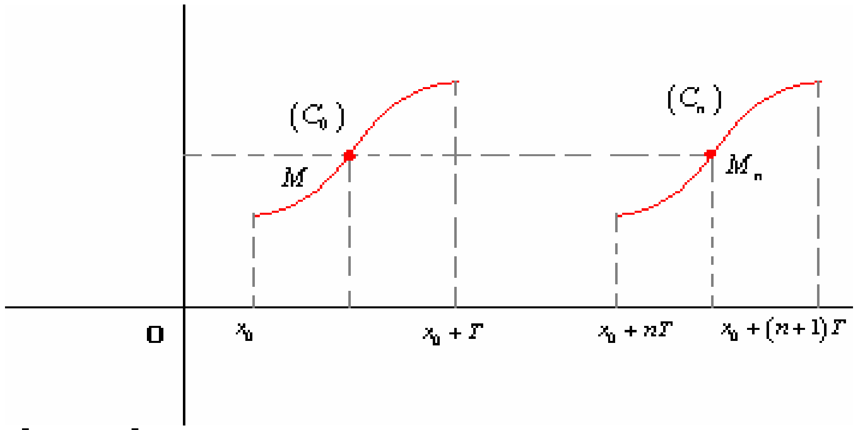
### 4- 2 خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فان $\qquad f(x+nT)=f(x) \qquad \forall x \in D_f, \forall n \in \mathbb{Z}$

( نبين الخاصية بالاستدلال بالترجع )

### 3-4 التمثيل المبياني لدالة دورية

لتكن $f$ دورية دورها $T$ و $(C_f)$ منحناها في مستوى منسوب ال معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$




منحنى الـدالة f على $D_f \cap [x_0+nT; x_0+(n+1)T[$ هـو صورة منحنى الدالة على $D_f \cap [x_0, x_0+T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT\cdot\vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسـبي.

ملاحظة:

لإنشاء منحنى دالة دورية يكفي إنشائه جزئه على مجال من نوع $I_0 = D_f \cap [x_0, x_0+T[$

استنتاج المنحنى باستعمال الإزاحة $t_{Tn\vec{i}}$

**أمثلة**

* دالة $x \to \cos x$ دورية ودورها $2\pi$ إذن يكفي دراستها على $[-\pi;\pi]$

و حيث أن $x \to \cos x$ زوجية فنقتصر دراستها على $[0;\pi]$

$$\forall x \in [0;\pi] \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

جدول التغيرات

| $x$ | 0 | $\pi$ |
|---|---|---|
| $\cos x$ | 1 ↘ | -1 |

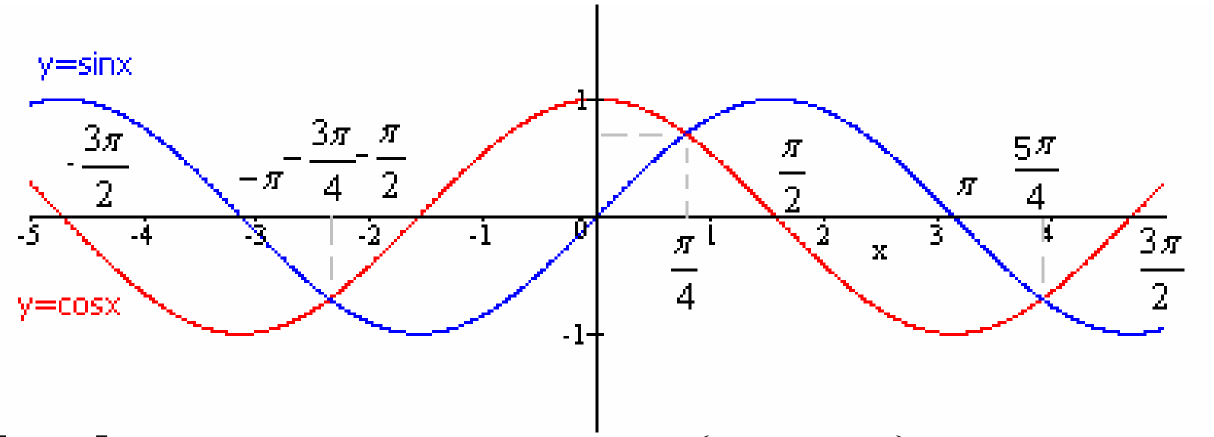
دالة $x \to \sin x$ دورية ودورها $2\pi$ إذن يكفي دراستها على $\left]-\pi;\pi\right]$

و حيث أن $x \to \sin x$ فردية فنقتصر دراستها على $\left[0;\pi\right]$

$$\forall x \in \left[0;\pi\right] \qquad (\sin x)' = \cos x$$

جدول التغيرات

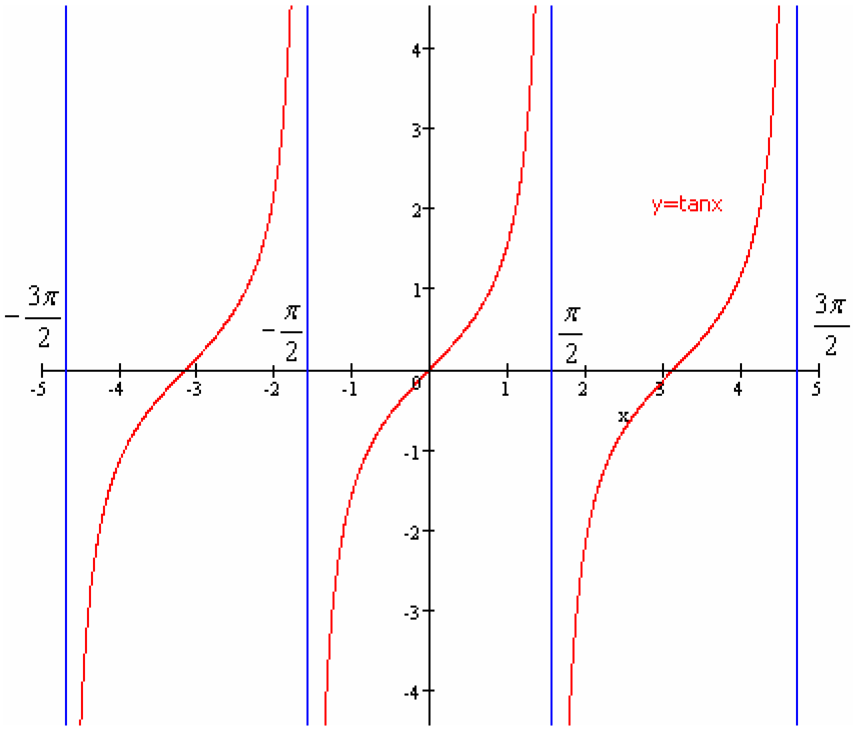
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ ↗ | $1$ | ↘ $0$ |




** دالة $x \to \tan x$ حيز تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ و دورية ودورها $\pi$ إذن يكفي دراستها على $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

و حيث أن $x \to \tan x$ فردية زوجية فنقتصر دراستها على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[ \qquad (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$




جدول التغيرات

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $\tan x$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

تصميم دراسة دالة

لدراسة دالة $f$ في غالب الأحيان نتبع الخطوات التالية

- تحديد مجموعة التعريف ثم تحديد مجموعة الدراسة (خاصة إذا كانت $f$ زوجية أو فردية أو دورية)
- دراسة الاتصال و الاشتقاق و تحديد الدالة الاشتقاق و دراسة إشارتها
- وضع جدول التغيرات
- دراسة الفروع الانهائية
- دراسة التقعر ان كان ذلك ضروريا و تحديد نقط انعطاف إن وجدت
- إنشاء المنحنى

تمرين

أدرس ومثل مبيانيا الدالة $f$ في الحالات التالية

$$a): f(x)=x-3+\frac{1}{x-2} \qquad b): f(x)=\frac{2|x|}{x^2+1} \qquad c): f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$$

## تمارين و حلولها

### تمرين1

نعتبر $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ: $f(x)=x-1+\frac{1}{x-2}$

ليكن $(C_f)$ منحنى الدالة $f$ في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ) حدد $D_f$

ب) حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ج) حدد $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ و أول النتيجتين هندسيا

2- أ) بين أن $\forall x\in D_f \quad f'(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

ب) أدرس تغيرات $f$ و أعط جدول تغيراتها

3- حدد معادلة المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الأفصول 0

4- بين أن النقطة $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى $(C_f)$

5- بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

6- أنشئ $(C_f)$

الجواب

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x-2}$$

أ) نحدد $D_f$

$$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

ب) نحدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-1+\frac{1}{x-2}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-1+\frac{1}{x-2}=-\infty$$

ج) حدد $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ و أول النتيجتين هندسيا

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+} x-1+\frac{1}{x-2}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-} x-1+\frac{1}{x-2}=-\infty$$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى $\left(C_f\right)$

2- أ) نبين أن $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \quad \forall x\in D_f$

$f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-2} \quad \forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$

$f$ دالة قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}-\{2\}$ (لأن $f$ دالة جذرية)

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\} \qquad f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

ب) ندرس تغيرات $f$ و نعطي جدول تغيراتها

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-3)(x-1)$

| $x$ | $-\infty$    1    2    3    $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | +   0   -   ‖   -   0   + |
| $f$ | $-\infty$ ↗ -1 ↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘ 3 ↗ $+\infty$ |

3- نحدد معادلة المماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الأفصول 0

معادلة المماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الأفصول 0 هي $y=f'(0)x+f(0)$

أي هي $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{2}$

4- نبين أن النقطة $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى $\left(C_f\right)$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\} \qquad 4-x\in\mathbb{R}-\{2\}$

و $f(4-x)=3-x+\dfrac{1}{2-x} \quad ; \quad 2-f(x)=2-x+1-\dfrac{1}{x-2}=3-x+\dfrac{1}{2-x}$

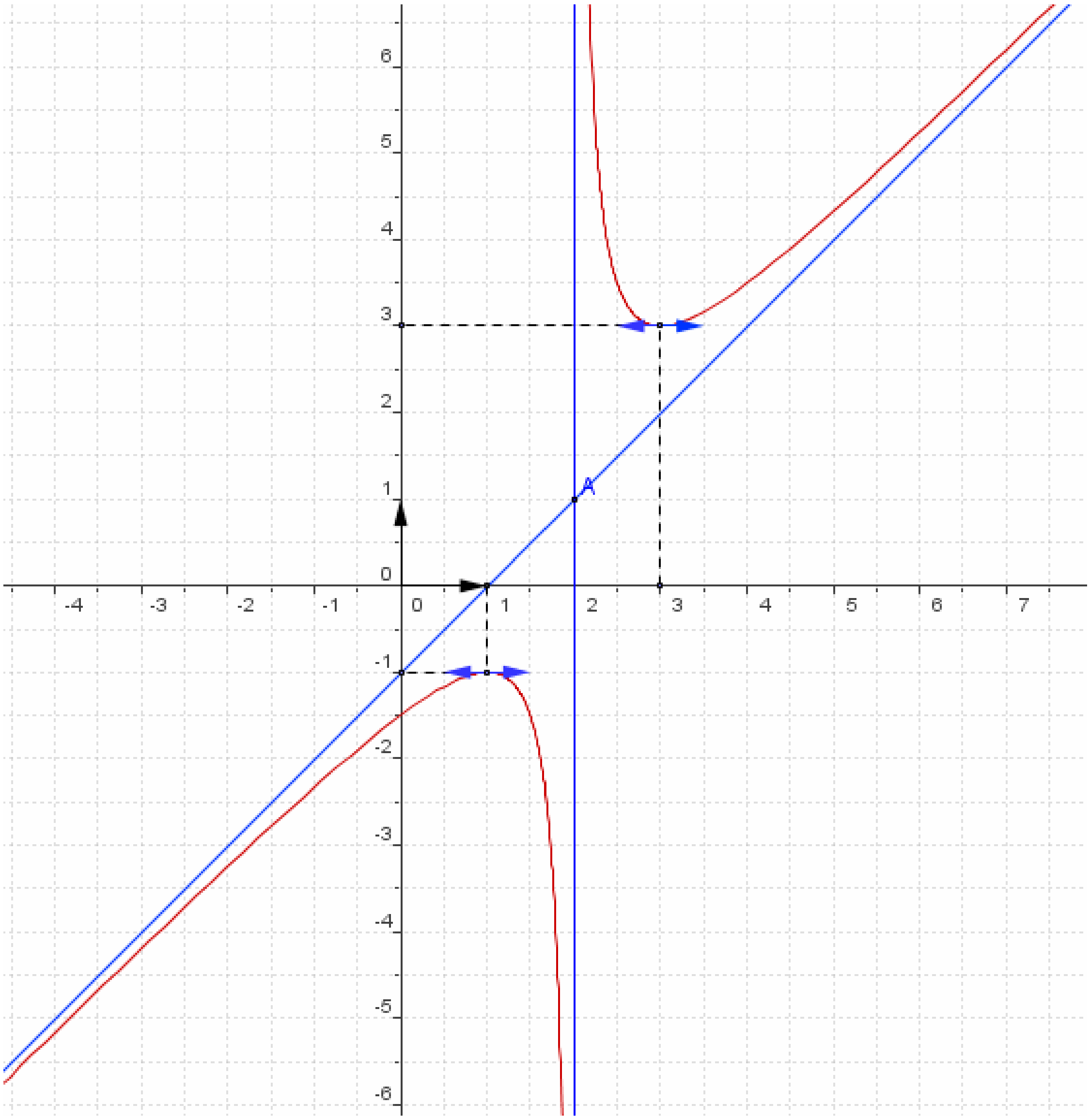
ومنه $f(4-x)=2-f(x)$ إذن $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى $\left(C_f\right)$

5- نبين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

6- ننشئ $\left(C_f\right)$




## تمرين2

نعتبر الدالة العدية $f$ للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}$

1- حدد $D_f$ و حدد نهايات $f$ عند محدات $D_f$

2- حدد $f'(x)$ لكل $x$ من $D_f$

3- أدرس تغيرات $f$

4- أ- بين أن $C_f$ يقبل $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ كنقطة انعطاف.

ب- بين أن $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ مركز تماثل لـ $C_f$

د- حدد معادلة المماس لـ $C_f$ عند النقطة $I$

5- أ- أدرس الفروع اللانهائية

ب- أنشئ المنحنى $C_f$

الجواب

$$f(x)=1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

2- نحدد $D_f$ و نحدد نهايات $f$ عند محدات $D_f$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \quad et \quad x \neq 2$

إذن $D_f = ]-\infty;-1[ \cup ]-1;1[ \cup ]1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = 1$ لأن $\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} \frac{1-2x}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} \frac{-2}{x} = 0$

لدينا $\lim\limits_{x\mapsto 2} x^2 - x - 2 = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\mapsto 2} 1 - 2x = -3$

| $x$ | $-\infty$ -1 2 $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | + 0 - 0 + |

ومنه $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 2^+} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 2^-} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = +\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\mapsto -1} x^2 - x - 2 = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\mapsto -1} 1 - 2x = 3$

ومنه $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto -1^+} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto -1^-} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = +\infty$

-2 نحدد $f'(x)$ لكل $x$ من $D_f$

$$f'(x) = \frac{(1-2x)'\left(x^2-x-2\right) - \left(x^2-x-2\right)'(1-2x)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2\left(x^2-x-2\right) - (2x-1)(1-2x)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+2x+4+4x^2-4x+1}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-2x+5}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

-3 ندرس تغيرات $f$

$$\forall x \in D_f \qquad f'(x) = \frac{2x^2-2x+5}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2x^2-2x+5$

$\Delta = 4 - 40 = -36$

اذن $\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2x^2 - 2x + 5 \succ 0$

جدول التغيرات $f$

| $x$ | $-\infty$ | -1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | ‖ + | ‖ + | |
| $f$ | 1 ↗ $+\infty$ | ‖ $-\infty$ ↗ $+\infty$ | ‖ $-\infty$ ↗ 1 | |

-4 أ- نبين أن $C_f$ يقبل $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ كنقطة انعطاف.

$$\forall x \in D_f \qquad f''(x)=\frac{-2(2x-1)\left(x^2-x+7\right)}{\left(x^2-x-2\right)^3}$$

$f''(x)$ تنعدم في $\frac{1}{2}$ مع تغيير الإشارة إذن $C_f$يقبل $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ كنقطة انعطاف

ب- نبين أن $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ مركز تماثل لـ $C_f$

$$\forall x \in D_f \qquad 1-x \in D_f$$

$$f(1-x)=1+\frac{1-2(1-x)}{(1-x)^2-(1-x)-2}=1-\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

$$2-f(x)=2-1-\frac{1-2x}{x^2-x-2}=1-\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

إذن $f(1-x)=2-f(x)$ ومنه $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ مركز تماثل لـ $C_f$

د- نحدد معادلة المماس لـ $C_f$ عند النقطة $I$

معادلة المماس لـ $C_f$ عند النقطة $I$ هي $y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$

أي $y=\frac{8}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$ ومنه $y=\frac{8}{9}x+\frac{5}{9}$

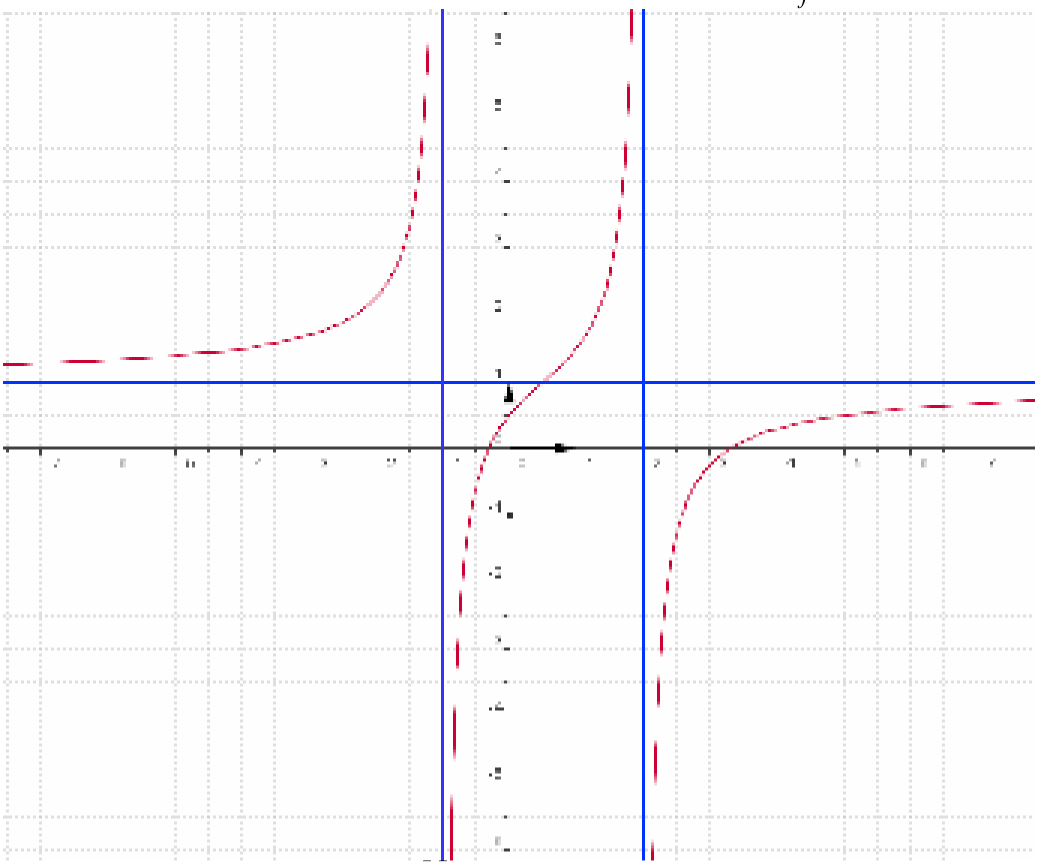
5- أ- ندرس الفروع اللانهائية

لدينا $\lim_{x\mapsto\pm\infty} f(x)=1$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى $C_f$

لدينا ومنه $\lim_{x\mapsto 2^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\mapsto 2^-} f(x)=+\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى $C_f$

لدينا $\lim_{x\mapsto -1^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\mapsto -1^-} f(x)=+\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى $C_f$

ب- ننشئ المنحنى $C_f$



## تمرين3

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$

1- حدد $D_f$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2- أ- بين أن $f$ دالة دورية و حدد دورها

ب تأكد أن $f$ زوجية استنتج $D_E$ مجموعة دراسة $f$

3- أدرس تغيرات $f$ على $D_E$

4- أنشئ المنحنى $C_f$

الجواب

$$f(x)=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

5- نحدد $D_f$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f \Leftrightarrow \cos x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$

اذن $D_f=\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

6- أ- نبين أن $f$ دالة دورية و حدد دورها

$x-2\pi\in\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\} \qquad 2\pi+x\in\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\} \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

$f(x+2\pi)=\dfrac{1+\cos(x+2\pi)}{1-\cos(x+2)}=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=f(x)$ اذن $f$ دالة دورية و حدد دورها $2\pi$

ب- نتأكد أن $f$ زوجية نستنتج $D_E$ مجموعة دراسة $f$

$-x\in\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\} \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

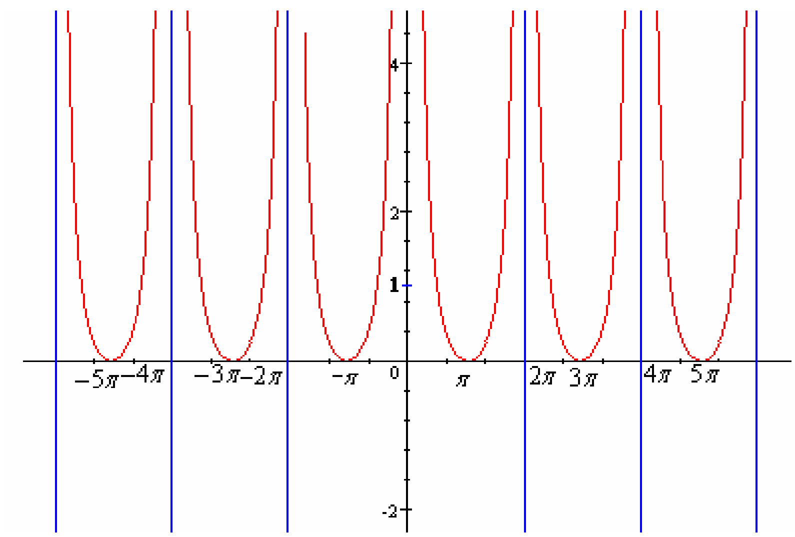
$f(-x)=\dfrac{1+\cos(-x)}{1-\cos(-x)}=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=f(x)$ إذن $f$ زوجية ومنه $D_E=]0;\pi]$

7- ندرس تغيرات $f$ على $D_E$

$$\forall x\in]0;\pi] \qquad f'(x)=\frac{(-\sin x)(1-\cos x)-(1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)^2}=\frac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

| $x$ | $0$ | $\pi$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | $0$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ |

8- أنشئ المنحنى $C_f$



## تمرين4

نعتبر $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

ليكن $(C_f)$ منحنى الدالة $f$ في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ) حدد $D_f$

ب) بين أن $f$ دالة فردية

د) بين أن $f$ دورية دورها $2\pi$

ج) بين $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ ثم حدد $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$ مع تأويل النتيجة هندسيا

2- أ) بين أن $\forall x\in ]0;\pi[ \quad f'(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$

ب) أدرس تغيرات $f$ على $]0;\pi[$ و أعط جدول تغيراتها

3- أ) حدد تقعر $(C_f)$

ب) أنشئ $(C_f)$

الجواب

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

2- أ) نحدد $D_f$

$$D_f=\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$$

ب) نبين أن $f$ دالة فردية

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$ : $-x\in\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

$$f(-x)=\frac{1-\cos(-x)}{\sin(-x)}=\frac{1-\cos x}{-\sin x}=-=\frac{1-\cos x}{\sin x}=-f(x)$$

إذن $f$ دالة فردية

د) نبين أن $f$ دورية دورها $2\pi$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$ $\quad x+2\pi\in\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

$$f(x+2\pi)=\frac{1-\cos(x+2\pi)}{\sin(x+2\pi)}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=f(x)$$

$f$ دورية دورها $2\pi$

ملاحظة: بما أن $f$ دورية دورها $2\pi$ و $f$ دالة فردية فان مجموعة الدراسة هي $D_E=]0;\pi[$

ج) نبين $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ ثم نحدد $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$ مع تأويل النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+} x\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}=0\times\frac{\frac{1}{2}}{1}=0$$

$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=+\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=\pi$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

2- أ) نبين أن $\forall x\in ]0;\pi[ \quad f'(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$

$$\forall x\in ]0;\pi[ \quad f'(x)=\frac{\sin^2 x-(1-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{1+\cos x}$$

ب) ندرس تغيرات $f$ على $]0;\pi[$ و نعطي جدول تغيراتها

$f'(x) \succ 0 \quad \forall x \in ]0;\pi[$ لأن $1+\cos x \succ 0 \quad \forall x \in ]0;\pi[$

ومنه $f$ تزايدية على $]0;\pi[$

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\pi$ |
|---|---|
| $f$ | $0 \nearrow +\infty$ |

3- أ) نحدد تقعر $(C_f)$

لدينا $\forall x \in ]0;\pi[ \quad f'(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$

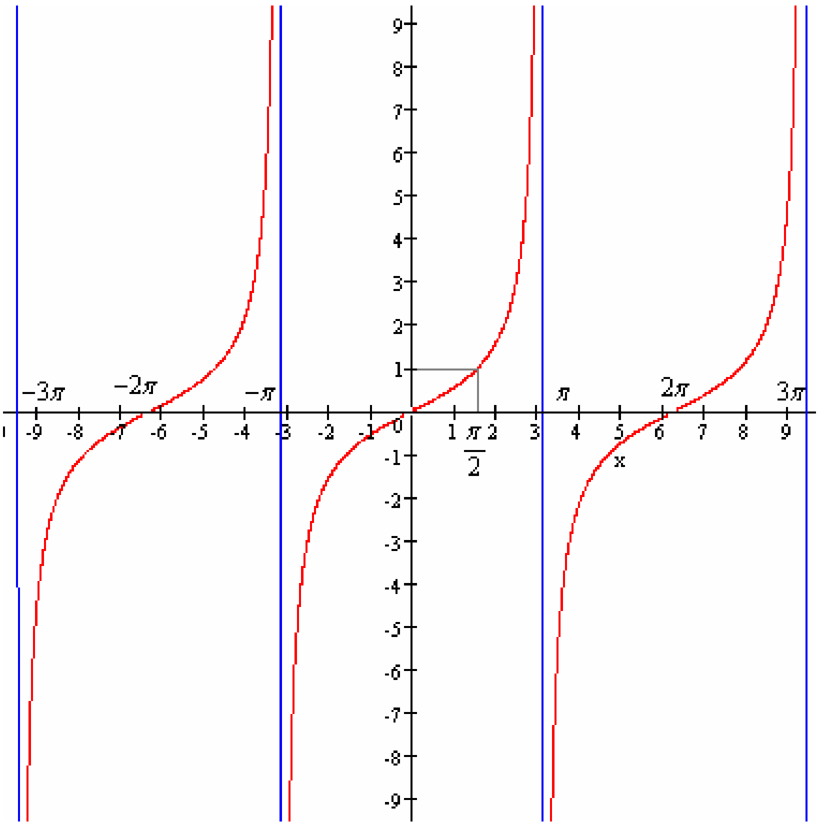
$\forall x \in ]0;\pi[ \quad f''(x)=\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\pi$ |
|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ |

إذن $(C_f)$ محدب على $]0;\pi[$ و حيث $f$ فردية فان $(C_f)$ مقعر على $]-\pi;0[$

وبما أن $f$ دورية دورها $2\pi$ فان $(C_f)$ محدب على كل مجال من شكل $]2k\pi;\pi+2k\pi[$ و مقعر على $]-\pi+2k\pi;2k\pi[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

ب) ننشئ $(C_f)$



**تمرين1**

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{1-x^2} & |x| \le 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} & |x| \succ 1 \end{cases}$$

1- أ) أدرس اتصال في النقطتين 1 و -1

ب) أدرس اشتقاق $f$ في النقطتين 1و -1 و أول النتائج هندسيا

2- أ) أحسب $f'(x)$ لكل $x$ من $]-1;1[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل $x$ من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

ب) أدرس تغيرات $f$

3- أدرس الفروع اللانهائية لـ $C_f$ ثم الوضع النسبي لـ $C_f$ و مقاربه.

5- أدرس تقعر $C_f$

6- أنشئ $C_f$

الجواب

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{1-x^2} & |x| \le 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} & |x| \succ 1 \end{cases}$$

4- أ) ندرس اتصال في النقطتين 1 و -1

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x - \sqrt{1-x^2} = 1$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} = 1$

ومنه $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ اذن $f$ متصلة في 1

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x - \sqrt{1-x^2} = -1$ و $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} = -1$

ومنه $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)$ اذن $f$ متصلة في -1

ب) ندرس اشتقاق $f$ في النقطتين 1و -1 و نؤول النتائج هندسيا

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-\sqrt{1-x^2}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{1-x}\sqrt{x+1} = \lim_{x\to 1^-} 1 + \sqrt{\frac{1}{1-x}}\sqrt{x+1} = +\infty$$

ومنه $f$ لا تقبل الاشتقاق على يسار1 و منحنى $f$ يقبل نصف مماس عمودي على يسار 1

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2} + \frac{\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}$$

ومنه $f$ تقبل الاشتقاق على يمين1 و منحنى $f$ يقبل نصف مماس معامله الموجه $\frac{1}{2}$ على يمين 1

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-\sqrt{1-x^2}+1}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} 1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}\sqrt{1-x} = \lim_{x\to -1^+} 1 - \sqrt{\frac{1}{1+x}}\sqrt{1-x} = -\infty$$

ومنه $f$ لا تقبل الاشتقاق على يمين -1 و منحنى $f$ يقبل نصف مماس عمودي على يمين -1

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} + 1}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{2} + \frac{\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{2} + \frac{x+1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}$$

ومنه $f$ تقبل الاشتقاق على يسار-1 و منحنى $f$ يقبل نصف مماس معامله الموجه $\frac{1}{2}$ على يسار -1

5- أ) نحسب $f'(x)$ لكل $x$ من $]-1;1[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل $x$ من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

$$\forall x\in]-1;1[\qquad f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\qquad f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{x^2+1-2x^2}{x^2+1}=\frac{2}{2\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x^2+1}$$

ب) ندرس تغيرات $f$

لدينا $\forall x\in]-1;1[\qquad f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\sqrt{1-x^2}}$

$$\forall x\in[0;1[\quad f'(x)\succ 0$$

$$\forall x\in]-1;1[\qquad f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\sqrt{1-x^2}}$$

إشارة $f'(x)$ على $]-1;0[$ هي إشارة $1-2x^2$ على $]-1;0[$

$$x\in]-1;0[\qquad f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومنه $f'(x)\succ 0\qquad \forall x\in\left]-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right[\qquad f'(x)\le 0\qquad \forall x\in\left]-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\qquad \forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ومنه $f'(x)\succ 0\qquad \forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | -1 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | ‖ - | 0 | + ‖ | + |
| $f$ | $-\infty$ ↗ | -1 ↘ | $-\sqrt{2}$ ↗ | 1 ↗ | $+\infty$ |

6- ندرس الفروع اللانهائية لـ $C_f$ ثم الوضع النسبي لـ $C_f$ و مقاربه.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1}=+\infty\quad;\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1}=-\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-\frac{1}{2}x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$ ومنه المستقيم $(D)$ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ مقارب للمنحنى $C_f$

$$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\qquad f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{x}{x^2+1}$$

و منه $C_f$ فوق $(D)$ على $]1;+\infty[$ و $C_f$تحت $(D)$ على $]-\infty;-1[$

5- ندرس تقعر $C_f$

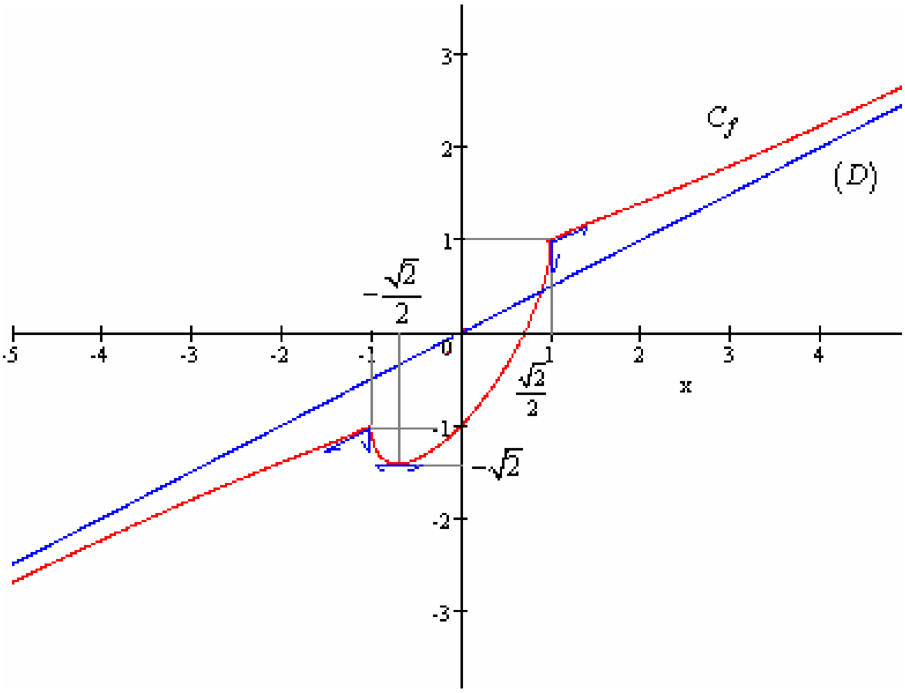
$f''(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}\succ 0\qquad \forall x\in]-1;1[$ ومنه $C_f$ محدب على $]-1;1[$

$f''(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\qquad \forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ومنه :

$f''(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\prec 0$ $\quad\forall x\in\left]1;+\infty\right[$ أي $C_f$ مقعر على $\left]1;+\infty\right[$

$f''(x)\succ 0$ $\quad\forall x\in\left]-\infty;-1\right[$ أي $C_f$ محدب على $\left]-\infty;-1\right[$

6- ننشئ $C_f$




**تمرين2**

نعتبر الدالة العدية $f$ للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}$

1- حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$

2- أ- بين أن $2\pi$ دور للدالة $f$

ب- بين أن $f(x+\pi)=-f(x)$ $\quad\forall x\in D_f$

3- أحسب $f'(x)$

4- أدرس تغيرات $f$ على $[0;\pi]\cap D_f$

5- أنشئ منحنى قصور الدالة $f$ على $[0;2\pi]\cap D_f$

الجواب

$$f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$$

3- نحدد $D_f$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \quad et \quad \cos x \neq 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left( x \neq k\pi \quad et \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad / k \in \mathbb{Z}$$

اذن $D_f = \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

4- أ- بين أن $2\pi$ دور للدالة $f$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad x \in \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f(x+2\pi) = \frac{1}{\sin(x+2\pi)} + \frac{1}{\cos(x+2\pi)} = f(x)$$

إذن $2\pi$ دور للدالة $f$

ب- نبين أن $f(x+\pi) = -f(x) \qquad \forall x \in D_f$

$$\forall x \in D_f \qquad f(x+\pi) = \frac{1}{\sin(x+\pi)} + \frac{1}{\cos(x+\pi)} = \frac{1}{-\sin x} + \frac{1}{-\cos} = -f(x)$$

3- نحسب $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \cos x \cdot \sin x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)\left(1 + \frac{\sin 2x}{2}\right)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

4- ندرس تغيرات $f$ على $[0;\pi] \cap D_f$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sin x - \cos x$

$$x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[ \qquad \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | \|\| | + | |
| $f$ | $+\infty$ | ↘ | $2\sqrt{2}$ | ↗ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

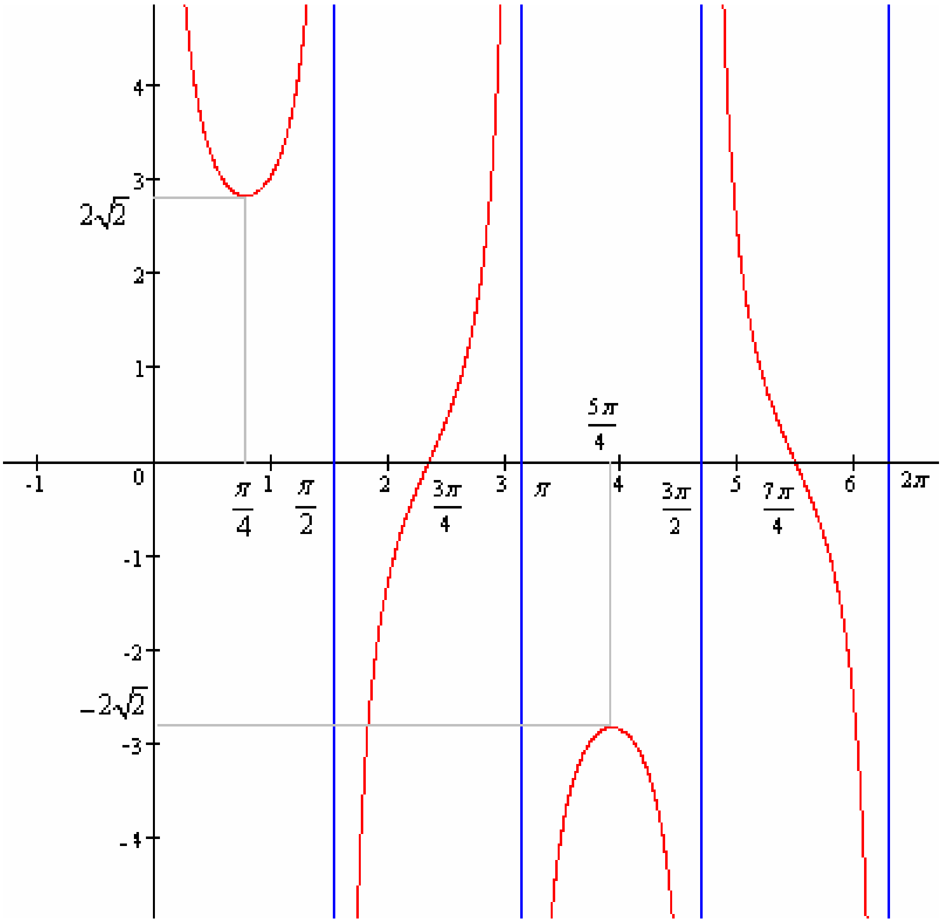
5- ننشئ منحنى قصور الدالة $f$ على $[0;2\pi] \cap D_f$

$\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = \pi$ مقارب للمنحنى $C_f$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى $C_f$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = 0$ مقارب للمنحنى $C_f$

ننشئ $C_f$ على $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ و نستنتج الجزء الأخر على $\left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$ حيث $f(x+\pi) = -f(x)$


4
3
$2\sqrt{2}$
2
1
0
-1
-2
$-2\sqrt{2}$
-3
-4
1
2
3
4
5
6
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\pi$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$
$2\pi$

# الدوران

## I- تعريف الدوران

### 1- تعريف

لتكن O نقطة من المستوى الموجه $P$ و $\alpha$ عددا حقيقيا الدوران الذي مركزه O و زاويته $\alpha$ هو التطبيق من $P$ نحو $P$ الذي يربط كل نقطة $M$ بنقطة $M'$ بحيث:

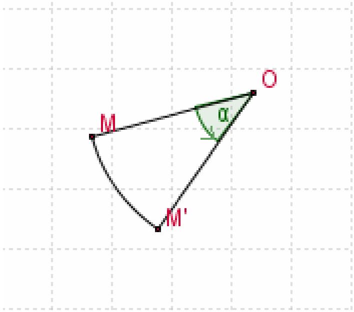
- $M' = O$ اذا كانت $M = O$

- $\begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$ اذا كان $M \neq O$

*- نرمز للدوران الذي مركزه O و زاويته $\alpha$ بالرمز $r(O;\alpha)$ أو بالرمز $r$

*- النقطة $M'$ تسمى صورة $M$ بالدوران $r$ نكتب $r(M) = M'$

نقول كذلك أن الدوران $r$ يحول $M$ إلى $M'$

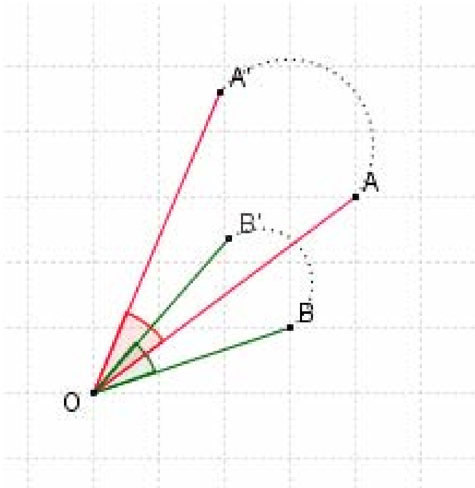



مثال

لتكن $O$ و $A$ و $B$ ثلاث نقط و $r$ الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{\pi}{6}$

أنشئ $A'$ و $B'$ صورتي $A$ و $B$ على التوالي بالدوران $r$

الجواب




### 2 – استنتاجات

#### أ) المثلث المتساوي الساقين

- $ABC$ مثلث متساوي الساقين رأسه $A$ يعني أن الدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ يحول $B$ إلى $C$

- إذا كان $ABC$ مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في $A$ بحيث $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ فان الدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول $B$ إلى $C$

- إذا كان $ABC$ مثلث متساوي الأضلاع بحيث $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ فان الدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$ يحول $B$ إلى $C$

#### ب) الدوران الذى زاويته منعدمة

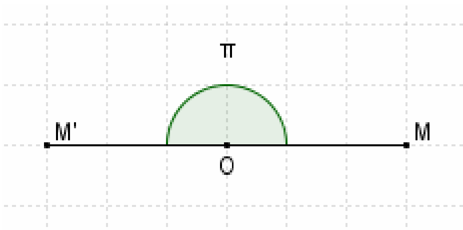
ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا

- إذا كان $\alpha \equiv 0 \quad [2\pi]$ فان $r(M) = M$ في هذه الحالة $r$ هو التطبيق المتطابق في المستوى جميع نقط المستوى صامدة

- إذا كان $\alpha \not\equiv 0 \quad [2\pi]$ فان النقطة الوحيدة الصامدة بالدوران $r$ هي مركزه $O$

ج) الدوران الذي زاويته مستقيمة

$r(O;\pi)=S_O$ حيث $S_O$ التماثل المركزي الذي مركزه $O$




3- الدوران العكسي

ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا

$$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM=OM' \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM'=OM \\ \left(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}\right)\equiv-\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow r'(M')=M \;/\quad r'=r(O;-\alpha)$$

الدوران $r(O;-\alpha)$ يسم الدوران العكسي للدوران $r(O;\alpha)$ نرمز له بالرمز $r^{-1}$

$$\begin{cases} r^{-1}(M')=M \\ r^{-1}(O)=O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(M)=M' \\ r(O)=O \end{cases}$$

الدوران $r$ تطبيق تقابلي في المستوى

خاصية

| |
|---|
| كل دوران $r(O;\alpha)$ هو تطبيق تقابلي في المستوى |
| الدوران $r(O;-\alpha)$ يسمى الدوران العكسي للدوران $r(O;\alpha)$ نرمز له بـ: $r^{-1}$ |

تمارين تطبيقة

1- ليكن $ABCD$ مربعا

حدد زاويتي الدورانيين $r_1$ و $r_2$ الذي مركزاهما $A$ و$C$ على التوالي ويحولان معا النقطة $D$ إلى $B$

2- ليكن $ABC$ مثلث متساوي الأضلاع حيث $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$

أ- حدد مركز الدوران $r$ الذي يحول $B$ إلى $C$

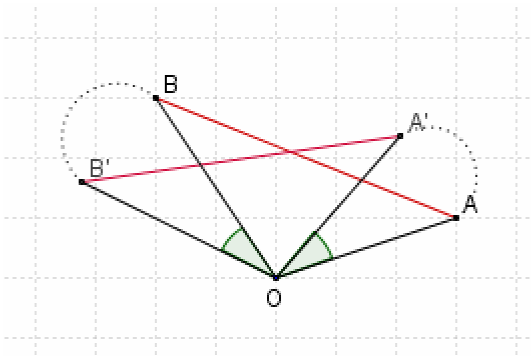
ب- حدد الدوران العكسي للدوران $r$

II- خاصات الدوران

1- خاصة أساسية ( الحفاظ على المسافة)

ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا و $A$ و$B$ نقطتين

$r(B)=B' \quad ; \quad r(A)=A'$




لنقارن $AB=A'B'$

حسب علاقة الكاشي في المثلثين $OAB$ و $OA'B'$ لدينا:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB.\cos\left[\widehat{AOB}\right]$$

$$AB'^2=OA'^2+OB'^2-2OA'\cdot OB'.\cos\left[\widehat{A'OB'}\right]$$

و بما أن $r(A)=A' \quad ; \quad r(B)=B'$ فان: $\begin{cases} OA=OA' \\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$ و $\begin{cases} OB=OB' \\ \left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$

و لدينا من جهة أخرى

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right)+\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}\right)+\left(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OB}\right)\quad[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\alpha+\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}\right)-\alpha\quad[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}\right)\quad[2\pi]$$

ومنه $\left[\widehat{AOB}\right]=\left[\widehat{A'OB'}\right]$

و بالتالي $A'B'^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB.\cos\left[\widehat{AOB}\right]$

ومنه $A'B'^2=AB^2$ اذن $A'B'=AB$

خاصية

ليكن $r$ دورانا و $A$ و$B$ نقطتين من المستوى
إذا كان $r(A)=A'$ ; $r(B)=B'$ فان $A'B'=AB$
نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على المسافة

تمرين

ليكن $ABC$ مثلثا . نعتبر $M$ و $N$ نقطتين خارج المثلث بحيث $MAB$ و $NAC$ مثلثان متساويا الأضلاع
قارن $MC$ و $NB$

## III- الدوران و استقامة النقط

### أ) صورة قطعة

لتكن $[AB]$ قطعة و $A'$ و$B'$ صورتي $A$ و $B$ بدوران $r$

لتكن $M$ نقطة من $[AB]$ و $M'$ صرتها بالدوران $r$

1- بين أن $M'\in[A'B']$

2- بين اذا كان $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $0\le\lambda\le1$ فان $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

الجواب

لدينا $A'$ و$B'$ و$M'$ صور $A$ و $B$ و $M$ بدوران $r$ ومنه $MA=M'A'$ و $MB=M'B'$ و $AB=A'B'$

1- $M\in[AB]$ تكافئ $MA+MB=AB$

تكافئ $M'A'+M'B'=A'B'$

تكافئ $M'\in[A'B']$

2- ليكن $\lambda\in[0;1]$ و $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$

ومنه $M\in[AB]$ و $\dfrac{AM}{AB}=\lambda$

و بالتالي $M'\in[A'B']$ و $\dfrac{A'M'}{A'B'}=\lambda$

إذن $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

خاصية

لتكن $[AB]$ قطعة و $A'$ و$B'$ صورتي $A$ و $B$ بدوران $r$
صورة القطعة $[AB]$ بالدوران $r$ هي القطعة $[A'B']$
اذا كان $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $0\le\lambda\le1$ فان $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M)=M'$

### ب- صورة مستقيم

لتكن $A'$ و$B'$ صورتي النقطتين المختلفتين $A$ و $B$ بدوران $r$

أ- بين أن $r([AB])=[A'B')$

ب- بين أن $r((AB))=(A'B')$

خاصية

لتكن $A'$ و$B'$ صورتي نقطتين مختلفتين $A$ و $B$ على التوالي بدوران $r$
- صورة نصف المستقيم $[AB)$ هو نصف المستقيم $[A'B')$
- صورة المستقيم $(AB)$ هو المستقيم $(A'B')$
- إذا كان $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ فان $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M)=M'$

ج- المرجح و الدوران

$A'$ و$B'$ و $G'$ صورالنقط $A$ و $B$ و $G$ بدوران $r$ على التوالي و $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$

بين أن $G'$ مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

الجـواب

$G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ ومنه $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

و حيث الدوران يحافظ على معامل استقامية فان $\overrightarrow{A'G'}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{A'B'}$

إذن $G'$ مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

خاصية

$A'$ و$B'$ و $G'$ صورالنقط $A$ و $B$ و $G$ بدوران $r$ على التوالي
اذا كان $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ فان $G'$ مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$
الدوران يحافظ على مرجح نقطتين

ملاحظة: الخاصية تبقى صحيحة لمرجح أكثر من نقطتين

نتيجة

$A'$ و$B'$ و $I'$ صور النقط $A$ و $B$ و $I$ بدوران $r$ على التوالي
إذا كان $I$ منتصف $[AB]$ فان $I'$ منتصف $[A'B']$
الدوران يحافظ على المنتصف

د) الحفاظ على معامل الاستقامية

$A'$ و$B'$ و $C'$ و $D'$ صور أربع نقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ بدوران $r$ على التوالي و $\lambda\in\mathbb{R}$

حيث $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$

لنبين أن $\overrightarrow{C'D'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

لنعتبر النقطة $E$ حيث $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}$ و $E'$ صورة $E$ بالدوران $r$

و منه $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$ و بالتالي $\overrightarrow{A'E'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ لان المرجح يحافظ على معامل استقامية النقط

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}$ تكافئ $[AD]$ و $[AE]$ لهما نفس المنتصف

و حيث أن الدوران يحافظ على المنتصف فان $[A'D']$ و $[A'E']$ لهما نفس المنتصف

ومنه $\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{A'E'}$

اذن $\overrightarrow{C'D'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

خاصية

لتكن $A'$ و$B'$ و $C'$ و $D'$ صور أربع نقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ بدوران $r$ على التوالي و $\lambda\in\mathbb{R}$
إذا كان $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$
نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على معامل استقامية متجهتين

تمرين

ليكن $ABCD$ مربعا

ننشئ خارجه المثلث $CBF$ المتساوي الأضلاع و داخله المثلث $ABE$ متساوي الأضلاع

نعتبر الدورن $r=r\left(B;\dfrac{\pi}{3}\right)$ و $G$ نقطة حيث $r(G)=D$

بين أن النقط $D$ و $E$ و $F$ مستقيمية

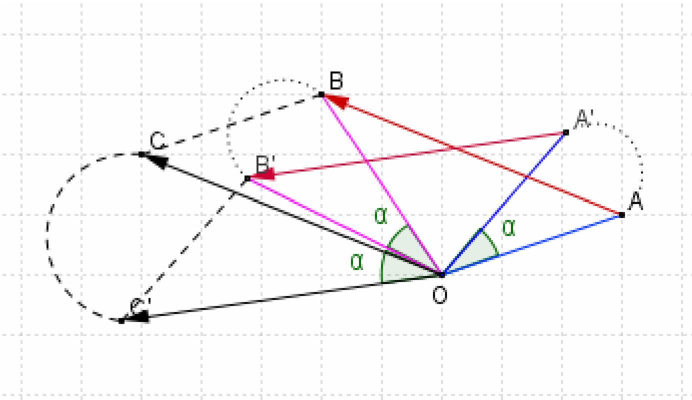
## 3- الدوران و الزوايا

### أ) خاصية أساسية

لتكن $A'$ و$B'$ صورتي $A$ و $B$ بدوران $r$ زاويته $\alpha$ على التوالي .

لتكن $C$ نقطة حيث $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$

لتكن $r(C)=C'$ ومنه $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{A'B'}$




و بالتالي $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right)\quad[2\pi]$

وحيث أن $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$ فان $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$

**خاصية**

| |
|---|
| ليكن $r$ دورانا زاويته $\alpha$<br>إذا كان $A'$ و$B'$ صورتي $A$ و $B$ بالدوران $r$ فان $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$ |

### ب- نتيجة

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{C'D'};\overrightarrow{CD}}\right)\quad[2\pi]$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\alpha+\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}}\right)-\alpha\quad[2\pi]$$

إذن $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}}\right)\quad[2\pi]$

| |
|---|
| لتكن $A'$ و$B'$ و $C'$ و $D'$ صور أربع نقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ بدوران $r$ حيث $A\neq B$ و $C\neq D$<br>$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}}\right)\quad[2\pi]$ نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على قيا س الزوايا |

**تمرين**

ليكن $ABC$ مثلثا متساوي الساقين رأسه $A$ و $(C)$ دائرة محيطة به . نعتبر $M$ نقطة من القوس $[\widehat{AB}]$ الذي لا يحتوي على $C$ . ليكن $r$ الدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.

بين أن $M$ و $M'$ و $C$ نقط مستقيمية حيث $r(M)=M'$

## 4- صورة دائرة بدوران

**خاصية**

| |
|---|
| صورة دائرة $C(\Omega;R)$ بدوران $r$ هي دائرة $C(\Omega';R)$ حيث $r(\Omega)=\Omega'$ |

**تمرين**

ليكن $ABCD$ مربعا و $(C)$ دائرة مارة من $A$ و $C$ . لتكن $Q$ و $R$ نقطتا تقاطع $(C)$ مع $(BC)$ و $(CD)$ على التوالي

بين أن $BQ=DR$ ( يمكن اعتبار الدوران $r$ الذي مركزه $A$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$)

## تمرين1

في مستوى موجه نعتبر $ABC$ مثلثا متساوي الساقين في $A$ حيث $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$

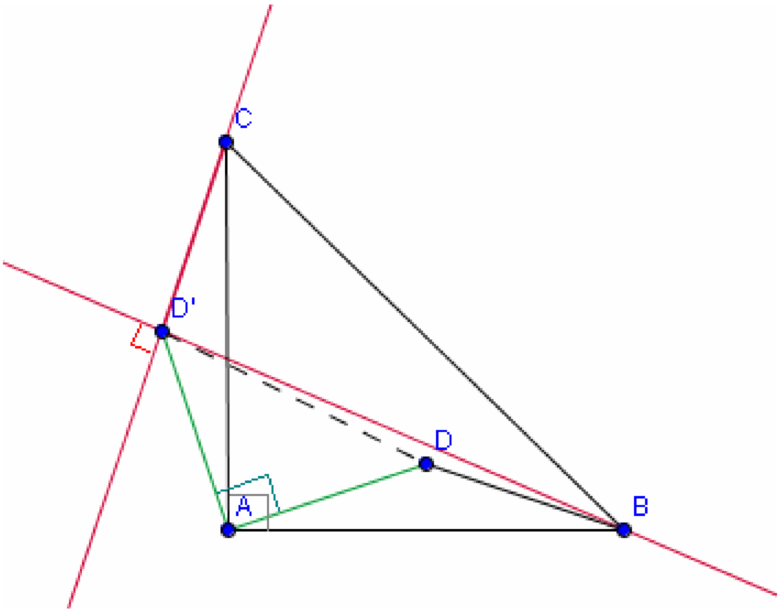
و$D$ نقطة داخل المثلث $ABC$ . ليكن $r$ الدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

1- أنشئ $D'$ صورة $D$ بالدوران $r$

2- بين أن $BD=CD'$ ; $(BD)\perp(CD')$

الحل

1- ننشئ $D'$ صورة $D$ بالدوران $r$




2- نبين أن $BD=CD'$ ; $(BD)\perp(CD')$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ و $ABC$ مثلث متساوي الساقين في $A$ و منه $r(B)=C$

و حيث $r(D)=D'$ فان $BD=CD'$ لأن الدوران يحافظ على المسافة

لدينا $r(B)=C$ و $r(D)=D'$ و زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{2}$ و منه $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{CD'}\right)=\frac{\pi}{2}$

إذن $(BD)\perp(CD')$

## تمرين2

في مستوى موجه نعتبر $ABC$ مثلثا متساوي الساقين وقائم لزاوية في $B$ حيث $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)$ زاوية

غير مباشرة. لتكن $O$ منتصف $[AC]$ و $E$ و $F$ نقطتين حيث $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ .

ليكن $r$ الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

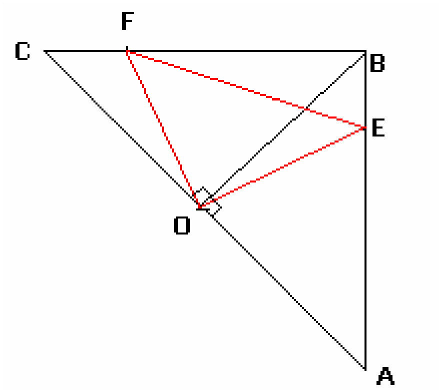
1- أنشئ الشكل

2- حدد صورتي $A$ و $B$ بالدوران $r$

3- نضع $r(E)=E'$ بين أن $E'=F$ استنتج طبيعة المثلث $OEF$

**الحل**

1- الشكل




2- نحدد صورتي $A$ و $B$ بالدوران $r$

لدينا $ABC$ مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في $B$ و $O$ منتصف $[AC]$ ومنه $(OB)\perp(AC)$

و $OA=OB=OC$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ و $OA=OB$ و منه $r(A)=B$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ و $OC=OB$ و منه $r(B)=C$

1- نبين أن $E'=F$ نستنتج طبيعة المثلث $OEF$

$r(E)=E'$ و $r(A)=B$ و $r(B)=C$ و $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ ومنه $\overrightarrow{BE'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

وحيث $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ فان $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BE'}$ إذن $E'=F$

ومنه $r(E)=F$ و حيث $r$ دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ فان $OEF$ مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في $O$

**<u>تمرين3</u>**

في مستوى موجه نعتبر $ABC$ مثلثا قائم الزاوية في $A$ و $[2\rho]$ $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv\alpha$ و $r$ الدوران الذي مركزه $B$ و زاويته $\alpha$

1- أنشئ $E$ و $F$ حيث $r(C)=F$ ; $r(A)=E$

2- بين أن $(EF)\perp(BC)$

3- لتكن $(AC)\cap(EF)=\{I\}$ و $r(I)=J$ و $(AB)\cap(IJ)=\{K\}$

أ- بين أن النقط $E$ و $F$ و $J$ مستقيمية

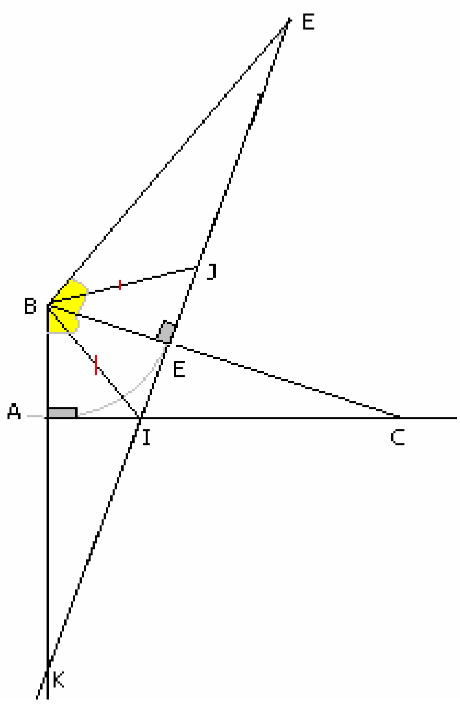
ب- بين أن $E$ منتصف $[Ij]$

4- لتكن $(AB)\cap(IJ)=\{K\}$ .

بين أن $r(K)=C$

**الحل**

1- ننشئ $E$ و $F$ حيث $r(C)=F$ ; $r(A)=E$




2- بين أن $(EF)\perp(BC)$

بما أن $r(C)=F$ ; $r(A)=E$ و $r(B)=B$ فان $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB})$

وحيث أن $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ فان $(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB})\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ ومنه $(EF)\perp(EB)$

لدينا $r(B)=B$ و $r(A)=E$ ومنه $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE})\equiv\alpha\equiv(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})\quad[2\pi]$ و بالتالي $(BC)=(BE)$

إذن $(EF)\perp(BC)$

3- أ- نبين أن النقط $E$ و $F$ و $J$ مستقيمية

لدينا $I$ و $C$ و $A$ مستقيمية و $r(C)=F$ ; $r(A)=E$ و $r(I)=J$

ومنه النقط $J$ و $E$ و $F$ مستقيمية

ب- نبين أن $E$ منتصف $[IJ]$

لدينا $r(I)=J$ و منه $BIJ$ مثلث متساوي الساقين في الرأس $B$

وحيث أن $(IJ)\perp(EB)$ لأن $(IJ)=(EF)$ ومنه $(EB)$ ارتفاع في المثلث $BIJ$

و بالتالي $(EB)$ متوسط للمثلث $BIJ$ إذن $E$ منتصف $[IJ]$

4- نبين أن $r(K)=C$

$(AB)\cap(IJ)=\{K\}$

لدينا $(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC})\equiv\alpha\equiv(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF})\quad[2\pi]$ ومنه $(BC)$ منصف $(\widehat{KBF})$ وحيث أن $(EF)\perp(BC)$

فان المثلث $KBF$ مثلث متساوي الساقين في الرأس $B$ ومنه $BF=BK$

وحيث أن $r(C)=F$ فان $BC=BF$ و بالتالي $BC=BK$

إذن لدينا $(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC})\equiv\alpha\quad[2\pi]$ و $BC=BK$ ومنه $r(K)=C$

# المتجهات في الفضاء

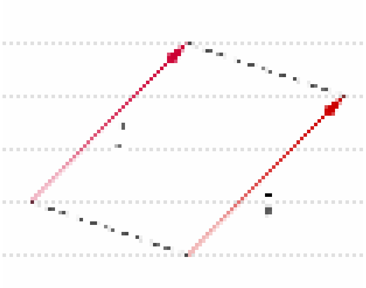
## I)- تساوي متجهتين – جمع المتجهات

### 1- عناصر متجهة

$A$ و $B$ نقطتين مختلفتين من الفضاء، إذا رمزنا للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان :

- اتجاه $\vec{u}$ هو اتجاه المستقيم $(AB)$
- منحى $\vec{u}$ هو المنحى من $A$ إلى $B$
- منظم $\vec{u}$ هي المسافة $AB$ و نكتب: $AB = \|\vec{u}\|$

ملحوظة: لكل نقطة $A$ من الفضاء المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم.
$\overrightarrow{AA}$ تسمى المتجهة المنعدمة و نكتب $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

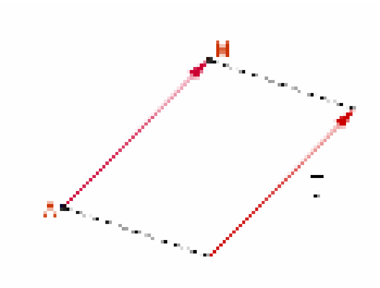


$\vec{u} = \vec{v}$

### 2- تساوي متجهتين

**تعريف**

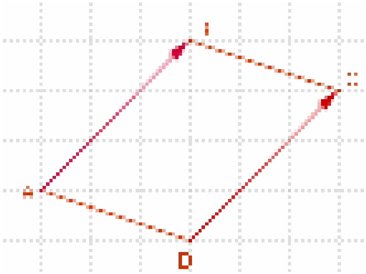
| |
|---|
| تكون متجهتان متساويتان اذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم |




لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء و لكل نقطة $A$ في الفضاء
توجد نقطة وحيدة $M$ حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

**خاصية**

| |
|---|
| $ABCD$ رباعيا في الفضاء<br>$ABCD$ متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ |

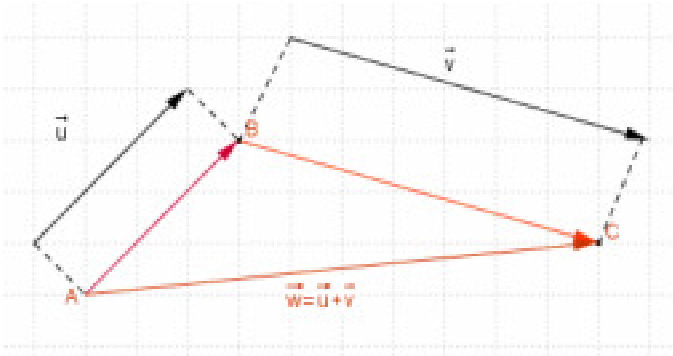



**خاصية**

| |
|---|
| لتكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء<br>$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (تبديل الوسطين)<br>$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$ (تبديل الطرفين) |

### 3- مجموع متجهتين –علاقة شال

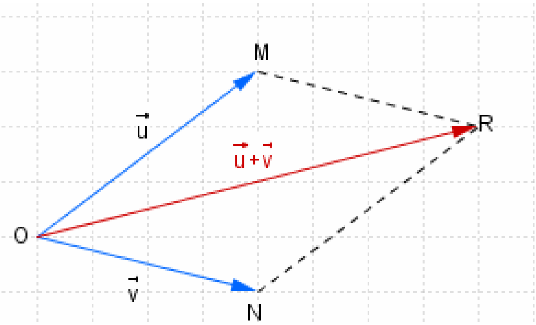
**أ-** $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان في الفضاء
لتكن $A$ نقطة من الفضاء،
توجد نقطة وحيدة $B$ حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
توجد نقطة وحيدة $C$ حيث $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
النقطتان $A$ و $C$ تحددان متجهة
وحيدة $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$




المتجهة $\vec{w}$ هي مجموع المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$
نكتب $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

**ب- علاقة شال**

| |
|---|
| مهما كانت النقط $A$ و $B$ و $C$ من الفضاء<br>$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ |




**نتيجة**

| |
|---|
| لتكن O و M وN و R أربع نقط من الفضاء<br>$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR}$ إذا وفقط إذا كان $OMRN$ متوازي الأضلاع |

ملاحظة: اذا كانت $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ فان
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OR}$ حيث $OMRN$ متوازي الأضلاع

**ج- خاصيات**

-* لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
-* لكل ثلاث متجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ $\quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
-* لكل متجهة $\vec{u}$ $\quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

## مقابل متجهة - فرق متجهتين

### أ- مقابل متجهة

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة في الفضاء
مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحاها مضاد لمنحى المتجهة $\vec{u}$ نرمز لها بالرمز $-\vec{u}$

-* لكل متجهة $\vec{u}$ : $\quad \vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

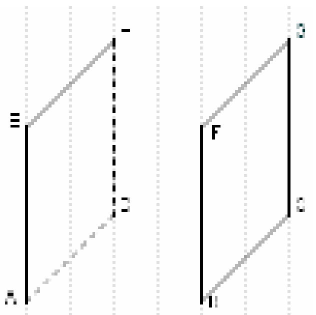
* لكل نقطتين A و B من المستوى لدينا $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$
المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متقابلتان نكتب $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

### ب- فرق متجهتين

**تعريف**

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\quad \vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

ملاحظة لكل ثلاث نقط $A$ و $B$ و $C$ $\quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$



**أمثلة**

$ABCDEFGH$ مكعب

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HG}$ $\qquad \overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{HE}$ $\qquad \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}$

### 4- منتصف قطعة

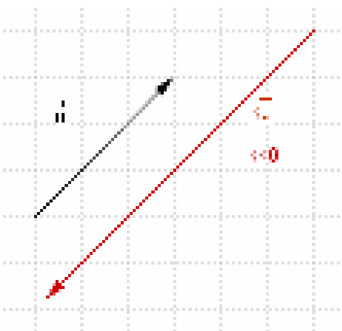
$I$ منتصف $[AB]$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ $\quad (\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0})$

## II) الاستقامية– التعريف المتجهي للمستقيم

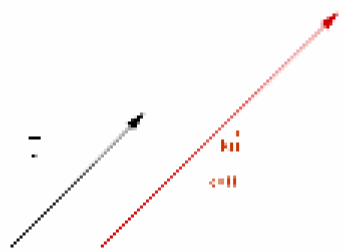
### 1- ضرب متجهة في عدد حقيقي

**تعريف**

$\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و $k$ عدد حقيقي غير منعدم
جداء المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي $k$ هي المتجهة $k\vec{u}$ حيث :
* $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه
* $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$
* منحى $k\vec{u}$ هو
منحى $\vec{u}$ إذا كان $k \succ 0$
عكس منحى $\vec{u}$ إذا كان $k \prec 0$



$k \prec 0$



$k \succ 0$

* لكل متجهة $\vec{u}$ و لكل عدد حقيقي $k$ : $\quad 0\cdot\vec{u}=\vec{0}$ و $k\cdot\vec{0}=\vec{0}$

### 2 - خاصيات

مهما تكن المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و مهما يكن العددان الحقيقيان $\alpha$ و $\beta$ فان

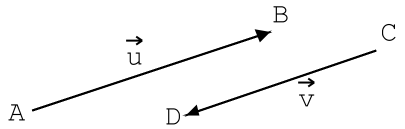
$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ $\qquad (\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

$1\cdot\vec{u}=\vec{u}$ $\qquad (\alpha\beta)\vec{u}=\alpha(\beta\vec{u}$

$\alpha\vec{u}=\vec{0}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$

## 3- الاستقامية
### استقامية متجهتين
### أ- تعريف

تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا و فقط كانت احداهما جداء الأخرى في عدد حقيقي




### ملاحظة
$\vec{0}$ مستقيمية مع أية متجهة

### استقامية ثلاث نقط
### تعريف

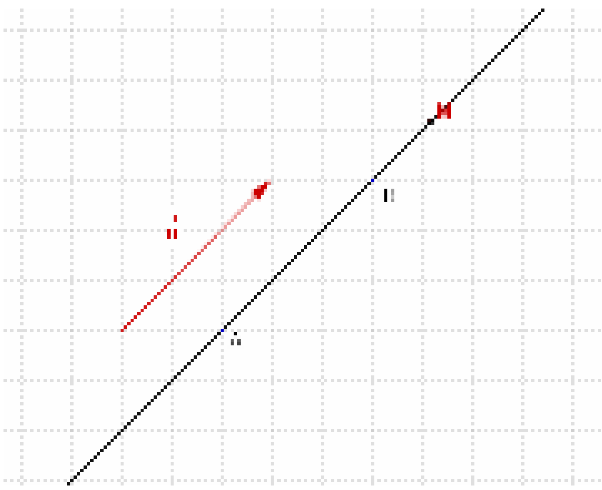
لتكن $A$ و $B$ و $C$ نقطا من الفضاء حيث $A \neq B$
تكون النقط $A$ و $B$ و $C$ مستقيمية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $\alpha$ حيث $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$

### توازي مستقيمين

لتكن $A$ و $B$ و $C$ و $D$ نقطا من الفضاء حيث $A \neq B$ و $C \neq D$
$(AB) // (CD)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين

### التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء
### تعريف

لتكن $A$ و $B$ نقطتين مختلفتين من الفضاء
كل متجهة $\vec{u}$ غير منعدمة و مستقيمية مع المتجهة $\overrightarrow{AB}$
تسمى متجهة موجهة للمستقيم $(AB)$



### خاصية

لتكن $A$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة
مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$
هي المستقيم المار من $A$ و الموجه بـ $\vec{u}$. نرمز له بالرمز $D(A;\vec{u})$

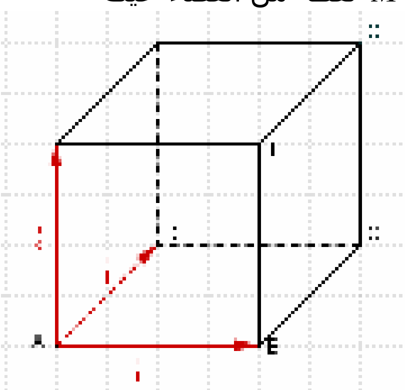
$$D(A;\vec{u}) = \{M \in (E) / \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

### تمرين

ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا نضع $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$
و $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$ و $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. نعتبر $I$ منتصف $[HG]$

1- بين أن $\vec{u}$ موجهة للمستقيم $(AI)$

2- ليكن المستقيم $(\Delta)$ المار من $G$ و الموازي للمستقيم $(AI)$ و $M$ نقطة من الفضاء حيث
$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG}$. بين أن $M \in (\Delta)$



الجواب

1- نبين أن $\vec{u}$ موجهة للمستقيم $(AI)$

أي نبين أن $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين

لدينا $I$ منتصف $[HG]$ ومنه $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$$

بما أن $ABCDEFGH$ مكعب فان $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD} = \vec{j}$ و $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB} = \vec{i}$

ومنه $\overrightarrow{AI} = \vec{k} + j + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(i + 2j + 2k) = \frac{1}{2}u$

إذن $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان و منه $\vec{u}$ موجهة للمستقيم $(AI)$

2 نبين أن $M \in (\Delta)$

لدينا $(\Delta)$ المار من $G$ و الموازي للمستقيم $(AI)$ أي $(\Delta) = D(G;\vec{u})$

$$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CG}$$

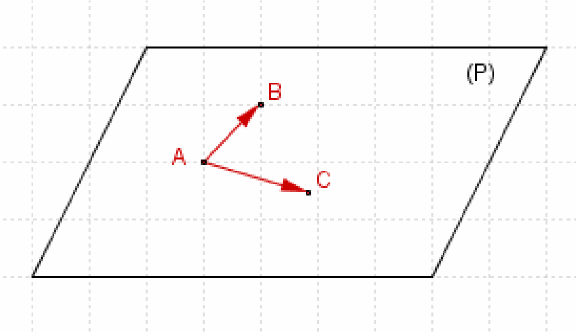
بما أن $ABCDEFGH$ مكعب فان $\overrightarrow{GF}=-\overrightarrow{AD}=-\vec{j}$ و $\overrightarrow{FB}=-\overrightarrow{AE}=-\vec{k}$ و $\overrightarrow{CG}=\vec{k}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{j}$

$$\overrightarrow{GM}=-\vec{j}-\vec{k}+\frac{1}{2}i+2\vec{j}+2\vec{k}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=\frac{1}{2}\left(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}$$

و بالتالي $M\in D(G;\vec{u})$ إذن $M\in(\Delta)$

## III) الاستوائية– التعريف المتجهي للمستوى

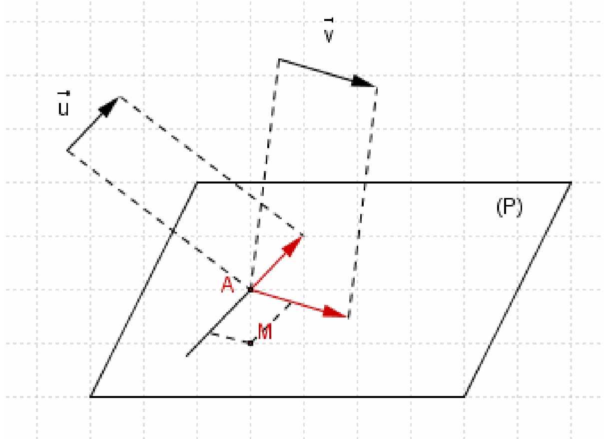
### 1- تعريف




ليكن $(P)$ مستوى من الفضاء و $A$ و $B$ و $C$ نقط غير مستقيمية من المستوى $(P)$

نقول إن $(P)$ هو المستوى المار من $A$ و الموجه بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

**نتيجة**




متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و نقطة من الفضاء تحدد مستوى وحيدا $(P)$ هو المستوى المار من النقطة $A$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نرمز له بالرمز $P(A;\vec{u};\vec{v})$.

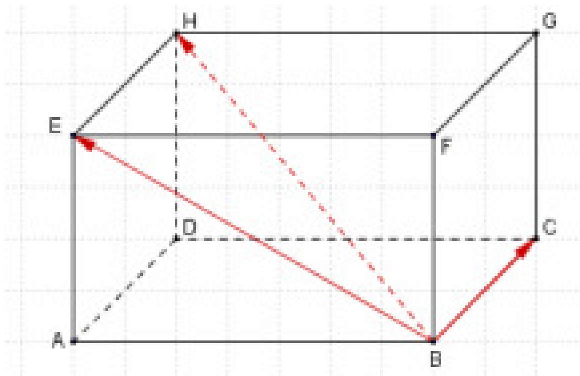
**خاصية**

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين و $A$ نقطة من الفضاء.

مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ و $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ هي المستوى $(P)$ المار من $A$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و نكتب $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$

### 2- الاستوائية

**تعريف**




لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات في الفضاء
نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية اذا وفقط وجدت أربع نقط مستوائية $A$ و $B$ و $C$ و $D$ حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ و $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$

**أمثلة**

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات

$\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BH}$ مستوائية لان النقط $B$ و $C$ و $E$ و $H$ مستوائية $[(BC)//(EH)]$

$\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مستوائية لأن $BDEH$ رباعي الأوجه

**خاصية**

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين و $\vec{w}$ متجهة في الفضاء
المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا وجد عددين حقيقيين $x$ و $y$ حيث $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

**نتيجة**

إذا وجد عددين حقيقيين $x$ و $y$ حيث $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ فان $A$ و $B$ و $C$ و $M$ مستوائية

تمرين

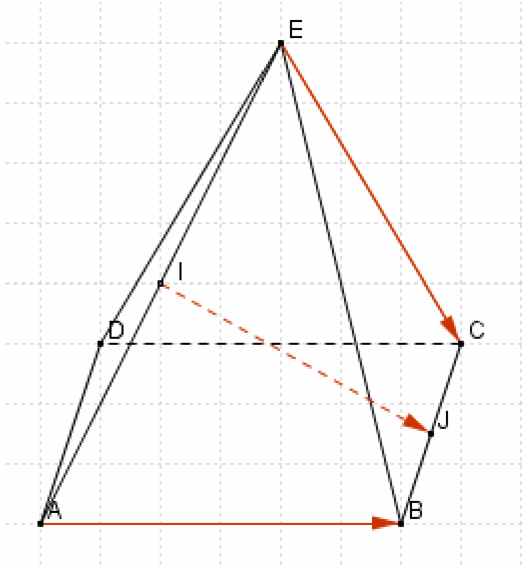
$EABCD$ هرم قاعدته المستطيل $ABCD$، $I$ و $J$ منتصفا $[AE]$ و $[BC]$ على التوالي.

بين أن المتجهات $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية

الحل

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$$

و حيث $I$ و $J$ منتصفا $[AE]$ و $[BC]$ فان :




$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$

و بالتالي $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

ومنه $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

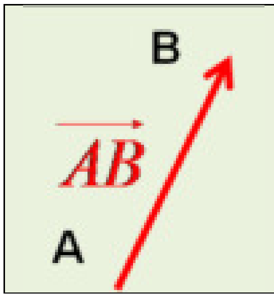
$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

ومنه $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

إذن $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية

$A$ $B$ نقطتين مختلفتين من الفضاء.

- الإتجاه :أتجاه المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو المستقيم $(AB)$
- المنحى : منحى المتجهة $\overrightarrow{AB}$ من $A$ إلى $B$
- المنظم : منظم المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو طولها أي المسافة $AB$ و نكتب $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$




## تساوي متجهتين

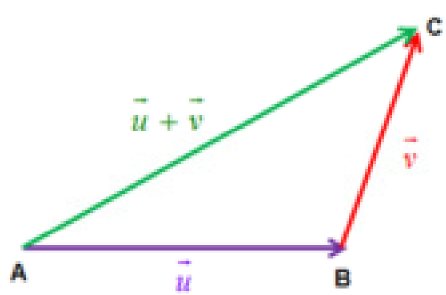
تكون متجهتان متساويتان إذا كان لهما نفس الإتجاه ، نفس المنحى و نفس المنظم

لكل متجهة و لكل نقطة من الفضاء توجد نقطة وحيدة من الفضاء بحيث :

$ABCD$ متوازي الأضلاع

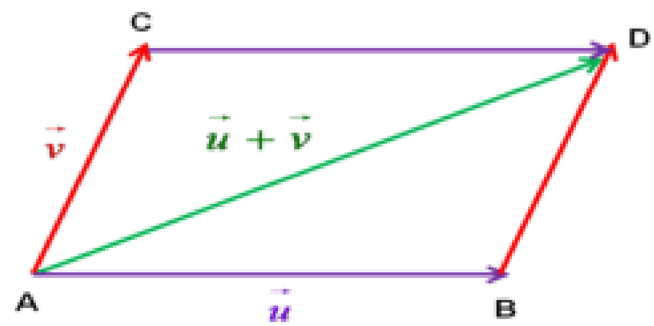
## علاقة شال

مهما كانت النقط من الفضاء ، لدينا :




$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$$

لتكن $A$ و $B$ و $D$ و $C$ أربع نقط من الفضاء
لدينا : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$



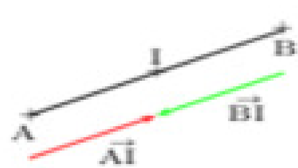

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$$
$$\vec{v}=\overrightarrow{AC}$$
$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AD}$$

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء ، لدينا :

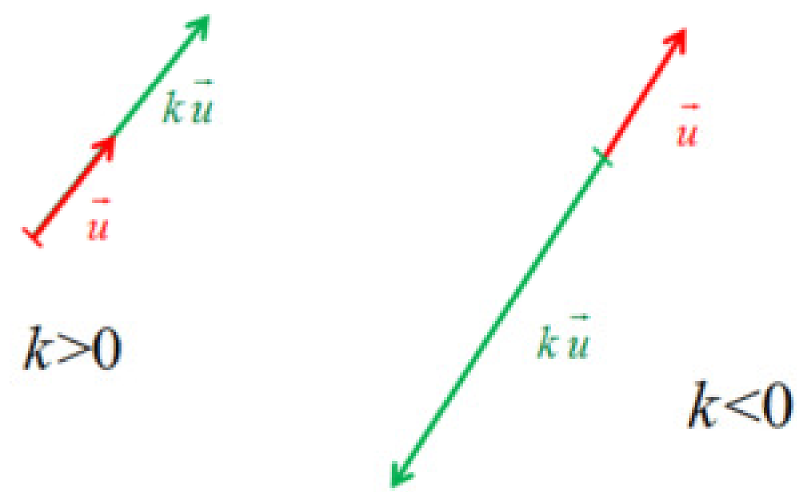
- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
- $\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\left(-\vec{u}\right)+\vec{u}=\vec{0}$

## منتصف قطعة

$I$ منتصف القطعة إذا و فقط إذا كان $IA+IB=0$



| | |
|---|---|
| لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و ليكن $k \in \mathbb{R}^*$ جداء العدد الحقيقي $k$ في المتجهة $\vec{u}$ عي المتجهة $k\,\vec{u}$ المعرفة بما يلي : | |
| 0<br>• $\vec{u}$ و $k\,\vec{u}$ لهما نفس الإتجاه<br>• $\vec{u}$ و $k\,\vec{u}$ لهما نفس المنحى<br>• $\lVert k\,\vec{u} \rVert = k\,\lVert \vec{u} \rVert$ | 0<br>• $\vec{u}$ و $k\,\vec{u}$ لهما نفس الإتجاه<br>• $\vec{u}$ و $k\,\vec{u}$ لهما منحيان متعاكسان<br>• $\lVert k\,\vec{u} \rVert = (-k)\lVert \vec{u} \rVert$ |




لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء و ليكن $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقيين ، لدينا :

- $\alpha.(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- $(\alpha\times\beta)\vec{u} = \alpha.(\beta\vec{u})$
- $1\,\vec{u} = \vec{u}$

$u$ مستقيميتان إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي بحيث :

ضرب عدد حقيقي في متجهة

لتكن $A$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة
مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ $(t \in \mathbb{R})$ هي المستقيم المار من $A$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$ و نرمز له ب :

**الإستوائية**

ليكن مستوى من الفضاء و لتكن $A$ و $B$ و $C$ ثلاث نقط غير مستقيمية من المستوى .
نقول أن $(P)$ هو المستوى المار من $A$ و الموجه بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

**المستوى المار من** $A$ و الموجه بالمتجهتين $u$ $v$ نرمز له بالرمز $P = P \; A \; u \; v$

لتكن $u$ $v$ $w$ ثلاث متجهات من الفضاء .
نقول أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا وجدت أربعع نقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ من الفضاء بحيث :
$u \quad AB$

لتكن $u$ $v$ متجهتين غير مستقيميتين و لتكن $w$ متجهة من الفضاء .
$u$ $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية $\Leftrightarrow \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \; : (\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2)$

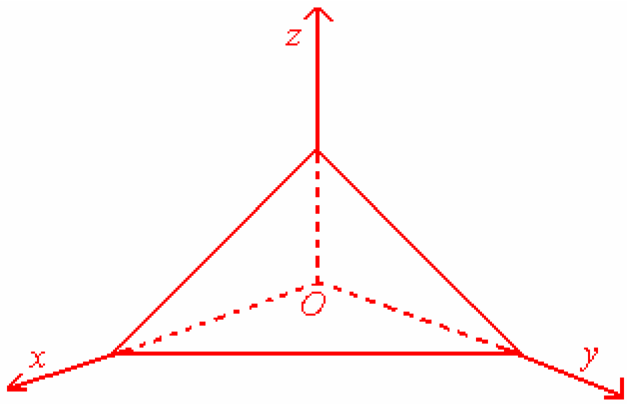
لتكن أربع نقط من الفضاء
إذا وجد عددين حقيقيين $\alpha$ و $\beta$ بحيث : $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ فإن النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ مستوائية

## I- توجيه الفضاء : Orientation de l’espace

### 1. ثلاثي الأوجه : Tetraèdre :

**تعريف :**

ثلاثة أنصاف مستقيم في الفضاء $[Ox)$ و $[Oy)$ و $[Oz)$ وغير مستوائية ، تكون في هذا الترتيب ثلاثي أوجه ، نرمز له بالرمز $(Ox ,Oy ,Oz)$ .
$[Ox)$ و $[Oy)$ و $[Oz)$ تسمى أحرف ثلاثي الأوجه .

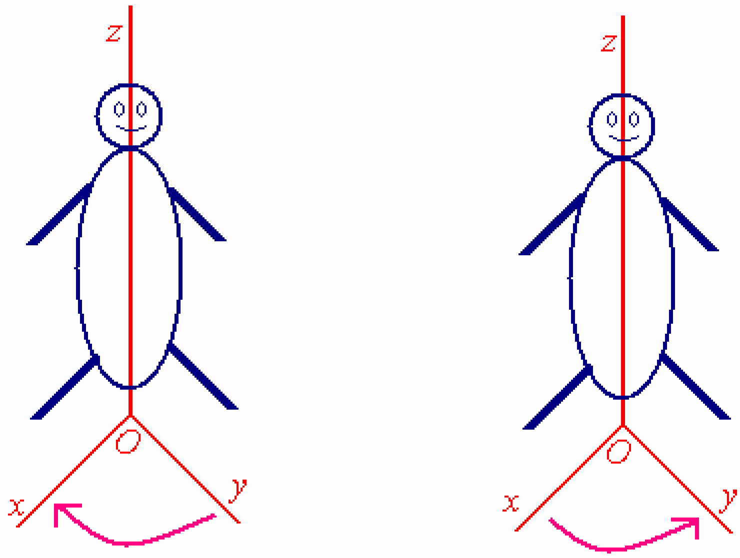



### 2. رجل أمبير : Le Bonhomme d’Ampère :

**تعريف :**

رجل أمبير لثلاثي الأوجه $(Ox ,Oy ,Oz)$ هو شخص خيالي محمول على الحرف $[Oz)$ ، رجلاه في الأصل $O$ ، ويرى الحرف $[Ox)$ .
يوجد موضعان للحرف $[Oy)$ بالنسبة لرجل أمبير :

- الحرف $[Oy)$ عن يساره .
- الحرف $[Oy)$ عن يمينه .




### 3. منحى ثلاثي الأوجه وتوجيه الفضاء :

**اتفاق :** لما يكون رجل أمبير على الحرف $[Oz)$ ورجلاه في $O$ وهو يرى الحرف $[Oy)$ عن يساره ، نقول إن ثلاثي الأوجه $(Ox ,Oy ,Oz)$ مباشر ( أو موجب ) .

بهذا نكون قد وجهنا الفضاء إلى صنفين :

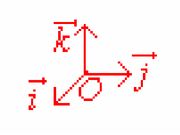
- صنف ثلاثي أوجه مباشر .
- صنف ثلاثي أوجه غير مباشر .

## 4. معلم موجه في الفضاء : Repère orienté dans l'espace :

نعتبر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلما في الفضاء $(\mathcal{E})$ . نضع : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$ .

**تعريف :**

يكون $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلما مباشرا للفضاء $(\mathcal{E})$ إذا كان ثلاثي الأوجه $(OI,OJ,OK)$ مباشرا .




## 5. الأسس المباشرة : Les Bases directes :

**تعريف :**

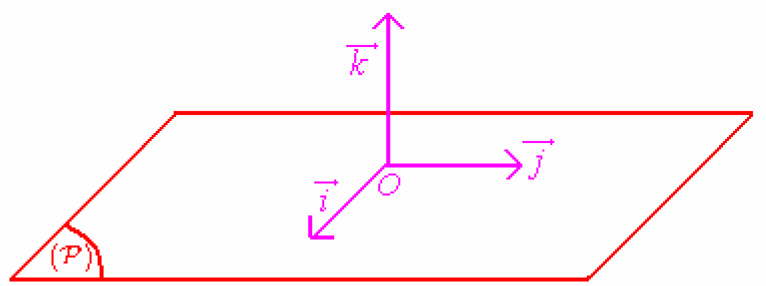
ليكن $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أساسا للفضاء $\mathcal{V}_3$ . ولتكن $O$ نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$ .
إذا كان $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلما مباشرا للفضاء $(\mathcal{E})$ ، فإننا نقول إن $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أساس مباشر للفضاء $\mathcal{V}_3$ .

## 6. توجيه مستوى في الفضاء : Orientation d'un Plan dans l'espace :

نعتبر $(\mathcal{P})$ مستوى في الفضاء $(\mathcal{E})$، و $\vec{k}$ متجهة واحدية منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$ .

من نقطة $O\in(\mathcal{P})$ ، ننشئ معلما متعامدا ممنظما $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ للفضاء $(\mathcal{E})$.

يكون المعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ مباشرا في المستوى $(\mathcal{P})$، إذا كان المعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ مباشرا في الفضاء $(\mathcal{E})$.




توجيه مستوى $(\mathcal{P})$ في الفضاء $(\mathcal{E})$، يتم بتوجيه متجهة $\vec{k}$ منظمية عليه .

## II. الجداء المتجهي لمتجهتين : Produit Vectoriel de deux vecteurs :

### 1. تعريف :

في الفضاء الموجه ، نعتبر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين ونعتبر $O$ نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$.

نعلم أن : $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ و $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ / $\exists!(A,B)\in(\mathcal{E})^2$ .

✓ إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين ، فإن الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، في هذا الترتيب ، هو المتجهة $\vec{w}$ التي تحقق ممثلتها $\overrightarrow{OC}$ الشروط التالية :

- $(OC)\perp(OAB)$ .
- ثلاثي الأوجه $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ مباشر .
- $\boxed{\left\|\overrightarrow{OC}\right\|=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\times\sin(\theta)}$ ، حيث $\theta$ هو قياس الزاوية الهندسية $\left[A\hat{O}B\right]$

✓ إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين ، فإن الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$، في هذا الترتيب ، هو المتجهة المنعدمة $\vec{0}$

✓ نرمز للجداء المتجهي لمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$، في هذا الترتيب ، بالرمز $\vec{u}\wedge\vec{v}$ أو ( $\vec{u}\times\vec{v}$ )

ونقرأ : $\vec{u}$ متجهي $\vec{v}$ .

**ملاحظتين :** أ- لكل متجهتين غير منعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من الفضاء $\mathcal{V}_3$ ، لدينا :

$$\boxed{\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\sin(\theta)}$$

ب- إذا كان $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{0}$ ، فإن المثلوث $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ أساس مباشر للفضاء $\mathcal{V}_3$ .

**مثال :** أحسب $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|$ في كل من الحالتين التاليتين :

أ- $\left\|\vec{u}\right\|=10$ و $\left\|\vec{v}\right\|=2$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=10$ .

ب- $\left\|\vec{u}\right\|=6$ و $\left\|\vec{v}\right\|=6$ و $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ .

## 2. تطبيق : بين متساوية Lagrange :

$$\boxed{\forall(\vec{u},\vec{v})\in\mathcal{V}_3^2\ :\ \left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\left\|\vec{u}\right\|^2\left\|\vec{v}\right\|^2}\ .$$

## 3. خاصيات :

أ- لكل $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in\mathcal{V}_3^3$ ، لدينا : $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}\ \Rightarrow\ \vec{w}\perp\vec{u}$ و $\vec{w}\perp\vec{v}$ .

**ب- تخالف الجداء المتجهي :**

$$\boxed{\forall(\vec{u},\vec{v})\in\mathcal{V}_3^2\ :\ \vec{u}\wedge\vec{v}=-(\vec{v}\wedge\vec{u})}\ .$$

**جـ- خطانية الجداء المتجهي :**

**خاصية :**

لتكن $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ و $\vec{v}$ متجهات من الفضاء $\mathcal{V}_3$ ، وليكن $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

- $(\vec{u_1}+\vec{u_2})\wedge\vec{v}=(\vec{u_1}\wedge\vec{v})+(\vec{u_2}\wedge\vec{v})$ .
- $\vec{u}\wedge(\vec{v_1}+\vec{v_2})=(\vec{u}\wedge\vec{v_1})+(\vec{u}\wedge\vec{v_2})$ .
- $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$ .
- $\vec{u}\wedge(\beta\vec{v})=\beta(\vec{u}\wedge\vec{v})$ .

**د- انعدام الجداء المتجهي ( شرط استقامية متجهتين ):**

**خاصية :**

يكون الجداء المتجهي لمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ منعدما إذا وفقط إذا كانت المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان .

**برهان :** لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء $\mathcal{V}_3$ . نضع : $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ . لدينا :

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=0$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\sin(\theta)=0$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \left\|\vec{u}\right\|=0$ أو $\left\|\vec{v}\right\|=0$ أو $\sin(\theta)=0$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ أو ( $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما نفس الاتجاه )

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\ \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

**نتيجة :**

في الفضاء الموجه ، لدينا :
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0} \iff$ [ $A$ و $B$ و $C$ نقط مستقيمية ]

**تطبيق :** ليكن $ABC$ مثلثا .

1. بين أن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ .
2. استنتج علاقة الأجياب الثلاثة في المثلث $ABC$ : $\boxed{\dfrac{\sin(\widehat{A})}{BC}=\dfrac{\sin(\widehat{B})}{CA}=\dfrac{\sin(\widehat{C})}{AB}}$ .

## III. تحليلية الجداء المتجهي :

### 1. خاصية وتعريف :

ليكن $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساسا متعامدا ممنظما للفضاء $\mathcal{V}_3$ .

لتكن $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ متجهتين من الفضاء $\mathcal{V}_3$ . لدينا :

$$\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\\ z & z'\end{vmatrix} \qquad \boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}}$$

**برهان :** نعلم أن : $\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{0}$ و $\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{0}$ و $\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$ و $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$ و $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$ و $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$ .

إذن :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\wedge\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=xx'\left(\vec{i}\wedge\vec{i}\right)+xy'\left(\vec{i}\wedge\vec{j}\right)+xz'\left(\vec{i}\wedge\vec{k}\right)+yx'\left(\vec{j}\wedge\vec{i}\right)+yy'\left(\vec{j}\wedge\vec{j}\right)+yz'\left(\vec{j}\wedge\vec{k}\right)$$
$$+zx'\left(\vec{k}\wedge\vec{i}\right)+zy'\left(\vec{k}\wedge\vec{j}\right)+zz'\left(\vec{k}\wedge\vec{k}\right)$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=xy'\vec{k}-xz'\vec{j}-yx'\vec{k}+yz'\vec{i}+zx'\vec{j}-zy'\vec{i}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=(yz'-zy')\vec{i}-(xz'-zx')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$$

وبالتالي فإن : $\vec{u}\wedge\vec{v}\left(\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\right)$ بالنسبة للأساس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ .

**تطبيق :** في الفضاء الموجه $(\mathcal{E})$ ، نعتبر النقط $A(1,0,2)$ و $B(-1,1,1)$ و $C(3,2,0)$ .

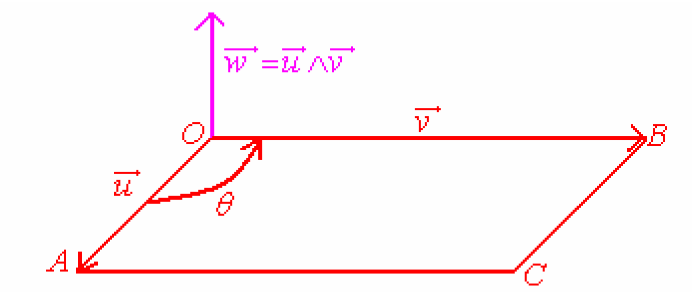
1. حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ .
2. استنتج أن النقط $A$ و $B$ و $C$ غير مستقيمية .
3. استنتج معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$ .

## IV. تطبيقات : Applications :

### 1. مساحة مثلث -مساحة متوازي الأضلاع: Aire d'un Triangle,d'un Parallélogramme:

في الفضاء $(\mathcal{E})$، نعتبر $OABC$ متوازي الأضلاع المنشأ انطلاقا من المتجهتين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ ؛ ولتكن $S$ مساحته .

نعلم أن مساحة المثلث $AOB$ هي :




$$s = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin(\theta)$$
$$s = \frac{1}{2} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta)$$
$$s = \frac{1}{2} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

ومنه فإن مساحة متوازي الأضلاع $OABC$ هي : $S = 2s = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ .

**خاصية 1 :**

✓ مساحة مثلث $ABC$ في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر هي : $\boxed{s = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$ .

**خاصية 2 :**

✓ مساحة متوازي الأضلاع المنشأ انطلاقا من متجهتين غير منعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر هي : $\boxed{S = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$ .

✓ مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ هي : $\boxed{S = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|}$

## 2. معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمية :

خاصية :

ليكن $(ABC)$ مستوى في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر.
لدينا $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى $(ABC)$ . إذن :
$$\boxed{M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} . \vec{n} = 0}$$

**مثال :** في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر النقط $A(5,2,0)$ و $B(3,5,-1)$ و $C(-2,-3,1)$ .

1. بين أن النقط $A$ و $B$ و $C$ غير مستقيمية .
2. حدد معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$ .

## 3. تقاطع مستويين :

في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر المستويين :

$(\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0$ و $(\mathrm{Q}) : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ .

لدينا : $\vec{n}(a,b,c)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$ و

$\vec{n'}(a',b',c')$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathrm{Q})$ .

نفترض أن : $\vec{n} \wedge \vec{n'} \neq \vec{0}$ . إذن $(\mathcal{P})$ و $(\mathrm{Q})$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ موجه بالمتجهة $\vec{n} \wedge \vec{n'}$ .

لتحديد نقطة من المستقيم $(\Delta)$ ، نستعمل معادلتي المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathrm{Q})$ .

**مثال :** حدد تقاطع المستويين التاليين: $(\mathcal{P}): x + 2y - 2z + 3 = 0$ و $(Q): 4x - 4y + 2z - 5 = 0$ .

## 4. مسافة نقطة عن مستقيم : Distance d'un point à une droite :

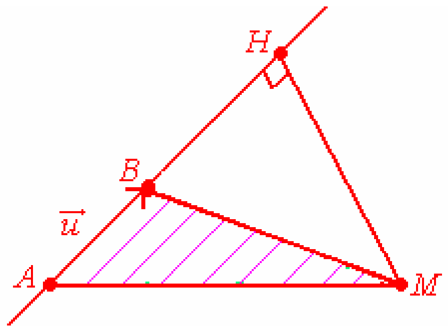
في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر مستقيما $D(A,\vec{u})$ و

نعتبر $M$ نقطة مسقطها العمودي $H$ على المستقيم $D(A,\vec{u})$ .

مساحة المثلث $ABM$ هي : $S=\frac{1}{2}AB\times HM$ ولدينا : $S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|$ . إذن :

$AB\times HM=\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|$ . أي : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times HM=\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|$ ومنه نستنتج أن :

$$d\left(M,D(A,\vec{u})\right)=HM=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}.$$




**خاصية :** المسافة بين نقطة $M$ من الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ و مستقيم $D(A,\vec{u})$ هي :

$$\boxed{d\left(M,D(A,\vec{u})\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}}$$

**مثال :** في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، حدد المسافة بين النقطة $M(3,2,-1)$ و المستقيم $(\Delta):\begin{cases}x=2-t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}\quad /\quad t\in\mathbb{R}$ .

## 5. المسافة بين مستقيمين ( إضافة ) : Distance entre deux droites(Compléments) :

في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر مستقيمين غير مستوائيين $D(A,\vec{u})$ و $D(B,\vec{v})$ . المسافة بين المستقيمين $D(A,\vec{u})$ و $D(B,\vec{v})$ هي :

$$\boxed{d\left(D(A,\vec{u}),D'(B,\vec{v})\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.(\vec{u}\wedge\vec{v})\right|}{\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|}}$$

**مثال :** ليكن $(D)$ المستقيم المار من النقطة $A(1,0,-1)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(0,1,1)$ .

وليكن $(D')$ المستقيم المار من النقطة $B(-1,0,0)$ والموجه بالمتجهة $\vec{v}(1,0,2)$ .

1. بين أن المستقيمين $(D)$ و $(D')$ غير مستوائيين .
2. أحسب المسافة بين المستقيمين $(D)$ و $(D')$ .

**تمرين :** بين أن : $\boxed{\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in\mathcal{V}_3^3\ :\ \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\vec{v})\vec{w}}$

**بالتوفيق إنشاء الله**