LIMITE ET CONTINUITE

I) LIMITE D'UNE FONCTION

1) Activité et rappelles

1.1 Activités :

Activité 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$ $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$ $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{4-5x}-3}{1-\sqrt{2+x}}$ $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+x}{|x^2+x|-2x}$ $\lim_{x\to 0} \frac{sin7x}{5x}$

Activité 2 :

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2+x-4}{\sqrt{x^2+3}-2} \; ; si\ x \neq 1 \\ f(1) = 14 \end{cases}$$

1- Déterminer D_f

2- a) Déterminer : $\lim_{x\to 1} f(x)$.

b) Comparer $\lim_{x\to 1} f(x)$ et $f(1)$

On dit que f est continue en $x_0 = 1$

2) Rappelles

2.1 Définition

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers le réel l quand x tend vers a si : $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$

2.2 Opérations sur les limites

2) Opérations sur les limites

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises et on peut les démontrer en utilisant les définitions des limites.

1) Limite de la somme

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Formes indéterminées**

Ces propriétés sont vraies si x tend vers a^+ ; a^- ; $+\infty$ ou $-\infty$

Formes indéterminées : Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calcules car il y a plusieurs cas.

Exemples :

❶ $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x^2$ on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = 7$

❷ $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - x + 7 = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = +\infty$$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

2) Limites des produits

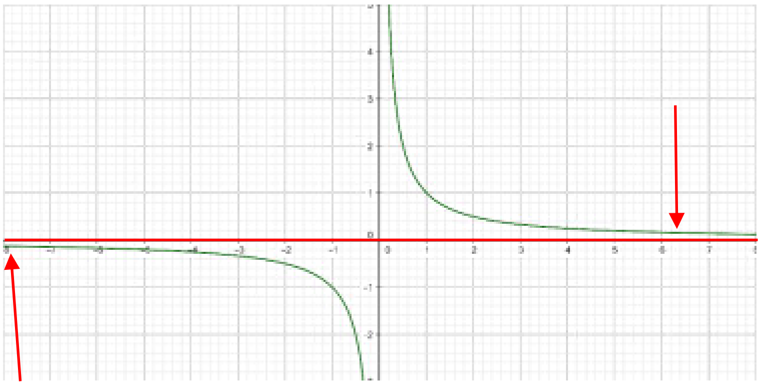
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**Formes indéterminées**

3) Limites des inverses

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarque : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+$ veut dire que f tend vers 0 mais de la droite.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0\ (0^+)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0\ (0^-)$ chose qu'on voit bien sur la courbe de la fonction f



3) Limites des quotients

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**Formes indéterminées**	**Formes indéterminées**

Exemple :

On veut déterminer la $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$ on a :

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^+} (3x+1) = 4 \\ \lim\limits_{x\to1^+} (x^2+x-2) = 0^+ \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2} = +\infty$

Remarque :

- Eviter d'écrire ces expressions qui n'ont pas de sens mathématique : $\frac{?}{0^+}$, $\frac{?}{0^-}$
- Ne pas utiliser $+\infty$ ou $-\infty$ dans les opérations dans $\mathbb{R}$ ($+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels)

Exercices

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

II) CONTINUITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Définition :

Soit f une fonction définie **sur un intervalle de centre a**. On dit que la fonction f est **continue** en a si :

elle admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

C'est-à-dire : $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

Exemples :

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^3-x-14}{x^2-x-2} & ; si\ x > 2 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{2x^2+x-10} & ; si\ x < 2 \\ f(2) = \dfrac{1}{9} & \end{cases}$$

En utilisant la notion des limites étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 2$.

3- Interprétations graphiques

3.1 Activité :

Activité 1:

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x < 1 \\ -x^2+4x, & x \geq 1 \end{cases}$

1- Déterminer $f(1)$ et étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 1$

2- Représenter graphiquement la fonction f.

La courbe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la parabole de sommet $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ et d'axe $\Delta : x = \frac{-b}{2a}$

Activité 2 :

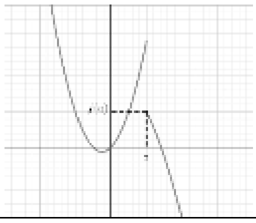
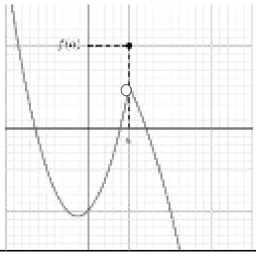
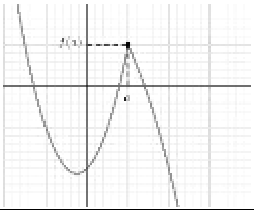
Considérons la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} 2x+2, & x < -1 \\ -3x+3, & x > -1 \end{cases}$ $et\ h(-1) = 3$

1- a) la fonction h admet-elle une limite en $x_0 = -1$

b) la fonction h est-elle continue en $x_0 = -1$

2- Représenter graphiquement la fonction h.

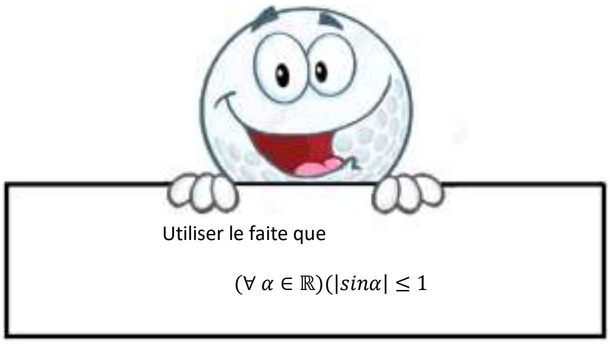
3.2 Interprétations

La courbe	L'interprétation
 $f(x)=\begin{cases}2x^2+x, & x<1\\ -x^2+2, & x\geq 1\end{cases}$	• f est définie en 1 • f n'admet pas de limite en 1 • f n'est pas continue en 1
 $f(x)=\begin{cases}2x^2+x-2, & x<1\\ -x^2+2, & x>1\end{cases};f(1)=2$	• f est définie en 1 • f admet une limite en 1 et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$ • f n'est pas continue en 1
 $f(x)=\begin{cases}2x^2+x-2, & x<1\\ -x^2+2, & x\geq 1\end{cases}$	• f est définie en 1 • f admet une limite en 1 et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)= f(1)$ • f est continue en a

Exercice :

Etudier la continuité de la fonction

$$\begin{cases} f(x)=x\sin\left(\frac{3}{x}\right), & x\neq 0\\ f(0)=0, & x\geq 1\end{cases}$$



III) CONTINUITE A DROITE CONTINUITE A GAUCHE.

1) Activité et définition.

1.1 Activité.

Introduction

Dans l'exercice prrécedent où f était définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^3-x-14}{x^2-x-2} & ;si\ x>2\\ f(x)=\dfrac{x-2}{2x^2+x-10} & ;si\ x<2\\ f(2)=\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

On a trouvé que : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\frac{1}{9}=f(2)$; on dit que **la fonction f est continue à gauche** de 2

et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\neq\frac{1}{9}=f(2)$ on dit que **la fonction f n'est pas continue à droite** de 2.

1.2 Définitions

Définition

❶ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a,a+r[$ (où >0)

On dit que la fonction f est **continue à droite de a** si : f admet une limite finie à droite de a et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

C'est-à-dire : $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

❷ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r, a]$ (où > 0)

On dit que la fonction f est **continue à gauche de a** si : f admet une limite finie à gauche de a et $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

C'est-à-dire : $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq a - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Théorème

Une fonction est continue en un point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a

Exercice 1:

Etudier la continuité de la fonction $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-x-2}{|4x-3|-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{4} \end{cases}$ en $a = 1$

Exercice 2 :

Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2+x-6}{\sqrt{2x+12}-4} & \text{si } x > 2 \\ g(x) = \frac{x^2+\alpha x-\alpha+1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ g(2) = l \end{cases}$

Existent-t-il α et l pour que g soit continue en 2 ?

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

1) Continuité sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f, soit $]a, b[$ un intervalle inclus dans D_f

- On dit que f est continue sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$
- On dit que f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a
- On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b

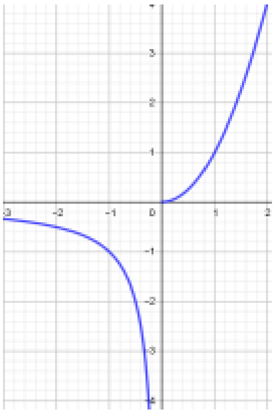
Remarque :

✓ Si une fonction f est continue sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ elle est continue sur $[a, c]$

✓ En général si f est continue sur un intervalle I et sur un intervalle J et si $I \cap J \neq \emptyset$ alors f est continue sur $I \cup J$.

✓ f peut-être continue sur $[a, b[$ et sur $[b, c]$ sans qu'elle soit continue sur $[a, c]$
Dans le graphique ci-dessous f estcontinue sur $[-3,0[$ et continue sur $[0,2]$ mais pas continue sur $[-3,0]$ car elle n'est pas continue en 0

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$



2) Opérations sur les fontions continues

2.1 Rappelles sur les opérations sur les limites finies

Propriété :

Soient f et g deux fonctions tels que : $\lim_{x\to a} f(x) = l$ $\lim_{x\to a} g(x) = l'$ on a :

- $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = l + l'$
- $\lim_{x\to a}(f\times g)(x) = l \times l'$
- $\lim_{x\to a}(|f|)(x) = |l|$
- $\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l'}$ $\quad l' \neq 0$
- $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'}$ $\quad l' \neq 0$
- $\lim_{x\to a}\left(\sqrt{f}\right)(x) = \sqrt{l}$ $\quad l > 0$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel a.

2.2 Opérations sur les fonctions continues

Grace à la propriété précédente et à la définition de la continuité on peut en déduire :

Propriété :

①Si f et g sont deux fonctions continues en a alors :

- $f + g$
- $f \times g$
- $|f|$

sont des fonctions continues en a

② Si f et g sont deux fonctions continues en a et $g(a) \neq 0$ alors

- $\frac{1}{g}$
- $\frac{f}{g}$

sont des fonctions continues en a.

③ Si f une fonction continue en a et $f(a) \geq 0$ alors :

- $\sqrt{f}$ est continue en a

Remarque :

La propriété précédente reste vraie soit à droite de a, à gauche de a ou sur un intervalle I (En tenant compte des conditions)

Résultat :

Une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ est définie comme la somme des plusieurs monômes

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Et puisque la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto kx^n$ et par suite

Propriété :

Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Toute fonction rationnelle f est continue sur tout intervalle $I \subset D_f$

Propriété :

Les fonctions sin et cos sont continue sur $\mathbb{R}$

Exemples :

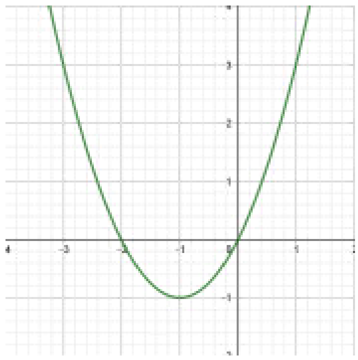
❶ $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x^2 + x + 3$ étant une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ de plus $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 3 \geq 0)$ (Son discriminant Δ est négatif)

❷ $g(x) = \frac{4x^3+x+1}{x^2+2x-3}$ est continue sur $]-\infty, -3[$; sur $]-3,1[$ et sur $]1, +\infty[$.

❸ La fonction tan est continue sur tous le intervalles de la forme : $\left]\frac{-\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1) Image d'un segment (intervalle fermé) :



Activité :

Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + 2x$

1- Déterminer graphiquement les images des intervalles

$I_1 = [0,1]$, $I_2 = [-3, -1]$; $I_3 = [-3,1]$

2- Montrer algébriquement que $f([-3,1]) = [-1,3]$

Rappelle :

$$f(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} f(I) \subset J \\ J \subset f(I) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in I)(f(I) \subset J \\ (\forall y \in J)(\exists y \in J)(f(x) = y) \end{cases}$$

Théorème : (Admis)

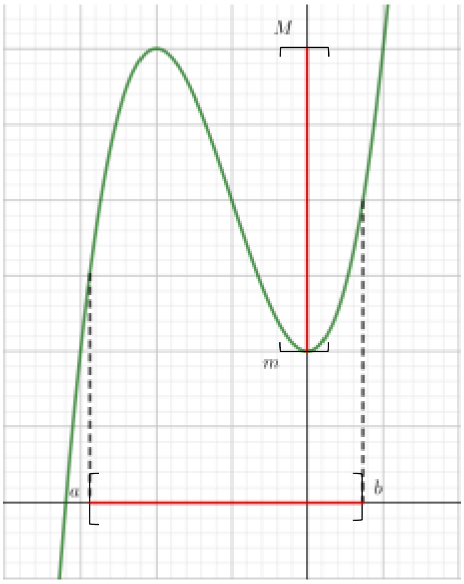
L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est le segment $[m, M]$ où : $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$

La courbe ci-contre est la courbe de la fonction

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$$

$$f([a,b]) = [m,M]$$

continuitéiamgeintervalle.ggb



Cas particulier :

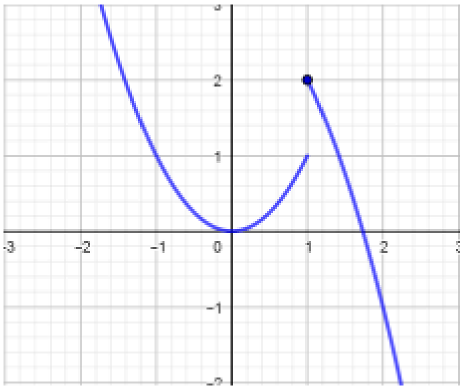
- Si f est continue **croissante** sur $[a,b]$ alors $f([a,b]) = [f(a),f(b)]$
- Si f est continue **décroissante** sur $[a,b]$ alors $f([a,b]) = [f(b),f(a)]$

Remarque :

La continuité dans le théorème précèdent est suffisante mais pas nécessaire

Dans la figure ci-contre f n'est pas continue mais

$$f([0,2]) = [f(2),f(1)] = [-1,2]$$



2) Image d'un intervalle.

2.1 Théorème général

Théorème (admis)

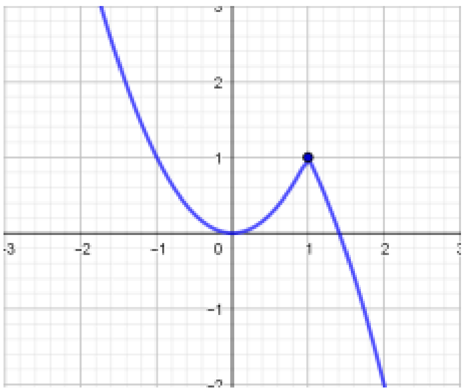
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque :

L'intervalle I et son image $f(I)$ par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

Dans le cas de la courbe ci-contre on a :

$f(]0,2]) = [-2,1]$



2.2 Cas d'une fonction strictement monotone :

L'intervalle I	$f(I)$: f strictement croissante	$f(I)$: f strictement décroissante
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,+\infty[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),f(a)]$
$]-\infty,b[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$
$]-\infty,+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$

Remarque

Si f n'est pas strictement monotone sur l'intervalle I, on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant l'intervalle I en intervalles où f est strictement monotone et on utilise la propriété $\boldsymbol{f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)}$.

Exercice :

1- Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = 2x^2 - 3x^2$

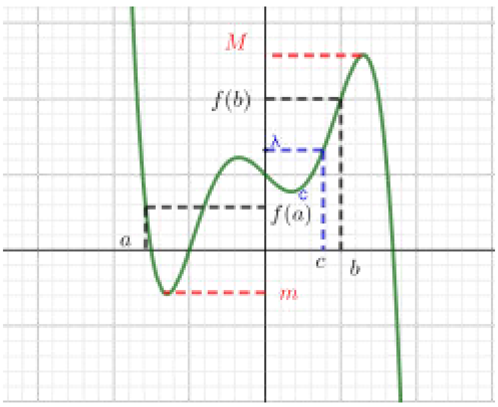
2- Déterminer les images des intervalles suivants : $]-1,0]$; $[1,2]$; $[-1,2[$; $[0,+\infty[$

V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE – TVI.

1) Le théorème :

1.1 Cas général

Preuve :



Rappelons que : $f(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in I)(f(x) \in J) \\ (\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y \end{cases}$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I tels que : $a < b$.

On sait que $f([a,b]) = [m,M]$ où $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

On a donc $f(a) \in [m,M]$ et $f(b) \in [m,M]$.

Soit λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ on a donc : $\lambda \in [m,M]$ et puisque $f([a,b]) = [m,M]$ donc λ admet au moins un antécédent c dans l'intervalle $[a,b]$.

D'où pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$

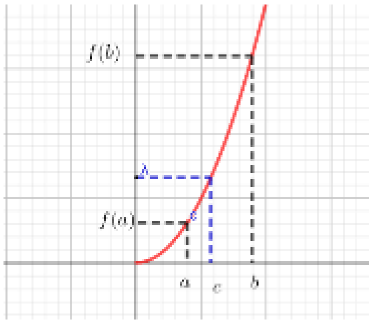
Théorème T.V.I :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$

1.2 Cas f strictement monotone.

Théorème T.V.I (cas f strictement monotone)

> Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$.
>
> Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul
>
> $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$



Remarque :

L'expression " Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$ "

peut-être formulée comme :

" Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $[a, b]$

Corolaire1 (T.V.I) :

> Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
>
> Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Preuve :

$f(a) \times f(b) < 0$ veut dire que $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

On prend $\lambda = 0$ dans le théorème général des valeurs intermédiaire.

Corolaire2 (T.V.I) :

> Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$.
>
> Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe un et un seul c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$

2) Applications :

Exercice 1 :

1- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une racine unique dans [0,1]

2- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une racine unique dans $\mathbb{R}$.

VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

1) Composition de deux fonctions

1.1 Rappelle

Activité :

Soit $f(x) = 2x^2 + x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

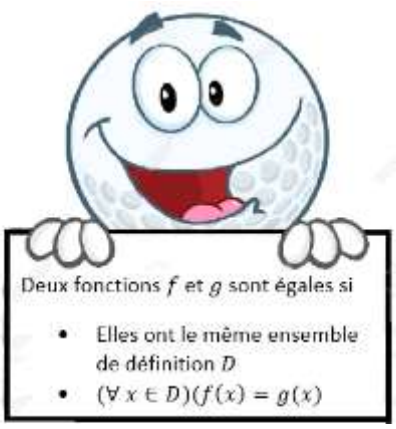
1- Déterminer : $g(f(x))$, déterminer les conditions d'existence de $g(f(x))$.

2- Déterminer :$f(g(x))$, déterminer les conditions d'existence de $f(g(x))$,

La fonction qui à tout réel x associe $g(f(x))$, s'appelle la composition des fonction f et g dans cet ordre et se note gof

La fonction qui à tout réel x associe $f(g(x))$, , s'appelle la composition des fonction g et f dans cet ordre et se note fog

3- A-t-on $gof = fog$?



Exercice :

Soient $u(x)=\sqrt{x^2-1}$ et $v(x)=1-3x$

1- Déterminer uov et son ensemble de définition.

2- Déterminer vou et son ensemble de définition.

1.2 Composition et limite et continuité

Théorème :

> Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que $f(I)\subset J$ et x_0 un élément de I.
>
> ① Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.
>
> ② Si f est continue I et g continue en $f(I)$ alors gof est continue I.

Exemples :

❶ $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]$

❷ $f(x)=sin\left(\frac{\pi x}{1+x^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$

Théorème :

> Soit u une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 telle que $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=l$; si v est continue en l alors $\lim\limits_{x\to x_0}(vou)(x)=v(l)$

Exercices

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+3}-2}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\pi\frac{sin4x}{3x}\right)$

2) Fonctions réciproques

Activité :

Soit $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

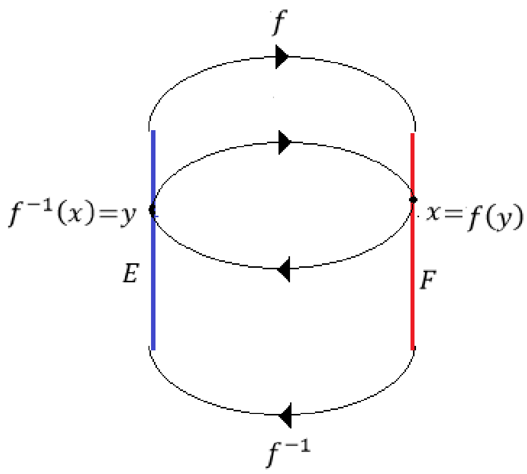
1- Montrer que pour tout y dans $=[0,+\infty[$, l'équation $f(y)=x$ admet une solution unique dans l'intervalle

$J=]0,1]$

2- Etudier la monotonie et la continuité de f sur $\mathbb{R}$

On dit que la fonction $\boldsymbol{f}$ **admet une fonction réciproque de** $\boldsymbol{J} =]\mathbf{0},\mathbf{1}]$ **vers** $\boldsymbol{I} = [\mathbf{0},+\infty[$

Remarque :



$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in E \end{cases}$

On a :

$$(\forall x \in F)(f o f^{-1}(x) = x)$$

$$(\forall x \in E)(f^{-1} o f(x) = x)$$

Théorème :

Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I, On a f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $J = f(I)$ vers I.

Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = 2x^2 + x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Déterminer $J = f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers $[0,1]$ et déterminer $f^{-1}(x)$ pour x dans J

Exercice 2 :

Soit la fonction $g(x) = x - 2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Montrer que g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ puis déterminer $J = g([1,+\infty[)$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers $[1,+\infty[$et déterminer $g^{-1}(x)$ pour x dans J

Propriété 1 :

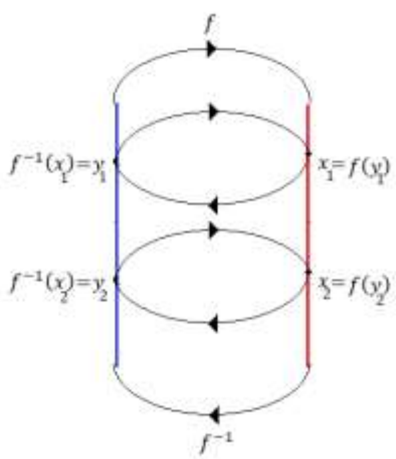
Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I.

Preuve :

$$T_{f^{-1}/_J} = \frac{f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{y_1-y_2}{f(x_1)-f(x_2)}$$

$$= \frac{1}{T_{f/_I}} \quad (T_{f/_I} \neq 0 \ f \text{ est strictement monotone})$$



Donc le taux de f^{-1} sur J à le même signe que le taux de f sur I

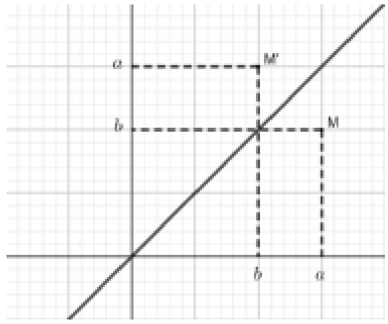
Et on conclut.

Propriété 2 :

Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors $C_{f^{-1}}$ et C_f sont symétriques par rapport à :

$(\Delta)\ \ y = x$

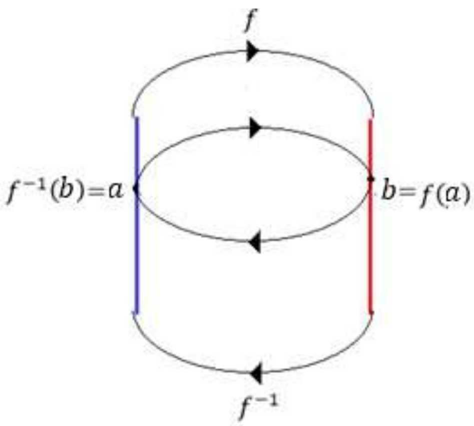
Rappelles :



①$M(x,y) \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$

②Dans un repère orthogonal si on a un point $M(a,b)$ son symétrique par rapport à la droite $(\Delta)\ y = x$ est le point $M'(b,a)$.

Preuve d'une propriété :



Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I, f^{-1} sa fonction réciproque définie de $J = f(I)$ vers I.

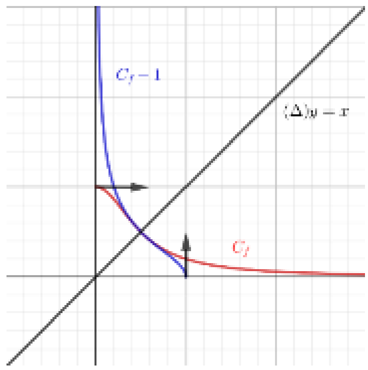
C_f et $C_{f^{-1}}$ sont les courbes respectives de f et de f^{-1}.

Soit $M(a, f(a))$ un point de la courbe C_f son symétrique par rapport à la droite $(\Delta)\ y = x$ est le point $M'(f(a), a)$.

Or : $\begin{cases} f(a) = b \\ a = f^{-1}(b) \end{cases}$ donc $M'(b, f^{-1}(b))$ d'où $M' \in C_{f^{-1}}$

Propriété :

> Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I, f^{-1} sa fonction réciproque définie de $J = f(I)$ vers I.C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta)\ y = x$



A remarquer que la symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes…

3) La fonction racine n − $éme$

3.1 Définition et règles de calculs

Propriété et définition :

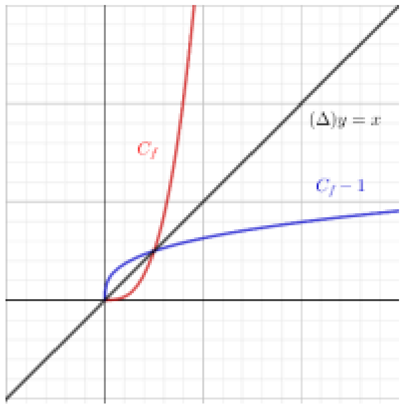
> Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; la fonction u: $x \mapsto x^n$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque u^{-1} de $u(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.
> La fonction réciproque u^{-1} s'appelle la fonction racine $n - éme$ et se note $\sqrt[n]{\ }$

Conséquence de la définition :

- La fonction $\sqrt[n]{\ }$ est définie sur $\mathbb{R}^+$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} \geq 0)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x)$

- La fonction $\sqrt[n]{\ }$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ strictement croissante.
  - $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ (\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y)$
  - $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n)$
  - $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\ (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N})(\ (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to **} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to **} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to **} u(x) = l \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \to **} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

La courbe de la fonction $\sqrt[n]{\ }$



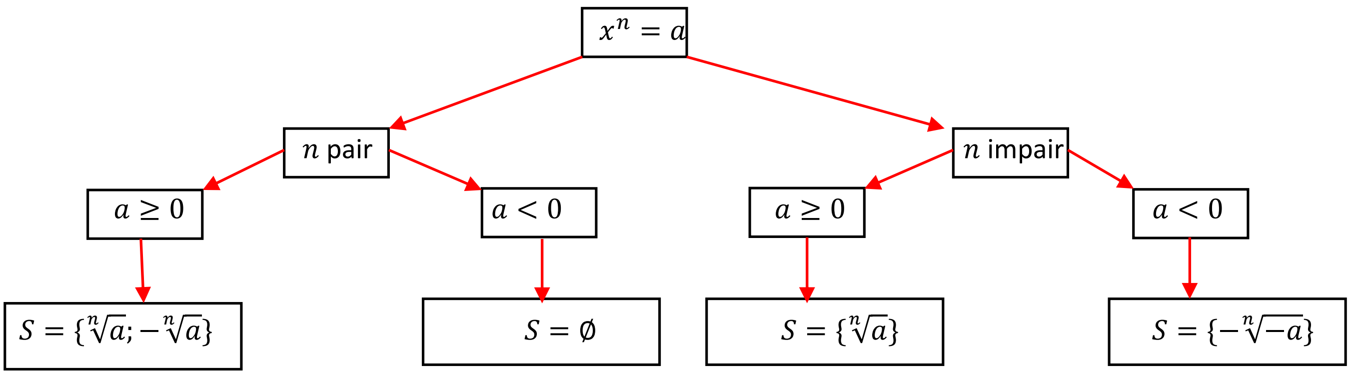
Règle de calcul :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ (\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y})$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\ \left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*)\ \left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x}\right)$ (à prouver)
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*)\left(\sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}\right)$ (à prouver)

Remarque :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\ \sqrt[2]{x} = \sqrt{x})$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\ \sqrt[1]{x} = x)$

L'équation $x^n = a$



Exercices d'applications :

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 = 16$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-1)^3 = -27$

Exercice 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x} - x = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$.

3.2 L'expression conjuguai et ses applications

Ordre 3 :

On sait que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Il en résulte : $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ et $a + b = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

Par suite :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}\right)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}\right)$$

Applications :

① Rendre le dénominateur rationnel :

$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ $\qquad$ $b = \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

② Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{20x^2+7}-3}{x^2+x-2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt[3]{3x-4}-\sqrt{x}}{x-4}$

D'ordre 4 :

On sait que : $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

Il en résulte que : $a - b = \frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

Et par suite :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}\right)$$

A remarquer qu'on ne peut pas factoriser : $a^4 + b^4$

Applications :

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[4]{20x-4}-2}{2x^2+x-3}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{2x+1}-1}{\sqrt[3]{2x+8}-2}$

4) Puissance rationnelle :

4.1 Puissance entier

Rappelle :

Soit x un réel et n un entier naturel non nul on a : $x^n = \underbrace{x \times x \times \dots . \times x}_{n\ fois}$ et $x^0 = 1$ $(x \neq 0)$

Pour $x \neq 0$ on a $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

4.2 Puissance rationnelle

Propriété :

Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier non nul q on pose : $\sqrt[q]{x} = x^{\left(\frac{1}{q}\right)}$

Preuve : (en exercice)

Définition :

Soit x un réel positif et r un rationnel ($r \in \mathbb{Q}$) ; $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$x^r = x^{\left(\frac{p}{q}\right)} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

Propriétés

Soit x et y deux réels positifs, r et r' des rationnels on a :

1. $x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
2. $x^{r\times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
3. $x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}}$ $(x \neq 0)$
4. $x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}}$ $(x \neq 0)$
5. $(xy)^r = x^r y^r$
6. $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

Exercice 1 :

Démontrer 1 et 2

Exercice 2 :

Comparer les nombres $a = \sqrt[3]{5}$ et $b = \sqrt[4]{20}$

Application aux calculs des limites.

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[5]{2x^2+3x} - \sqrt[4]{3x^3+x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{8x^2+3x} - 2\sqrt[3]{x^2-x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[p]{x^q+1} - \sqrt[q]{x^p+1}$ (discuter suivant les valeurs de p et q)

Etude de fonctions

I) *Limite d'une fonction (Rappel)*

Limite d'une fonction polynôme

- *Si f est une fonction* **polynôme** *alors* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- *La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré*

Limite d'une fonction rationnelle

- *La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré.*
- Soit f une fonction rationnelle tel que : $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$
- Si $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ forme indéterminée. C'est à dire a est une racine de $p(x)$ et $q(x)$

donc $$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)p_1(x)}{(x-a)q_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

Limite d'une fonction irrationnelle

- Si $\lim_{x\to ?} f(x) = a$, avec $(a \geq 0)$ alors $\lim_{x\to ?} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a}$.
- Si $\lim_{x\to ?} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to ?} \sqrt{f(x)} = +\infty$

Limites usuelles

Soit $n \in IN^*$ **on a:**

- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ *si n est impair*
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ *si n est pair*
- $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Limites trigonométriques

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Formes indéterminées

$+\infty + (-\infty)$ ***et*** $0 \times \infty$

$\left(\dfrac{0}{0}\right)$ ***et*** $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Operations sur les limites

Dans ce paragraphe, a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, L et M sont deux nombres réels.

Limite de la somme de deux fonctions.

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	M	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$L+M$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F. I**

Limite du produit de deux fonctions.

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	∞	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	M	∞	∞	∞
$\lim_{x\to a} (f(x)\times g(x))$	$L\times M$	∞	∞	**F. I**

Le signe se détermine en respectant la règle des signes

Limite du quotient de deux fonctions.

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	∞	∞	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$M\neq 0$	0	M	∞	0
$\lim_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{L}{M}$	∞	∞	**F. I**	**F. I**

Limites et ordre.

Dans ce paragraphe, a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème1: Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

- **Si** $(\forall x \in I); f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.
- **Si** $(\forall x \in I); f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

THÉORÈME DES GENDARMES : Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I. et k un réel.

Si $(\forall x \in I);\ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = k$ Alors $\lim_{x\to a} f(x) = k$

Lemme :

Si $(\forall x \in I); |f(x)-k| \leq g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

Alors $\lim_{x\to a} f(x) = k$

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice1: Calculer les limites

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+3x^2-x^3$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-2x+5$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4-2x+1\right)$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-5}{x-x^2+9}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-5}{x^2-6x+9}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{x^2-3x}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2}{4x^2+1}}$

8) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+1}{x^2-1}$

9) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

10) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$

11) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x-1}$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+3}-2x$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+3}+2x$

14) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+3}-x$

16) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+3}+x$

17) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x(x-3)}{x-\sqrt{x+1}-1}$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1}-3x$

19) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$

20) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x^2+x+3}+x-5}{x-2}$

21) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

22) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

23) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos x}{x}$

24) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1+\cos^2 x}{x^2+2}$

Exercice2 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0\,;3[$ par: $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-3x}$

1) Etudier le signe de f sur l'intervalle I.
2) Calculer les limites de f aux bornes de I.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-6x+9}$

1) Etudier le signe de x^2-6x+9.
2) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
3) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$

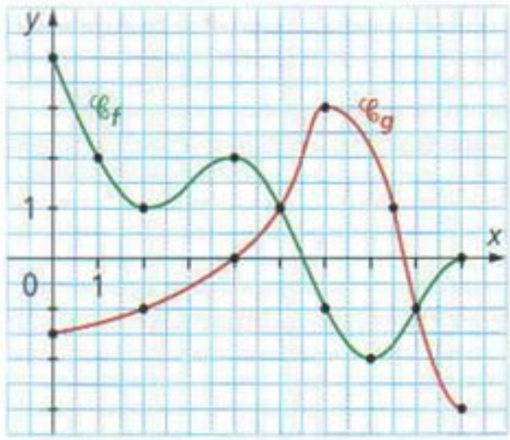
Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

1) Montrer que, $(\forall x>0)$; $\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right|\le\dfrac{1}{x^2}$.
2) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 5 :

Soient (C_f) *et* (C_g) les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g .



1) Conjecturez
a) (D_f) *et* (D_g)
b) $\lim\limits_{x\to4} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$
c) $f([0;2])$ *et* $g([0;9])$
d) Le signe de $f(x)$.
e) Le signe de $g'(x)$.
f) Le tableau de variation de f.

2) Quelles sont les solutions des équations:
$f(x)=g(x)$; $f(x)=0$; $f(x)=-1$ *et* $g(x)=1$

3) Soit m un réel donné, donnez le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation: $f(x)\le g(x)$.

5) Supposons que $D_f=[-9;9]$ et f est une fonction paire .
a) Donnez la valeur de: $f(-4)$ *et* $f(-7)$
b) Complétez la construction de la courbes (C_f) .

6) Construire la courbe de la function $|f|$ sur l'intervalle $[0;9]$.

Le succès est la somme de petits efforts, répétés jour après jour.

Leo Robert Collier

II) *Continuité d'une fonction.*

1) *Continuité en un point- continuité à droite - continuité à gauche*

Définition1: Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Attention: *Une fonction ne peut pas être continue en un point qui n'appartient pas au domaine de définition, cela n'a aucun sens.*

Définition2: Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; a+\alpha[$ *avec* $\alpha > 0$.

On dit que f est continue à droite en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Propriété1: Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Théorème: Si f est dérivable en un point a, alors f est continue en a.

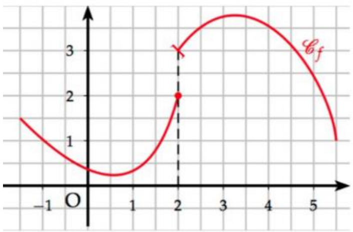
Attention **:** *La réciproque est fausse.*

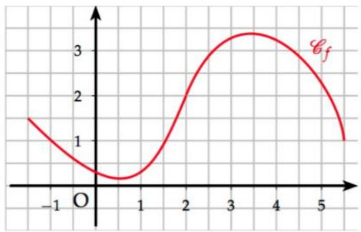
2) *Continuité sur un intervalle*

Définition : On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle ouvert si elle continue en tout point de l'intervalle.

Remarque **:** *Dire que **f** est continue sur **I** signifie que l'on peut tracer sa courbe sans lever le crayon.*

La fonction f est discontinue en **2** car $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$





La fonction f est continue en **2** car $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2 = f(2)$

Propriétés : - Toute fontion polynôme est continue sur **IR**.

- Toute fonction rationnelle est continue sur les intervalles où elle est définie.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Les fonctions ***sinus*** et ***cosinus*** sont continues sur **IR**.
- La fonction ***tangente*** est continue sur ses intervalles de définition.
- Toutes les fonctions construites par **somme**, **produit**, **quotient** ou par **composition** des fonctions précédentes sont continues sur leur domaine de définition.

Théorème: Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Attention **:** *La réciproque est fausse.*

Exemple **:** la fonction $x \mapsto |x|$ est continue, mais n'est pas dérivable en zéro.

3) *Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue.*

Propriétés : L'image d'un intervalle I par une fonction continue f est un intervalle ***f(I)***.

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Remarques : $f([a;b]) = [m;M]$ tels que m est le minima et M est le maxima de f sur le segment $[a;b]$.

- Si l'intervalle I n'est pas fermé, alors son image est un intervalle qui peut être fermé, ouvert ou semi-ouvert.

Cas particulier :

L'image d'un intervalle I par une fonction f **continue** et **monotone** est un intervalle $J=f(I)$.

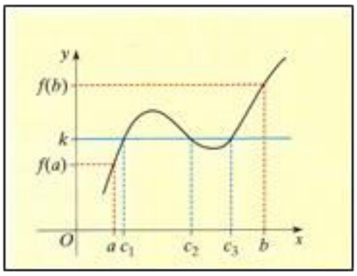
	$f(I)$ est l'intervalle:	
Si $I = \ldots$	f est croissante sur I	f est décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$]-\infty;b]$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(b)]$	$[f(b);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$
$]a;+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$

4) *Théorème des valeurs intermédiaires.*

Théorème : Soit f une fonction ***continue*** sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c)=k$

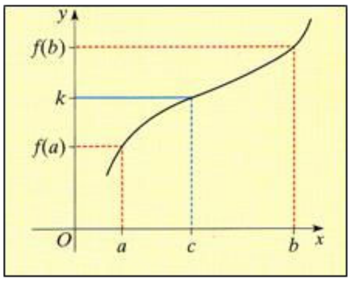
Autrement dit : l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a;b]$.

Interprétation graphique: La droite (D): $y=k$ coupe la courbe de f en au moins un point dont l'abscisse est comprise entre a et b.



Corollaire1 : Si f est une fonction *continue* et ***strictement*** *monotone* sur un intervalle $[a;b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une solution ***unique*** dans $]a;b[$.

Interprétation : La droite (D): $y=k$ coupe la courbe de f en un seul point dont l'abscisse est comprise entre a et b.



Corollaire2 : Si f est une fonction *continue* , ***strictement*** *monotone* sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution ***unique*** dans l'intervalle $]a;b[$.

Interprétation : la courbe de la fonction f coupe l'axe des **abscisses** en un seul point dont l'abscisse est comprise entre a et b.

Méthode d'encadrement d'une solution par *dichotomie*

5) *Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle*

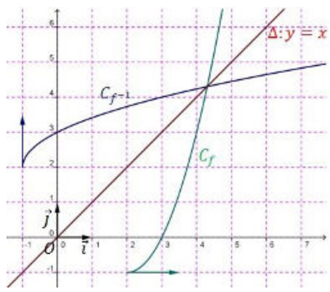
Soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I **et** $J=f(I)$.

La fonction **réciproque** de la fonction f est la fonction notée f^{-1} définie sur J à valeurs dans I, telle que :

$$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \quad avec \quad x\in J \;\; et \;\; y\in I$$

Corollaires : Si f est ***continue*** et ***strictement monotone*** sur un intervalle I, alors :

1) f admet une fonction réciproque notée f^{-1} définie sur $J=f(I)$ à valeurs dans I
2) $(\forall x\in I);f^{-1}(f(x))=x$ *et* $(\forall y\in J);f(f^{-1}(y))=y$.
3) La fonction f^{-1} est continue et strictement monotone sur $J=f(I)$.
   (de même sens de monotonie que k).
4) Dans un repère orthonormé, $(C_{f^{-1}})$ et sont symétriques par rapport à la première bissectrice. (la droite d'équation $y=x$).



Théorème(**important**): Si f une fonction ***continue*** *et* ***strictement monotone*** sur un intervalle I et $k\in f(I)$

Alors l'équation $f(x)=k$ admet une ***unique solution*** dans I.

III) Dérivabilité d'une fonction.

1) Dérivabilité d'une fonction en un point.

Définition1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. et a un élément de I.
On dit que f est dérivable en a, s'il existe un nombre réel ℓ tel que: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$
Le nombre ℓ s'appelle alors le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

Définition2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;b[$ avec $b>a$.
On dit que f est dérivable à droite en a, s'il existe un nombre réel ℓ tel que: $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.
Le nombre ℓ s'appelle alors le nombre dérivé à droite en a, et on le note $f'_d(a)$.

Propriété : f est dérivable en a ***si est seulement si*** f est dérivable à droite en a, f est dérivable à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Interprétation géométrique du nombre dérivé.

1) Si f est dérivable en a alors (C_f) admet une tangente en $A(a;f(a))$ d'équation: $y = f'(a)(x-a)+f(a)$
2) Si f est dérivable en a alors $x \mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ est la fonction affine tangente à f au point a.
3) Si f est dérivable à droite en a alors (C_f) admet une demi-tangente en $A(a;f(a))$ de coefficient directeur $f'_d(a)$.
4) Si f est dérivable à gauche en a alors (C_f) admet une demi-tangente en $A(a;f(a))$ de coefficient directeur $f'_g(a)$.
5) Si f est dérivable à droite en a et à gauche en a et $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ alors $A(a;f(a))$ est un **point anguleux**.
6) Si $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en a, Cependant, la courbe admet au point d'abscisse a une demi-tangente verticale.

2) Dérivabilité sur un intervalle - Fonction dérivée d'une fonction.

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée ***fonction dérivée*** de f et se note f'.
- On dit que f est dérivable sur $[a;b]$ si elle est dérivable sur $]a;b[$, dérivable à droite en a **et** dérivable à gauche en b.

Propriétés : Toute fonction **polynôme** est dérivable sur **IR** .

- Toute fonction **rationnelle** est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Les deux fonctions ***sin*** et ***cos*** sont dérivables sur **IR**.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Théorème (**Dérivation d'une fonction composée**) :
Si u est une fonction définie et dérivable sur I et v une fonction définie et dérivable sur J tel que $u(I) \subset J$, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I);\ (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

Théorème (**Dérivation d'une fonction réciproque**) :
Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I et $a \in I$.

- Si f est dérivable sur I et $(\forall x \in I);\ f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et on a :

$(\forall x \in J);\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ et si $f'(a) \neq 0$ alors $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

- Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un réel alors :

Opérations sur les fonctions dérivées			*Dérivées des fonctions usuelles*	
$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$		k	0
$\lambda.u(x)$	$\lambda.u'(x)$		ax	a
$u(x)\times v(x)$	$u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)$		ax^n	$n.ax^{n-1}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$		$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$		$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$u\circ v(x)$	$u'(v(x))\times v'(x)$		$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt[n]{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)}}$		$\cos x$	$-\sin x$
$(u(x))^n$	$n.(u(x))^{n-1}\times u'(x)$		$\tan x$	$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

3) Applications de la fonction dérivée.

- ***Dérivée et variations.*** Théorèmes admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $(\forall x\in I); f'(x)\geq 0$, alors la fonction f est **croissante** sur I.
- Si $(\forall x\in I); f'(x)\leq 0$, alors la fonction f est **décroissante** sur I.
- Si $(\forall x\in I); f'(x)> 0$, alors la fonction f est **strictement croissante** sur I.
- Si $(\forall x\in I); f'(x)< 0$, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I
- Si $(\forall x\in I); f'(x)= 0$, alors la fonction f est constante sur I.

Remarque : Si $(\forall x\in I); f'(x)\geq 0$ et f' s'annule en des points isolés alors la fonction f est **strictement croissante** sur I

- ***Extremums d'une fonction.***

Propriété : f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$.

- Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local de la fonction f sur I.

Remarque : Si $f'(a)=0$ et f' ne change pas de signe, alors $A(a;f(a))$ est un **point d'inflexion**.

- ***Concavité et dérivée seconde***

Définition : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. et (C_f) sa courbe représentative.

- On dit que la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives (**convexe**), s'elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives (**concave**), s'elle est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

Propriété : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Si $(\forall x\in I); f''(x)\geq 0$, alors la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives.
- Si $(\forall x\in I); f''(x)\leq 0$, alors la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives.
- Si $f''(a)=0$ et f''change de signe, alors $A(a;f(a))$est un **point d'inflexion**.

IV) Les branches infinies

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$	La droite d'équation $y=b$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$	La droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à (C_f).
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$	La droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\infty$ → (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ → $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=\dots$
  - ∞ → (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$
  - b → (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$ → (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

V) Axe de symétrie - Centre de symétrie

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

On dit que la droite $(\Delta): x=a$ est un axe de symétrie de si pour tout x de D on a :

$(2a-x)\in D$ *et* $f(2a-x)=f(x)$

On dit que le point $I(a;b)$ est un centre de symétrie de si pour tout x de D on a :

$(2a-x)\in D$ *et* $f(2a-x)=2b-f(x)$

VI) Fonction paire - Fonction impaire

On dit que f est une fonction paire : Si pour tout x de D_f on a : $-x\in D_f$ *et* $f(-x)=f(x)$

Remarque : La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On dit que f est une fonction impaire : Si pour tout x de D_f on a: $-x\in D_f$ *et* $f(-x)=-f(x)$

Remarque : La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

VII) Fonction périodique

On dit que f est une fonction périodique s'il existe un réel positif T tel que : pour tout x de D_f on a:

$(x+T)\in D_f$ *et* $f(x+T)=f(x)$ (T est appelé une période de la fonction f)

VIII) Position relative d'une courbe et d'une droite

Pour étudier la position relative d'une courbe et d'une droite $(\Delta): y=ax+b$ sur un intervalle I, on doit étudier le signe de $f(x)-(ax+b)$ sur I.

- *si* $(\forall x\in I);\ f(x)-(ax+b)>0$, alors est strictement au-dessus de (Δ) sur I.
- *si* $(\forall x\in I);\ f(x)-(ax+b)<0$, alors est strictement au-dessous de (Δ) sur I.
- Les solutions de l'équation $f(x)-(ax+b)=0$ sont les abscisses des points d'intersection de et (Δ).

IX) Fonction racine $n^{ième}$

Définition : a désignant un réel positif et n un entier naturel non nul.

On appelle racine $\mathbf{n}^{\text{ième}}$ de a le réel positif noté $\sqrt[n]{a}$ tel que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Propriétés : Pour tous réels x et y positifs et pour tous entiers naturels m et n on a :

- $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la fonction **réciproque** de la fonction $x \mapsto x^n$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
- $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$
- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ / $y \neq 0$

Remarque. Les règles de calculs sur les ***racines*** $n^{ième}$ sont les mêmes que celles sur les racines carrées.

X) Puissance d'exposant rationnel d'un réel strictement positif.

Soients x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel tel que : $r = \dfrac{p}{q}$ *avec* $(p;q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

On remarque que : $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^{\frac{p}{q}\times q} = x^p$ *et* $\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^q = x^p$ *donc* $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$.

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tous nombres rationnels m et n on a :

- $x^n \times y^n = (xy)^n$
- $x^m \times x^n = x^{m+n}$
- $(x^m)^n = x^{mn}$
- $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$
- $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$

Remarque. Les règles de calculs sur les exposants rationnels sont les mêmes que celles sur les exposants entiers.

La fonction logarithme népérien:

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$ (ou $\log_e$), est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1

Déductions et propriétés:

$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$	$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r\ln x \ ; \ (r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ • $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ • $\ln x \succ \ln y \Leftrightarrow x \succ y$		
$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ • $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

Si n est pair, alors $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right); \ln x^n = n \ln|x|$

Le Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0;+\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ et $u(x) \succ 0\}$

Les limites:

Limites principales		Déductions
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$	$\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x) - 1} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit a droite ou a gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Si u est strictement positive et continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

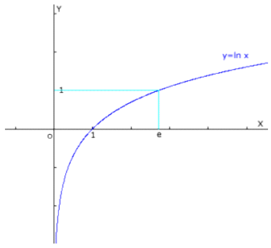
La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Si u est strictement positive et dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I \ ; \ (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

La représentation graphique:



signe de $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$-$	0	$+$

La fonction logarithme de base a avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

Définition:

La fonction logarithme de base a est la fonction notée : $\log_a$

tel que : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier: la fonction $\log_{10}$ est la fonction logarithme décimal et on la note $\log$

Déductions et propriétés:

$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$	$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\log_a x^r = r \log_a x$ $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$ $\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$	

Limites et inéquations:

$a \succ 1$	$0 \prec a \prec 1$
$\log_a x \succ \log_a y \Leftrightarrow x \succ y$	$\log_a x \succ \log_a y \Leftrightarrow x \prec y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$

La dérivée:

$$\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

I. Définitions

1. Définition d'une suite

Définition 1.
- Une ***suite*** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n-ème ***terme*** ou ***terme général*** de la suite.

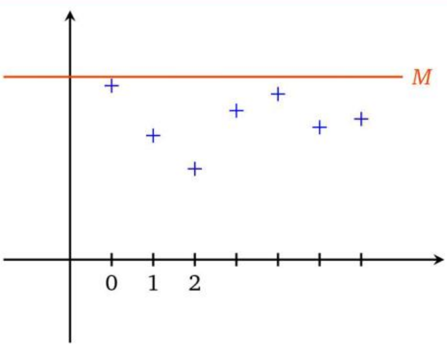
La suite est notée u, ou plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n). Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0, on note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

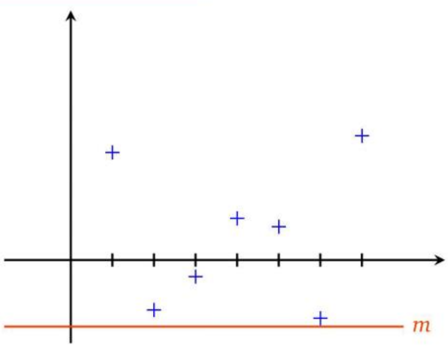
Exemple
- $(\sqrt{n})_{n\geqslant 0}$ est la suite de termes : $0,\ 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}, \ldots$
- $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ est la suite qui alterne $+1, -1, +1, -1, \ldots$
- La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de l'introduction définie par $S_n = S \times (1,1)^n$,
- $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (suite de Fibonacci). Les premiers termes sont $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ Chaque terme est la somme des deux précédents.
- $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$. Les premiers termes sont $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

2. Suite majorée, minorée, bornée

Définition 2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***majorée*** si $\quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***minorée*** si $\quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***bornée*** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M.$$

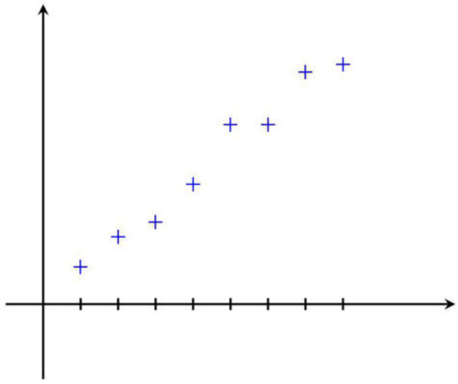




3. Suite croissante, décroissante

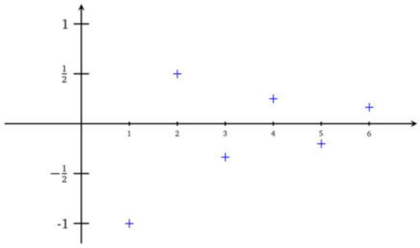
Définition 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si $\quad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}\geqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement croissante* si $\quad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}> u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si $\quad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}\leqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement décroissante* si $\quad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}< u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Voici un exemple d'une suite croissante (mais pas strictement croissante) :



Remarque.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n\geqslant 0$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$.

Exemple
- La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de l'introduction est strictement croissante car $S_{n+1}/S_n = 1,1>1$.
- La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n=(-1)^n/n$ pour $n\geqslant 1$, n'est ni croissante ni décroissante. Elle est majorée par $1/2$ (borne atteinte en $n=2$), minorée par -1 (borne atteinte en $n=1$).



II. Limites

1. Introduction

Pour un trajet au prix normal de 20 euros on achète une carte d'abonnement de train à 50 euros et on obtient chaque billet à 10 euros. La publicité affirme « 50% de réduction ». Qu'en pensez-vous ?
Pour modéliser la situation en termes de suites, on pose pour un entier $n\geqslant 1$:

$$u_n = 20n$$
$$v_n = 10n+50$$

u_n est le prix payé au bout de n achats au tarif plein, et v_n celui au tarif réduit, y compris le prix de l'abonnement. La réduction est donc, en pourcentage :

$$1-\frac{v_n}{u_n}=\frac{u_n-v_n}{u_n}=\frac{10n-50}{20n}=0,5-\frac{5}{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,5$$

Il faut donc une infinité de trajets pour arriver à 50% de réduction !

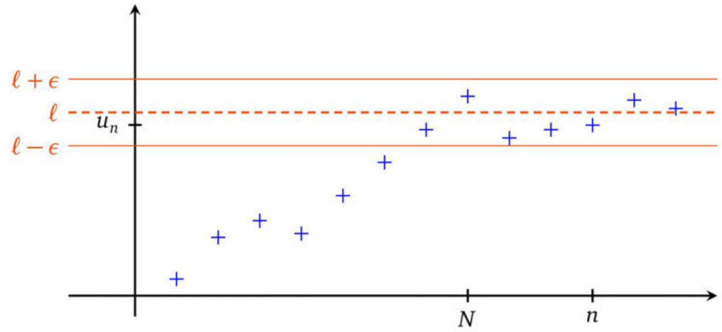
2. Limite finie, limite infinie

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

Définition 4.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour *limite* $\ell \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$ alors $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon$:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \epsilon)}$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* ℓ. Autrement dit : u_n est proche d'aussi près que l'on veut de ℓ, à partir d'un certain rang.



Définition 5.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ si :
$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies u_n \geqslant A)$$
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$ si :
$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies u_n \leqslant -A)$$

Remarque.

1. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou parfois $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, et de même pour une limite $\pm\infty$.
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \lim_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$.
3. On raccourcit souvent la phrase logique en :
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \epsilon).$$
Noter que N dépend de ϵ et qu'on ne peut pas échanger l'ordre du « pour tout » et du « il existe ».
4. L'inégalité $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon$ signifie $\ell - \epsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \epsilon$. On aurait aussi pu définir la limite par la phrase : $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| < \epsilon)$, où l'on a remplacé la dernière inégalité large par une inégalité stricte.

Définition 6.
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* si elle admet une limite ***finie***. Elle est *divergente* sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers $\pm\infty$, soit elle n'admet pas de limite).

On va pouvoir parler de ***la*** limite, si elle existe, car il y a unicité de la limite :

Proposition 1.
Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Démonstration. On procède par l'absurde. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente ayant deux limites $\ell \neq \ell'$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \frac{|\ell - \ell'|}{2}$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe N_1 tel que $n \geqslant N_1$ implique $|u_n - \ell| < \epsilon$.
De même $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell'$, il existe N_2 tel que $n \geqslant N_2$ implique $|u_n - \ell'| < \epsilon$.
Notons $N = \max(N_1, N_2)$, on a alors pour ce N :

$$|u_N - \ell| < \epsilon \quad \text{et} \quad |u_N - \ell'| < \epsilon$$

Donc $|\ell-\ell'| = |\ell-u_N+u_N-\ell'| \leqslant |\ell-u_N|+|u_N-\ell'|$ d'après l'inégalité triangulaire. On en tire $|\ell-\ell'| \leqslant \epsilon+\epsilon = 2\epsilon < |\ell-\ell'|$. On vient d'aboutir à l'inégalité $|\ell-\ell'| < |\ell-\ell'|$ qui est impossible. Bilan : notre hypothèse de départ est fausse et donc $\ell = \ell'$.

3. Propriétés des limites

Proposition 2.

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty}(u_n-\ell) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty}|u_n-\ell| = 0$,
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty}|u_n| = |\ell|$.

Démonstration. Cela résulte directement de la définition.

Proposition 3 (Opérations sur les limites)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes.

1. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell$.*
2. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, alors*
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \ell+\ell'$$
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n\times v_n) = \ell\times\ell'$$
3. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ alors $u_n \neq 0$ pour n assez grand et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$.*

Nous ferons la preuve dans la section suivante.
Nous utilisons continuellement ces propriétés, le plus souvent sans nous en rendre compte.

Exemple
Si $u_n \to \ell$ avec $\ell \neq \pm 1$, alors
$$u_n(1-3u_n) - \frac{1}{u_n^2-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(1-3\ell) - \frac{1}{\ell^2-1}.$$

Proposition 4 (Opérations sur les limites infinies)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = 0$
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = +\infty$.*
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un nombre $\lambda > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n\times v_n) = +\infty$.*
4. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ pour n assez grand alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.*

Exemple
La suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$, donc la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ tend vers 0.

4. Des preuves

Nous n'allons pas tout prouver mais seulement quelques résultats importants. Les autres se démontrent de manière tout à fait semblable.
Commençons par prouver un résultat assez facile (le premier point de la proposition 4) :

$$\text{« } \textit{Si} \quad \lim u_n = +\infty \quad \textit{alors} \quad \lim \frac{1}{u_n} = 0. \text{ »}$$

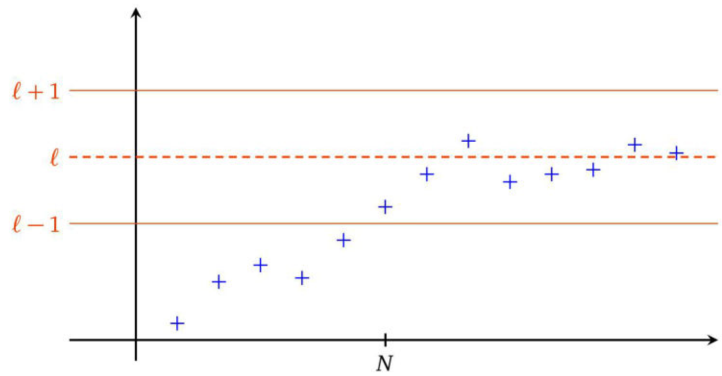
Démonstration. Fixons $\epsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ implique $u_n \geqslant \frac{1}{\epsilon}$. On obtient alors $0 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \epsilon$ pour $n \geqslant N$. On a donc montré que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Afin de prouver que la limite d'un produit est le produit des limites nous aurons besoin d'un peu de travail.

Proposition 5.
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers le réel ℓ. En appliquant la définition de limite (définition 4) avec $\epsilon = 1$, on obtient qu'il existe un entier naturel N tel que pour $n \geqslant N$ on ait $|u_n - \ell| \leqslant 1$, et donc pour $n \geqslant N$ on a

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leqslant |\ell| + |u_n - \ell| \leqslant |\ell| + 1.$$



Donc si on pose

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$$

on a alors $\forall n \in \mathbb{N}\ \ |u_n| \leqslant M$.

Proposition 6.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = 0$.

Exemple
Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite donnée par $u_n = \cos(n)$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est celle donnée par $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.

Démonstration. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on peut donc trouver un réel $M > 0$ tel que pour tout entier naturel n on ait $|u_n| \leqslant M$. Fixons $\epsilon > 0$. On applique la définition de limite (définition 4) à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M}$. Il existe donc un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ implique $|v_n| \leqslant \epsilon'$. Mais alors pour $n \geqslant N$ on a :

$$|u_n v_n| = |u_n||v_n| \leqslant M \times \epsilon' = \epsilon.$$

On a bien montré que $\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = 0$. □

Prouvons maintenant la formule concernant le produit de deux limites (voir proposition 3).

« *Si* $\quad \lim u_n = \ell \quad$ *et* $\quad \lim v_n = \ell' \quad$ *alors* $\quad \lim u_n v_n = \ell\ell'$. »

Démonstration de la formule concernant le produit de deux limites. Le principe est d'écrire :

$$u_n v_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')$$

D'après la proposition 6, la suite de terme général $\ell(v_n - \ell')$ tend vers 0. Par la même proposition il en est de même de la suite de terme général $(u_n - \ell)v_n$, car la suite convergente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On conclut que $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n - \ell\ell') = 0$, ce qui équivaut à $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell\ell'$. □

5. Formes indéterminées

Dans certaines situations, on ne peut rien dire à priori sur la limite, il faut faire une étude au cas par cas.

Exemple

1. « $+\infty - \infty$ » Cela signifie que si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$ il faut faire faire l'étude en fonction de chaque suite pour déterminer $\lim(u_n + v_n)$ comme le prouve les exemples suivants.

$$\lim_{n\to+\infty} (e^n - \ln(n)) = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} (n - n^2) = -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(n + \frac{1}{n}\right) - n\right) = 0$$

2. « $0 \times \infty$ »

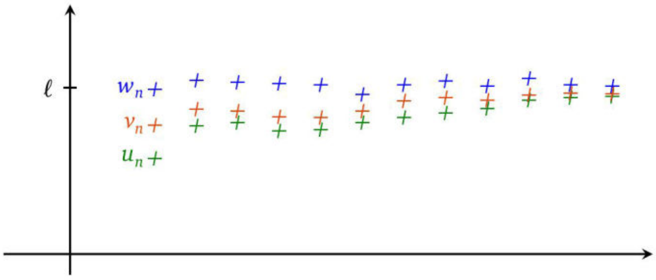
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \times e^n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \ln n = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times (n+1) = 1$$

3. « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ », « 1^{∞} », ...

6. Limite et inégalités

Proposition 7.

1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$
2. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$. Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
3. *Théorème des « gendarmes » : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites telles que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$
et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim_{n\to+\infty} w_n$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

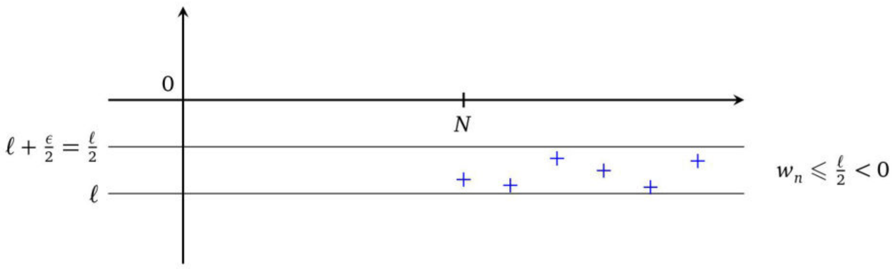


Remarque.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$.
2. Attention, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on ne peut affirmer que la limite est strictement positive mais seulement que $\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$. Par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est à termes strictement positifs, mais converge vers zéro.

Démonstration de la proposition 7.

1. En posant $w_n = v_n - u_n$, on se ramène à montrer que si une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant 0$ et converge, alors $\lim_{n\to+\infty} w_n \geqslant 0$. On procède par l'absurde en supposant que $\ell = \lim_{n\to+\infty} w_n < 0$. En prenant $\epsilon = |\frac{\ell}{2}|$ dans la définition de limite (définition 4), on obtient qu'il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ implique $|w_n - \ell| < \epsilon = -\frac{\ell}{2}$. En particulier on a pour $n \geqslant N$ que $w_n < \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} < 0$, une contradiction.



2. Laissé en exercice.
3. En soustrayant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on se ramène à montrer l'énoncé suivant : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Soit $\epsilon > 0$ et N un entier naturel tel que $n \geqslant N$ implique $|v_n| < \epsilon$. Comme $|u_n| = u_n \leqslant v_n = |v_n|$, on a donc : $n \geqslant N$ implique $|u_n| < \epsilon$. On a bien montré que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

III. Exemples remarquables

1. Suite géométrique

Proposition 8 (Suite géométrique).
On fixe un réel a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = a^n$.

1. *Si $a = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1$.*
2. *Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
3. *Si $-1 < a < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
4. *Si $a \leqslant -1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Démonstration.

1. est évident.
2. Écrivons $a = 1+b$ avec $b > 0$. Alors le binôme de Newton s'écrit $a^n = (1+b)^n = 1+nb+\binom{n}{2}b^2+\cdots+\binom{n}{k}b^k+\cdots+b^n$. Tous les termes sont positifs, donc pour tout entier naturel n on a : $a^n \geqslant 1+nb$. Or $\lim_{n\to+\infty}(1+nb) = +\infty$ car $b > 0$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
3. Si $a = 0$, le résultat est clair. Sinon, on pose $b = |\frac{1}{a}|$. Alors $b > 1$ et d'après le point précédent $\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$. Comme pour tout entier naturel n on a : $|a|^n = \frac{1}{b^n}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}|a|^n = 0$, et donc aussi $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$.
4. Supposons par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ. De $a^2 \geqslant 1$, on déduit que pour tout entier naturel n, on a $a^{2n} \geqslant 1$. En passant à la limite, il vient $\ell \geqslant 1$. Comme de plus pour tout entier naturel n on a $a^{2n+1} \leqslant a \leqslant -1$, il vient en passant de nouveau à la limite $\ell \leqslant -1$. Mais comme on a déjà $\ell \geqslant 1$, on obtient une contradiction, et donc (u_n) ne converge pas.

2. Série géométrique

Proposition 9 (Série géométrique).
Soit a un réel, $a \neq 1$. En notant $\sum_{k=0}^{n} a^k = 1+a+a^2+\cdots+a^n$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}}$$

Démonstration. En multipliant par $1-a$ on fait apparaître une somme télescopique (presque tous les termes s'annulent) :

$$(1-a)\big(1+a+a^2+\cdots+a^n\big) = \big(1+a+a^2+\cdots+a^n\big)-\big(a+a^2+\cdots+a^{n+1}\big) = 1-a^{n+1}.$$

Remarque.
Si $a \in]-1,1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-a}$. De manière plus frappante, on peut écrire :

$$1+a+a^2+a^3+\cdots = \frac{1}{1-a}$$

Enfin, ces formules sont aussi valables si $a \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Si $a = 1$, alors $1+a+a^2+\cdots+a^n = n+1$.

3. Suites telles que : $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| < \ell < 1$

Théorème 1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que pour tout entier naturel n (ou seulement à partir d'un certain rang) on ait :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell < 1.$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration. On suppose que la propriété $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell < 1$ est vraie pour tout entier naturel n (la preuve dans le cas où cette propriété n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n'est pas très différente). On écrit

$$\frac{u_n}{u_0} = \frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \cdots \times \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

ce dont on déduit

$$\left|\frac{u_n}{u_0}\right| < \ell \times \ell \times \ell \times \cdots \times \times \ell = \ell^n$$

et donc $|u_n| < |u_0|\ell^n$. Comme $\ell < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \ell^n = 0$. On conclut que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Corollaire 1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

Exemple
Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Démonstration. Si $a = 0$, le résultat est évident. Supposons $a \neq 0$, et posons $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}.$$

Pour conclure, on peut ou bien directement utiliser le corollaire : comme $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ (car a est fixe), on a $\lim u_n = 0$. Ou bien, comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$, on déduit par le théorème que pour $n \geqslant N > 2|a|$ on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \leqslant \frac{|a|}{N+1} < \frac{|a|}{N} < \frac{1}{2} = \ell$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque.

1. Avec les notations du théorème, si on a pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > \ell > 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. En effet, il suffit d'appliquer le théorème à la suite de terme général $\frac{1}{|u_n|}$ pour voir que $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.
2. Toujours avec les notations du théorème, si $\ell = 1$ on ne peut rien dire.

Exemple
Pour un nombre réel a, $a > 0$, calculer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}$.
On va montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Si $a = 1$, c'est clair. Supposons $a > 1$. Écrivons $a = 1 + h$, avec $h > 0$. Comme

$$\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n \geqslant 1 + n\frac{h}{n} = 1 + h = a$$

(voir la preuve de la proposition 8) on a en appliquant la fonction racine n-ème, $\sqrt[n]{\cdot}$:

$$1 + \frac{h}{n} \geqslant \sqrt[n]{a} \geqslant 1.$$

On peut conclure grâce au théorème « des gendarmes » que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Enfin, si $a < 1$, on applique le cas précédent à $b = \frac{1}{a} > 1$.

4. Approximation des réels par des décimaux

Proposition 10.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons

$$u_n = \frac{E(10^n a)}{10^n}.$$

Alors u_n est une approximation décimale de a à 10^{-n} près, en particulier $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

Exemple .
$\pi = 3,14159265\ldots$

$$\begin{aligned}
u_0 &= \tfrac{E(10^0\pi)}{10^0} = E(\pi) = 3\\
u_1 &= \tfrac{E(10^1\pi)}{10^1} = \tfrac{E(31,415\ldots)}{10} = 3,1\\
u_2 &= \tfrac{E(10^2\pi)}{10^2} = \tfrac{E(314,15\ldots)}{100} = 3,14\\
u_3 &= 3,141
\end{aligned}$$

Démonstration. D'après la définition de la partie entière, on a

$$E(10^n a) \leqslant 10^n a < E(10^n a) + 1$$

donc

$$u_n \leqslant a < u_n + \frac{1}{10^n}$$

ou encore

$$0 \leqslant a - u_n < \frac{1}{10^n}.$$

Or la suite de terme général $\frac{1}{10^n}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$, donc elle tend vers 0. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

IV. Théorème de convergence

1. Toute suite convergente est bornée

Revenons sur une propriété importante que nous avons déjà démontrée dans la section sur les limites.

Proposition 11.
Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse mais nous allons ajouter une hypothèse supplémentaire pour obtenir des résultats.

2. Suite monotone

Théorème 2.

Toute suite croissante et majorée est convergente.

Remarque.
Et aussi :

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration *du théorème 2.* Notons $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, disons par le réel M, l'ensemble A est majoré par M, et de plus il est non vide. Donc d'après le théorème $\mathbb{R}4$ du chapitre sur les réels, l'ensemble A admet une borne supérieure : notons $\ell = \sup A$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $\epsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément u_N de A tel que $\ell - \epsilon < u_N \leqslant \ell$. Mais alors pour $n \geqslant N$ on a $\ell - \epsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant \ell$, et donc $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon$.

3. Deux exemples

La limite $\zeta(2)$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante : en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.
- Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
  — Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 \leqslant 1 = 2 - \frac{1}{1}$.
  — Fixons $n \geqslant 1$ pour lequel on suppose $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$. Alors $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$. Or $\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, donc $u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$, ce qui achève la récurrence.
- Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par 2 : elle converge.

On note $\zeta(2)$ cette limite, vous montrerez plus tard qu'en fait $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Suite harmonique

C'est la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Calculons $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante : en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$.
- Minoration de $u_{2^p} - u_{2^{p-1}}$. On a $u_2 - u_1 = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$; $u_4 - u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, et en général :

$$u_{2^p} - u_{2^{p-1}} = \underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \frac{1}{2^{p-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}=2^p-2^{p-1} \text{ termes } \geqslant \frac{1}{2^p}} > 2^{p-1} \times \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2}$$

- $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. En effet

$$u_{2^p} - 1 = u_{2^p} - u_1 = (u_2 - u_1) + (u_4 - u_2) + \cdots + (u_{2^p} - u_{2^{p-1}}) \geqslant \frac{p}{2}$$

  donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante mais n'est pas bornée, donc elle tend vers $+\infty$.

4. Suites adjacentes

Définition 7.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites ***adjacentes*** si

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant v_n$,
3. $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 3.

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite.

Il y a donc deux résultats dans ce théorème, la convergence de (u_n) et (v_n) et en plus l'égalité des limites. Les termes de la suites sont ordonnées ainsi :

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots\cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_2 \leqslant v_1 \leqslant v_0$$

Démonstration.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0, donc elle converge vers une limite ℓ.
- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge vers une limite ℓ'.
- Donc $\ell' - \ell = \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, d'où $\ell' = \ell$.

Exemple

Reprenons l'exemple de $\zeta(2)$. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{2}{n+1}.$$

Montrons que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes :

1. (a) (u_n) est croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.
   (b) (v_n) est décroissante :
   $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \frac{n+2+2(n+1)^2-2(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{-n}{(n+2)(n+1)^2} < 0$
2. Pour tout $n \geqslant 1$: $v_n - u_n = \frac{2}{n+1} > 0$, donc $u_n \leqslant v_n$.
3. Enfin comme $v_n - u_n = \frac{2}{n+1}$ alors $\lim(v_n - u_n) = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, elles convergent donc vers une même limite finie ℓ. Nous avons en plus l'encadrement $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Ceci fournit des approximations de la limite : par exemple pour $n = 3$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \leqslant \ell \leqslant 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}$ donc $1,3611\ldots \leqslant \ell \leqslant 1,8611\ldots$

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

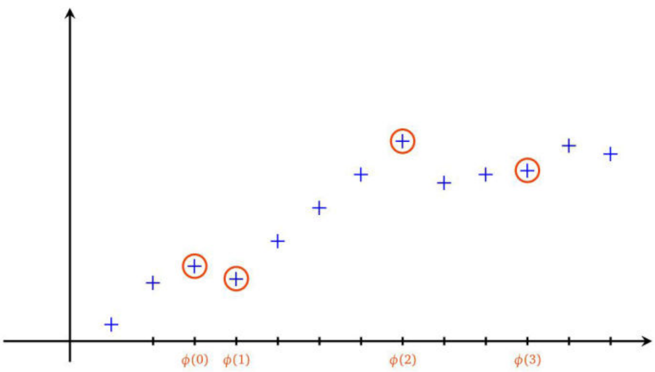
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge (on pourra considérer la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$).

Remarque.

On note $\zeta(3)$ cette limite. On l'appelle aussi constante d'Apéry qui a prouvé en 1978 que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

5. Théorème de Bolzano-Weierstrass

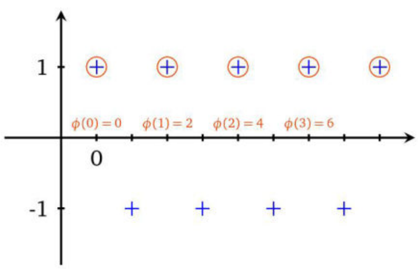
Définition 8.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une *suite extraite* ou *sous-suite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

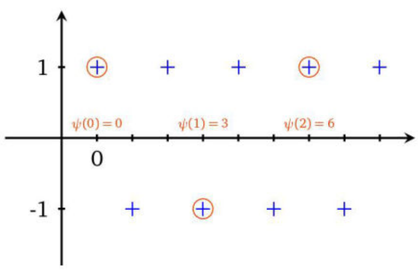


Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

- Si on considère $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\phi(n) = 2n$, alors la suite extraite correspondante a pour terme général $u_{\phi(n)} = (-1)^{2n} = 1$, donc la suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.
- Si on considère $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\psi(n) = 3n$, alors la suite extraite correspondante a pour terme général $u_{\psi(n)} = (-1)^{3n} = \left((-1)^3\right)^n = (-1)^n$. La suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc égale à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.





Proposition 12.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors pour toute suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. D'après la définition de limite (définition 4), il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ implique $|u_n - \ell| < \epsilon$. Comme l'application ϕ est strictement croissante, on montre facilement par récurrence que pour tout n, on a $\phi(n) \geqslant n$. Ceci implique en particulier que si $n \geqslant N$, alors aussi $\phi(n) \geqslant N$, et donc $|u_{\phi(n)} - \ell| < \epsilon$. Donc la définition de limite (définition 4) s'applique aussi à la suite extraite.

Corollaire 2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.

Exemple
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1 (en fait ces deux sous-suites sont constantes). On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

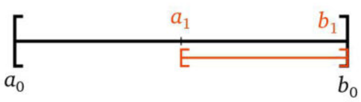
Exercice
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

Terminons par un résultat théorique très important.

Théorème 4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.**
Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Exemple
1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$. Alors on peut considérer les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \cos n$. Le théorème affirme qu'il existe une sous-suite convergente, mais il est moins facile de l'expliciter.

Démonstration. *du théorème 4.* On procède par dichotomie. L'ensemble des valeurs de la suite est par hypothèse contenu dans un intervalle $[a,b]$. Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$, $\phi(0) = 0$. Au moins l'un des deux intervalles $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ ou $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$ contient u_n pour une infinité d'indices n. On note $[a_1, b_1]$ un tel intervalle, et on note $\phi(1)$ un entier $\phi(1) > \phi(0)$ tel que $u_{\phi(1)} \in [a_1, b_1]$.



En itérant cette construction, on construit pour tout entier naturel n un intervalle $[a_n, b_n]$, de longueur $\frac{b-a}{2^n}$, et un entier $\phi(n) > \phi(n-1)$ tel que $u_{\phi(n)} \in [a_n, b_n]$. Notons que par construction la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Comme de plus $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergent vers une même limite ℓ. On peut appliquer le théorème « des gendarmes » pour conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.

V. Suites récurrentes

1. Suite récurrente définie par une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Une *suite récurrente* est définie par son premier terme et une relation permettant de calculer les termes de proche en proche :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour } n \geqslant 0.$$

Une suite récurrente est donc définie par deux données : un terme initial u_0, et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite s'écrit ainsi :

$$u_0, \quad u_1 = f(u_0), \quad u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)), \quad u_3 = f(u_2) = f(f(f(u_0))), \ldots$$

Le comportement d'une telle suite peut très vite devenir complexe.

Exemple
Soit $f(x) = 1+\sqrt{x}$. Fixons $u_0 = 2$ et définissons pour $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$. C'est-à-dire $u_{n+1} = 1+\sqrt{u_n}$. Alors les premiers termes de la suite sont :

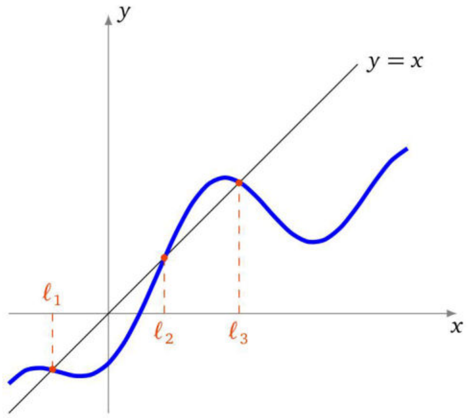
$$2, \quad 1+\sqrt{2}, \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{2}}, \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}, \ldots$$

Une suite récurrente donnée n'est pas forcément convergente. Lorsqu'elle admet une limite, l'ensemble des valeurs possibles est restreint par le résultat essentiel suivant.

Proposition 13.
Si f est une fonction continue et la suite récurrente (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation :

$$\boxed{f(\ell) = \ell}$$

Si on arrive à montrer que la limite existe, cette proposition affirme qu'elle est à chercher parmi les solutions de l'équation $f(\ell) = \ell$.



Une valeur ℓ, vérifiant $f(\ell) = \ell$ est un **point fixe** de f. La preuve est très simple et utilise essentiellement la continuité de la fonction f :

Démonstration. Lorsque $n \to +\infty$, $u_n \to \ell$ et donc aussi $u_{n+1} \to \ell$. Comme $u_n \to \ell$ et que f est continue alors la suite $(f(u_n)) \to f(\ell)$. La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ devient à la limite (lorsque $n \to +\infty$) : $\ell = f(\ell)$.

Nous allons étudier en détail deux cas particuliers, celui ou la fonction est croissante, puis celui ou la fonction est décroissante.

2. Cas d'une fonction croissante

Commençons par remarquer que pour une fonction croissante, le comportement de la suite (u_n) définie par récurrence est assez simple :

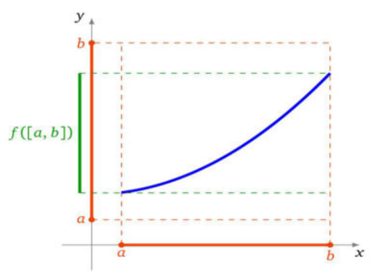
- Si $u_1 \geqslant u_0$ alors (u_n) est croissante.
- Si $u_1 \leqslant u_0$ alors (u_n) est décroissante.

La preuve est facile par récurrence : par exemple si $u_1 \geqslant u_0$, alors comme f est croissante on a $u_2 = f(u_1) \geqslant f(u_0) = u_1$. Partant de $u_2 \geqslant u_1$ on en déduit $u_3 \geqslant u_2$,...

Voici le résultat principal :

Proposition 14.
Si $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et **croissante***, alors quelque soit $u_0 \in [a,b]$, la suite récurrente (u_n) est monotone et converge vers $\ell \in [a,b]$ vérifiant* $\boxed{f(\ell) = \ell}$.

Il y a une hypothèse importante qui est un peu cachée : f va de l'intervalle $[a,b]$ dans lui-même. Dans la pratique, pour appliquer cette proposition, il faut commencer par choisir $[a,b]$ et vérifier que $f([a,b]) \subset [a,b]$.

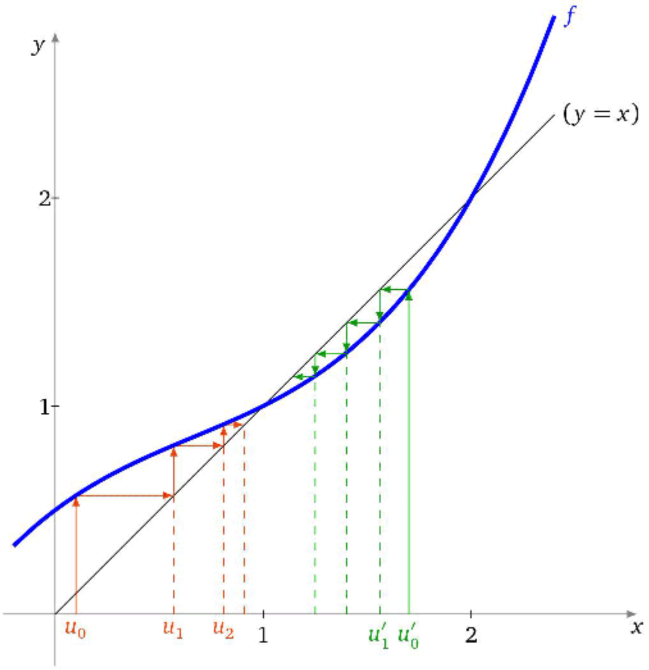


Démonstration. La preuve est une conséquence des résultats précédents. Par exemple si $u_1 \geqslant u_0$ alors la suite (u_n) est croissante, comme par ailleurs elle est majorée par b, elle converge vers un réel ℓ. Par la proposition 13, on a $f(\ell) = \ell$. Si $u_1 \leqslant u_0$, (u_n) est une décroissante et minorée par a, et la conclusion est la même.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{4}(x^2-1)(x-2)+x$ et $u_0 \in [0,2]$. Étudions la suite (u_n) définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ (pour tout $n \geqslant 0$).

1. Étude de f
   (a) f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) > 0$.
   (c) Sur l'intervalle $[0,2]$, f est strictement croissante.
   (d) Et comme $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(2) = 2$ alors $f([0,2]) \subset [0,2]$.
2. Graphe de f



   Voici comment tracer la suite : on trace le graphe de f et la bissectrice $(y = x)$. On part d'une valeur u_0 (en rouge) sur l'axe des abscisses, la valeur $u_1 = f(u_0)$ se lit sur l'axe des ordonnées, mais on reporte la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses par symétrie par rapport à la bissectrice. On recommence : $u_2 = f(u_1)$ se lit sur l'axe des ordonnées et on le reporte sur l'axe des abscisses, etc. On obtient ainsi une sorte d'escalier, et graphiquement on conjecture que la suite est croissante et tend vers 1. Si on part d'une autre valeur initiale u'_0 (en vert), c'est le même principe, mais cette fois on obtient un escalier qui descend.

3. Calcul des points fixes.
   Cherchons les valeurs x qui vérifient $(f(x) = x)$, autrement dit $(f(x) - x = 0)$, mais

$$f(x) - x = \frac{1}{4}(x^2-1)(x-2) \tag{1}$$

   Donc les points fixes sont les $\{-1, 1, 2\}$. La limite de (u_n) est donc à chercher parmi ces 3 valeurs.

4. Premier cas : $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$.
   Alors $u_1 = f(u_0) = u_0$ et par récurrence la suite (u_n) est constante (et converge donc vers u_0).
5. Deuxième cas : $0 \leqslant u_0 < 1$.
   - Comme $f([0,1]) \subset [0,1]$, la fonction f se restreint sur l'intervalle $[0,1]$ en une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$.
   - De plus sur $[0,1]$, $f(x) - x \geqslant 0$. Cela se déduit de l'étude de f ou directement de l'expression (1).
   - Pour $u_0 \in [0,1[$, $u_1 = f(u_0) \geqslant u_0$ d'après le point précédent. Comme f est croissante, par récurrence, comme on l'a vu, la suite (u_n) est croissante.
   - La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge. Notons ℓ sa limite.
   - D'une part ℓ doit être un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$. Donc $\ell \in \{-1, 1, 2\}$.
   - D'autre part la suite (u_n) étant croissante avec $u_0 \geqslant 0$ et majorée par 1, donc $\ell \in [0,1]$.
   - Conclusion : si $0 \leqslant u_0 < 1$ alors (u_n) converge vers $\ell = 1$.

6. Troisième cas : $1 < u_0 < 2$.

   La fonction f se restreint en $f : [1,2] \to [1,2]$. Sur l'intervalle $[1,2]$, f est croissante mais cette fois $f(x) \leqslant x$. Donc $u_1 \leqslant u_0$, et la suite (u_n) est décroissante. La suite (u_n) étant minorée par 1, elle converge. Si on note ℓ sa limite alors d'une part $f(\ell) = \ell$, donc $\ell \in \{-1, 1, 2\}$, et d'autre part $\ell \in [1, 2[$. Conclusion : (u_n) converge vers $\ell = 1$.

Le graphe de f joue un rôle très important, il faut le tracer même si on ne le demande pas explicitement. Il permet de se faire une idée très précise du comportement de la suite : Est-elle croissante ? Est-elle positive ? Semble-t-elle converger ? Vers quelle limite ? Ces indications sont essentielles pour savoir ce qu'il faut montrer lors de l'étude de la suite.

3. Cas d'une fonction décroissante

Proposition 15.
Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue et **décroissante**. *Soit $u_0 \in [a, b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :*

- *La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite ℓ vérifiant $f \circ f(\ell) = \ell$.*
- *La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite ℓ' vérifiant $f \circ f(\ell') = \ell'$.*

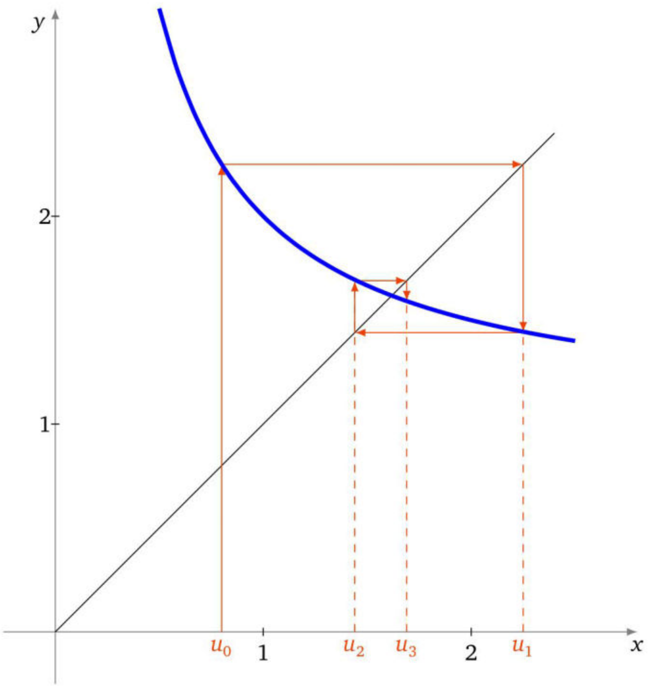
Il se peut (ou pas !) que $\ell = \ell'$.

Démonstration. La preuve se déduit du cas croissant. La fonction f étant décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante. Et on applique la proposition 14 à la fonction $f \circ f$ et à la sous-suite (u_{2n}) définie par récurrence $u_2 = f \circ f(u_0)$, $u_4 = f \circ f(u_2)$,...
De même en partant de u_1 et $u_3 = f \circ f(u_1)$,... □

Exemple

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \qquad u_0 > 0, \qquad u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{u_n}$$

1. Étude de f. La fonction $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ est une fonction continue et strictement décroissante.
2. Graphe de f.



Le principe pour tracer la suite est le même qu'auparavant : on place u_0, on trace $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées et on le reporte par symétrie sur l'axe des abscisses,... On obtient ainsi une sorte d'escargot, et graphiquement on conjecture que la suite converge vers le point fixe de f. En plus on note que la suite des termes de rang pair semble une suite croissante, alors que la suite des termes de rang impair semble décroissante.

3. Points fixes de $f \circ f$.

$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f\big(1 + \frac{1}{x}\big) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

Donc

$$f \circ f(x) = x \iff \frac{2x+1}{x+1} = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x \in \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Comme la limite doit être positive, le seul point fixe à considérer est $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Attention ! Il y a un unique point fixe, mais on ne peut pas conclure à ce stade car f est définie sur $]0, +\infty[$ qui n'est pas un intervalle compact.

4. Premier cas $0 < u_0 \leqslant \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Alors, $u_1 = f(u_0) \geqslant f(\ell) = \ell$; et par une étude de $f \circ f(x) - x$, on obtient que : $u_2 = f \circ f(u_0) \geqslant u_0$; $u_1 \geqslant f \circ f(u_1) = u_3$.

Comme $u_2 \geqslant u_0$ et $f \circ f$ est croissante, la suite (u_{2n}) est croissante. De même $u_3 \leqslant u_1$, donc la suite (u_{2n+1}) est décroissante. De plus comme $u_0 \leqslant u_1$, en appliquant f un nombre *pair* de fois, on obtient que $u_{2n} \leqslant u_{2n+1}$. La situation est donc la suivante :

$$u_0 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_{2n} \leqslant \cdots \leqslant u_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant u_3 \leqslant u_1$$

La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par u_1, donc elle converge. Sa limite ne peut être que l'unique point fixe de $f \circ f$: $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge aussi vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On en conclut que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. Deuxième cas $u_0 \geqslant \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On montre de la même façon que (u_{2n}) est décroissante et converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et que (u_{2n+1}) est croissante et converge aussi vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Fin

Bon courage

Auteurs du chapitre : Amine Attaiki

Fonction logarithme

I) *Fonction logarithme népérien.*

Activité :

1) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une primitive sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Définition: La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en **1** (c'est-à-dire $\ln(1)=0$), est appelée la fonction logarithme népérien, cette fonction est notée **ln**.

2) En déduire que la fonction **ln** est continue et dérivable sur $I =]0;+\infty[$, et que **ln** est strictement croissante sur I .
3) Etudier le signe de la fonction **ln** sur $]0;+\infty[$.
4) Montrer qu'il existe un, et un seul, nombre e de l'intervalle $]2,72\,;2,73[$ tel que $\ln(e)=1$.
5) Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x)=\ln(kx)-\ln(x)$ et $k>0$.
   - a- Montrer que f' est nulle, puis en déduire la monotonie de f.
   - b- Donner $f(1)$, puis en déduire que $\ln(kx)=\ln(k)+\ln(x)$.
   - c- En déduire que pour tout couple $(a;b)$ de réels strictement positifs et pour tout relatif n on a : $\ln(ab)=\ln a+\ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$; $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$; $\ln\left(a^n\right)=n.\ln a$ et $\ln\left(e^n\right)=n$.
6) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. En déduire que $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.
7) Calculer $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$ et donner l'équation de la tangente de $(C_{\ln})$ au point $A(1;0)$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.
8) Considérons la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x)=2\sqrt{x}-\ln(x)$.
   - a) Montrer que la fonction g est croissante sur $[1;+\infty[$.
   - b) Montrer que la fonction g est minorée par **2**, et en déduire que $(\forall x\geq1);\ 0\leq\frac{\ln x}{x}\leq\frac{2}{\sqrt{x}}$.
   - c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat, puis calculer $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$.
9) Etudier la concavité de **ln,** puis tracer $(C_{\ln})$ dans un repère orthonormé.
10) Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de **IR.** Montrer que $x\mapsto\ln(u(x))$ est dérivable sur I et que $\left(\ln(u(x))\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

Conséquences

La fonction **ln** est définie, **continue** et **dérivable** sur $]0;+\infty[$, et pour tout réel strictement positif on a : $\ln'(x)=\frac{1}{x}$, de plus.

Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :
- $\ln(ab)=\ln a+\ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$
- $\ln(e)=1$
- $\ln\left(a^n\right)=n\ln a\ \ (n\in\mathbb{Z})$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln a$
- $\ln\left(e^n\right)=n\ \ (n\in\mathbb{Z})$

Equations et inéquations

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :
- $\ln x=\ln y\Leftrightarrow x=y$
- $\ln x<\ln y\Leftrightarrow x<y$
- $\ln x<0\Leftrightarrow 0<x<1$
- $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$

Limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$
- $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Corollaire **:**Si u est une fonction dérivable sur I telle que $u(x)\neq0$ pour tout réel x de I, alors la fonction $f:x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $x\mapsto\ln|u(x)|+c$ où c est une constante réelle.

II) *Logarithme décimal.*

Définition : La fonction logarithme décimal, noté **log**, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log(x)=\frac{\ln x}{\ln10}$.

III) *Logarithme de base a avec $a\in]0;1[\cup]1;+\infty[$.*

Définition : La fonction logarithme de base a, noté $\log_a$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}$.

La fonction exponentielle népérienne:

Définition :

La fonction exponentielle népérien, notée e^x (ou $\exp(x)$), est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto \ln x$, et qui est définie sur $\mathbb{R}$

Déductions et propriétés:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \succ 0$ $\ln e^x = x$	$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ $e^x \times e^y = e^{x+y}$ $\left(e^x\right)^r = e^{rx}$; $\left(r \in \mathbb{Q}\right)$ $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
$\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad e^{\ln(x)} = x$	
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ • $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ • $e^x \succ e^y \Leftrightarrow x \succ y$	
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \left]0;+\infty\right[$ • $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	

Si n est pair, alors $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right); \ln x^n = n \ln\left|x\right|$

Le Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\right\}$

Les limites:

Limites principales

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Déductions

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{e^{u(x)}}{\left[u(x)\right]^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left[u(x)\right]^n e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit a droite ou a gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$

Si u est continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

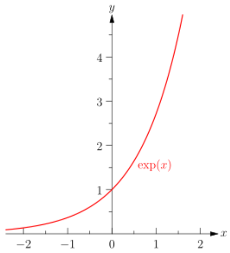
La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$; $\left(e^x\right)' = e^x$

Si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$\forall x \in I$; $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$

La représentation graphique:



La fonction exponentielle de base a avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

Définition:

La fonction exponentielle de base **a**, notée : a^x , est la réciproque de $\log_a$

Déductions et propriétés:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x \ln a}$ $\log_a(a^x) = x$	$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $\left(a^x\right)^r = a^{rx}$ $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$ $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad a^{\log_a x} = x$	
$a^x = a^x \Leftrightarrow x = y$	
$\forall x \in \mathbb{R} \; \forall y \in]0;+\infty[$ $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$	

Limites et inéquations:

$a \succ 1$	$0 \prec a \prec 1$
$a^x \succ a^y \Leftrightarrow x \succ y$	$a^x \succ a^y \Leftrightarrow x \prec y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

La dérivée:

$$\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Fonction exponentielle

I) *Fonction exponentielle népérienne.*

Activité :

1) Montrer que la fonction **ln** admet une fonction réciproque définie sur **IR**.

Définition: La fonction réciproque de la fonction **ln** est une fonction définie sur **IR** est appelée la fonction **exponentielle népérienne** ou **naturelle** et se note **exp** . donc $\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$ avec $x \in IR$ *et* $y > 0$

2) Calculer $\exp(0)$ *et* $\exp(1)$. $\boxed{e \approx 2{,}7182818284\ 59045235}$

3) déduire que la fonction **exp** est continue , dérivable et strictement croissante sur **IR**.

4) Etudier le signe de la fonction **exp** sur **IR**.

5) En déduire que pour tout couple $(a;b)$ de réels on a :

$$\exp(a+b) = \exp(a)\times\exp(b) \ ;\ \exp(a-b) = \frac{\exp a}{\exp b} \quad et \quad \exp(-a) = \frac{1}{\exp a}$$

6) Tracer la courbe de la fonction **exp** dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x);\ \lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\exp x}{x}$.

8) Déterminer $\exp'(x)$ *et* $(\exp(u(x)))'$ tel que u une fonction dérivable .

9) Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\exp(x)-1}{x}$ et donner l'équation de la tangente de $(C_{\exp})$ au point $B(0;1)$.

10) Montrer que $(\forall r \in Q): \exp(r) = e^r$.

Conséquences

La fonction **exp** est définie, **continue** et **dérivable** sur **IR**, et pour tout réel on a :

$\exp(x) = e^x$ et $(e^x)' = e^x$.

- Le nombre e est un nombre irrationnel tel que:
- Si u est dérivable sur I, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$.

Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b , on a :

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ et $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$
- $(e^a)^n = e^{na}$ $(n \in \mathbb{Z})$
- $e^{\ln b} = b$ avec $b>0$

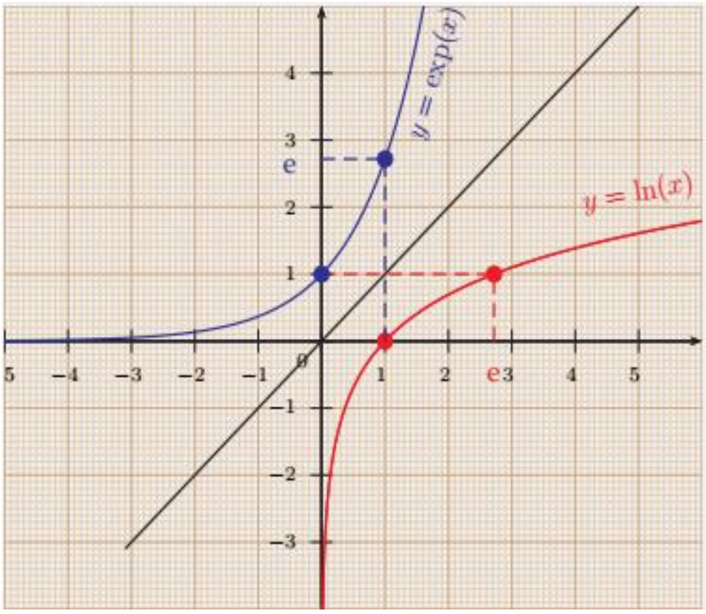
Equations et inéquations

Pour tous réels x et y , on a :

- $e^x > 0$
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$
- $e^x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$

Limites $(n \in IN^*)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$



Définition :

On appelle fonction ***exponentielle***, la fonction réciproque de la fonction ***logarithme*** népérien. L'image d'un réel x par la fonction ***exponentielle*** est notée e^x

Corollaire **:** Si u est une fonction dérivable sur I, alors la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $x \mapsto e^{u(x)} + c$ où c est une constante réelle.

II) *Fonction exponentielle de base a avec* $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Définition: La fonction réciproque de la fonction $\log_a$ est une fonction définie sur **IR** est appelée la fonction ***exponentielle de base a*** et se note $\exp_a$ tel que : $\exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$.

Dérivée de la fonction $x \mapsto a^x$: $(\forall x \in IR); \exp_a'(x) = (a^x)' = (e^{x\ln a})' = (\ln a).e^{x\ln a} = (\ln a).a^x$

Remarques : $\exp_e(x) = e^x$; $\log_e(x) = \ln x$; $\log_a(a) = 1$; $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ *(changement de base)*

Définition:

L'ensemble des nombres complexes s'écrit : $\mathbb{C}=\{z=a+ib\ /\ (a;b)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } i^2=-1\}$

L'écriture algébrique d'un nombre complexe:

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

- $a+ib$ est l'écriture algébrique du nombre complexe z
- Le nombre a est la partie réelle de z, notée : $\mathrm{Re}(z)$
- Le nombre b est la partie imaginaire de z, notée : $\mathrm{Im}(z)$

Cas particulier:

- Si $\mathrm{Im}(z)=0$, alors z est un nombre réel
- Si $\mathrm{Re}(z)=0$, alors z est un nombre imaginaire pur

Egalité de deux nombres complexes:

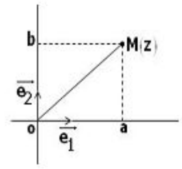
Soit z et z' deux nombres complexes

$$z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$$

Représentation graphique d'un nombre complexe:

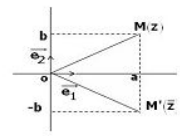
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$
On relie le nombre complexe z avec le point $M\,(a;b)$
Le nombre z s'appelle l'affixe du point M et le point M s'appelle l'image du nombre z et on écrit : $M\,(z)$



Conjugué d'un nombre complexe:

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$
Le conjugué du nombre complexe z est le complexe noté $\bar{z}$ avec $\bar{z}=a-ib$



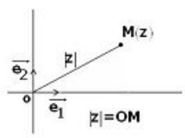
$M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

- $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$
- $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$
- $\overline{z^n}=\bar{z}^n \quad (n\in\mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z'}}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (z'\neq 0)$

- $\bar{z}=z \Leftrightarrow$
- $\bar{z}=-z \Leftrightarrow$
- $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z-\bar{z}=2\,\mathrm{Im}(z)$
- $z\times\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$

Module d'un nombre complexe:

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$
Le module du nombre complexe z est le nombre réel positif $|z|$ avec : $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

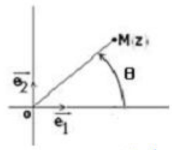


$\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n\ ;\ n\in\mathbb{N}^*$	$\lvert -z\rvert=\lvert z\rvert$	$\lvert z\times z'\rvert=\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$
$\lvert\bar{z}\rvert=\lvert z\rvert$	$\left\lvert\dfrac{1}{z'}\right\rvert=\dfrac{1}{\lvert z'\rvert}\ (z'\neq 0)$	$\left\lvert\dfrac{z}{z'}\right\rvert=\dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}\ (z'\neq 0)$

L'argument d'un nombre complexe non nul:

Soit z un nombre complexe non nul et M son image
L'argument du nombre complexe z est θ l'un des mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{OM}\right)$

On le note: $\arg(z)$ et on écrit: $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$



La forme trigonométrique et la notation exponentielle d'un nombre complexe non nul:

Soit z un nombre complexe non nul
On pose : $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

- La forme trigonométrique du complexe z est : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r,\theta]$
- La notation exponentielle du complexe z est : $z = re^{i\theta}$

Cas particulier:

L'écriture trigonométrique (réduite) d'un nombre réel a non nul

$a \succ 0$	$a \prec 0$
$a = [a,0]$	$a = [-a,\pi]$
$ai = \left[a,+\frac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[-a,-\frac{\pi}{2}\right]$

$\arg(zz') = (\arg(z)+\arg(z'))[2\pi]$	$[r,\theta]\times[r',\theta'] = [r\times r',\theta+\theta']$	$re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'} = (r\times r')e^{i(\theta+\theta')}$
$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)[2\pi]$	$\overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
$-\arg(z) = (\pi+\arg(z))[2\pi]$	$-[r,\theta] = [r,\pi+\theta]$	$-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
$\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$	$[r,\theta]^n = [r^n, n\times\theta]$	$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$
$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$	$\frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r},-\theta\right]$	$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = (\arg(z)-\arg(z'))[2\pi]$	$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

- $\forall k \in \mathbb{Z}$; $[r,\theta+2k\pi] = [r,\theta]$

- $\arg(z) = k\pi \Leftrightarrow z$ est un réel ($k \in \mathbb{Z}$)
- $\arg(z) = \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur ($k \in \mathbb{Z}$)

Formule de MOIVRE:

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Formules d'EULER:

$\forall \theta \in \mathbb{R}$

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Résolution de l'équation $z^2 = a$ $(z \in \mathbb{C})$ avec $(a \in \mathbb{R})$:

L'équation		Ensembles de solutions
$z \in \mathbb{C}$; $z^2 = a$	$a \succ 0$	$S = \left\{-i\sqrt{a}; i\sqrt{a}\right\}$
	$a = 0$	$S = \{0\}$
	$a \prec 0$	$S = \left\{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\right\}$

Résolution de l'équation $z \in \mathbb{C}$; $az^2+bz+c=0$ avec a et b et c des réels et $a \neq 0$:

L'équation		Ensembles de solutions
$z \in \mathbb{C}$; $az^2+bz+c=0$ $(\Delta = b^2-4ac)$	$\Delta \succ 0$	$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta = 0$	$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta \prec 0$	$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

Notions géométriques:

La notion géométrique	La relation complexe
La distance AB	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$
I centre du segment $[AB]$	$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
Mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$	$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\equiv \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
A et B et C des points alignés	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$
A et B et C et D des points cocycliques	$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\in\mathbb{R}$ ou $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\in\mathbb{R}$

La relation complexe	La notion géométrique
$\lvert z-z_A\rvert=r\ ;(r\succ 0)$	$AM=r$ M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$	$AM=AB$ M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle rectangle au point A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1;\theta]$	ABC est un triangle isocèle au point A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle rectangle et isocèle au point A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC est un triangle équilatéral

La représentation complexe de quelques transformations usuelles:

La transformation	La représentation complexe
La translation : $t_{\vec{u}}$	$z'=z+b$, avec b est l'affixe du vecteur $\vec{u}$
L'homothétie : $h(\Omega;k)$	$z'-\omega=k(z-\omega)$, avec ω l'affixe du point Ω
La rotation : $R(\Omega;\theta)$	$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$, avec ω l'affixe du point Ω

Nombres complexes

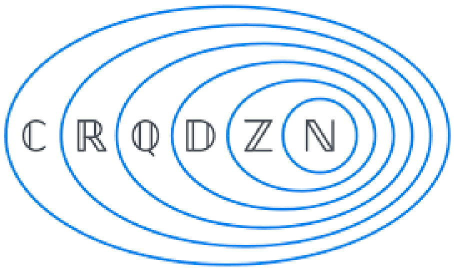
Les nombres complexes prennent naissance au **XVIème** siècle lorsqu'un italien ***Gerolamo Cardano*** (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de ***Jérôme Cardan***, introduit $\sqrt{\ 15}$ pour résoudre des équations du troisième degré.
En 1572, un autre italien, *Rafaele* ***Bombelli*** (1526 ; 1573) publie "*Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*" dans lequel il présente des nombres de la forme $a+b\sqrt{\ 1}$ et poursuit les travaux de ***Cardan*** sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du **troisième degré**.
A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.
La notation *i* apparaît en 1777 siècle avec *Leonhard* ***Euler*** (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.
Au **XIXe** siècle, ***Gauss*** puis ***Hamilton*** posent les structures de l'ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réel » car proche de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l'esprit.

I) *Notion de nombre complexe.*

1) Définition-Vocabulaire.

Définition : On appelle nombre complexe, tout élément écrit $a+ib$, dans lequel a et b deux réels et i un élément vérifiant $i^2=-1$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Vocabulaire :



- L'écriture $a+ib$ d'un nombre complexe z est appelée la **forme algébrique** de z.
- Le nombre a s'appelle la **partie réelle** et le nombre b s'appelle la **partie imaginaire**, et on note $\mathbf{Re}(z)=a$ et $\mathbf{Im}(z)=b$.

Remarques :

- Si $b=0$ alors z est un nombre réel.
- Si $a=0$ alors z est un nombre **imaginaire pur**, et on dit que $z\in iIR$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans *IR*.
- $z=z' \Leftrightarrow \mathbf{Re}(z)=\mathbf{Re}(z')$ **et** $\mathbf{Im}(z)=\mathbf{Im}(z')$
- $z=0 \Leftrightarrow \mathbf{Re}(z)=0$ **et** $\mathbf{Im}(z)=0$.
- $\mathbb{C}$ est un corps non ordonné.

2) Conjugué d'un nombre complexe.

Définition : Soit un nombre complexe $z=a+ib$.
On appelle nombre complexe ***conjugué*** de z, le nombre, noté $\bar{z}$, où $\bar{z}=a-ib$.

Propriétés : Soit $z=a+ib$ et z' deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

1) $\bar{\bar{z}}=z$; 2) $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$; 3) $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$; 4) $\overline{z^n}=\left(\bar{z}\right)^n$; 5) $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ $/ z'\neq 0$

6) $z\times\bar{z}=a^2+b^2$; 7) $z+\bar{z}=2\mathbf{Re}(z)$; 8) $z-\bar{z}=2\mathbf{Im}(z)$; 9) $z\in iIR \Leftrightarrow z=-\bar{z}$; 10) $z\in IR \Leftrightarrow z=\bar{z}$

Remarque : Si $z=a+ib$ et $z\neq 0$ alors $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$ (forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$)

II) *Représentation géométrique d'un nombre complexe.*

Définitions : Soient a et b deux réels. Et le plan est rapporté à un repère orthonormé **direct** $(O,\vec{u},\vec{v})$.

- A tout nombre complexe $z=a+ib$, on associe le point $M(a,b)$, le nombre complexe $z=a+ib$ est appelé **affixe** du point M. Et le point M est appelé image ponctuelle de $z=a+ib$, et on note $M(z)$.
- L'image vectorielle du nombre $z=a+ib$ est le vecteur $\vec{w}=\vec{OM}$, le nombre $z=a+ib$ est appelé **affixe** du vecteur $\vec{w}=\vec{OM}$. (Voir figure 1 p26)

Propriétés :

$M(z)$ et $M'(z')$ sont deux points du plan et $\vec{w}(z)$ un vecteur.

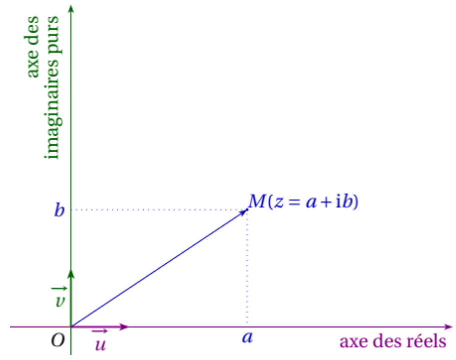
a) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z'-z$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe $z+z'$.

c) Le vecteur $k\vec{w}$, k réel, a pour affixe $k.z$.

d) Le milieu I du segment $[MM']$ a pour affixe $z_I=\dfrac{z+z'}{2}$

(**figure 1**)



III) *Equations du second degré dans $\mathbb{C}$.*

Considérons l'équation $az^2+bz+c=0$, où a, b et c des réels avec $a\neq 0$. Et soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant.

- Si $\Delta<0$: L'équation $az^2+bz+c=0$ a deux solutions complexes conjuguées :

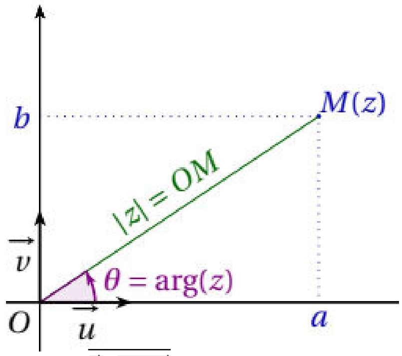
$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a} \quad et \quad z_2=\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{avec} \quad \Delta=\delta^2.$$

IV) *Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.*

Dans tout ce qui reste, le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit $M(z)$ un point du plan avec M différent du point O et $z=a+ib$.

Alors $OM=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos(\overline{\vec{u},\overrightarrow{OM}})=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\overline{\vec{u},\overrightarrow{OM}})=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



$(\overline{\vec{u},\overrightarrow{OM}})=\arg z$

Définitions : On appelle ***module*** de $z=a+ib$, noté $|z|$ le réel $\sqrt{a^2+b^2}$.

- On appelle ***argument*** de $z=a+ib$, noté $\arg(z)$ tout réel θ tel que:

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- Si on pose $r=|z|$ et $\arg(z)=\theta$, alors $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

et cet écriture est dite écriture ***trigonométrique*** de z.

Propriétés des modules

Soient z et z' deux nombres complexes, et n un entier naturel.

- $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$; $|z|=0$; $|z|=|-z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|$
- $|z\times z'|=|z|\times|z'|$; $|z^n|=|z|^n$ *et* $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$ / $z'\neq 0$
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (***Inégalité trigonométrique***)

Interprétation géométrique

$A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ **et** $D(z_D)$ des points, deux à deux distincts.

- $|z_B-z_A|=AB$ *et* $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
- A, B et C sont **alignés** si et seulement si $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in IR$.
- Le triangle ABC est rectangle ssi $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in iIR^*$.
- A, B, C et D sont **circulaires** si $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\times\dfrac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\in IR$.

Propriétés des arguments

$$\arg(zz')\equiv\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$$
$$\arg(z^n)\equiv n\arg(z)[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$$
$$\arg(\bar{z})\equiv-\arg(z)[2\pi]$$
$$\arg(-z)\equiv\pi+\arg(z)[2\pi]$$

Si a et b deux réels non nuls

$$a>0 \Rightarrow \arg(a)\equiv 0[2\pi]$$
$$a<0 \Rightarrow \arg(a)\equiv \pi[2\pi]$$
$$b>0 \Rightarrow \arg(ib)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$b<0 \Rightarrow \arg(ib)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Pour tout réel θ et tout entier n on a : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$ Formule de ***Moivre***

V) *Notation* $r.e^{i\theta}$.

Pour des nombres complexes de module **1** et d'argument x et y on peut démontrer que :

$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$, Et par analogie avec la propriété $e^x \times e^y = e^{x+y}$

Le nombre $\cos x + i\sin x$ est noté e^{ix} , notation compatible avec la formule de ***Moivre***.

Donc tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit $r.e^{i\theta}$

Propriétés : Soient θ et α deux réels et n un entier, alors :

$$e^{i\theta} \times e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)} \quad ; \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)} \quad ; \quad \frac{1}{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} \quad ; \quad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \ (\textit{Moivre})$$

Propriété : Pour tout réel θ on a : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$ $(\textit{Formules d'Euler})$

Remarques : Ces formules permettent de linéariser $\cos^n x$ et $\sin^n x$, c'est-à-dire d'exprimer ces quantités en fonction de $\sin(px)$ et $\cos(px)$. La linéarisation des fonctions trigonométriques est souvent très utile en analyse, par exemple pour calculer des **primitives** de ces fonctions.

- La formule de ***Moivre*** permet par exemple d'exprimer $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$ *et/ou* $\sin(x)$.

VI) *Transformations planes.*

Soient $M(z)$, $M'(z')$ et $\Omega(\omega)$ trois point du plan complexe et $\vec{u}(a)$ un vecteur .

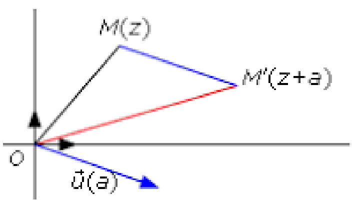
Translation

Si ***M'*** est l'image de ***M*** par la **translation** t de vecteur $\vec{u}(b)$, alors : $z' = z + a$

L'égalité $z' = z + a$ est appelé **l'écriture** complexe de cette **translation**.

Donc :

$t(M) = M' \Leftrightarrow z' = z + a$



Homothétie

Soit k un réel non nul.

Si ***M'*** est l'image de ***M*** par **l'homothétie** h de centre Ω et de rapport k, alors :

$z' - \omega = k(z - \omega)$

L'égalité $z' - \omega = k(z - \omega)$ est appelé **l'écriture** complexe de cette **homothétie**.

Donc :

$h(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$

Rotation

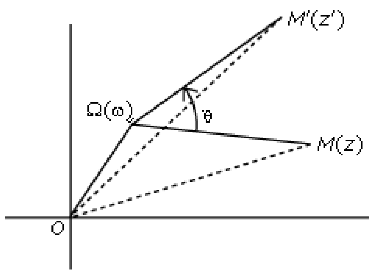
Soit θ un réel

Si ***M'*** est l'image de ***M*** par la rotation R la rotation de centre Ω et d'angle θ ., alors

$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

L'égalité $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est appelé **l'écriture** complexe de cette **rotation**,

donc : $R(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$



VII) *Ensembles de points .*

- L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z - z_A| = r$ *avec* $r > 0$ est le ***cercle*** de ***centre*** A et de ***rayon r***
- L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la ***médiatrice*** du segment $[AB]$
- Parfois pour déterminer l'ensemble des points $M(z)$, On pose $z = x + iy \,/\, (x;y) \in IR^2$ dans la condition et l'on essaie de se ramener à une équation cartésienne.

Les fonctions primitives d'une fonction continue sur un intervalle:

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I
On dit que F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I
Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- F est dérivable sur l'intervalle I
- $(\forall x \in I);F'(x)=f(x)$

Propriétés:

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I
Si F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I, alors toutes les fonctions primitives de f sont définies sur l'intervalle I comme suit :
$x \mapsto F(x)+k \;;\; (\mathrm{k} \in \mathbb{R})$

Soit f une fonction numérique qui admet une fonction primitive sur un intervalle I
Et soit x_0 un élément de I et y_0 un réel quelconque de $\mathbb{R}$
Il existe une unique fonction primitive F de f sur l'intervalle I qui vérifie la condition initiale:
$F(\mathrm{x}_0)=y_0$

Les primitives de $f+g$ et kf : $(k \in \mathbb{R})$

Propriété:

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I et k un réel
Si F et G sont deux primitives de f et g successivement sur l'intervalle I alors :

- $F+G$ est une fonction primitive de $f+g$ sur l'intervalle I
- kF est une fonction primitive de kf sur l'intervalle I

Tableau des primitives de quelques fonctions usuelles:

$f(x)$	$F(x)$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
x^r ; $(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x \rvert + k$
e^x	$e^x + k$

Utilisation des formules de dérivée pour la détermination de quelques primitives:

$f(x)$	$F(x)$
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + \mathrm{k}$
$au'(x)$; $(\mathrm{a} \in \mathbb{R})$	$au(x)$
$u'(x) \times \mathrm{v(x)} + u(x) \times v'(x)$	$u(x) \times v(x) + \mathrm{k}$
$\frac{-v'(x)}{[\mathrm{v}(x)]^2}$	$\frac{1}{\mathrm{v}(x)} + \mathrm{k}$
$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[\mathrm{v}(x)]^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + \mathrm{k}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + \mathrm{k}$
$u'(x) \times [u(x)]^r$; $(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + \mathrm{k}$
$\frac{u'(x)}{u(x)} + \mathrm{k}$	$\ln\lvert u(x) \rvert + \mathrm{k}$
$u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)} + \mathrm{k}$
$\cos(ax + b)$; $(\mathrm{a} \neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + \mathrm{k}$
$\sin(ax + b)$; $(\mathrm{a} \neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + \mathrm{k}$

Dans ce chapitre du cours, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Formule analytique du : produit scalaire-norme d'un vecteur-produit vectoriel:

Soit $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs de $\mathcal{V}^3$ (l'espace vectoriel)

$\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb' + cc'$ (Produit scalaire)

$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (norme d'un vecteur)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \\ \vec{k} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$$ (Produit vectoriel)

La distance:

La distance entre deux points A et B est égale à :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

La distance entre un point M et un plan (P) d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(M;(P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

La distance entre un point M et une droite $\Delta(A;\vec{u})$ est : $d(M;(\Delta)) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

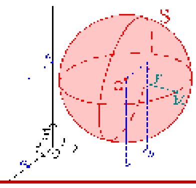
Equation d'un plan:

$(P): ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow \vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal au plan (P)

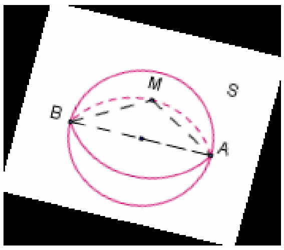
Si A , B et C sont trois points non alignés, alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC), et dans ce cas on peut déduire l'équation cartésienne du plan (ABC) à l'aide de l'équivalence suivante : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$

Equation d'une sphère:

L'équation d'une sphère (S) de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon r est : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$



L'équation d'une sphère (S) dont l'un de ces diamètres est $[AB]$ peut se déterminer à l'aide de l'équivalence suivante : $M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$



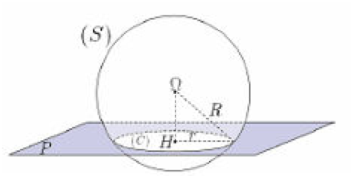
Remarque: dans ce cas la sphère (S) est de centre Ω milieu du segment $[AB]$ et de rayon $r = \dfrac{AB}{2}$

Intersection d'une sphère $S(\Omega;R)$ et un plan $(P): ax+by+cz+d=0$:

Soit H la projection orthogonale du centre Ω sur le plan (P)

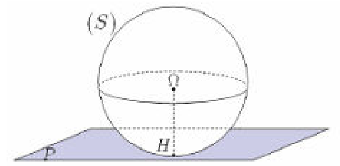
On pose : $d=\Omega H=d\left(\Omega;(P)\right)$

$d \prec R$



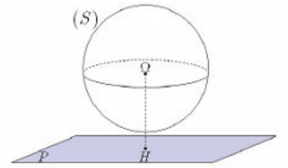
Le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$

$d=R$



Le plan (P) est tangent à la sphère (S)

$d \succ R$



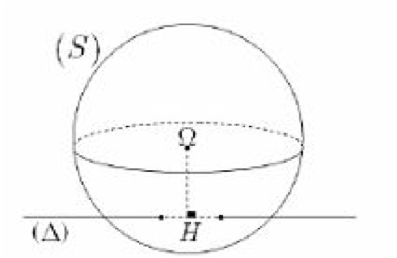
Le plan (P) ne coupe pas la sphère (S)

Intersection d'une sphère $S(\Omega;R)$ et une droite (Δ) :

Soit H la projection orthogonale du centre Ω sur la droite (Δ)

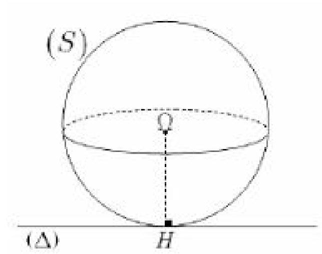
On pose : $d=\Omega H=d\left(\Omega;(\Delta)\right)$

$d \prec R$



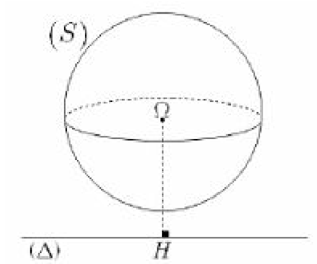
La droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points différents

$d=R$



La droite (Δ) est tangente à la sphère (S)

$d \succ R$



La droite (Δ) ne coupe pas la sphère (S)

Géométrie analytique dans l'espace

1) Rappel

- La norme d'un vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ est le nombre réel positif $\|\vec{u}\|=AB$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, alors: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)$
- Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$
- Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et noté $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.
- $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel. On a :
  - ✓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$; $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$; $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
  - ✓ $(\vec{u}\pm\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\pm2\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Dans tout le reste, on considère que le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soient $\vec{u}(a;b;c)$; $\vec{v}(a';b';c')$ et $\vec{w}(a'';b'';c'')$ deux vecteurs exprimés dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=aa'+bb'+cc'$ et $\vec{u}\cdot\vec{u}=a^2+b^2+c^2=\|\vec{u}\|^2$ *donc* $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=a\begin{vmatrix}b' & b''\\ c' & c''\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}a' & a''\\ c' & c''\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}a' & a''\\ b' & b''\end{vmatrix}$.
- $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ et $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Le système : $\begin{cases}x=x_A+at\\ y=y_A+bt \quad / t\in IR\\ z=z_A+ct\end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$.

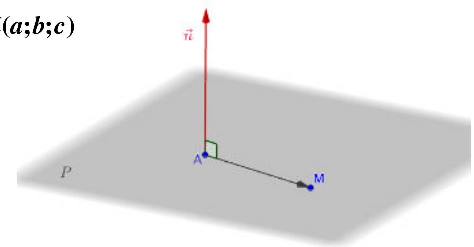
2) Plan et vecteur normal.

a) *Vecteur normal à un plan.*

Définition :Soit (D) une droite perpendiculaire à un plan (P), tout vecteur non nul directeur de (D) est appelé vecteur **normal** à (P).

b) *Equation d'une droite définie par un point A et un vecteur normal* $\vec{n}(a;b;c)$

Théorème : Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ est la droite de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par A.



- **Théorème** : soit $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur non nul avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$. et d un nombre réel.
- Une droite admettant $\vec{n}(a;b;c)$ comme vecteur normal a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.
- Réciproquement : tout plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ admet $\vec{n}(a;b;c)$ comme vecteur normal.

Remarque :

- Deux plans dites orthogonales si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Deux plans dites parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

c) *Distance d'un point à un plan.*

Propriété: Considérons un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et un plan $(P): ax+by+cz+d=0$

La **distance** du point A au plan (P) est: $d(A,(P))=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

3) Sphère.

a) *Equation cartésienne d'une sphère définie par son centre et son rayon.*

Sachant que l'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient $\Omega M = R\ (avec\ R>0)$ est une sphère de centre Ω et de rayon R. alors on en déduit la propriété suivante

Propriété : Le cercle de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R a pour équation : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

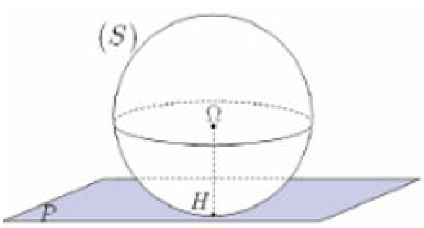
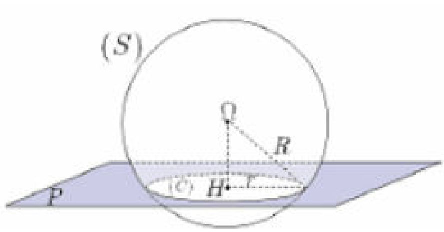
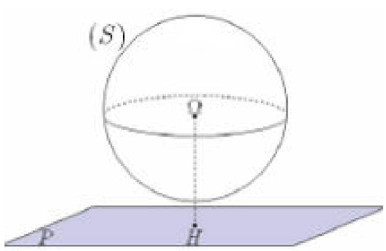
b) *Equation cartésienne d'une sphère défini par son diamètre.*

Propriété : Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que: $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$.

Remarque : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

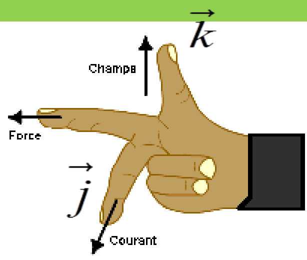
4) Positions Relatives d'un plan et d'une sphère .

Pour étudier la position relative d'un plan (P) et d'une sphère (S) de centre Ω et de rayon R. Il suffit de comparer $d(\Omega,(P))$ au rayon R.

$d(\Omega,(P))=R$	$d(\Omega,(P))<R$	$d(\Omega,(P))>R$
Le plan (P) et la sphère (S) ont un seul point commun H, le projeté de Ω sur (P). On dit que le plan (P) est tangent à la sphère (S). 	Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre H, le projeté de Ω sur (P) et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$ 	Le plan ne coupe pas la sphère 

5) Produit vectoriel.

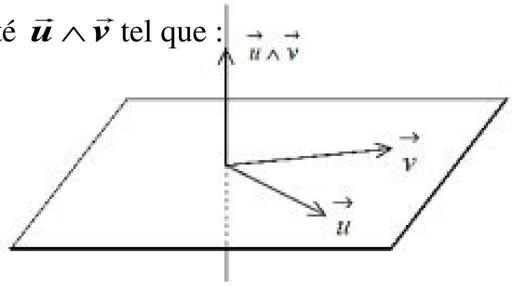
a) <u>*Orientation de l'espace.*</u>



L'espace doit être **orienté** en adoptant le même point de vue qu'en sciences physiques, on peut notamment utiliser la règle des **trois doigts de la main droite** ou le « **bonhomme d'ampère** » :

On dit alors que le repère est de **sens direct**.

b) <u>*Notation et définition.*</u>



Le **produit vectoriel** de deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$;

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors :

1) Direction : Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

2) Le sens de $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit de sens direct.

3) Norme : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\left|\sin\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\right|$.

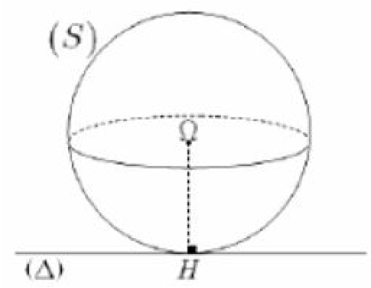
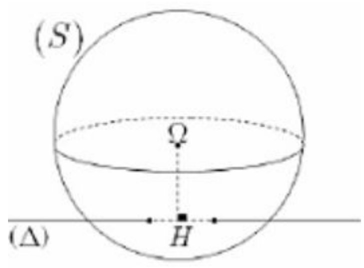
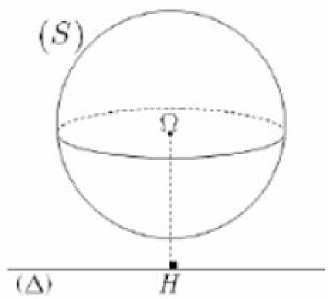
<u>**Remarque**</u> : Le produit ***vectoriel*** est un **vecteur,** alors que le produit ***scalaire*** est un **nombre**.

c) <u>***Propriétés***</u> ***:*** Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout nombre réel a,

- $(\vec{u}\wedge\vec{v})=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$ • $\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$ • $a(\vec{u}\wedge\vec{v})=\vec{u}\wedge(a\vec{v})=(a\vec{u})\wedge\vec{v}$ • $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$
- Soient la droite $D(A;\vec{u})$ et le point M, alors $d(M;(D))=\dfrac{\|\vec{u}\wedge\vec{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$

d) ***Positions relatives d'une droite et d'une sphère.***

Pour étudier la position relative d'une droite (D) et d'une sphère (S) de centre Ω et de rayon ***R.*** Il suffit de comparer $d(\Omega,(D))$ au rayon ***R.***

$d(\Omega,(D)) = R$	$d(\Omega,(D)) < R$	$d(\Omega,(D)) > R$
La droite (D) est tangente à la sphère (S). 	La droite (D) coupe la sphère (S) en deux points différents. 	La droite (D) ne coupe pas la sphère (S) 

<u>Propriété :</u> L'**aire du triangle** ABC est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$

Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé :

l'espace V_3 muni d'un repère orthonormé directe $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tel que : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$.

- ✓ $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$
- ✓ $\vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

Norme d'un vecteur - distance entre deux points :

Soient $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ deux points de l'espace.

On a : $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$.

Equation cartésienne d'un plan définie par un point et un vecteur normal :

Soit $\vec{n}(a,b,c)$ un vecteur non nul, et $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$, est le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Une équation cartésienne de ce plan, s'écrit sous la forme : $ax+by+cz+d=0$ ou d est un nombre réel.

Distance d'un point à un plan :

Soit (P) plan d'équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace. La distance du point A au plan (P) est : $d(A;(P))=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exemple :

Calculons la distance du point $A(-1,1,2)$ au plan (P) d'équation $x-2y-2z+4=0$.

On a : $d(A;(P))=\dfrac{|x_A-2y_A-2z_A+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-3|}{\sqrt{9}}=1$. donc : $d(A;(P))=1$

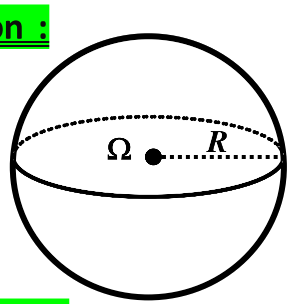
Etude analytique de la sphère :

Equation cartésienne d'une sphère définie par le centre et le rayon :

Une équation de la sphère (S) de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R avec $(R\succ0)$. Est :

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ que l'on peut écrire :

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ ou $d=a^2+b^2+c^2-R^2$.



Equation cartésienne d'une sphère définie par l'un de ces diamètres :

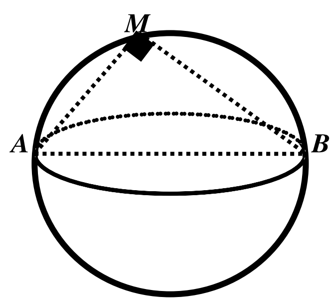
Soit A et B deux points de l'espace tel que : $(A\neq B)$.

L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ est la sphère dont $[AB]$ est l'un de ces diamètres.

Une équation cartésienne de cette sphère est :

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

avec $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$.



Etude de analytique de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

Soit a, b, c et d quatre nombres réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ *et* (S) *l'ensemble des points* $M(x,y,z)$ *de l'espace qui vérifient :* $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \Leftrightarrow x^2+ax+y^2+by+z^2+cz+d=0$$

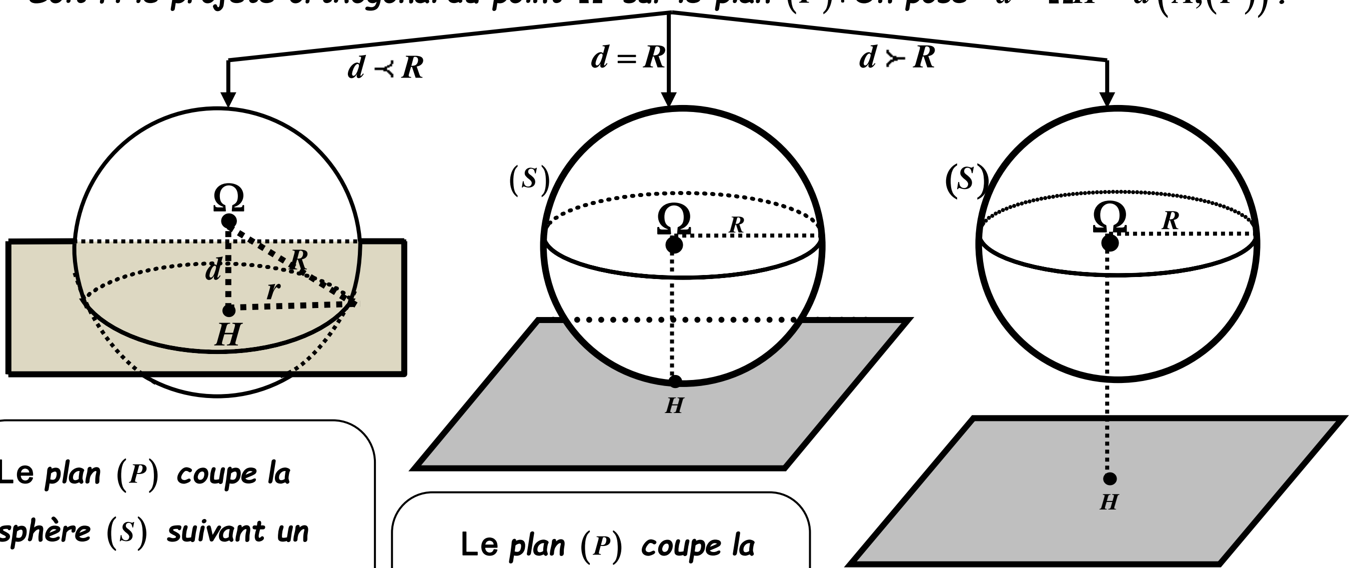
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2+d=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d$$

- **Si :** $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d\succ 0$: *l'ensemble des points* $M(x,y,z)$ *est la sphère* (S) *de centre* $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ *et rayon* $R=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d}$.
- **Si :** $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d=0$: (S) *est l'ensemble* $\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$.
- **Si :** $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d\prec 0$: (S) *est l'ensemble vide.*

Intersection d'une sphère $S(\Omega,R)$ et un plan (P) : $ax+by+cz+d=0$:.

Soit H le projeté orthogonal du point Ω *sur le plan* (P). *On pose* $d=\Omega H=d(A;(P))$.



Le plan (P) *coupe la sphère* (S) *suivant un cercle de centre* H *et de rayon* $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

Le plan (P) *coupe la sphère* (S) *en un point H. On dit que* (P) *est tangent à la sphère* (S).

Le plan (P) *ne coupe pas la sphère* (S). *On dit que* (P) *est à l'extérieur de la sphère* (S).

Remarque :

Pour déterminer les coordonnées du point H, on résoudre le système d'équation du plan (P) *et la représentation paramétrique droite* (D), *tel que* (D) *est la droite passant par* Ω *et orthogonale au plan* (P).

↳ Expression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé direct :

l'espace V_3 *est muni d'une base orthonormé directe* $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit $\vec{u}(x,y,z)$ *et* $\vec{v}(x',y',z')$ *deux vecteurs de l'espace.*

- ✓ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ *tel que :* $\vec{u}\perp\vec{w}$ *et* $\vec{v}\perp\vec{w}$.
- ✓ $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\left(\vec{v}\wedge\vec{u}\right)$.
- ✓ $\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$.
- ✓ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ *Les points A, B et C sont alignés.*
- ✓ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$.

↳ L'aire d'un triangle – l'aire d'un parallélogramme :

- ✓ *Soit ABC un triangle, son aire est :* $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.
- ✓ *Soit ABCD un parallélogramme, son aire est :* $S_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

↳ Distance d'un point à une droite :

Soit (D) *la droite dirigé par* $\vec{u}(a,b,c)$ *et passant par* $A(x_A,y_A,z_A)$ *et* M *un point de l'espace.*

La distance du point M et la droite (D) *est :* $d\left(M;D\left(A,\vec{u}\right)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

Si les points A, B et C ne sont pas alignés, donc le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ *est orthogonale au plan* (ABC). *Dans ce cas l'équation du plan* (ABC) *s'écrit sous la forme :*

$M\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

Cardinal d'un ensemble:

Définition:

Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre des éléments de cet ensemble et on le note : $CardE$

Cas particulier: $Card\varnothing = 0$

Propriété:

A et B sont deux ensembles finis

$Card(A \cup B) = CardA + CardB - Card(A \cap B)$

Accompli d'un ensemble:

Définition :

Soit A une partie d'un ensemble fini E

L'accompli de A par rapport à l'ensemble E est l'ensemble noté $\overline{A}$ avec : $\overline{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$

Remarques:

- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$
- $Card\overline{A} = CardE - CardA$

Le principe fondamental du dénombrement:

Si une opération globale peut se décomposer en p opérations élémentaires successives ($p \in \mathbb{N}^*$), ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de n_1 ; n_2 ;...; n_p manières différentes, alors l'opération globale peut se faire de: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_p$ manières différentes.

Arrangement avec répétition – sans répétition:

Arrangement avec répétition:

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$ ($p \le n$)

Le nombre d'arrangement avec répétition, de p éléments parmi n , est : n^p

Arrangement sans répétition:

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$ ($p \le n$)

Le nombre d'arrangement sans répétition, de p éléments parmi n , est :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1)}_{p-facteurs}$$

Cas particulier:

Tout arrangement sans répétition de n éléments parmi n éléments s'appelle une permutation de n éléments et il est égal à : $A_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$

Les combinaisons:

Soit E un ensemble fini contenant n éléments
Toute partie A de E contenant p éléments ($p \leq n$), s'appelle une combinaison de p éléments parmi n éléments, et le nombre de ses combinaisons est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Les nombres n! et A_n^p et C_n^p :

$(n \in \mathbb{N}^*)$;	$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ $0! = 1$		
$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$		$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	
$C_n^n = 1$	$C_n^1 = n$	$C_n^0 = 1$	$C_n^{n-1} = n$ $C_n^p = C_n^{n-p}$
$C_n^p = C_n^{n-p}$		$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$	

Nombre de possibilité d'arrangement de n éléments:

Si on a, n_1 éléments de type A , et n_2 éléments de type B , et n_3 éléments de type C , parmi n éléments, avec $n = n_1 + n_2 + n_3$, alors le nombre de possibilité d'arranger ses éléments est : $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_{3!}}$

Quelques types de tirage:

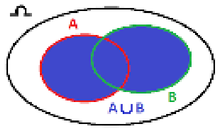
On tire p éléments parmi n éléments ($p \leq n$) et on résume les résultats dans le tableau suivant :

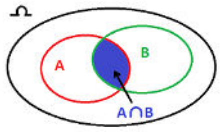
Type de tirage	Nombre de tirages possibles	Importance de l'ordre de tirage
Simultané	C_n^p	Pas important
Successif et avec remise	n^p	important
Successif et sans remise	A_n^p	important

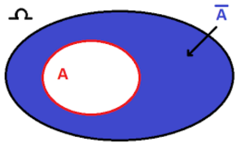
Dénombrement

I) *Cardinal d'un ensemble fini – Parties d'un ensemble.*

- Soit Ω un ensemble fini de n éléments, $\Omega = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$.
  L'entier naturel n est appelé **cardinal** de Ω. On note : $card\Omega = n$
- A et B désignent deux parties de Ω. On écrit : $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$
- $card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$.
- Si A et B sont deux ensembles **disjoints** (c'est-à-dire $A \cap B = \varnothing$) alors $card(A \cup B) = cardA + cardB$
- $\overline{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\}$, est le **complémentaire** de A.
- $\overline{A} \cup A = \Omega$ *et* $\overline{A} \cap A = \varnothing$
- $card\overline{A} = card\Omega - cardA$







II) *Principe de produit ou principe fondamental de dénombrement.*

- <u>**arbre de choix**</u>
- <u>**Principe de produit**</u> **:** Si une expérimentation complexe peut se décomposer en p opérations élémentaires successives tels que :

- La **première** opération peut être effectuée de n_1 manières différentes.
- La **deuxième** opération peut être effectuée de n_2 manières différentes.
- La **troisième** opération peut être effectuée de n_3 manières différentes. Et ainsi de suite …
- La $p^{ième}$ opération peut être effectuée de n_p manières différentes.

Alors l'ensemble de toutes ces opérations peut être effectuées de $N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_p$ manières différentes

III) *Arrangements et permutation d'un ensemble fini.*

- ***<u>Arrangements sans répétitions.</u>***

▪ ***Notion de factorielle*** : Soit n un entier naturel tel que $n > 1$

On appelle " ***n factorielle*** " le nombre entier noté $n!$ tel que $n! = n(n-1)(n-2) \times ..... \times 3 \times 2 \times 1$

Par convention, on pose **0! = 1** et **1! = 1**.

▪ Ω étant un ensemble à n éléments, on appelle arrangement de p éléments de Ω, toute suite de p éléments ***distincts*** de Ω. On le note A_n^p.

Il y a n façons de choisir le 1er élément, **(n-1)** façons de choisir le **2ème** élément, …, [n-(p-1)] façons de choisir le $p^{ème}$. et d'après le principe

Donc $A_n^p = n(n-1)(n-2).....(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \le n$.

$A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$; $A_n^n = n!$.

- Ω étant un ensemble à n éléments, on appelle ***permutation***, tout arrangement des n éléments de Ω.
  Il y a $n!$ permutations de Ω si les n éléments sont distinguables entre eux.

- ***<u>Arrangements avec répétitions.</u>***

C'est le nombre d'arrangements que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux peut figurer **plusieurs** fois dans le même arrangement. Le nombre d'arrangements avec **répétitions** est n^p

N. B. :Quand il s'agit de classer k « objets », rangés en p groupes dont les éléments sont considérés comme indistinguables entre eux à l'intérieur de chaque groupe, il faut trouver le nombre de permutations distinctes de p objets quand k_1 sont d'une sorte, k_2 d'une autre, …, k_p de la $p^{ème}$ sorte, avec $k_1 + k_2 + ... + k_p = k$.

Ce nombre est alors : $\dfrac{k!}{k_1! \times k_2! \times ... \times k_p!}$.

IV) *Combinaisons d'un ensemble fini .*

Ω étant un ensemble à n éléments, on appelle **combinaison** de p éléments de Ω, toute partie de p éléments de Ω. On la note C_n^p telle que : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ $/ 1 \leq p \leq n$.

Formules usuelles : $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ ***(formule de Pascal)*** ; $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k . b^{n-k}$ ***(formule du binôme)***

V) *Types de tirages.*

- La plupart des expériences aléatoires peuvent être interprétées comme des tirages de p boules d'une urne qui en contient n.
- Il y a **deux critères** pour distinguer ces tirages :
  1) **L'ordre** : Si l'ordre dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un « tirage avec ordre », sinon c'est un « tirage sans ordre ».
  2) **La répétition** : Si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule : on parle alors d'un tirage avec répétition ou avec remise. Dans le cas contraire on parle d'un tirage sans répétition ou sans remise.

Ω étant un ensemble à n éléments, On tire p éléments parmi n éléments, donc :

Type de tirage	*Ordre*	*Répétition*	*Nombre de tirages possibles*
Successif avec remise	**Pas important**	**Possible**	n^p
Successif sans remise	**Important**	**Impossible**	A_n^p $p \leq n$
Simultané	**Important**	**Impossible**	C_n^p $p \leq n$

L'équation différentielle	La solution générale de L'équation différentielle
$y' = ay + b$	$y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$ $a \in \mathbb{R}^2$

L'équation différentielle	L'équation caractéristique	L'équation caractéristique admet :		La solution générale de L'équation différentielle
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$	$\Delta \succ 0$	Deux différentes solutions réelles r_1 et r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$	Une solution réelle r	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta \prec 0$	Deux solutions complexes conjuguées $r_1 = p - iq$ et $r_2 = p + iq$	$y(x) = (\alpha \cos(\mathrm{qx}) + \beta \sin(qx)) e^{px}$ $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$