LIMITE ET CONTINUITE

I) CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN POINT

1) Activité et rappelles

1.1 Activités :

Activité 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin7x}{tan3x}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{sin2x}{cosx}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2cos^2x+cosx-3}{1-cos^2x}$

Activité 2 :

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{3x^2+x-4}{\sqrt{x^2+3}-2} \ ; si\ x\neq 1 \\ f(1)=14 \end{cases}$$

1- Déterminer D_f

2- a) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) Comparer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $f(1)$

On dit que f est continue en $x_0 = 1$

Activité 3 :

Considérons la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x)=xE\left(\frac{1}{x}\right) \ ; si\ x\neq 0 \\ g(0)=1 \end{cases}$$ (E désigne la partie entière)

1- Déterminer D_f

2- Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

3- g est elle continue en $x_0 = 0$?

1.2 Rappelle

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers le réel l quand x tend vers a si : $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<|x-a|<\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$

2 Définition et exemples

Définition :

Soit f une fonction définie **sur un intervalle de centre a**. On dit que la fonction f est **continue** en a si :

elle admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

C'est-à-dire : $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0\leq|x-a|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

Exemples :

❶ Montrer en utilisant la définition que $g(x) = 3x + 1$ est continue en a (a un réel quelconque).

❷ Montrer en utilisant la définition que $h(x) = x^2 + 1$ est continue en 1

❸Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^3 - x - 14}{x^2 - x - 2} & ; si\ x > 2 \\ f(x) = \dfrac{x - 2}{2x^2 + x - 10} & ; si\ x < 2 \\ f(2) = \dfrac{1}{9} & \end{cases}$$

En utilisant la notion des limites étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 2$

3- Interprétations graphiques

3.1 Activité :

Activité 1:

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 1 \\ x^2 - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

1- Déterminer $f(1)$ et étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 1$

2- Représenter graphiquement la fonction f.

Activité 2 :

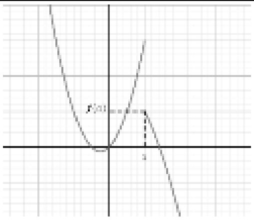
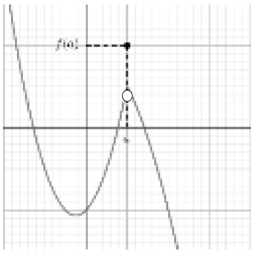
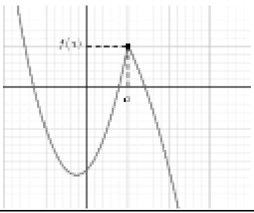
Considérons la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < -1 \\ -3x + 3, & x > -1 \end{cases}$ $et\ h(-1) = 3$

1- a) la fonction h admet-elle une limite en $x_0 = -1$

b) la fonction h est-elle continue en $x_0 = -1$

2- Représenter graphiquement la fonction h.

3.2 Interprétations

La courbe	L'interprétation
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$	• f est définie en 1 • f n'admet pas de limite en 1 • f n'est pas continue en 1
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 2, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x > 1 \end{cases} ; f(1) = 2$	• f est définie en 1 • f admet une limite en 1 et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ • f n'est pas continue en 1
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 2, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$	• f est définie en 1 • f admet une limite en 1 et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ • f est continue en a

Exercice :

Etudier la continuité de la fonction

$$\begin{cases} f(x) = x\sin\left(\frac{3}{x}\right), & x \neq 0 \\ f(0) = 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

4) Prolongement par continuité

Activité :

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

2- Déterminer la limite $\lim_{x\to -1} h(x)$, h est-elle continue en $x_0 = -1$?

3- Soit la fonction $\bar{h}$ définie par : $\begin{cases} \bar{h}(x) = h(x) \text{ si } x \neq -1 \\ \bar{h}(-1) = 3 \end{cases}$

a) Déterminer $D_{\bar{h}}$

b) Etudier la continuité de la fonction $\bar{h}$ en x_0=-1

La fonction $\bar{h}$ s'appelle **un prolongement par continuité de la fonction h en -1**

4- Peut-on prolonger h par continuité en $a = -2$

Théorème et définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f ; a un réel tel que $a \notin D_f$ et $\lim_{x\to a} f(x) = l$ (finie)

La fonction $\bar{f}$ définie par : $\begin{cases} \bar{f}(x) = f(x); & \text{si } x \neq a \\ \bar{f}(x) = \lim_{x\to a} f(x) = l \end{cases}$ est une fonction **continue en a et** c'est **un prolongement de la fonction f en a.**

La fonction $\bar{f}$ s'appelle **un prolongement par continuité** de la fonction f en a

Exercice 1 :

Définir un prolongement par continuité de la fonction $g(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}$ en $a = 1$

Exercice 2 :

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2+x-6}{x-E(x)}$ (E désigne la partie entière)

Peut-on prolonger h par continuité en $a = 2$?

II) CONTINUITE A DROITE CONTINUITE A GAUCHE.

1) Activité et définition.

1.1 Activité.

Introduction

Dans l'exercice prrécedent où f était définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^3 - x - 14}{x^2 - x - 2} \quad ; si\ x > 2 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{2x^2 + x - 10} \quad ; si\ x < 2 \\ f(2) = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

On a trouvé que : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{9} = f(2)$; on dit que **la fonction f est continue à gauche** de 2

et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \frac{1}{9} = f(2)$ on dit que **la fonction f n'est pas continue à droite** de 2.

1.2 Définitions

Définition

❶ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ (où > 0)

On dit que la fonction f est **continue à droite de a** si : $f$admet une limite finie à droite de a et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

C'est-à-dire : $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

❷ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r, a]$ (où > 0)

On dit que la fonction f est **continue à gauche de a** si : $f$admet une limite finie à gauche de a et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

C'est-à-dire : $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq a - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Théorème

Une fonction est continue en un point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a

Preuve : (En exercice)

Exercice 1:

Etudier la continuité de la fonction $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{|4x-3|-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{4} \end{cases}$ en $a = 1$

Exercice 2 :

Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{2x+12} - 4} & \text{si } x > 2 \\ g(x) = \frac{x^2 + \alpha x - \alpha + 1}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ g(2) = l \end{cases}$

Existent-t-il α et l pour que g soit continue en 2 ?

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

1) Continuité sur un intervalle

Définition :

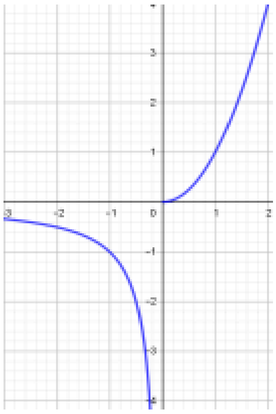
Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f, soit $]a, b[$ un intervalle inclus dans D_f

- On dit que f est continue sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$
- On dit que f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a
- On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b

Remarque :

- ✓ Si une fonction f est continue sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ elle est continue sur $[a, c]$
- ✓ En général si f est continue sur un intervalle I et sur un intervalle J et si $I \cap J \neq \emptyset$ alors f est continue sur $I \cup J$.
- ✓ f peut-être continue sur $[a, b[$ et sur $[b, c]$ sans qu'elle soit continue sur $[a, c]$
  Dans le graphique ci-dessous f estcontinue sur $[-3,0[$ et continue sur $[0,2]$ mais pas continue sur $[-3,0]$ car elle n'est pas continue en 0

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$



2) Opérations sur les fontions continues

2.1 Rappelles sur les opérations sur les limites finies

Propriété :

Soient f et g deux fonctions tels que : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$ on a :

- $\lim\limits_{x\to a}(f + g)(x) = l + l'$
- $\lim\limits_{x\to a}(f \times g)(x) = l \times l'$
- $\lim\limits_{x\to a}(|f|)(x) = |l|$
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l'}$ $\quad l' \neq 0$
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'}$ $\quad l' \neq 0$
- $\lim\limits_{x\to a}(\sqrt{f})(x) = \sqrt{l}$ $\quad l > 0$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel a.

2.2 Opérations sur les fonctions continues

Grace à la propriété précédente et à la définition de la continuité on peut en déduire :

Propriété :

①Si f et g sont deux fonctions continues en a alors :

- $f + g$
- $f \times g$
- $|f|$

sont des fonctions continues en a

② Si f et g sont deux fonctions continues en a et $g(a) \neq 0$ alors

- $\frac{1}{g}$
- $\frac{f}{g}$

sont des fonctions continues en a.

③ Si f une fonction continue en a et $f(a) \geq 0$ alors :

- $\sqrt{f}$ est continue en a

Remarque :

La propriété précédente reste vraie soit à droite de a, à gauche de a ou sur un intervalle I (En tenant compte des conditions)

Résultat :

Une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ est définie comme la somme des plusieurs monômes

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Et puisque la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto kx^n$ et par suite

Propriété :

Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Les fonctions sin et cos sont continue sur $\mathbb{R}$

Exemples :

❶ $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x^2 + x + 3$ étant une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ de plus $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 3 \geq 0)$ (Son discriminant Δ est négatif)

❷ $g(x) = \frac{4x^3+x+1}{x^2+2x-3}$ est continue sur $]-\infty, -3[$; sur $]-3,1[$ et sur $]1, +\infty[$.

❸ La fonction tan est continue sur tous le intervalles de la forme : $\left]\frac{-\pi}{2} + k\pi\,; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

2.3 Continuité de la composition de deux fonctions.

Théorème :

> Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que $f(I) \subset J$ et x_0 un élément de I.
>
> ① Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.
>
> ② Si f est continue I et g continue en $f(I)$ alors gof est continue I.

Preuve : (En utilisant la définition)

Montrons que : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ \alpha > 0)(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |(gof)(x) - (gof)(x_0)| < \varepsilon$

On a g est continue en $f(x_0)$ donc :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ \beta > 0)(|t - f(x_0)| < \beta \Rightarrow |g(t) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad (R)$

et puisque $f(I) \subset J$ donc : $(\forall x \in I)(f(x) \in J)$ (on pose $t = f(x)$ dans (R)) on obtient :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ \beta > 0)(|f(x) - f(x_0)| < \beta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ (*)

Pour $\beta > 0$ $(\exists \alpha > 0)$ $(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \beta$ (car f est continue en x_0)

$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ (*) C.Q.F.D

Exemples :

$f(x) = sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car :

- $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc
- $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\left(\frac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R}\right)$
- sin est continue sur $\mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{sin^2x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (justifier la réponse)

Exercice : Montrer que $h(x) = cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

3) Limite de vou

Théorème :

Soit u une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 telle que $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = l$; si v est continue en l alors $\lim\limits_{x\to x_0} (vou)(x) = v(l)$

Preuve :

On a : $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = l \in \mathbb{R}$ donc u admet un prolongement par continuité $\bar{u}$ définie comme :

$$\begin{cases} \bar{u}(x) = u(x) \text{ ; si } x \neq x_0 \\ \bar{u}(x_0) = l \end{cases}$$

La fonction $\bar{u}$ étant continue en x_0; et v est continue en $l = \bar{u}(x_0)$ alors et d'après le théorème de la composition $(vo\,\bar{u})$ est continue en x_0 et par suite :

$$\lim_{x\to x_0} (vou)(x) = \lim_{x\to x_0} (vo\bar{u})(x) = (vo\bar{u})(x_0) = v\big(\bar{u}\,(x_0)\big) = v(l)$$

Application :

Déterminer les limites suivantes :

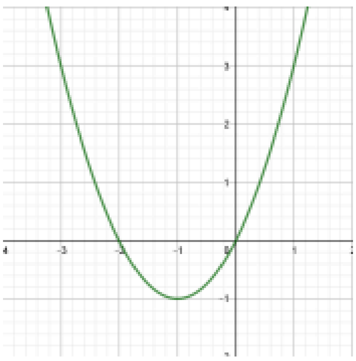
1. $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\pi \frac{sin4x}{3x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin\left(\pi x\left(1 - cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\right)$

IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

Activité :

Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + 2x$



1- Déterminer graphiquement les images des intervalles

$I_1 = [0,1]$, $I_2 = [-3,-1]$; $I_3 = [-3,1]$

2- Montrer algébriquement que $f([-3,1]) = [-1,3]$

Rappelle :

$$f(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} f(I) \subset J \\ J \subset f(I) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in I)(f(x) \in J) \\ (\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y \end{cases}$$

Théorème : (Admis)

L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est le segment $[m, M]$ où :

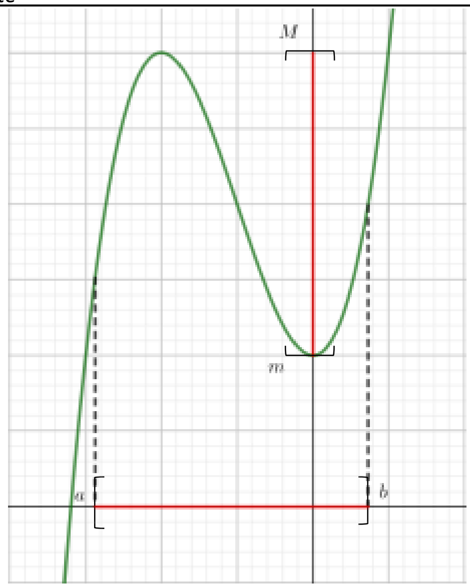
$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

La courbe ci-contre est la courbe de la fonction

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$$

$$f([a, b]) = [m, M]$$

continuitéiamgeintervalle.ggb



Cas particulier :

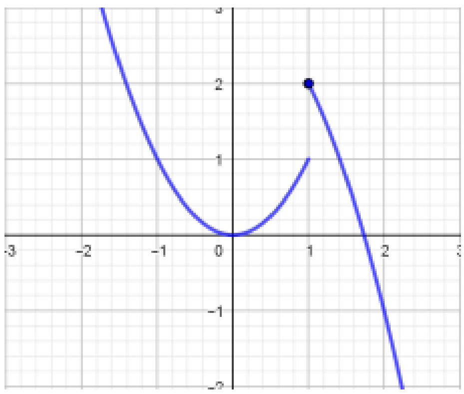
- Si f est continue croissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
- Si f est continue décroissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

Remarque :

La continuité dans le théorème précèdent est suffisante mais pas nécessaire

Dans la figure ci-contre f n'est pas continue mais

$$f([0,2]) = [f(2), f(1)] = [-1,2]$$



2) Image d'un intervalle.

2.1 Théorème général

Théorème (admis)

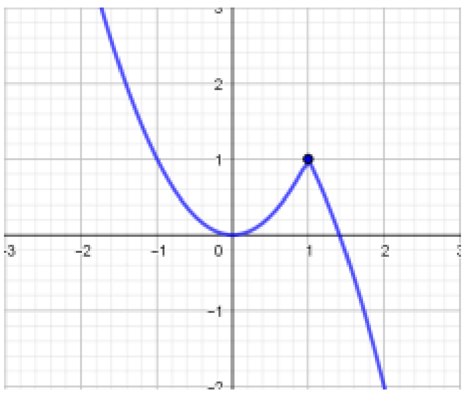
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque :

L'intervalle I et son image $f(I)$ par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

Dans le cas de la courbe ci-contre on a :

$f(]0,2]) = [-2,1]$



2.2 Cas d'une fonction strictement monotone :

L'intervalle I	**$f(I)$: f strictement croissante**	**$f(I)$: f strictement décroissante**
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,+\infty[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),f(a)]$
$]-\infty,b[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$
$]-\infty,+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$

Remarque

Si f n'est pas strictement monotone sur l'intervalle I, on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant l'intervalle I en intervalles où f est strictement monotone et on utilise la propriété $\boldsymbol{f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)}$.

Exercice :

1- Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = 2x^2 - 3x^2$

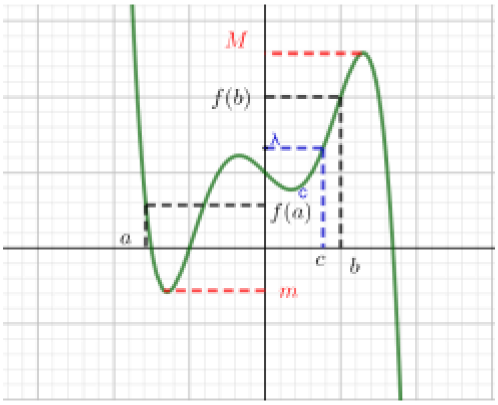
2- Déterminer les images des intervalles suivants : $]-1,0]$; $[1,2]$; $[-1,2[$; $[0,+\infty[$

V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE – TVI.

1) Le théorème :

1.1 Cas général

Preuve :



Rappelons que : $f(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in I)(f(x) \in J) \\ (\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y \end{cases}$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I tels que : $a < b$.

On sait que $f([a,b]) = [m,M]$ où $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

On a donc $f(a) \in [m,M]$ et $f(b) \in [m,M]$.

Soit λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ on a donc : $\lambda \in [m,M]$ et puisque $f([a,b]) = [m,M]$ donc λ admet au moins un antécédent c dans l'intervalle $[a,b]$.

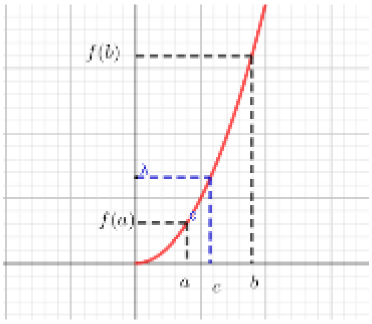
D'où pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$

Théorème T.V.I :

> Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
>
> Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$

1.2 Cas f strictement monotone.

Théorème T.V.I (cas f strictement monotone)



Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a,b]$.

Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul

$c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$

Remarque :

L'expression " Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$ "

peut-être formulée comme :

" Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $[a,b]$

Corolaire1 (T.V.I) :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$

Preuve :

$f(a) \times f(b) < 0$ veut dire que $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

On prend $\lambda = 0$ dans le théorème général des valeurs intermédiaire.

Corolaire2 (T.V.I) :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a,b]$.

Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe un et un seul c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = 0$

2) Applications :

Exercice 1 :

1- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une racine unique dans [0,1]

2- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une racine unique dans $\mathbb{R}$.

VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

Activité :

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

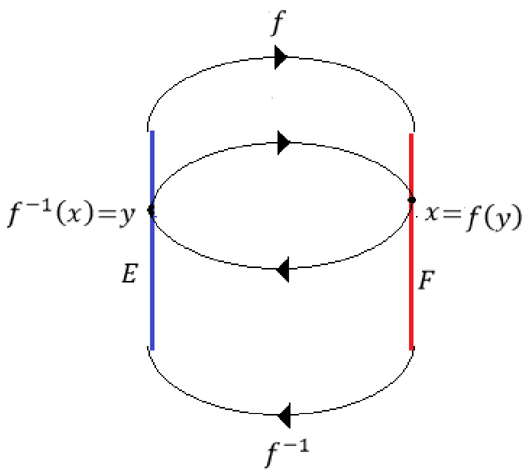
1- Montrer que pour tout y dans $I = [0,+\infty[$, l'équation $f(y) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $J =]0,1]$

2- Etudier la monotonie et la continuité de f sur $\mathbb{R}$

On dit que la fonction f **admet une fonction réciproque de** $J =]0,1]$ **vers** $I = [0,+\infty[$

Remarque :

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in E \end{cases}$$



On a :

$$(\forall x \in F)(fof^{-1}(x) = x)$$

$$(\forall x \in E)(f^{-1}of(x) = x)$$

2) Théorème et applications

2.1 Le théorème

Théorème :

Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I, On a f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $J = f(I)$ vers I.

Preuve :

Puisque f est continue et strictement monotone alors l'image de l'intervalle I l'intervalle $J = f(I)$

donc f est surjective par construction car $(\forall x \in J = f(I))(\exists y \in \mathrm{I})(f(y) = x)$

Montrons que f est injective de I vers $f(I)$

On suppose pour la démonstration que f est strictement croissante (même démonstration si f est strictement décroissante)

Soient y_1 et y_2 deux éléments distincts de I (On suppose que $y_1 > y_2$)

On a donc (puisque f est strictement croissante) $f(y_1) > f(y_2)$ donc $f(y_1) \neq f(y_2)$ et finalement f est injective

donc f est une bijection de I vers $f(I)$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I et on a : $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$

2.2 Application :

Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = 2x^2 + x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Déterminer $J = f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers $[0,1]$ et déterminer $f^{-1}(x)$ pour x dans J

Exercice 2 :

Soit la fonction $g(x) = x - 2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Montrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ puis déterminer $J = g([1, +\infty[)$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers $[1, +\infty[$et déterminer $g^{-1}(x)$ pour x dans J

Exercice 3 :

Soit la fonction $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

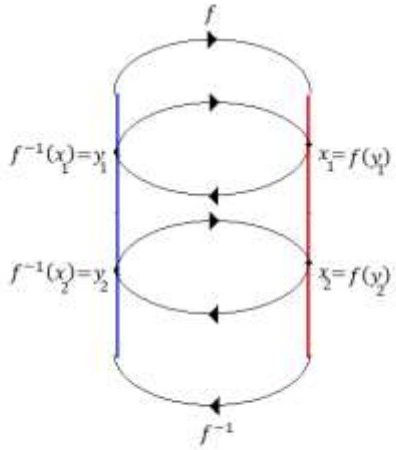
Montrer que h est une bijection de $]-1,1[$ vers un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer $h^{-1}(x)$ pour x dans J.

2.3 Propriété de la fonction réciproque

Propriété 1 :

Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I.

Preuve :



$$T_{f^{-1}/_J} = \frac{f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{y_1-y_2}{f(x_1)-f(x_2)}$$

$$= \frac{1}{T_{f/_I}} \quad (T_{f/_I} \neq 0 \ f \text{ est strictement monotone})$$

Donc le taux de f^{-1} sur J à le même signe que le taux de f sur I

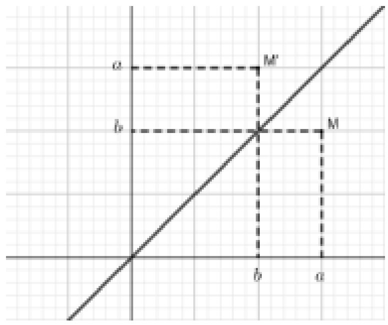
Et on conclut.

Propriété 2 :

Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors $C_{f^{-1}}$ et C_f sont symétriques par rapport à :

$(\Delta)\ \ y = x$

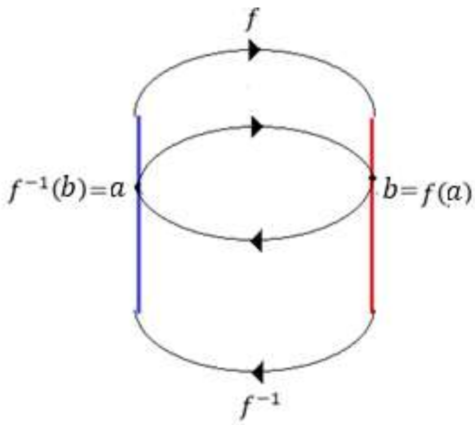
Rappelles :



①$M(x,y) \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$

②Dans un repère orthogonal si on a un point $M(a,b)$ son symétrique par rapport à la droite (Δ) $y = x$ est le point $M'(b,a)$.

Preuve d'une propriété :



Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I, f^{-1} sa fonction réciproque définie de $J = f(I)$ vers I.

C_f et $C_{f^{-1}}$ sont les courbes respectives de f et de f^{-1}.

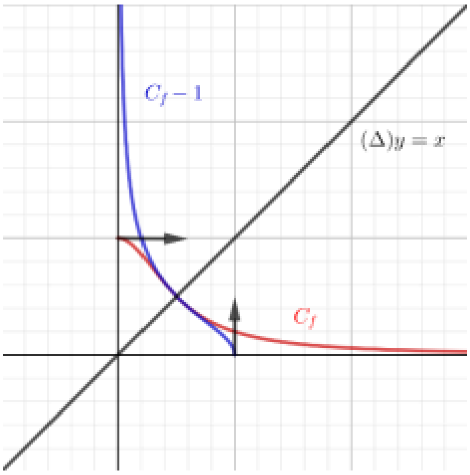
Soit $M(a, f(a))$ un point de la courbe C_f son symétrique par rapport à la droite (Δ) $y = x$ est le point $M'(f(a), a)$.

Or : $\begin{cases} f(a) = b \\ a = f^{-1}(b) \end{cases}$ donc $M'(b, f^{-1}(b))$ d'où $M' \in\ C_{f^{-1}}$

Propriété :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I, f^{-1} sa fonction réciproque définie de $J = f(I)$ vers I.C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) $y = x$

A remarquer que la symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes…



3) La fonction racine $n-$éme

3.1 Définition et règles de calculs

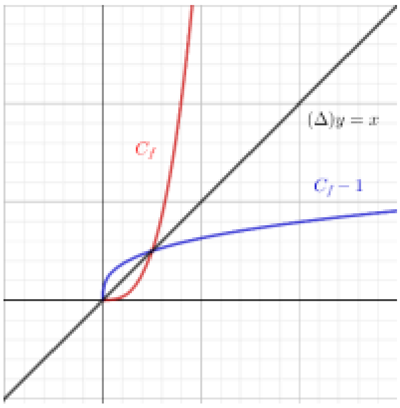
Propriété et définition :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; la fonction u: $x \mapsto x^n$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque u^{-1} de $u(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.
La fonction réciproque u^{-1} s'appelle la fonction racine $n-éme$ et se note $\sqrt[n]{\ }$

Conséquence de la définition :

- La fonction $\sqrt[n]{\ }$ est définie sur $\mathbb{R}^+$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} \geq 0)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x)$
- La fonction $\sqrt[n]{\ }$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ strictement croissante.
  - $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ (\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y)$
  - $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n)$
  - $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N})(\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to **} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to **} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to **} u(x) = l \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \to **} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

La courbe de la fonction $\sqrt[n]{\ }$



Règle de calcul :

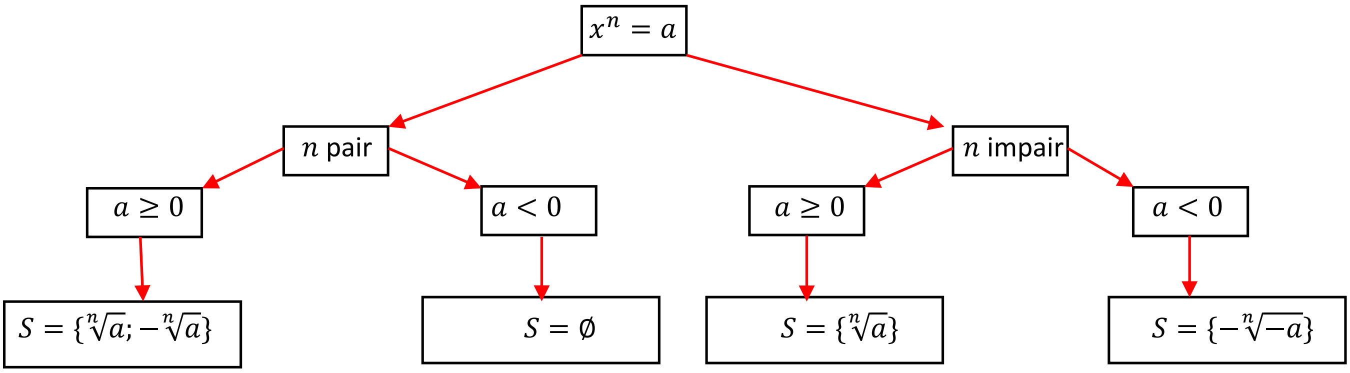
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ (\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y})$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\ \left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*)\ \left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x}\right)$ (à prouver)
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*)\left(\sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}\right)$ (à prouver)

Remarque :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[2]{x} = \sqrt{x})$

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[1]{x} = x)$

L'équation $x^n = a$



Exercices d'applications :

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 = 16$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-1)^3 = -27$

Exercice 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x} - x = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$.

3.2 L'expression conjuguai et ses applications

Ordre 3 :

On sait que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Il en résulte : $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ et $a + b = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

Par suite :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}\right)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}\right)$$

Applications :

① Rendre le dénominateur rationnel :

$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ $\qquad$ $b = \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

② Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{20x^2+7}-3}{x^2+x-2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{3x-4}-\sqrt{x}}{x-4}$

D'ordre 4 :

On sait que : $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

Il en résulte que : $a - b = \frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

Et par suite :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}\right)}$$

A remarquer qu'on ne peut pas factoriser : $a^4 + b^4$

Applications :

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{20x-4}-2}{2x^2+x-3}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{2x+1}-1}{\sqrt[3]{2x+8}-2}$

4) Puissance rationnelle :

4.1 Puissance entier

Rappelle :

Soit x un réel et n un entier naturel non nul on a : $x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots . \times x}_{n\,fois}$ et $x^0 = 1$ $(x \neq 0)$

Pour $x \neq 0$ on a $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

4.2 Puissance rationnelle

Propriété :

$\boxed{\text{Pour tout réel } x \geq 0 \text{ et pour tout entier non nul } q \text{ on pose : } \sqrt[q]{x} = x^{\left(\frac{1}{q}\right)}}$

Preuve : (en exercice)

Définition :

Soit x un réel positif et r un rationnel $(r \in \mathbb{Q})$; $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$x^r = x^{\left(\frac{p}{q}\right)} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

Propriétés

Soit x et y deux réels positifs, r et r' des rationnels on a :

1. $x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
2. $x^{r\times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
3. $x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}}$ $(x \neq 0)$
4. $x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}}$ $(x \neq 0)$
5. $(xy)^r = x^r y^r$
6. $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

Exercice 1 :
Démontrer 1 et 2
Exercice 2 :
Comparer les nombres $a = \sqrt[3]{5}$ et $b = \sqrt[4]{20}$

Application aux calculs des limites.

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[5]{2x^2+3x} - \sqrt[4]{3x^3+x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{8x^2+3x} - 2\sqrt[3]{x^2-x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[p]{x^q+1} - \sqrt[q]{x^p+1}$ (discuter suivant les valeurs de p et q)

5) la fonction Arctangente :

Activité :

1- Déterminer $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+} tanx$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tanx$

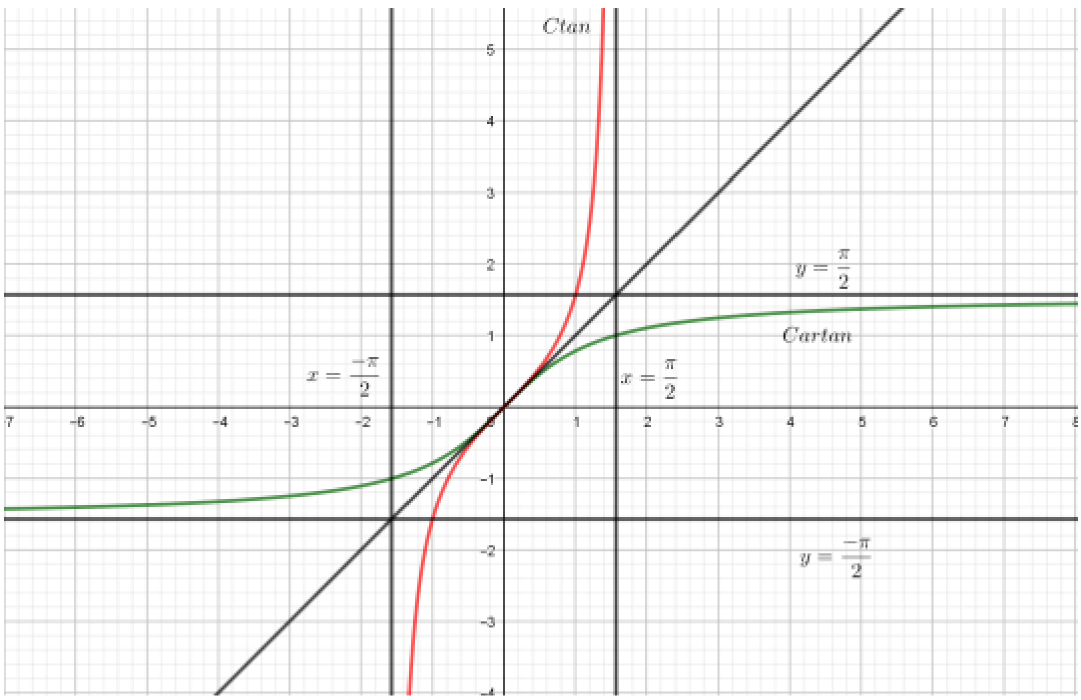
2- Montrer que la restriction de la fonction tan sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$est une bijection de $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$vers $\mathbb{R}$.

Propriété et définition :

La restriction de la fonction tan sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$vers $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque s'appelle la fonction **Arctangente** , notée : $\boldsymbol{artan}$ elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

La courbe de la fonction $arctan$:



Résultats :

① $\begin{cases} arcta\ x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = tan\, y \\ y \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

② $\lim\limits_{x\to+\infty} arc\,tan\,x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} arc\,tan\,x = \frac{-\pi}{2}$

③ $(\forall x \in \mathbb{R})(\tan(arctan\,x) = x)$ et $\left(\forall x \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)(\arctan(tan\,x) = x)$

④ La fonction $artan$ est impaire strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

⑤ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\left(arctan\, x + arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^-)\left(arctan\, x + arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\pi}{2}\right)$ (Propriété à démontrer)

Exercice 1 :

Déterminer les réels suivants:

$$a = Arctan\left(tan\left(-\frac{3\pi}{22}\right)\right) \;;\quad b = Arctan\left(tan\left(\frac{144\pi}{4}\right)\right) \quad;\quad c = tan(Arctan\sqrt{123})$$

Exercice 2 :

Soient a et b deux réels tels que $a \in]-1,1[$ et $b \in]-1,1[$

1- Montrer que: $arctan\, a + arctan\, b = arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

2- Etudier le cas où $a > 1$ et $b > 1$

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$arctan\left(\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) + arctan\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right) = \frac{\pi}{\mathbf{6}}$$

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes :

1. 1- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{Arctanx-1}{4x-\pi}$ 2- $\lim\limits_{x\to+\infty} x(2arctanx-\pi)$ 3- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{Arctan(2x^2+x)}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}\right)$

ETUDE DES FONCTIONS

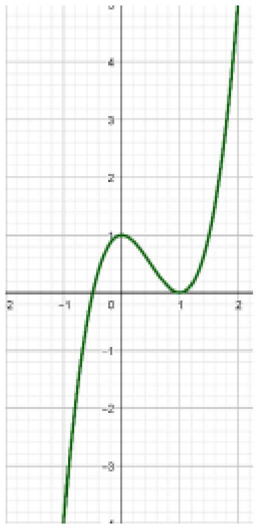
I) CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION

1) Activités :

Activité 1 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$; Soit $A(a, f(a))$ un point de sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation de la tangente (T_A) en A. (En fonction de a)
2. Soit P et M deux points qui ont la même abscisse x et qui appartiennent respectivement à C_f et (T_A), Montrer que le signe de $\overline{PM}$ est positif quel que soit la valeur de x.
3. Déterminer la dérivée seconde de f.



Activité 2 :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2$.

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction g.
2. Dresser le tableau de signe de $g''(x)$.
3. La courbe représentative de g est représentée ci-contre, étudier graphiquement La position relative de la courbe c_g par rapport à ses tangentes.
4. Que peut-on conclure ?

Activité 3 :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de h et étudier sa parité.
2. Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$
3. Déterminer la fonction dérivée de la fonction h et dresser le T.V
4. Déterminer l'équation de la tangente T en $O(0,0)$
5. Etudier les positions relatives de T et la courbe C_f
6. Tracer la courbe C_f

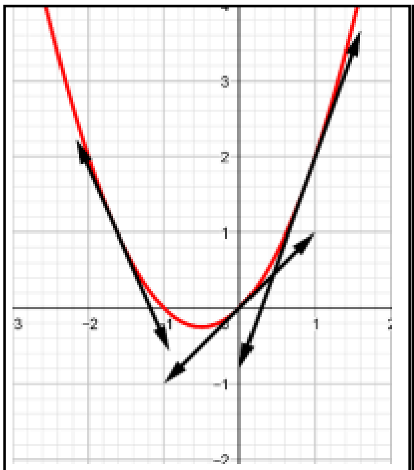
2) Définition et propriétés.

2.1 Définitions :

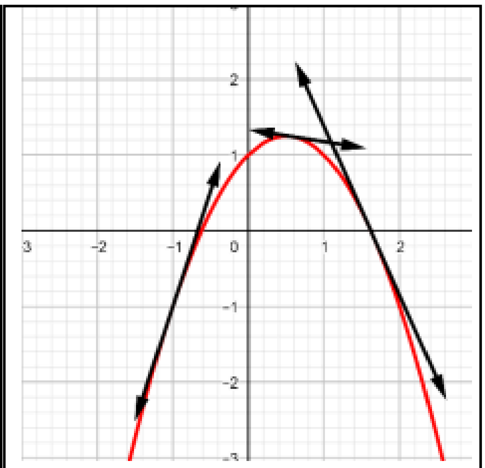
Définition :

Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f.

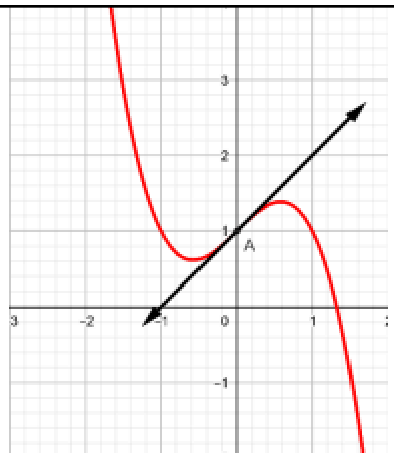
- On dit que la courbe est **convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes**
- On dit que la courbe est **concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.**
- **Un point d'inflexion** est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe C_f



Graphe d'une fonction convexe



Graphe d'une fonction concave

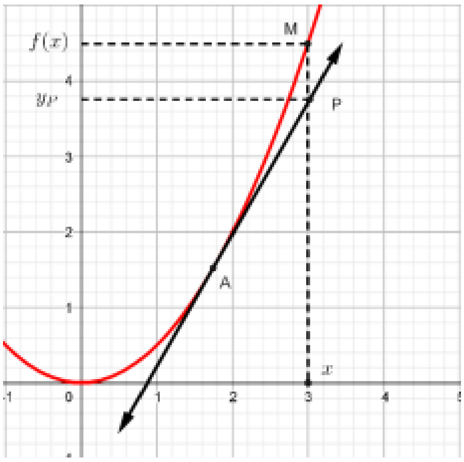


Point d'inflexion en A

Remarque :

Si f est dérivable en a et C_f traverse sa tangente en A alors le point A est un point d'inflexion

2.2 Dérivée seconde et concavité.



Soit f une fonction **deux fois dérivable** sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative. Soient a un élément de I, $A(a, f(a))$ et (T_A) la tangente en A, Soient P et M deux points qui ont le même abscisse x

et qui appartiennent respectivement à C_f et (T_A),

On a : $y_P = f'(a)(x-a) + f(a)$. Soit :

$$\varphi(x) = \overline{PM} = f(x) - y_P$$

$$= f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$$

φ est dérivable sur I

$(\forall x \in I)(\varphi'(x) = f'(x) - f'(a))$ (car $\left(f(a)\right)' = 0$; $f(a)$ est une constante)

φ est deux fois dérivable sur I

$(\forall x \in I)\left(\varphi''(x) = f''(x)\right)$

Si $\boldsymbol{f''}$ **est positive** sur I, il en est de même pour φ'' et on aboutit au tableau suivant :

x	a
$\varphi''(x)$	$+$
$\varphi'(x)$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$
Signe de φ'	$-$ 0 $+$
$\varphi(x)$	$\searrow$ 0 $\nearrow$

On voit bien que si f est deux fois dérivable et que $f'' \geq 0$ sur I alors

$\varphi(x) = \overline{PM} = f(x) - y_p$ est positif ce qui signifie que C_f est au-dessus de sa tangente en $A(a, f(a))$ et ceci pour tout a dans I d'où :

C_f est convexe sur I.

De même si on suppose que f'' est négative sur I on conclut que C_f est concave sur I.

Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si f'' est **positive** sur I alors C_f est **convexe** sur I.
- Si f'' est **négative** sur I alors C_f est **concave** sur I.
- Si f'' **s'annule en a en changeant de signe** alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

Remarque :

Les conditions du théorème précèdent sont suffisantes ; on peut avoir une courbe convexe, concave ou un point d'inflexion sans l'existence même de la dérivée seconde.

Exercice :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 0.
2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier la dérivabilité de f' en 0 ; f est-elle deux fois dérivable en 0.
4. Tracer la courbe C_f et remarquer qu'elle admet un point d'inflexion en $O(0,0)$.

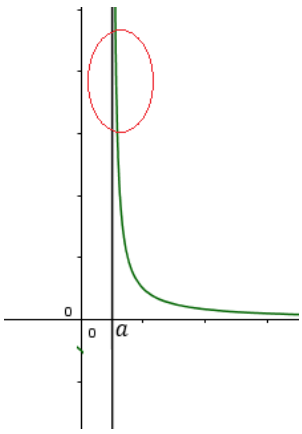
II) BRANCHES INFINIES.

1) Asymptote verticale (rappelle)

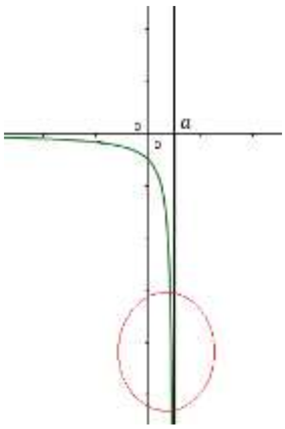
Définition :

Si la fonction f vérifie l'une des limites suivantes :
$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$
Alors, on dit que la droite $(\Delta): x = a$ est une **asymptote verticale.**

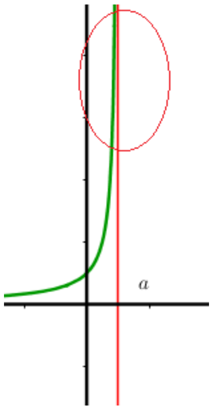
Interprétations géométriques :



$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$



$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

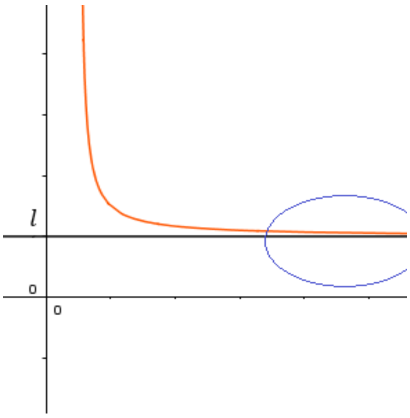
2) Asymptote horizontale.

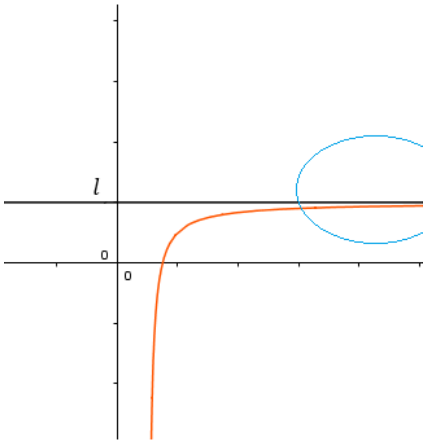
Définition :

Si la fonction f vérifie l'une des limites suivantes :
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$
Alors, on dit que la droite $(\Delta): y = l$ est une **asymptote horizontale.**

Interprétation géométrique :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$





Remarque :

La position de la courbe C_f par rapport à son asymptote horizontale se détermine par le signe de $f(x) - l$:

- Si $f(x) - l \geq 0$ alors C_f est au-dessus de $(\Delta): y = l$
- Si $f(x) - l \leq 0$ alors C_f est au-dessous de $(\Delta): y = l$

Exercice :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Interpréter géométriquement les résultats obtenues.

3) Asymptote oblique.

Activité :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x^2-x}{x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g.
2. Déterminer les limites aux bornes de D_g
3. Effectuer la division de $P(x) = 2x^2 - x$ sur $(x - 1)$ puis en déduire que $(\forall x \in D_g)\left(g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)$
4. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} g(x) - (2x + 1)$

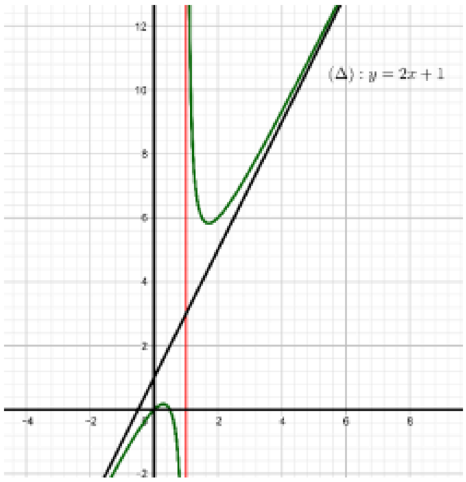
On dit que la droite $(\Delta): y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$, on dit que la droite $(\Delta): y = ax + b$ où $a \neq 0$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ si : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

Exemple :

La courbe de la fonction : $g(x) = \frac{2x^2-x}{x-1}$ a pour asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, la droite $(\Delta): y = 2x + 1$.



Remarque :

Si la courbe C_f admet la droite $(\Delta): y = ax + b$ comme asymptote oblique alors la position de la courbe C_f se déduit par

le signe de $\overline{PM} = f(x) - (ax+b)$.

- Si $\overline{PM} = f(x) - (ax+b) > 0$ alors C_f est au-dessus de (Δ)
- Si $\overline{PM} = f(x) - (ax+b) < 0$ alors C_f est au-dessous de (Δ).
- Si $\overline{PM} = f(x) - (ax+b) = 0$ alors C_f est coupe (Δ).

Propriété :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La courbe C_f admet la droite $(\Delta): y = ax + b$ $(a \neq 0)$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ si et seulement s'il existe une fonction h tel que :

$$\begin{cases} f(x) = ax + b + h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0 \end{cases}$$

Preuve : Il suffit de poser : $h(x) = f(x) - (ax+b)$.

Exercice : En utilisant la division euclidienne montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*/\{1\})\left(\frac{x^3+2x^2+2x}{x^2+x} = x + 1 + \frac{1}{x+1}\right)$

En déduire que la fonction $f(x) = \frac{x^3+2x^2+2x}{x^2+x}$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

Propriété :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La droite $(\Delta): y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \end{cases}$$

Preuve :

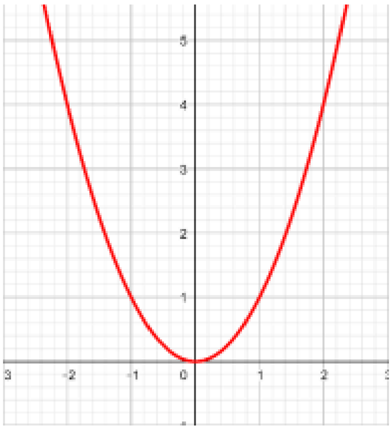
D'après la propriété précédente : On peut écrire $f(x) = ax + b + h(x)$ où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

Donc : $\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x}\right) = 0$)

D'autre part : $f(x) - ax = b + h(x)$ où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$

4) Branches paraboliques.

4.1) Vers l'axe (Oy)



Soit la fonction définie par : $f(x) = x^2$

On a : $D_f = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$

On dit que **la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Oy)**

au voisinage de $+\infty$

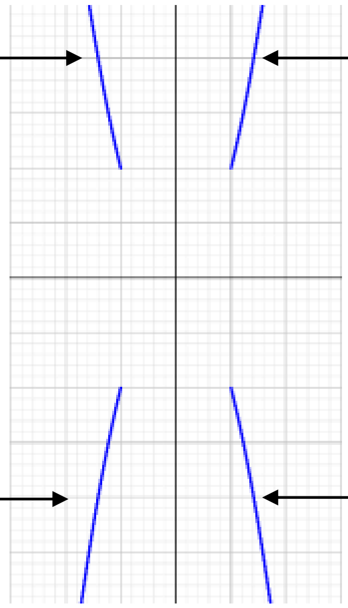
Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$; on dit que la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$.

Interprétations géométriques :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$$

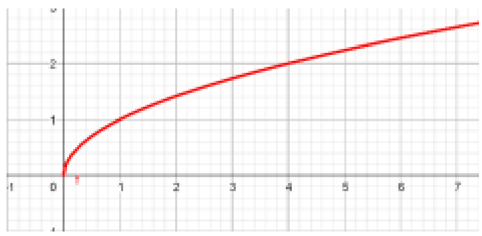
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \end{cases}$$

4.2) Vers l'axe $(\boldsymbol{Ox})$

Soit la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x}$

On a : $D_f = \mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$

On dit que **la courbe $\boldsymbol{C_f}$ admet une branche parabolique vers l'axe $(\boldsymbol{Ox})$ au voisinage de $+\infty$**



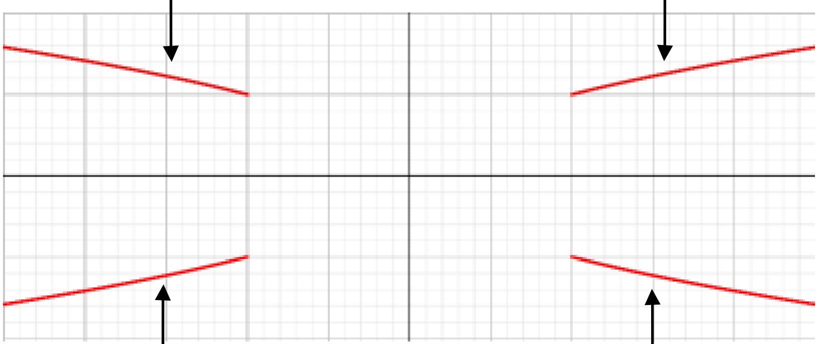
Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$; on dit que la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Interprétations géométriques.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

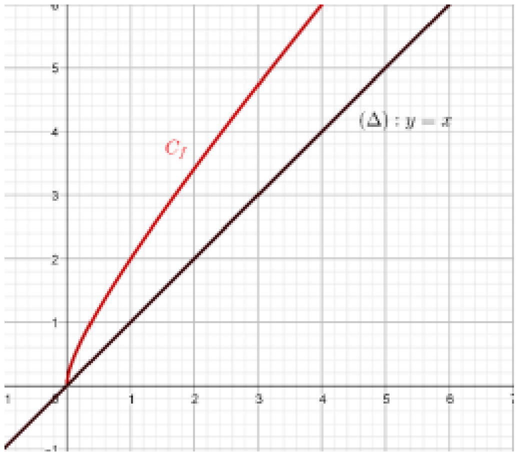
4.3) Vers l'axe $(\Delta): y = ax$

Activité :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par : $f(x) = x + \sqrt{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$



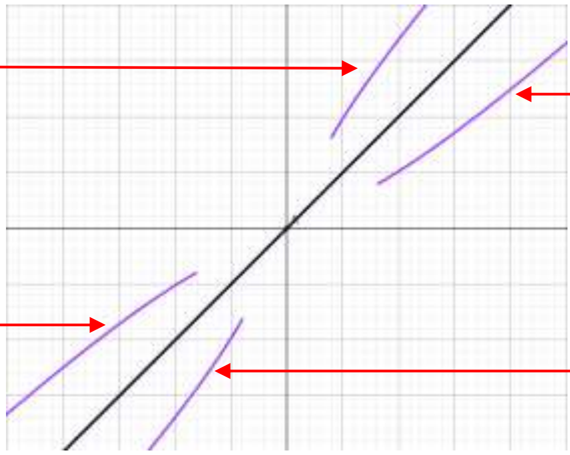
On dit que la courbe de la fonction **admet une branche parabolique vers la droite** $(\boldsymbol{\Delta}): \boldsymbol{y = x}$.

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$; si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ alors on dit que : la courbe de la fonction **admet une branche parabolique vers la droite** $(\boldsymbol{\Delta}): \boldsymbol{y = ax}$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = +\infty \end{cases}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = -\infty \end{cases}$



$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = +\infty \end{cases}$

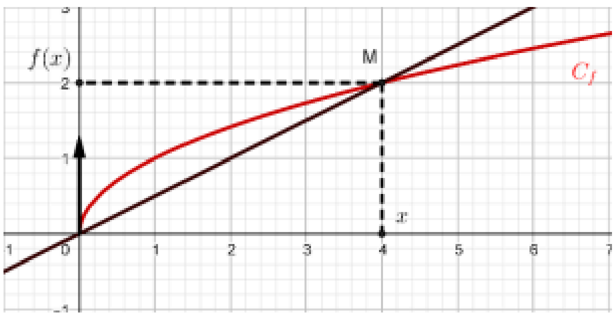
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = -\infty \end{cases}$

III) DEMI-TANGENTE VERTICALE

Introduction :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(f(x) = \sqrt{x})$

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0.



Soient $x \neq 0$ et $M(x, f(x))$ un point de la courbe C_f la droite (OM) à pour coefficient directeur $m = \frac{\sqrt{x}}{x}$ donc elle a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{x}}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix}$ le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi vecteur directeur de la droite (OM) si on fait tendre x vers 0 (à droite) La droite (OM) "tend" pour une position limite vers une droite (T) de vecteur directeur $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

sera parallèle à l'axe (Oy).

Propriété :

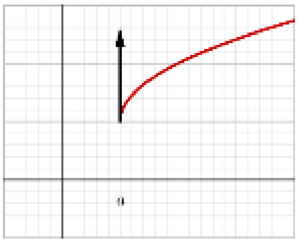
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$
Si $\boldsymbol{f}$ **est continue** à droite de a et $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$ alors la courbe C_f admet une demi-tangente verticale à droite de a.

Exercice :

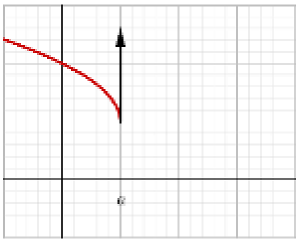
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - E(x)$

1. Tracer la courbe de la fonction f sur $[0,2[$.
2. Etudier la limite $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
3. Que remarquer vous ?.

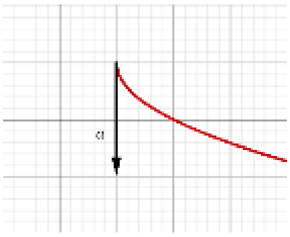
Interprétation géométriques



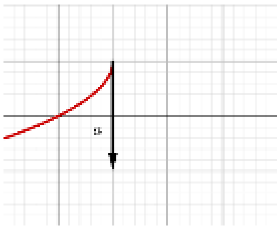
$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$

IV) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

1) Axe de symétrie :

Activité :

Soit la fonction $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{2x^2-4x-6}\end{array}$

1. Déterminer D_f ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que $(\forall x\in D_f)(2-x\in D_f)$
3. Montrer que $(\forall x\in D_f)(f(2-x)=f(x))$

Propriété :

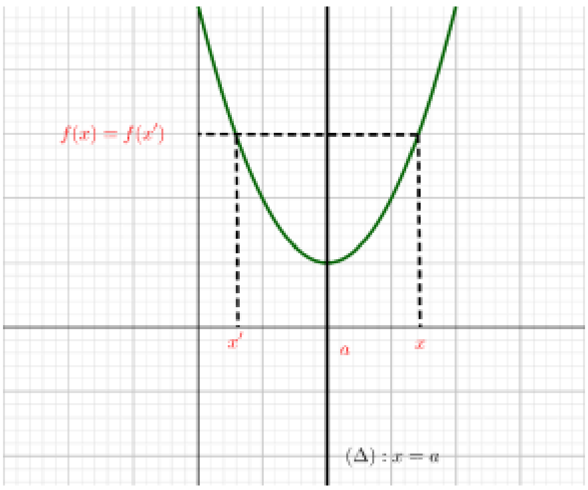
Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.
La droite $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x\in D_f)(2a-x\in D_f) \\ (\forall x\in D_f)(f(2a-x)=f(x))\end{cases}$

Preuve :

Soit x un élément de D_f et $A(x,0)$, si $A'(x',0)$ est le symétrique de A par rapport à (Δ) $x=a$ alors $\frac{x+x'}{2}=a$ (a est le centre de l'intervalle de bornes x et $'$)

d'où : $x' = 2a - x$ et puisque $(\Delta)\perp(AA')$ alors

$f(x) = f(x')$ ce que signifie : $f(2a-x) = f(x)$



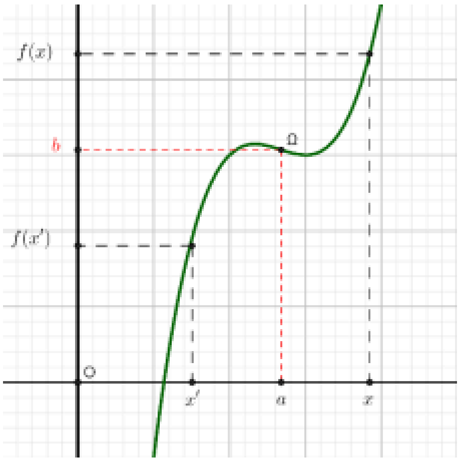
2) Centre de symétrie.

Propriété :

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.

Le point $\Omega(a,b)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f) \\ (\forall x \in D_f)(f(2a-x) = 2b - f(x)) \end{cases}$

Preuve :



$\Omega(a,b)$ étant centre de symétrie de la courbe C_f, si $M(x,f(x))$ est un point de C_f alors sont symétrique M' par rapport à Ω est un point de C_f. soit $M'(x',f'(x))$ on a : $\frac{x+x\prime}{2} = a$ et $\frac{f(x)+f(x')}{2} = b$

car a est le centre de l'intervalles de bornes x et x' et b est le centre de l'intervalles de bornes $f(x)$ et $f(x')$

Par suite : $x' = 2a - x$ et $f(x') = 2b - f(x)$ et finalement :

$f(2a-x) = 2b - f(x)$

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Montrer que le point d'inflexion de C_f est son centre de symétrie. (c'est valable uniquement pour ces fonctions)

LA DERIVATION

I) RAPPELLES

1) Activités :

Activité 1 :

1- Montrer en utilisant la définition que la fonction $f(x) = 2x^2 + x - 3$ est dérivable en $a = 2$.

2- Montrer en utilisant la définition que la fonction $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$ est dérivable en $a = 1$

3- Montrer en utilisant la définition que la fonction $h(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 3}$ est dérivable en $a = -1$.

4- La fonction $u(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ est-elle dérivable en $a = 3$.

Activité 2 :

Etudier la dérivabilité de la fonction $\begin{cases} f(x) = 2x^2 + x & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{4x+2}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $a = 1$

Activité 3 :

1- Etudier la dérivabilité de la fonction $g(x) = |2x^2 - 8| + x + 1$ en $a = -2$.

2- Déterminer l'équation de la tangente en $A(0, g(0))$

3- Déterminer les équations des demi-tangentes au point $B(-2, g(-2))$

4- Présenter les 3 tangentes.

2) Rappelles.

2.1 Définitions et propriété de base

Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle **ouvert de centre $\boldsymbol{a}$**.
On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas on appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

Remarque :

Si f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ On pose : $h = x - a$ si x end vers a alors h tend vers 0 et on obtient
$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Application :

Calculer le nombre dérivé de $f(x) = x^3 + x$ en $a = 1$ en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

Définition :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$

On dit que f est dérivable à droite de a si la limite $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à droite de a et on la note : $f'_d(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r, a]$où $r > 0$

On dit que f est dérivable à gauche de a si la limite $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à gauche de a et on la note : $f'_g(a)$.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a.
f est dérivable en a si et seleument si elle dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

2.2 Fonction affine tangente

Soit f une fonction dérivable en a et $f'(a)$ son nombre dérivé en a.

Posons : $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$

On a : $(x-a)\varphi(x) = -f'(a)(x-a) + f(x) - f(a)$ et par suite :
$f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\varphi(x)$
Posons : $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ on aura : $f(x) = u(x) + (x-a)\varphi(x)$
La fonction u est une **fonction affine** et s'appelle ***la fonction affine tangente en a.***

Propriété :

Soit f une fonction dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme :
$u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

Remarques:

- La fonction affine tangente en a d'une fonction dérivable en a est une approximation de f au voisinage de a
  On peut écrire alors : $f(x) \sim f'(a)(x-a) + f(a)$
- Si on pose $x = a + h$; on aura : $f(a+h) \sim f'(a)h + f(a)$ qui dit que si on ne connait pas $f\ (a + h)$ et si h est petit, on peut" essayer de mettre " $f'(a)h + f(a)$ a la place de $f(a+h)$.

Exemple :

Si on veut une approximation de $sin3$, on peut prendre :

- $f(x) = sinx$
- $a = \pi$ (car π est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est conu)
- $h = 3 - \pi$ (pour avoir :$3 = \pi + h$)

On a alors $f(a) = sin\pi = 0$ et $f'(a) = cos\pi = -1$ (à prouver) ce qui donne :
$sin3 = sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3.$

2.3 Interprétation géométrique :

Propriété :

Soit f une fonction dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme :
$u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exercice :

Soit $(x) = x^2$, $A(a, f(a))$ un point de C_f ; T est la tangente à C_f en A. La droite T coupe respectivement (Ox) et (Oy) en M et N.

Montrer que M est le milieu de $[AN]$.

Théorème :

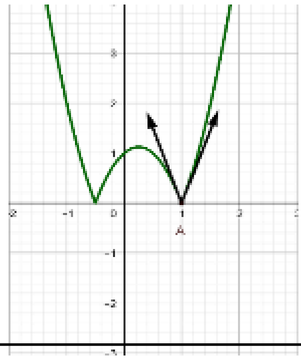
- Si f est une fonction dérivable **à droite** de a, alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a (T_d) d'équation : $(T_d) \begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ \boldsymbol{x \geq a} \end{cases}$
- Si f est une fonction dérivable **à gauche** de a, alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a (T_g) d'équation : $(T_g) \begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ \boldsymbol{x \leq a} \end{cases}$

Exemple :

$f(x) = |-2x^2 + x + 1|$; On a : f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = 3$ (à prouver) et est dérivable à gauche de 1 et $f'_g(1) = -3$

donc la courbe représentative de f admet deux demi-tangentes en $A(1, f(1))$.

$(T_d)\begin{cases} y = 3(x-1) \\ \boldsymbol{x \geq 1} \end{cases}$ et $(T_g)\begin{cases} y = -3(x-1) \\ \boldsymbol{x \leq 1} \end{cases}$ qu'on peut représenter par :



2.4 Opérations sur les fonctions dérivées :

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** $\boldsymbol{I}$. La fonction qui associe à tout élément x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle **la fonction dérivée de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$.**

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

La fonction f	Sa fonction dérivée f'	Intervalles de dérivation
C	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^{*+}$et $\mathbb{R}^{*-}$
cos	$-sin$	$\mathbb{R}$
sin	cos	$\mathbb{R}$
$tanx$	$1 + tan^2x$	$]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{-\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$

Tableau des opérations sur les fonctions dérivées

La fonction	**Sa fonction dérivée**
$f + g$	$f' + g'$
$f.g$	$f'.g + g'.f$
$\frac{1}{g}$	$\frac{-g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'.g - g'.f}{g^2}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

3) Dérivation et continuité :

Théorème :

Si f est une fonction dérivable en a alors elle est continue en a

Preuve :

On a : $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\varphi(x)$

Où : $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\varphi(x)$

$= f(a)$ car $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$

Donc f est continue en a.

Remarque :

La réciproque n'est pas vraie ; $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0 (vérifier le)

Exercice :

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{2x + a}{x + 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1- Trouver une relation entre a et b afin que la fonction soit continue en 1.

2- Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1.

II) DERIVATION DE LA COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS

Théorème :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$ et a un élément de I.

- Si f est dérivable en a et g dérivable en $b = f(a)$ alors (gof) est dérivable en a et $(gof)'(a) = g'\big(f(a)\big) \times f'(a)$
- Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J alors (gof) est dérivable sur I et pour tout a dans I on a : $(gof)'(a) = g'\big(f(a)\big) \times f'(a)$

Preuve :

Puisque f est dérivable en a alors : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Et Puisque g est dérivable en $b = f(a)$ alors : $\lim\limits_{k\to 0} \frac{g(b+k)-g(b)}{k} = g'(b)$

On a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(gof)(a+h)-(gof)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h}$$

On pose $k = f(a+h) - f(a)$

On a : $\lim\limits_{h\to 0} k = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = 0$ car f est continue en a (car elle est dérivable en a)

et $f(a+h) = k + f(a)$ par suite :

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h}\right] &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{k} \times \frac{k}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{k} \times \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right] \qquad \text{car : } k = f(a+h) - f(a) \\ &= \lim_{k\to 0} \left[\frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{k}\right] \times \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right] \\ &= g'(f(a) \times f'(a) \end{aligned}$$

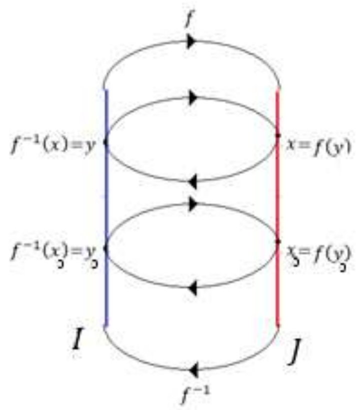
Exercice :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(2x^2 + 1)$
2. $g(x) = cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$
3. $h(x) = \tan(cosx)$

III) DERIVATION DE LA FONCTION RECIPROQUE :

1) Propriété et exemple.



Soit f une fonction continue strictement monotone sur I et soit f^{-1} sa fonction réciproque de $J = f(I)$ vers I.

On suppose que f est dérivable sur I et que $(\forall y \in I)(f'(y) \neq 0)$

Montrons que f^{-1} est dérivable sur J.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}} \qquad \text{(car } (\forall y \in I)(f'(y) \neq 0)\text{)}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}} \qquad \text{(car quand } x \text{ tend vers } x_0 \text{ on a } y = f^{-1}(x) \text{ tend vers } f^{-1}(x_0)\text{)}$$

$$= \frac{1}{f'(y_0)}$$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Théorème :

Soient f une fonction continue strictement monotone sur I, et $J = f(I)$ et a un élément de I

- Si f est dérivable en y_0 et $f'(y_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $x_0 = f(y_0)$ et $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$.
- Si f est dérivable I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et $(\forall x \in J)(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Exemple :

$f(x) = cosx$ est une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1,1]$ (Prouver-le)

Et on a $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 0 et

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{-sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$$

Remarque :

La première assertion du théorème précèdent nous permet de trouver $(f^{-1})'(x_0)$ sans savoir l'expression de f^{-1} ; il suffit de connaitre $f^{-1}(x_0)$.

Exercice :

Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + x^2 \end{matrix}$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ et calculer $f(1)$.

3- Déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Exercice corrigé :

Soit la fonction $g(x) = \cos(2x)$

1- Dresser le tableau de variation de g dans $[0, \pi]$

2- Monter que g est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $]-1,1[$.

3- Vérifier que $\left(\forall y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)(g'(y) \neq 0)$ et déterminer $(g^{-1})'(x)$ pour x dans $]-1,1[$.

Correction :

1- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(g'(x) = -2\sin(2x))$

- Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $2x \in [0, \pi]$ et par suite $g'(x) = -2\sin(2x) \leq 0$
- Si $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ alors $2x \in [\pi, 2\pi]$ et par suite $g'(x) = -2\sin(2x) \geq 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

2- La fonction g est continue (composition de deux fonctions continues) strictement décroissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers

$$g\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x), \lim_{x \to 0^+} g(x)\right[=]-1,1[$$

Donc g est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $]-1,1[$; soit g^{-1} sa fonction réciproque.

3- On a :g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left(\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)(g'(x) = -2\sin(2x) \neq 0)$ donc g^{-1} est dérivables sur $]-1,1[$.

Soit $x \in]-1,1[$; $\quad (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

$$= \frac{1}{-2\sin(2g^{-1}(x))} \qquad \left(\forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)\left(\sin 2\alpha = \sqrt{(1 - \cos^2(2\alpha)}\right)$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{1 - \cos^2(2(g^{-1}(x)))}}$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{1 - \left(g(g^{-1}(x))\right)^2}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

2) La dérivée de la fonction $\arctan$

Activité :

1- Montrer que la fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\left(\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\right)$

Propriété :

La fonction $arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\left(arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\right)$

Corolaire :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

Si u est dérivable sur I alors $\boldsymbol{arctan(u(x)}$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I)\left((\arctan(u(x)))' = \frac{1}{1+(u(x))^2}\right)$

Preuve (En exercice)

Exercice :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})\left(f(x) = arctan(x) + arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

1- Montrer que f est une constante sur $]0, +\infty[$, et trouver $f(x)$ pour x dans $]0, +\infty[$.

2- Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{Arctan(2x^2+x+1)-\frac{\pi}{2}}{2Arctan(x)-\pi}\right)$.

3) La dérivée de la racine n-eme

Activité :

1- Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

2- Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[)((\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

3- Soit u une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I.

a) Montrer que $\sqrt[n]{u}$ est dérivable sur I.

b) Montrer que $(\forall x \in I)(\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u\prime(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$

Propriété 1 :

Soit n un entier naturel non nul

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\forall x \in]0, +\infty[)((\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- Si u une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I alors la fonction $\sqrt[n]{u}$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I)(\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u\prime(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$

Exercice 1 :

Déterminer les domaines de dérivabilité et les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + x - 4}$

$g(x) = \sqrt[4]{\frac{2x-1}{x^2-x}}$

Exercice 2 :

Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt[5]{x^4+1}-\sqrt[4]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt{x+1}}$

Propriété 2 :

Soit r un nombre rationnel

- La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(\forall x \in]0,+\infty[)((x^r)' = r\, x^{r-1}$
- Si u une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I alors la fonction u^r est dérivable sur I et $(\forall x \in I)(((u(x))^r)' = r\, u'(x).\left(u(x)\right)^{r-1}$

Exercice :

Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1+sinx}{cosx} & \text{si } x \in [0,\frac{\pi}{2}[\\ f(x) = \frac{4}{\pi}\, arctan\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right) & \text{si } x \in]-\infty,0[\end{cases}$

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2- Calculer les limites $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

3- Soit g la restriction de la fonction f sur $[0,\frac{\pi}{2}[= I$

a) Déterminer l'intervalle J image de I par g

b) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} et que g^{-1} est dérivable sur J.

c) Montrer que :$(\forall x \in J)((g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

d) En déduire $g^{-1}(x)$ pour tout x dans J.

4- Etudier les variations de f sur $]-\infty,0[$.

SUITES NUMERIQUES

I) RAPPELLES

1) Suite arithmétique ; suite géométrique

1.1 Activité :

Activité :

Une personne a reçu deux offres de deux sociétés commerciales pour une durée de 4 ans.

La société $\mathcal{A}$ propose un salaire de 4500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 75 Dh chaque mois.

La société $\mathcal{B}$ propose un salaire de 3500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 3% chaque mois.

Soient a_n et b_n les salaires proposés respectivement par les sociétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour le nième mois.

1- Calculer les salaires des 4 premiers mois pour les deux sociétés.

2- Trouver une relation entre a_{n+1} et a_n puis entre b_{n+1} et b_n.

3- Calculer les salaires du 10 ème mois pour les deux sociétés.

4- Quelle est la société la plus bénéfique pour la personne ?

Rappelle :

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$v_{n+1} = qv_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n-p)r$	$v_n = v_p \times q^{n-p}$
Relation entre 3 termes Consécutifs a, b et c	$2b = a + c$	$b^2 = ac$
Somme des termes consécutifs	$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ $= \frac{(n-p+1)}{2}[u_p + u_n]$	$S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$ $= v_p \frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q} \quad (q \neq 1)$
Variations	(u_n) est croissantes ssi $r \geq 0$ (u_n) est décroissantes ssi $r \leq 0$	(v_n) est croissantes ssi $q \geq 1$ (v_n) est décroissantes ssi $0 < q \leq 1$ Si $q < 0$ alors (v_n) n'est pas monotone

Exercice :

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ (\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$

(La suite $(u_n)_n$ s'appelle une suite arithmético-géométrique)

1- Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n = u_n + \alpha\ )$

a- Déterminer α pour que la suite $(v_n)_n$ soit géométrique.

b- Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

2- Calculer en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

2) Suites majorée, suites minorée ; Monotonie d'une suite.

Définition (Rappelle) **:**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite numérique. ($\mathbb{I}\subset\mathbb{N}$)

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est majorée** s'il existe un réel M tel que :$(\forall n\in\mathbb{I})(u_n\leq M)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est minorée** s'il existe un réel m tel que :$(\forall n\in\mathbb{I})(u_n\geq m)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est bornée** si elle est majorée et minorée.

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite numérique. ($\mathbb{I}\subset\mathbb{N}$)

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est croissante** si et seulement si: $(\forall n\in\mathbb{I})(u_{n+1}\geq u_n)$
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est décroissante** si et seulement si: $(\forall n\in\mathbb{I})(u_{n+1}\leq u_n)$

Exercice 1 :

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{7u_n-1}{2u_n+3}\end{cases}$

1- Montrer que $(u_n)_n$ est minorée par 1 et majorée par 3.

2- Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 2 :

Soit la suite récurrente $(v_n)_n$ définie par : $\begin{cases} v_0=0 \\ v_{n+1}=\sqrt{2+v_n}\end{cases}$

1- Montrer que la suite $(v_n)_n$ est croissante.

2- Montrer que la suite $(v_n)_n$ est minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2.

Exercice 3 :

Soit la suite récurrente $(w_n)_n$ définie par : $\begin{cases} w_0=2 \\ (\forall n\geq 1)\left(w_n=\sqrt[n]{w_{n-1}^{n-1}+2}\right)\end{cases}$

1- Calculer w_1 ; w_2 et w_3

2- Soit la suite $(v_n)_n$ définie par ; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(v_n=w_n^n)$

a- Déterminer la nature de la suite $(v_n)_n$

c- Déterminer v_n puis w_n en fonction de n.

II) LIMITE D'UNE SUITE

1) Activité

Fractale.exe

Activité :

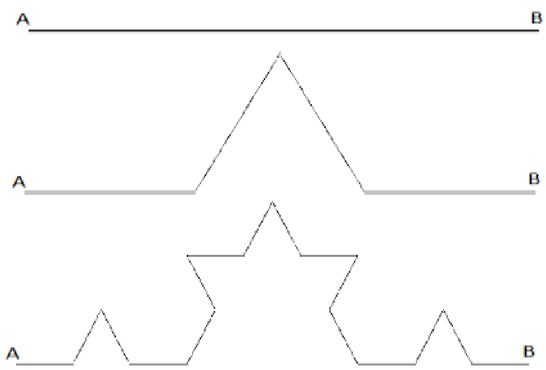
1- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{R}^+)(1+x)^n\geq 1+nx$.

2- Soit $[AB]$ un segment de longueur $l_0=1$; On procède comme suite : dans l'étape 1 on découpe le segment $[AB]$ en 3 parties égales et on ajoute une quatrième de même longueur.

Dans l'étape 2 on fait la même chose qu'on a fait au segment $[AB]$ au 4 segments obtenus à l'étape 1. ainsi de suite

a) Quelle est le nombre de segments dans l'étape n

b) Quelle est la longueur de la ligne brisée dans l'étape n



3- déterminer un entier n pour la quelle $l_n > 1000$

4- Soit A un réel quelconque positif ; Montrer qu'il existe N_0 tel que si $n \geq N_0$ alors $l_n \geq A$

On peut dire : « **On peut rendre l_n aussi grande qu'on veut** »

Ceci se traduit mathématiquement par : $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = +\infty$

La ligne brisée "limite" s'appelle une fractal.

2) Définitions

Définition 1 :

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (quand n tend vers $+\infty$)si elle vérifie la proposition suivante : $(\forall A > 0)(\exists\, N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow u_n > A)$ on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Remarque : L'expression « quand n tend vers $+\infty$ » est superflu car l'étude de la limite d'une suite c'est toujours quand n tend vers $+\infty$ et on se contente d'écrire : $\lim u_n = +\infty$

Propriété :(limites de référence)

Les suites $(n)_n$; $(n^2)_n$; $\left(n^k\right)_n$ $(k \in \mathbb{N}^*)$; $\left(\sqrt{n}\right)_n$, $\left(\sqrt[p]{n}\right)_n$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ tendent vers $+\infty$

Exercice : Montrer le dernier résultat

Définition 2 :

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ (quand n tend vers $+\infty$)si elle vérifie la proposition suivante : $(\forall A > 0)(\exists\, N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow u_n < -A)$ on écrit $\lim u_n = -\infty$

Remarque : $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$

Définition 3 :

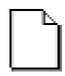
Soit $(u_n)_n$ une suite numérique et l un nombre réel. On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers l si elle vérifie la proposition suivante : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - l| > A)$ on écrit $\lim u_n = l$

Définition 4 :

Une suite qui tend vers une limite finie l s'appelle une suite **convergente.**
une suite qui n'est pas convergente est une suite **divergente.**

Théorème :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est divergente


demonstration propriété.pdf

Exemple : (Exercice déjà corrigé)

Soit la suite récurrente $(v_n)_n$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$

La suite $(v_n)_n$ est croissante.
La suite $(v_n)_n$ est majorée par 2. donc elle est convergente.

Remarque :

Une suite peut être convergente sans qu'elle est monotone

$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas monotone mais elle est convergente.

Remarque :

Suite divergente veut dire que la suite n'a pas de limite finie c'est-à-dire que la suite n'a pas de limite ou elle a une suite infinie.

Exemples :

- les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_n$; $\left(\frac{1}{n^2}\right)_n$; $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)_n$ sont des suites convergentes
- Les suites $(n)_n$; $(-n^2)_n$; $\left(n^k\right)_n$; $((-1)^n)_n$; $(cosn)_n$ sont divergentes

Théorème :

Si une suite $(u_n)_n$ admet une limite finie l cette limite est **unique**

Preuve : (En exercice)

Utiliser la définition et la propriété :$|a+b| \leq |a| + |b|$

3) Opération sur les limites des suites.

1) Limite de la somme

$\lim u_n$	l	l		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Formes indéterminées

2) Limites des produits

$\lim u_n$	l	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		$\pm\infty$
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n \times v_n)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Formes indéterminées

3) Limites des inverses

$\lim u_n$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim \left(\frac{1}{u_n}\right)_n$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

3) Limites des quotients

$\lim u_n$	l	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Formes indéterminées	Formes indéterminées

Propriété :

$$\lim |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = 0$$

4) Les techniques de calculs des limites

Théorème 1:

Si la suite $(u_n)_n$ est définie d'une façon explicite $u_n = f(n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercices :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim \left(\frac{2n^2+n}{\sqrt[3]{n^5+n^2}}\right)$

2. $\lim\left(n\, Arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
3. $\lim\left(\sqrt[4]{n^3+n^2}-\sqrt{n+1}\right)$

Théorème 2 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques tels que : $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(v_n\leq u_n)\\ \lim v_n=+\infty\end{cases}$

On a alors : $\lim u_n=+\infty$.

Preuve : (On utilise la définition des limites)

Propriété 1 :(l'inégalité de Bernoulli)

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{R}^+)(1+x)^n\geq 1+nx$$

Corolaire :

- Si $q>1$ alors $\lim q^n=+\infty$
- Si $-1<q<1$ alors $\lim q^n=0$
- Si $q\leq -1$ la suite $(q^n)_n$ est divergente.

Preuve :

1. Pour $q>1$: On pose $q=1+x$ où $x>0$ et donc $q^n=(1+x)^n\geq 1+nx$ et comme $\lim 1+nx=+\infty$ alors d'après le théorème précèdent : $\lim q^n=+\infty$
2. Pour $-1<q<1$
   a) Pour $q=0$ on a : $\lim 0^n=0$
   b) On suppose que $q\neq 0$ on a : $\left|\frac{1}{q}\right|>1$ et par suite : $\lim\left|\frac{1}{q}\right|^n=\lim\frac{1}{|q|^n}=+\infty$
   d'où et d'après les opérations sur les limites on a : $\lim|q|^n=0$ donc $\lim q^n=0$

Exercices :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\left(-\frac{4}{7}\right)^n$
2. $\lim\left(\frac{2^n-3^n}{3^n-5^n}\right)$
3. $\lim\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

5) Les limites et l'ordre :

Théorème :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques. On a les assertions suivantes :

❶ Si $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(0\leq u_n)\\ \lim u_n=l\end{cases}$ alors $l\geq 0$

❷ Si $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(a\leq u_n)\\ \lim u_n=l\end{cases}$ alors $l\geq a$

❸ Si $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(0\leq u_n\leq b)\\ \lim u_n=l\end{cases}$ alors $a\leq l\leq b$

❹ Si $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(v_n\leq u_n)\\ \lim u_n=l \text{ et } \lim v_n=l'\end{cases}$ alors $l'\leq l$

6) Les critères de convergences.

6.1 Critères fondamentaux :

Critère 1 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et l un réel.

Si $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(|u_n - l| \leq v_n) \\ \lim v_n = 0 \end{cases}$ alors $\lim u_n = l$

Critère 2 :

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites numériques et l un réel.

Si $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(w_n \leq u_n \leq v_n) \\ \lim v_n = \lim w_n = l \end{cases}$ alors $\lim u_n = l$

Critère 3 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et l un réel.

Si $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n) \\ \lim v_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim u_n = +\infty$

Critère 4 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et l un réel.

Si $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \leq v_n) \\ \lim v_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim u_n = -\infty$

Preuve :

En utilisant la définition des limites montrer l'un des 4 critères.

Exercice :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim \frac{3n+\sin(n)}{n+1}$
2. $\lim \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} = \lim \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n^2+k}\right)$
3. $\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \lim \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$.

6.2 Suite de la forme : $v_n = f(u_n)$

Critère 5 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; et $(u_n)_n$ une suite numérique telle que :

$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \in I)$

Si $\begin{cases} \lim u_n = l \\ f \text{ continue en } l \end{cases}$ alors $\lim f(u_n) = f(l)$

Exercice :

Déterminer :

1. $\lim \arctan\left(n\, sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

2. $\lim \sqrt[3]{n\ arctan\left(\frac{8}{n}\right)}$

6.3 Suite de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$

Activité :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

1. Déterminer le point d'intersection de C_f avec la droite $(\Delta)\ y = x$
2. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
   a) Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite $(u_n)_n$
   b) Conjecturer la monotonie de la suite $(u_n)_n$ et sa limite potentielle.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante majorée par 2.
4. Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n = u_n + \alpha)$
   a) Déterminer α pour que la suite $(v_n)_n$ soit géométrique.
   b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n
   c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

Critère 6 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; et $(u_n)_n$ une suite numérique telle que :

Si :

$$\begin{cases} \text{d) } f \text{ est continue sur } I \\ \text{e) } f(I) \subset I \\ \text{f) } (\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n)) \\ \text{g) } u_0 \in I \text{ (donc } (\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I) \\ \text{h) } (u_n)_n \text{ est convergente} \end{cases}$$

Alors la suite $(u_n)_n$ tend vers l solution de l'équation $f(x) = x$

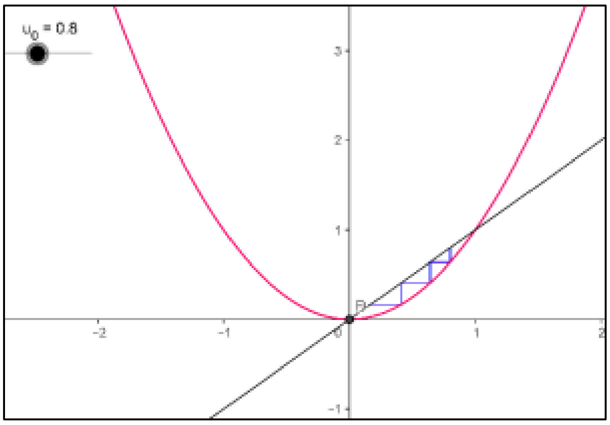
Remarque :

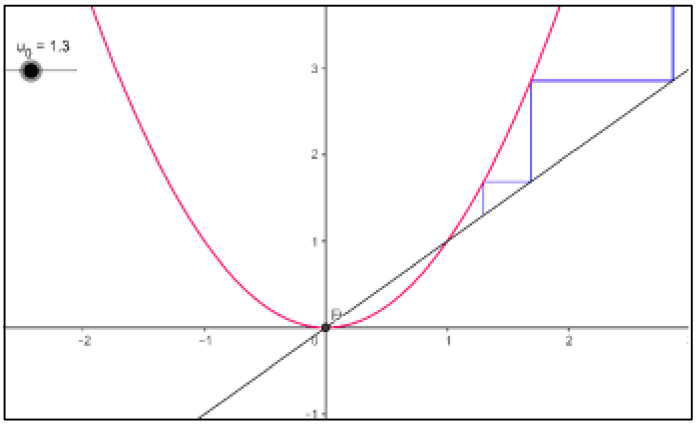
1- Par fois l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solution ; Dans ce cas prenez celle qui est dans I.

S'il y a plusieurs solutions de l'équation $f(x) = x$; utiliser la monotonie de (u_n)

2- La fonction f et la suite $(u_n)_n$ n'ont pas nécessairement la même monotonie :

Pour la même fonction $f: x \mapsto x^2$ si on considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0.8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ elle sera décroissante convergente (Prouver le) ; mais si on considère la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 1.3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$ elle sera croissante divergente.





Exercices d'applications

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

1. Etudier les variations de f et déterminer $f([0,2])$
2. a) Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I = [0,2])$
   b) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
   c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$.

Critère 8 :

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

Preuve :

On suppose que la suite $(u_n)_n$ est croissante non majorée et montrons : (P) $(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow u_n > A)$

Soit $A > 0$ puisque $(u_n)_n$ est non majorée alors il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$

et puisque $(u_n)_n$ est croissante alors si $n > n_0$ alors $u_n > u_{n_0} > A$

donc il existe N $(N = n_0)$ qui vérifie la propriété (P)

D'où la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$

Exercice

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f(x) = x^2 + x + 1$

1. Monter que la suite $(u_n)_n$ est croissante
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est non majorée (Par absurde) .
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Propriété :

Toute suite convergente est bornée

Remarque : La réciproque n'est pas vraie : $u_n = (-1)^n$ est bornée mais pas convergente.

6.4 Les suites adjacentes :

Activité :

Soit les suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n > u_n)$
3. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes et ont la même limite.

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont appelées : ***Suites adjacentes.***

Définition :

On dit que deux suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont **adjacentes** si :

- L'une est croissante l'autre est décroissante.
- $\lim(u_n - v_n) = 0$

Propriété :

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites **adjacentes** et $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante alors

$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq v_n)$

Preuve :

Par hypothèse on a : $(u_n)_n$ est croissante donc $u_n \leq u_{n+1}$

$(v_n)_n$ est décroissante donc $v_{n+1} \leq v_n$

Par suite : $(u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n) \leq (u_n - v_n) - (u_n - v_n) = 0$

D'où la suite $(u_n - v_n)_n$ est décroissante et tend vers 0 donc elle est de termes positifs et finalement

$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq v_n)$

Exercice :

Considérons les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \quad v_0 = b \quad 0 < a < b < 2a \\ u_n v_n = ab \qquad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(0 < u_n < v_n)$
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante
3. a) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\left(v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)\right)$

   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty}(v_n - u_n)$

   c) Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes
4. Déterminer les limites des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

FONCTIONS LOGARITHMIQUES

I) LA FONCTION LOGARITHME NEPERIENNE

1) Existence :

Activité :

Le but de cette activité est de montrer l'existence d'une fonction f non nulle telle que :

$$(\Sigma)\begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\ (1) \\ (\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{*2})\big(f(x.y)=f(x)+f(y)\big)(2)\end{cases}$$

1- Déterminons $f(1)$:

D'après (2) on prenant $x=y=1$ on obtient : $f(1)=2f(1)$ donc $f(1)=0$.

2- Déterminons l'existence d'un réel k tel que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\left(f'(x)=\frac{k}{x}\right)$.

Pour tous x et y dans $]0,+\infty[$ on pose :

$g_x(y)=f(xy)$ et $h_x(y)=f(x)+f(y)$; on a : g_x et h_x sont dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$(\forall y\in]0,+\infty[)(g_x'(y)=xf'(xy)$ et $h_x'(y)=f'(y))$ ($f(x)$ es une constante pour y)

et puis que : $(\forall y\in]0,+\infty[)(g_x'(y)=\ h_x'(y))$ alors :

$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{*2})(xf'(xy)=f'(y))$ pour $y=1$ on trouve : $(\forall x\in]0,+\infty[)\left(f'(x)=\frac{f'(1)}{x}\right)$

Donc la fonction qui vérifie la condition (Σ) est la fonction primitive de la fonction $\frac{f'(1)}{x}$ et qui s'annule en 1

Inversement :

Considérons la fonction primitive de $x\mapsto\frac{k}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1 ; montrons que f vérifie (Σ)

On a : f est dérivable $]0,+\infty[$ (Définition de la fonction primitive)

Considérons les fonctions : $u_y(x)=f(xy)$ et $v_y(x)=f(x)+f(y)$ on a u_y et v_y sont dérivable sur $]0,+\infty[$:

$\forall x>0;\forall y>0: u_y'(x)=yf'(xy)$ et $v_y'(x)=f'(x)$ et on a :

$u_y'(x)=yf'(xy)=y\times\frac{k}{xy}=\frac{k}{x}=f'(x)=v_y'(x)$ donc :

$\forall x>0;\forall y>0\ \ v_y(x)=u_y(x)+c$

Pour $x=y=1$ on aura : $v(1)=u(1)+c$ et puisque $u(1)=v(1)$ alors $c=0$. d'où :

$\forall x>0;\forall y>0\ \ v_y(x)=u_y(x)$ c-à-dire $\forall x>0;\forall y>0$ on a : $f(xy)=f(x)+f(y)$.

Propriété :

Les fonctions non nulles qui vérifient (Σ) sont les fonctions primitive de la fonction $x\mapsto\frac{k}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annulent en 1.

2) Fonction logarithme Népérienne

2.1 Définition et propriétés algébrique :

Définition :

La fonction **logarithme népérienne** est la fonction primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1 ; on la note par ln.

Conséquences immédiates :

- ln est définie sur $]0,+\infty[$
- $f(x) = ln(u(x))$ est définie si et seulement si $u(x) > 0$
- $ln(1) = 0$
- ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(x \in]0,+\infty[)\left(ln'(x) = \frac{1}{x}\right)$.

Monotonie :

On a : $(x \in]0,+\infty[)\left(ln'(x) = \frac{1}{x} > 0\right)$ donc la fonction ln est **strictement croissante sur** $]\mathbf{0},+\infty[$

- $ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $ln(a) \leq ln(b) \Leftrightarrow a \leq b$

Applications :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

❶ L'équation : $ln(x^2 - 1) = ln(2 - x)$

❷ L'inéquation : $ln(x^2 - 1) \leq ln(2 - x)$.

La propriété caractéristique :

$$(\forall x > 0; \forall y > 0)(ln(x \times y) = ln(x) + ln(y))$$

Règles de calculs :

- $(\forall x > 0)\left(ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)\right)$
- $(\forall x > 0; \forall y > 0)\left(ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)\right)$
- $(\forall x > 0; \forall r \in \mathbb{Q})(ln(x^r) = r\, ln(x))$

Preuve :(En exercice)

Exercice : On pose $\alpha = ln(2)$ et $\beta = ln(3)$

Calculer en fonction de α et β les réels suivants : $a = \sqrt[7]{32}$; $b = \frac{\sqrt[3]{24}}{9\sqrt{8}}$

2.2 Etude et représentation :

D'après la définition de la fonction ln on peut conclure que :

ln est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$

✓ **Déterminons** $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{lnx}$.

Soit A un réel strictement positif. Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que $ln\,(1) = 0$ alors : $ln\,(2)$ est un réel strictement positif.

Par conséquent, le quotient : $\frac{A}{ln2}$ est un réel strictement positif.

On appelle n le plus petit entier naturel tel que : $n \geq \frac{A}{ln2}$ (il suffit de prendre $n = E\left(\frac{A}{ln2}\right) + 1$)

On multiplie par $ln\ 2$ qui est positif on aura : $n\ ln2 \geq A \Leftrightarrow ln(2^n) \geq A$

Comme ln est une fonction croissante, alors pour tout x tel que $x \geq 2^n$ nous avons : $lnx \geq ln2^n \geq A$

Donc $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(x \geq B \Rightarrow lnx > A)$: $(B = ln2^n$ où $= E\left(\frac{A}{ln2}\right) + 1\ )$ Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{lnx} = +\infty}$$

- ✓ **Déterminons $\lim\limits_{x\to0^+} lnx$.**

On a : On pose $t = \frac{1}{x}$ on a : $x = \frac{1}{t}$ et $x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to +\infty$ donc :

$\lim\limits_{x\to0^+} lnx = \lim\limits_{t\to+\infty} ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} -lnt = -\infty$ finalement : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} \boldsymbol{lnx} = -\infty}$

La droite $(\Delta): x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe C_{ln}

- ✓ **Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x}$**

<u>Exercice :</u>

1- En utilisant le T.A.F de la fonction ln sur l'intervalle $[1, \sqrt{x}]$; montrer que : $0 < \frac{lnx}{x} < \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$.

2- En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

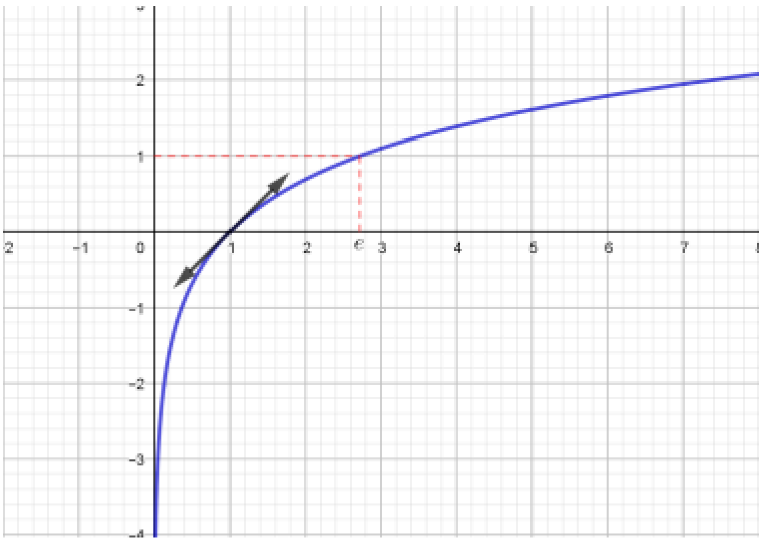
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0}$$

La courbe C_{ln} admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

- ✓ Le nombre e :

La fonction ln est continue strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$, donc le réel 1 a un antécédent noté e (le nombre népérien) $ln(e) = 1$

- ✓ La courbe C_{ln} a une tangente en $A(1,0)$ $(T): y = x - 1$



x	0	1	e	$+\infty$
$ln'x$			$+$	
lnx	$-\infty$	0	1	$+\infty$

<u>*3) Dérivée de la fonction $x \to \mathbf{ln(u(x))}$*</u>

D'après le théorème de la dérivée de la composition de deux fonctions on peut citer le théorème suivant :

Théorème :

Si u est une fonction dérivable sur I et **strictement positive sur I** alors la fonction $f(x) = ln(u(x))$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I)$ $\left(f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

Exercice :

Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction : $f(x) = ln\left(\frac{x^2+2x-3}{1+\sqrt{x^2-1}}\right)$

Corolaire :

Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors la fonction $f(x) = ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I)$ $\left(f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

Preuve : (en exercice)

Etudier deux cas $u(x) > 0$ sur I et $u(x) < 0$ sur I.

Propriété :

Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives de la fonction $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions $F(x) = l\,n(|u(x)|) + C^{te}$

Applications :

Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{7x+3}{2x^2+5}$

$g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ (Essayer d'écrire $g(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$ où a et b des réels à déterminer).

$h(x) = \frac{7}{2x^2+x-3}$

$k(x) = tanx$

$u(x) = \frac{1}{xlnx}$

$v(x) = \frac{x^3+2x^2-3x+2}{x-3}$

$t(x) = \frac{1}{sin2x}$

4) Limites référentielles :

Propriété :

① $\lim\limits_{x\to0^+} lnx = -\infty$ ② $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ ③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)

④ $\lim\limits_{x\to0^+} x^n\, lnx = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) ⑤ $\lim\limits_{x\to1} \frac{lnx}{x-1} = 1$ ⑥ $\lim\limits_{x\to0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$

Preuves :

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}}\left(\frac{lnx}{x}\right) = 0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{lnx}{x}\right) = 0$ voir exercice précèdent)

④ on pose $t = \frac{1}{x}$ $x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{x\to0^+} x^n\, lnx = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^n} ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-lnt}{t^n} = 0$$

⑤ La fonction ln étant dérivable en 1 alors : $\lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{lnx-ln1}{x-1}=ln'(1)=1$ $\quad(ln'(x)=\frac{1}{x}$ pour tout $x>0)$

⑥ On pose : $t=x+1$ et on applique⑤.

Exercices :

Déterminer les limites suivantes :

❶ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{3x^2+x}$ ❷ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x^2+x+1)}{\ln(5x+1)}$ ❸ $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(2x^2-5x+3)}{\ln(5x-9)}$

❹ $\lim_{x\to -3}\frac{\ln(x+4)}{\ln(x^2+3x+2)}$ ❺ $\lim_{x\to 1^+}(4x^2-2x-2)\ln(1-x)$ ❻ $\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x^2}\ln(x+\sqrt{x})$

❼ $\lim_{x\to +\infty}\ln(2x^2+x)-\frac{1}{3}\ln(x^6+3x^4)$ ❽ $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(3x^4+x+1)}{\ln(x+1)}$ ❾ $\lim_{x\to +\infty}\frac{ln\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$

II) FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE a

1) Définition

Définition :

Soit a un réel non nul et différents de 1. La fonction notée par Log_a définie sur $]0,+\infty[$ par :

$(\forall x\in]0,+\infty[)\left(Log_a(x)=\frac{lnx}{lna}\right)$ S'appelle **: la fonction logarithmique de base a**

Exemple :

Pour : $a=e$ on aura : $Log_e(x)=\frac{lnx}{lne}=lnx$

2) Propriétés et règles de calcul :

Propriété caractéristique

Toutes les propriétés de calcul qu'on a vu concernant la fonction ln restent valables pour la fonction Log_a.

- $(\forall x>0)(\forall y>0)(Log_a(xy)=Log_a(x)+Log_a(y))$
- $(\forall x>0)\left(Log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-Log_a(x)\right)$
- $(\forall x>0)(\forall y>0)\left(Log_a\left(\frac{x}{y}\right)=Log_a(x)-Log_a(y)\right)$
- $(\forall x>0)(\forall r\in\mathbb{Q})(Log_a(x^r)=rLog_a(x)$

Pour démontrer les propriétés précédentes il suffit d'utiliser la définition de la fonction Log_a et les propriétés de la fonction ln

Propriétés :

- La fonction Log_a est une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$
- $(\forall x>0)(\forall y>0)(Log_a(x)=Log_a(y)\Leftrightarrow x=y)$
- $(\forall x>0)(\forall r\in\mathbb{Q})(Log_a(x)=r\Leftrightarrow x=a^r)$

Propriété :

La fonction Log_a est continue dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(\forall x\in]0,+\infty[)\ \left(Log'_a(x)=\frac{1}{x\ lna}\right)$

Preuve : (En exercice)

Etude et représentation de Log_a

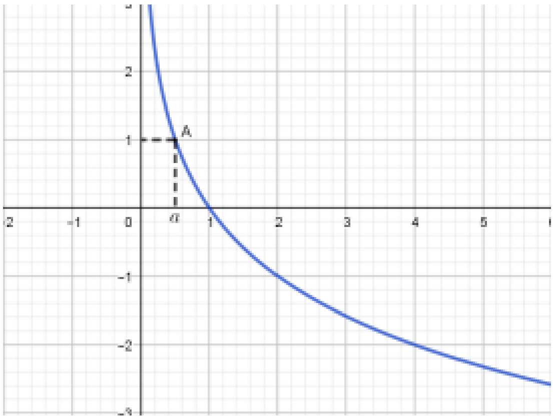
Soit a un réel strictement positif et différent de 1 :

- La fonction Log_a est définie sur $]0,+\infty[$.
- La fonction Log_a est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \left(Log'_a(x) = \frac{1}{x\ lna}\right)$ donc le signe de Log'_a dépend du signe de lna, ce qui nous amène à discuter deux cas : $lna > 0$; $lna < 0$

Cas 1 : Si $a \in]0,1[$ alors $lna < 0$

Et donc : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \left(Log'_a(x) = \frac{1}{x\ lna} < 0\right)$.

x	0		a		1		$+\infty$
$Log'_a(x)$		$-$		$-$		$-$	
$Log_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

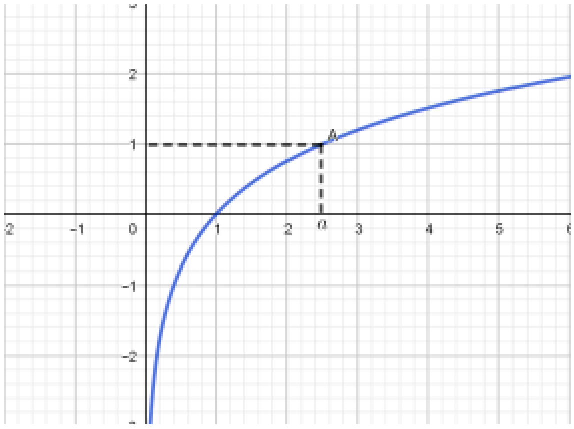


Courbe de la fonction $Log_{\left(\frac{1}{2}\right)}$

Cas 2 : Si $a \in]1,+\infty[$ alors $lna > 0$

Et donc : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \left(Log'_a(x) = \frac{1}{x\ lna} > 0\right)$.

x	0		1		a		$+\infty$
$Log'_a(x)$		$+$		$+$		$+$	
$Log_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Courbe de la fonction $Log_{\left(\frac{5}{2}\right)}$

3) Cas particulier $a = 10$; logarithme décimal :

Définition :

> La fonction logarithmique de base 10 s'appelle **la fonction logarithmique décimal** et se note par $\boldsymbol{log}$
>
> $$(\forall x \in]0,+\infty[)\ \left(\boldsymbol{logx = \frac{lnx}{ln10}}\right)$$

Propriétés :

- $log(10) = 1$
- $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$
- $(\forall r \in \mathbb{Q})(log(10^r) = r$
- $log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$
- $log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$

4) Applications

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Log_x(x+1) = Log_{x+1}(x)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $Log_2(x) > Log_x(2)$

Exercice 4 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. Résoudre l'équation $f(x) = 1$
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1$
4. Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche de e
5. Etudier les variations de f et en deduire que f est une bijection de D_f vers un intervalle J.
6. Construire dans le même repère C_f et $C_{f^{-1}}$.

Exercice 5 : Considérons la fonction g définie par : $g(x) = xln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g
2. a)Montrer que la fonction g admet un prolongement par continuité en 0 noté $\bar{g}$
   b) Etudier la dérivabilité de $\bar{g}$ en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en -1 à gauche.
4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g
5. Etudier les branches infinies de la courbe C_g.
6. Construire la courbe C_g

FONCTIONS EXPONENTIELLES

I) LA FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1) Définition et propriétés :

Approche :

La fonction ln est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $ln(]0,+\infty[) =]\lim_{x\to 0^+} lnx; \lim_{x\to+\infty} lnx[= \mathbb{R}$ donc :

Propriété et définition :

La fonction ln admet une fonction réciproque définie de $]-\infty,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$ appelée **fonction exponentielle népérienne** notée : exp

Propriétés immédiates :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(ln(exp(x)) = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(exp(ln(x)) = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R})(ln(x) = y \Leftrightarrow x = exp(y))$
- $exp(0) = 1 \quad ; \quad exp(1) = e$

Propriété : (monotonie)

La fonction exp est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Résultat :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(exp(x) = exp(y) \Leftrightarrow x = y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(exp(x) \leq exp(y) \Leftrightarrow x \leq y)$

Exercice :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

❶ $exp(2x^2 - x) = exp(1 - 3x)$ ❷ $exp(2x^2 - x) \leq exp(1 - 3x)$

❸ $ln(2x^2 + x - 3) = 5$ ❹ $ln(2x^2 + x - 3) < 5$

2) l'écriture : e^x.

Propriété :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})\Big(exp(rx) = \big(exp(x)\big)^r\Big)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} ln\Big(\big(exp(x)\big)^r\Big) &= rln(exp(x)) \\ &= rx \\ &= ln(exp(rx)) \end{aligned}$$

Résultat :

- $(\forall r \in \mathbb{Q})\Big(exp(r) = \big(exp(1)\big)^r = e^r\Big)$
- On peut prolonger la propriété précédente à $\mathbb{R}$: $(\forall x \in \mathbb{Q})\Big(exp(x) = \big(exp(1)\big)^x = e^x\Big)$

Propriété algébrique :

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$ on a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{rx} = (e^x)^r \quad (r \in \mathbb{Q})$
- $(\forall x > 0)(e^{lnx} = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(ln(e^x) = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})(e^x = y \Leftrightarrow x = ln(x))$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(e^x = e^y \Leftrightarrow x = y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y)$

Applications :

Exercice 1 :

Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

1- $\frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1} = \frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$

2- $\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{2}{e^x-e^{-x}}$

3- $\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

(E_1): $5e^{3x} - 2e^{2x} - 3e^x = 0$

(E_2): $e^{-x} - 2e^x + 1 = 0$

(E_3): $exp(3x + 14) \leq \frac{3}{2}$

(E_4): $e^{-x} - 2e^x + 1 > 0$

Propriété : (limites usuelles)

① $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ③ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

⑥ $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ ⑦ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0.$

Preuve : (En exercice)

Exercice : Déterminer les limites suivantes :

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x}$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+e^{-2x}}{e^x+x}$ ③ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{e^x-1}$

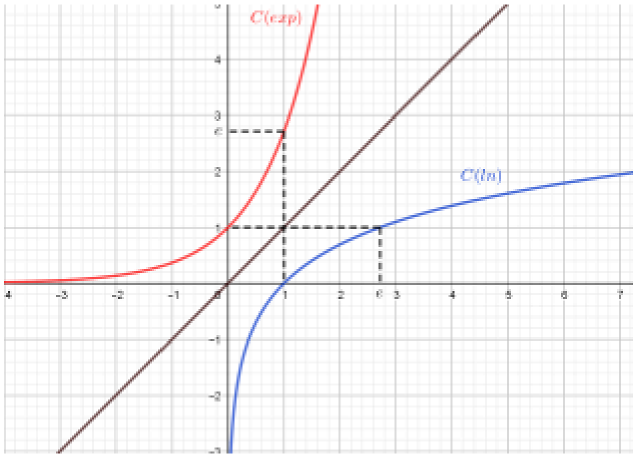
④ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{3x+1}-e}{x}$ ⑤ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1-3e^x}{e^x-1}$ ⑥ $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2e^{(5x+1)}$

3) Représentation de la fonction exp

La fonction exp est strictement monotone sur $\mathbb{R}$

Car l'exp est la fonction réciproque de la fonction ln qui est strictement monotone sur $]0,+\infty[$

Les courbes C_{ln} et C_{exp} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(\Delta): y = x$



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$exp(x)$	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

4) Dérivation de la fonction exp

On sait que la fonction exp est la fonction réciproque de la fonction ln qui est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Et on sait que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\left(ln'x = \frac{1}{x}\right)$

Donc la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R} = ln(]0,+\infty[)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} exp'(x) &= (ln^{-1})'(x) \\ &= \frac{1}{ln'(\exp(x))} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{exp(x)}} \\ &= exp(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Propriété :

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(exp'(x) = exp(x))$

Corolaire :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $exp(u(x))$ est dérivable sur I et

$(\forall x \in I)(\exp(u(x)))' = u'(x)\, exp(u(x))$

Application :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = 3x^2e^{-x}$
- $g(x) = e^{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$
- $h(x) = \frac{e^{-x}}{e^{2x}+x}$

Exercice :

Partie 1

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\left(\frac{-2}{x}\right)} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
2. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Déterminer la limite en $+\infty$

4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.
5. a) Montrer que $(\forall t > 0)\left(0 < e^{-t} + t - 1 < \frac{t^2}{2}\right)$

   b) En déduire que : $(\forall x > 0)\left(\frac{-4}{x} < f(x) - x < \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}\right)$

   c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$
6. Construire la courbe C_f.

Partie 2 :

Considérons la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right) e^{\left(\frac{-2}{x}\right)} & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite de 0.

   b) Déterminer la limite en $+\infty$

   c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f_n puis dresser le tableau de variation de f_n.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une solution unique α_n dans $]0, +\infty[$
3. a) Montrer que $(\forall x > 0)\left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}\right)$

   b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$

   c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et que $\lim \alpha_n = 0$.

II) LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a.

1) Définition et résultats :

Propriété et définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction log_a étant continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$, elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R} = log_a(]0, +\infty[)$ vers $]0, +\infty[$.

Cette fonction réciproque s'appelle la fonction exponentielle de base a et se note exp_a

Résultats immédiats :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$

- La fonction exp_a est définie sur $\mathbb{R}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(exp_a(x) > 0)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})(\ exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = log_a(x)\ )$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(log_a(exp_a(x)) = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(exp_a(log_a(x)) = x$

2) Une autre écriture de la fonction $\mathbf{exp_a}$

Propriété :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a : $(\forall x \in \mathbb{R})(exp_a(x) = e^{xln(a)})$

Preuve :

Posons : $y = exp_a(x)$ on a donc $y > 0$ et $x = log_a(y) = \frac{ln(y)}{ln(a)}$

D'où : $l\,n(y) = x.ln(a)$; finalement $y = e^{xln(a)}$ d'où la propriété.

Propriété :

exp_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(exp'_a(x) = ln(a)e^{xln(a)}\ )$

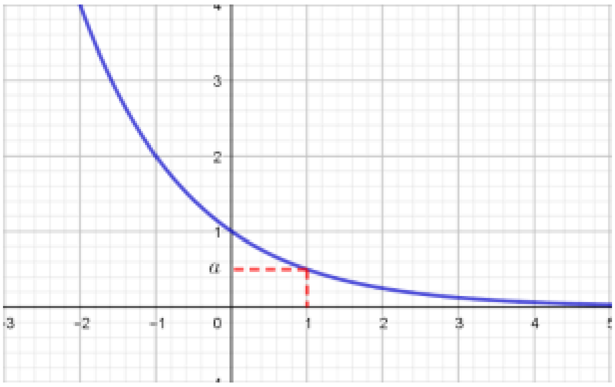
Monotonie et représentation :

Si $0 < a < 1$:

On a $ln(a) < 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(exp'_a(x) < 0)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$exp'_a(x)$	$-$	$-$	$-$	
$exp_a(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	a ↘	0

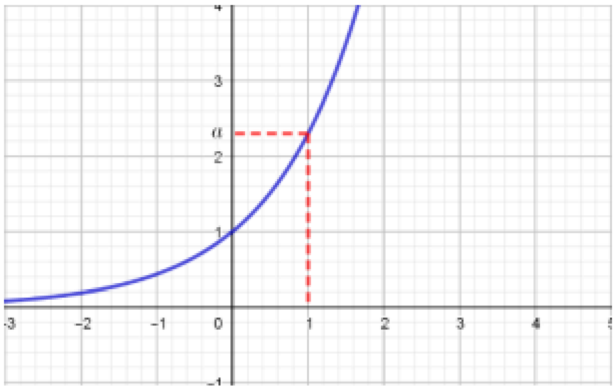


Si $0 < a < 1$:

On a $ln(a) > 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(exp'_a(x) > 0)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$exp'_a(x)$	$+$	$+$	$+$	
$exp_a(x)$	0 ↗	1 ↗	a ↗	$+\infty$



Propriété caractéristique :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)(exp_a(x + y) = exp_a(x) \times exp_a(y))$.

Conséquences :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$ et x et y deux réels, on a :

- $exp_a(-x) = \frac{1}{exp_a(x)}$
- $exp_a(x - y) = \frac{exp_a(x)}{exp_a(y)}$
- $exp_a(rx) = \left(exp_a(x)\right)^r$

3) Les puissances réelles.

Rappelle :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(x^0 = 1)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n\,fois}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(x^{-n} = \frac{1}{x^n}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(\forall r \in \mathbb{Q})\left(r = \frac{p}{q} \Rightarrow x^r = \sqrt[q]{x^p}\right)$ $(q \in \mathbb{N}^*)$

Puissances réelle : La notation a^x

Soit a un réel strictement positif.

- Si $a = 1$, on pose pour tout réel $x > 0$: $a^x = 1$
- Si $a \neq 1$, on pose $a^x = e^{x ln(a)}$

Exercice 1:

Soit La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$\begin{cases} x \mapsto x^x & ,\text{si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de la fonction f à droite de 0.
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
5. Tracer la courbe C_f.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$
7. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$.
   a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 1)$
   b. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$; puis en déduire qu'elle convergente.
   c. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; considérons la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln(x))^n}{x^2}$ et C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Donner le tableau de variation de f_1.
2. Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 en point d'abscisse 1.
3. Construire la courbe C_1 et la tangente (T_1) dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.
5. a) Etudier sur l'intervalle $[1, +\infty[$ le signe de $f_2(x) - f_1(x)$

   b) En déduire les positions relative des deux courbes C_1 et C_2 ; puis construire C_2
6. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ où u_n est la valeur maximale de la fonction f_n.
   a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(u_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n\right)$
   b) Pour $x \in]1, +\infty[$; calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$
   c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(u_{n+1} = \frac{1}{2}f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)\right)$
   d) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(u_n \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^n}\right)$; En déduire $lim\, u_n$.

Exercice 3 :

Partie 1

1. En utilisant le T.A.F sur la fonction $t \to e^{-t}$; montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(\exists \theta \in \mathbb{R}^{*+})\left(e^{\theta} = \frac{x}{1-e^{-x}}\right)$
2. En déduire que : $(\forall x > 0)(1 - x < e^{-x})$ et que $(\forall x > 0)(1 + x < e^x)$
3. En déduire que : $(\forall x > 0)\left(0 < ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) < x\right)$

Partie 2

Considérons la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{xe^x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ et étudier la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
3. a)Montrer que $(\forall x > 0)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < e^{-x} + x - 1 < \frac{x^2}{2}\right)$

   b) Montrer que $(\forall x > 0)\left(\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{-x}+x-1}{x^2}.f(x)\right)$

   c) En déduire que f est dérivable à droite de 0 et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.
4. a) Montrer que : $(\forall x > 0)\left(f'(x) = \frac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2}\right)$

   b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

   c) Construire la courbe C_f.

   d) Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ vers $J = f([0,+\infty[)$.

Partie 3 :

Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in]0,+\infty[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = ln(f(u_n)))$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive,
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
3. a) Montrer que l'équation $ln(f(x)) = x$ admet 0 comme seule solution.

   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$

***Cours** fonctions exponentielles*

PROF : ATMANI NAJIB 2BAC SM

FONCTIONS EXPONENTIELLES

I) LA FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1) Définition et propriétés :

La fonction ln est continue strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $ln(]0, +\infty[) =] \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x \,;\, \lim\limits_{x\to +\infty} lnx [= \mathbb{R}$

Propriété et définition :
La fonction ln admet une fonction réciproque définie de$]-\infty, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ appelée fonction Exponentielle népérienne notée : exp

Propriétés :
1) $(\forall x \in \mathbb{R})(ln(exp(x)) = x)$
2) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(exp(ln(x)) = x$
3) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R})(ln(x) = y \Leftrightarrow x = exp(y))$
4) $exp(0) = 1$; $exp(1) = e$

Propriété : (monotonie) : La fonction exp est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Résultat :
1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(exp(x) = exp(y) \Leftrightarrow x = y)$
2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(exp(x) \leq exp(y) \Leftrightarrow x \leq y)$

Exemple1 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$1)\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right)=\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ $2)\exp(2x+1)\leq\exp\left(\frac{6}{x}\right)$

Solution :1) $ln(x-2)=0$

a)cette équation est définie ssi : $2x+3\neq 0$ et $x-1\neq 0$donc: $x\neq -\frac{3}{2}$ et $x\neq 1$donc : $D_E=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$

b) Résoudre l'équation :

$$\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right)=\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\Leftrightarrow\frac{x+5}{2x+3}=\frac{1}{x-1}$$

$$(x+5)(x-1)=2x+3\Leftrightarrow x^2+2x-8=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-8)\times 1=4+32=36>0$$

$x_1=\frac{-2+6}{2\times 1}=\frac{4}{2}=2$ et $x_1=\frac{-2-6}{2\times 1}=\frac{-8}{2}=-4$

Donc : $S=\{-4;2\}$

$2)\exp(2x+1)\leq\exp\left(\frac{6}{x}\right)$

a)cette inéquation est définie ssi : $x\neq 0$ donc : $D_I=\mathbb{R}^*$

$2)\exp(2x+1)\leq\exp\left(\frac{6}{x}\right)\Leftrightarrow 2x+1\leq\frac{6}{x}$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2+x-6}{x}\leq 0$$

x	$-\infty$		-2		0		$3/2$		$+\infty$
$2x+x-6$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$q(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$S=]-\infty,-2]\cup\left]0,\frac{3}{2}\right]$

2) l'écriture : e^x

Propriété :$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})(exp(rx) = (exp(x))^r)$

Preuve :
$ln((exp(x))^r) = rln(exp(x))= rx= ln(exp(rx))$

Résultat :
1) $(\forall r \in \mathbb{Q})(exp(r) = (exp(1))^r= e^r)$
2)On peut prolonger la propriété précédente à $\mathbb{R}$:
$(\forall x \in \mathbb{Q})(exp(x) = (exp(1))^x = e^x)$

Notation : *Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a* : $\exp(x)=e^x$

Propriété algébrique :
Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$ on a :

$1)e^{x+y}=e^x\times e^y$ 2) $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ $3)e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$

$4)e^{rx}=\left(e^x\right)^r$ $(r\in\mathbb{Q})$ 5) $\left(e^{\ln x}=x\right)$ $(\forall x\succ 0)$

6) $\left(\ln\left(e^x\right)=x\right)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$
7) $(\forall y\succ 0)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\left(e^x=y\right)\Leftrightarrow(x=\ln y)$
8) $(\forall y\succ 0)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\left(e^x=e^y\right)\Leftrightarrow(x=y)$
9) $(\forall y\succ 0)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\left(e^x\geq e^y\right)\Leftrightarrow(x\geq y)$

Exemple : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e$ 2) $\dfrac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}$

3) $e^{2x}-5e^{x}+6=0$ 4) $e^{x^2}\cdot\left(e^{x}\right)^{3}=\left(e^{-x}\right)^{5}\cdot e^{-7}$

5) $e^{2x-3}-\left(e+1\right)e^{x-2}+1\prec 0$

Solution :1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e \Leftrightarrow e^{2x+1-x}=e^{1}$

$\Leftrightarrow e^{x+1}=e^{1}\Leftrightarrow x+1=1\Leftrightarrow x=0$ donc : $S=\left\{0\right\}$

2) $\dfrac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}\Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)}=e^{x-1}$

$\Leftrightarrow (2-x)-(1+2x)=x-1\Leftrightarrow -4x=-2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Donc : $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

3) $e^{2x}-5e^{x}+6=0\Leftrightarrow\left(e^{x}\right)^{2}-5e^{x}+6=0$ on pose : $e^{x}=X$

Donc : $X^{2}-5X+6=0$ $\Delta=b^{2}-4ac=25-24=1>0$

$X_1=\dfrac{5+1}{2\times1}$ et $X_2=\dfrac{5-1}{2\times1}$ donc : $X_1=3$ et $X_2=2$

Donc : $e^{x_1}=3$ et $e^{x_2}=2$ donc : $x_1=\ln 3$ et $x_2=\ln 2$

Donc : $S=\left\{\ln 2,\ln 3\right\}$

4) cette équation est définie dans $\mathbb{R}$

$e^{x^2}\cdot\left(e^{x}\right)^{3}=\left(e^{-x}\right)^{5}\cdot e^{-7}\Leftrightarrow e^{x^2}\cdot e^{3x}=e^{-5x}\cdot e^{-7}$

$\Leftrightarrow e^{x^2+3x}=e^{-5x-7}\Leftrightarrow x^2+3x=-5x-7$

$\Leftrightarrow x^2+8x+7=0$

$\Delta=b^{2}-4ac=8^{2}-4\times7\times1=64-28=36>0$

$x_1=\dfrac{-8+6}{2\times1}=\dfrac{-2}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{-8-6}{2\times1}=\dfrac{-14}{2}=-7$

Donc : $S=\left\{-7;-1\right\}$

5) cette équation est définie dans $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^{-3}\left(e^{2x}-\left(e+1\right)e^{x+1}+e^{3}\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow e^{2x}-\left(e+1\right)e^{x+1}+e^{3}\prec 0$ car $e^{-3}\succ 0$

$\Leftrightarrow\left(e^{x}\right)^{2}-\left(e^{2}+e\right)e^{x}+e^{3}\prec 0$

On pose : $e^{x}=t$ on aura : $t^{2}-\left(e^{2}+e\right)t+e^{3}\prec 0$

$t^{2}-\left(e^{2}+e\right)t+e^{3}=\left(t-e\right)\left(e^{x}-e^{2}\right)$

2) $e^{2x-3}-\left(e+1\right)e^{x-2}+1\prec 0\Leftrightarrow\left(e^{x}-e\right)\left(e^{x}-e^{2}\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow\left(e^{x}-e^{1}\right)\left(e^{x}-e^{2}\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x-2\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow x\in\left]1;2\right[$ donc : $S=\left]1;2\right[$

Propriété : (limites usuelles)

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0^{-}$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=0$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ avec : $n\in\mathbb{N}^{*}$

Preuve : ces limites se déduisent des limites de La fonction ln

Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$ avec : $n\in\mathbb{N}^{*}$?

On a : $\dfrac{e^{x}}{x^{n}}=\dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^{n}}{x^{n}}=\left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^{n}=\dfrac{1}{n^{n}}\left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^{n}$

on pose : $t=\dfrac{x}{n}$ $x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{n}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{n^{n}}\left(\dfrac{e^{t}}{t}\right)^{n}$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{t}}{t}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$

Montrons que : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=0$ avec : $n\in\mathbb{N}^{*}$?

on pose : $t=-x$ donc $x\to+\infty\Leftrightarrow t\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-t\right)^{n}e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-1\right)^{n}\dfrac{t^{n}}{e^{t}}=0$ car :

$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{t}}{t^{n}}=+\infty$

Exercice1 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{2}+3x+4}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{5}e^{-\sqrt{-x}}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x+1}-e}{x}$

Solution : 1) $\frac{e^x}{x^2+3x+4}=\frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{e^x}{x^2}\frac{1}{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3x+4}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5e^{-\sqrt{-x}}$ on pose : $t=\sqrt{-x}$

donc $x\to-\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^5e^{-\sqrt{-x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}-t^{10}e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}-\frac{t^{10}}{e^t}=0$

3) on a : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}=1\times1=1$

Car : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=1$ (on pose : $t=\sin x$)et $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

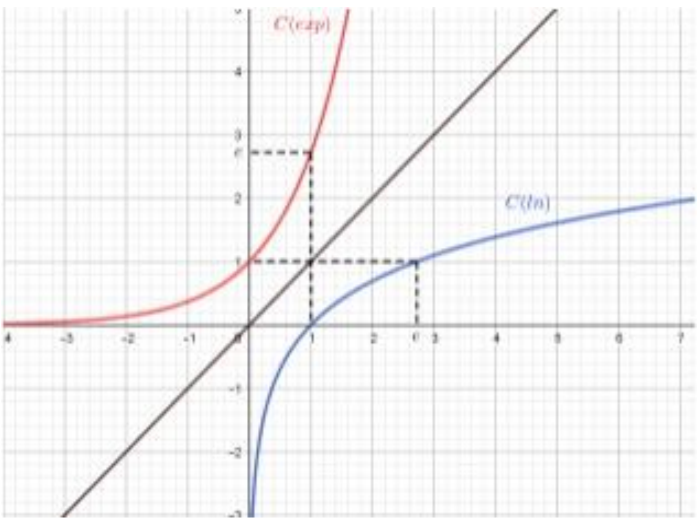
4)On pose : $f(x)=e^{x+1}$ donc : $f(0)=e^{0+1}=e^1=e$

Et : $f'(x)=(x+1)'e^{x+1}=1e^{x+1}=e^{x+1}$ et $f'(0)=e$

Donc : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e$

3) Représentation de la fonction *exp*

La fonction exp est strictement monotone sur $\mathbb{R}$
Car l'exp est la fonction réciproque de la fonction ln qui est strictement monotone sur $]0,+\infty[$
Les courbes C_{ln} et C_{exp} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) : $y=x$



Le Tableau de variation et L'exp :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$exp(x)$	0 ↗	1	e	$+\infty$

4) Dérivation de la fonction *exp*

On sait que la fonction exp est la fonction réciproque de la fonction ln qui est dérivable sur $]0,+\infty[$.Et on sait que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Donc la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}=ln(]0,+\infty[)$.
Soit $x\in\mathbb{R}$ on a :

$exp'(x)=(ln^{-1})'(x)=\frac{1}{\ln'(exp(x))}=exp(x)$

Car : $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ avec f=ln et ln^{-1}=exp

Propriété : La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in\mathbb{R})(exp'(x)=exp(x))$

Corolaire : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $exp(u(x))$ est dérivable sur I et $(\forall x\in I)(\exp(u(x)))'=u'(x)\,exp(u(x))$

Exemple : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes : 1) $f(x)=e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x)=e^{-2x^2}-3e^{3x+1}$ 3) $h(x)=e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x)=(e^x-4)\sqrt{e^x-1}$

Solutions : 1) $f(x)=e^{\sqrt{2x+1}}$

la fonction : $u_1:x\to\sqrt{2x+1}$ est dérivable sur

$\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $u_1'(x)=\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

Donc la fonction f est dérivable sur

$\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x)=e^{-2x^2}-3e^{3x+1}$ les fonctions:

$u_1 : x \to -2x^2$ et $u_2 : x \to 3x+1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$u_1'(x) = -4x$ et $u_2'(x) = 3$

Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $g'(x) = -4xe^{-2x^2} - 9e^{3x+1}$

3) $h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

la fonction : $u : x \to \dfrac{x+1}{-x+3}$ est dérivable sur

$]3;+\infty[$ et $]-\infty;3[$ et $u'(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2}$

Donc la fonction f est dérivable sur $]3;+\infty[$ et

$]-\infty;3[$ et $h'(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2} e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

$$f'(x) = \left((e^x-4)\sqrt{e^x-1}\right)' = \left((e^x-4)\right)'\sqrt{e^x-1} + (e^x-4)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$$

$$f'(x) = e^x\sqrt{e^x-1} + (e^x-4)\frac{(e^x-1)'}{2\sqrt{e^x-1}} = e^x\sqrt{e^x-1} + (e^x-4)\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x-1)+e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}} = \frac{2e^{2x}-2e^x+e^{2x}-4e^x}{2\sqrt{e^x-1}} = \frac{3e^{2x}-6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

5) Primitives et la fonction *exp*

Corolaire : Si u est une fonction dérivable alors une primitive de u'(x) . $e^{u(x)}$ est $e^{u(x)}$.

Exemple : Déterminer les primitives des fonctions suivantes : 1) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ 3) $g(x) = (e^x)^2$

3) $h(x) = \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$

Solutions : 1) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ Si on pose : $u(x) = \sqrt{x}$ On a :

$f(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$ si $x > 0$ donc

les primitives de f sont :

$F(x) = 2e^{u(x)} + \lambda = 2e^{\sqrt{x}} + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

2) $g(x) = (e^x)^2$ Si on pose : $u(x) = e^x$

On a : $g(x) = u'(x)u(x)$ donc les primitives de g

sont : $G(x) = \dfrac{1}{2}u^2(x) + \lambda = \dfrac{1}{2}(e^x)^2 + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

3) $h(x) = \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$ Si on pose : $u(x) = \arctan x$

On a : $h(x) = u'(x)e^{u(x)}$ donc les primitives de h

sont : $H(x) = e^{\arctan x} + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Exercice2 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $I = \mathbb{R};\ f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

2) $I =]0;+\infty[;\ f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

3) $I = \mathbb{R};\ f(x) = e^x(e^x-1)^3$

4) $I = [0;\pi];\ f(x) = \sin x e^{\cos x}$

5) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} \qquad I =]0;+\infty[$

Solutions :1) $I = \mathbb{R};\ f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

$$f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} = \frac{2}{3}(3x)' e^{3x} + (-x)' e^{-x}$$

$F(x) = \dfrac{2}{3}e^{3x} + e^{-x}$ est une primitive de f sur I

2) $I =]0;+\infty[;\ f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{(e^{2x}-1)'}{(e^{2x}-1)^2}$$

Donc : $F(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^{2x}-1}$ est une primitive de f sur I

3) $I = \mathbb{R};\ f(x) = e^x(e^x-1)^3$

$f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3=\left(e^x-1\right)'\left(e^x-1\right)^3$

donc : $F(x)=\frac{1}{3+1}\left(e^x-1\right)^{3+1}=\frac{1}{4}\left(e^x-1\right)^4$ est une primitive de f sur I

4) $I=[0;\pi]$; $f(x)=\sin xe^{\cos x}$

$f(x)=\sin xe^{\cos x}=-(\cos x)'e^{\cos x}$

donc : $F(x)=e^{\cos x}$ est une primitive de f sur I

5) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$ $\quad I=]0;+\infty[$

$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}$ donc : $F(x)=\ln\left|e^x-x\right|$ est une primitive de f sur I

6) Etudes des fonctions qui contiennent *exp*

Exemple1: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=(x-1)e^x$

1)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2) Etudier les branches infinies de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$
3) Etudier la concavité de la courbe Cf
4) Construire la courbe C_f.

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty}xe^x-e^x=0$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

Car : $\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+$ et $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

Donc : $y=0$ est une asymptote a (C) au voisinage de $-\infty$

$f'(x)=\left((x-1)e^x\right)'=(x-1)'e^x+(x-1)\left(e^x\right)'$

$f'(x)=1e^x+(x-1)e^x=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de x

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}e^x$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ donc :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}e^x=1\times(+\infty)=+\infty$

Donc : la courbe Cf admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) Etudie de la concavité de la courbe Cf :

$f''(x)=\left(xe^x\right)'=(x)'e^x+x\left(e^x\right)'=e^x(1+x)$

Le signe de : $f''(x)$ est celui de : $x+1$

$x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

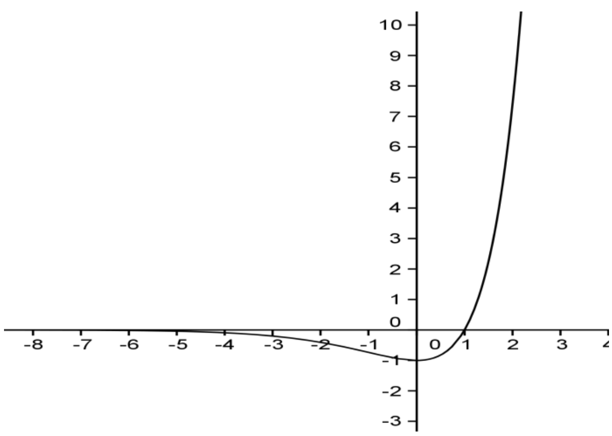
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

Donc :

(C_f) est convexe sur $[-1;+\infty[$

(C_f) est concave sur $]-\infty;-1]$ et $A\left(-1,-2e^{-1}\right)$ est un point d'inflexion de (C_f)

4)



Exemple2: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x-1+\dfrac{3}{e^x+1}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3)montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=x+2-\dfrac{3e^x}{e^x+1}$

4) Etudier les branches infinies de la courbe Cf
Et étudier la position de la courbe Cf avec les asymptotes obliques

Solutions :

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/e^x+1\neq 0\}$

$e^x+1=0\Leftrightarrow e^x=-1$ pas de solutions car $e^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-1+\dfrac{3}{e^x+1}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-1+\dfrac{3}{e^x+1}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}x-1=-\infty$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{e^x+1}=3$

2) $f'(x)=\left(x-1+\dfrac{3}{e^x+1}\right)''=1-3\dfrac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=1-3\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

$f'(x)=\dfrac{\left(e^x+1\right)^2-3e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{\left(e^x\right)^2+2e^x+1-3e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{\left(e^x\right)^2-e^x+1}{\left(e^x+1\right)^2}$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de : $\left(e^x\right)^2-e^x+1$

On pose : $e^x=X$ donc on a : $X^2-X+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$

Donc : $X^2-X+1\succ 0$ (signe de a)

Donc : $\left(e^x\right)^2-e^x+1>0$ par suite: $f'(x)>0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3)montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=x+2-\dfrac{3e^x}{e^x+1}$

$f(x)=x-1+\dfrac{3}{e^x+1}=x+2-3+\dfrac{3}{e^x+1}$

$f(x)=x+2+\dfrac{-3\left(e^x+1\right)+3}{e^x+1}=x+2+\dfrac{-3e^x-3+3}{e^x+1}$

$f(x)=x+2-\dfrac{3e^x}{e^x+1}$

4) Etude des branches infinies ?

a)On a $f(x)=x-1+\dfrac{3}{e^x+1}$ donc $f(x)-(x-1)=\dfrac{3}{e^x+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x+1}=0$

Par suite :la droite d'équation $(\Delta)\ y=x-1$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de +∞ et on a aussi : $f(x)-(x-1)=\dfrac{3}{e^x+1}>0$

Donc :la courbe Cf est au-dessus de la droite d'équation $(\Delta)\ y=x-1$

b) On a $f(x)=x+2-\dfrac{3e^x}{e^x+1}$ donc $f(x)-(x+2)=-\dfrac{3e^x}{e^x+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{3e^x}{e^x+1}=0$

Par suite :la droite d'équation $(D)\ y=x+2$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $-\infty$ et on a aussi : $f(x)-(x+2)=-\dfrac{3e^x}{e^x+1}<0$

Donc :la courbe Cf est au-dessous de la droite d'équation $(D)\ y=x+2$

Exemple3: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)\ \frac{f(x)}{x}=\frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\frac{e^x-1}{x}$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)\ f'(x)=\frac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$

5)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

6) Etudier les branches infinies de la courbe C_f Au voisinage de $+\infty$

7)calculer : $f(2\ln 2)$ et construire la courbe C_f.

Solutions : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/e^x-1\geq 0\right\}$

$e^x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow x\geq\ln 1\Leftrightarrow x\geq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^+$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}=+\infty$

Car : $\lim_{x\to+\infty}e^x-4=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$

2) $\frac{f(x)}{x}=\frac{\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}}{x}=\frac{\left(e^x-4\right)\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2}{x\sqrt{e^x-1}}$

$\frac{f(x)}{x}=\frac{\left(e^x-4\right)\left(e^x-1\right)}{x\sqrt{e^x-1}}=\frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\frac{e^x-1}{x}$

3) $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\frac{e^x-1}{x}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}$ puisque : $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Et $\lim_{x\to 0^+}e^x-4=-3$ et $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{e^x-1}=0^+$

Donc : $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable
à droite de 0

Interprétation géométriquement :

la courbe Cf admet une demie tangente vertical

adroite du point $O(0;0)$ dirigé vers le bas

car : $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty\quad (+)\times(-)=(-)$

4) montrons que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)\ f'(x)=\frac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$?

$f'(x)=\left(\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}\right)'=\left(e^x-4\right)'\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$

$f'(x)=e^x\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\frac{\left(e^x-1\right)'}{2\sqrt{e^x-1}}=e^x\sqrt{e^x-1}+\frac{e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$

$f'(x)=\frac{2e^x\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2+e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{2e^x\left(e^x-1\right)+e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$

$f'(x)=\frac{2e^{2x}-2e^x+e^{2x}-4e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{3e^{2x}-6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$

5)le signe de : $f'(x)$ est celui de e^x-2

car $\frac{3e^x}{2\sqrt{e^x-1}}>0\ \left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)$

$e^x-2>0\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow x>\ln 2$

$f(\ln 2)=\left(e^{\ln 2}-4\right)\sqrt{e^{\ln 2}-1}=(2-4)\sqrt{2-1}=-2$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0\searrow$	-2	$\nearrow+\infty$

6) Etude des branches infinies de la courbe C_f Au voisinage de $+\infty$?

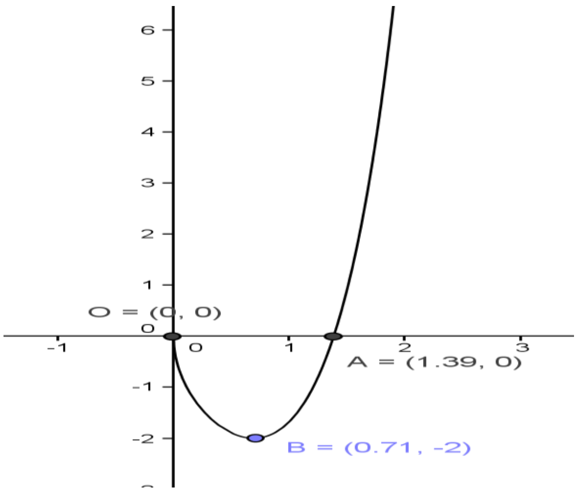
$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{4}{x}\right)\sqrt{e^x-1}$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ Donc : la courbe Cf admet

une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

$f(2\ln 2)=\left(e^{2\ln 2}-4\right)\sqrt{e^{2\ln 2}-1}=\left(e^{\ln 4}-4\right)\sqrt{e^{\ln 4}-1}=(4-4)\sqrt{4-1}=0$



Exercice3 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f.

Solutions : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/e^{-x}-e^{-2x}\geq 0\right\}$

$e^{-x}-e^{-2x}\geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}\geq e^{-2x}\Leftrightarrow -x\geq -2x\Leftrightarrow x\geq 0$

Donc : $D_f=[0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}=0$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}=0=f(0)$

Donc f est continue à droite de 0

b)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)}{x^2}}$$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{e^{-x}}{x}\times\frac{e^{-x}-1}{-x}}$ on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}-1}{-x}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométriquement :

la courbe Cf admet une demie tangente vertical adroite du point $O(0;0)$ dirigé vers le haut

car : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ $\quad(+)\times(+)=(+)$

3)Etude des variations de f :

$$f'(x)=\left(\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}\right)'=\frac{\left(e^{-x}-e^{-2x}\right)'}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^2}$$

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}+2e^{-2x}}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^2}=\frac{e^{-x}\left(2e^{-x}-1\right)}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^2}$$

le signe de : $f'(x)$ est celui de $2e^{-x}-1$

car $\frac{e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^2}>0\ \left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)$

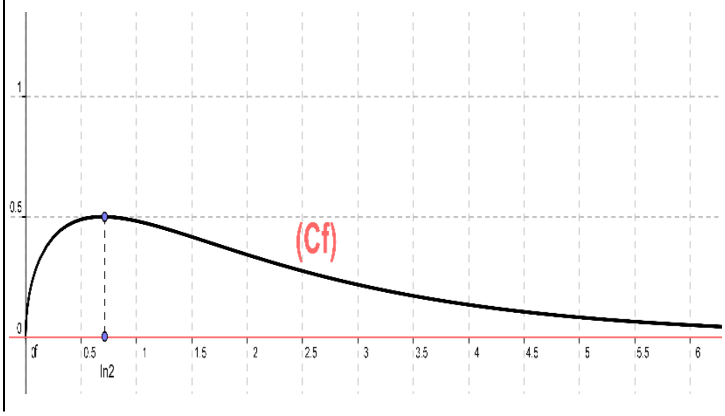
on a : $2e^{-x}-1=\frac{1}{e^x}\left(2-e^x\right)$

$2-e^x>0\Leftrightarrow e^x\prec 2\Leftrightarrow x\prec\ln 2$

$$f(\ln 2)=\sqrt{e^{-\ln 2}-e^{-2\ln 2}}=\sqrt{\frac{1}{e^{\ln 2}}-\frac{1}{e^{2\ln 2}}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0\nearrow$	$1/2$	$\searrow 0$

4) la courbe C_f :



Exercice4 : Considérons la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

4) déterminer : $f^{-1}(x)\quad \forall x\in J$

Solutions : $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/1-e^{2x}>0\right\}$

$1-e^{2x}>0\Leftrightarrow 1>e^{2x}\Leftrightarrow e^0>e^{2x}\Leftrightarrow 0>2x\Leftrightarrow x<0$

Donc : $D_f=\left]-\infty,0\right[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\frac{0}{\sqrt{1-0}}=0$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}}=+\infty$$

Car : $\lim_{x\to0^-}\sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}=0^+$

2) $$f'(x)=\left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\frac{\left(1-e^{2x}\right)'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}=\frac{\frac{2e^x\left(1-e^{2x}\right)+2e^xe^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x-2e^{3x}+2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}\left(1-e^{2x}\right)}=\frac{2e^x}{2\sqrt{1-e^{2x}}\left(1-e^{2x}\right)}>0$$

$\forall x\in\left]-\infty,0\right[$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

3) on a f est une fonction continue et strictement croissante sur $I=\left]-\infty,0\right[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur l' intervalle

$J=f(I)=f\left(\left]-\infty,0\right[\right)=\left]0;+\infty\right[$

$$\begin{cases}f(y)=x\\ y\in I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\ x\in J\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}=x\\ y\in\left]-\infty,0\right[\end{cases}\Leftrightarrow\left(\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}\right)^2=x^2\Leftrightarrow\frac{e^{2y}}{1-e^{2y}}=x^2$$

$$e^{2y}=x^2\left(1-e^{2y}\right)\Leftrightarrow e^{2y}=x^2-x^2e^{2y}\Leftrightarrow e^{2y}+x^2e^{2y}=x^2$$

$$e^{2y}\left(1+x^2\right)=x^2\Leftrightarrow e^{2y}=\frac{x^2}{1+x^2}\Leftrightarrow 2y=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow y=\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

Donc: $f^{-1}(x)=\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}\quad \forall x\in\left]0;+\infty\right[$

Exercice5 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$ et soit (C) la courbe

De f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec

$\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

1)a)montrer que : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ et interpréter géométriquement le résultat

b) montrer que : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

2)a)vérifier que: $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)=x+1-\ln\left(1+e^x\right)$

b) en déduire la droite (D) d'équation : $y = x+1$

est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

c) étudier la position de la courbe Cf avec la droite (D)

3)a) montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x)=\frac{1}{1+e^{x}}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de Cf

d) montrer que la courbe Cf coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe C_f dans le repére $(O;\vec{i}\ \vec{j})$

5) a)montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) déterminer : $f^{-1}(x)$ $\forall x \in J$

Solutions : $f(x) = 1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1)a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1-\ln\left(1+e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1-\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right) = 1$$

Car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}} = 0$

Interprétation géométriquement :

$y=1$ est une asymptote a (C) au voisinage de $+\infty$

1)b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1-\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right) = -\infty$

Car: $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x}} = +\infty$

2)a)Montrons que: $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x)=x+1-\ln\left(1+e^{x}\right)$?

$$f(x) = 1-\ln\left(1+e^{-x}\right) = 1-\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right) = 1-\ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}}\right)$$

$$f(x) = 1-\ln\left(e^{x}+1\right)+\ln\left(e^{x}\right) = 1-\ln\left(e^{x}+1\right)+x$$

Donc: $f(x)=x+1-\ln\left(e^{x}+1\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2)b)on a : $f(x)=x+1-\ln\left(e^{x}+1\right)$

Donc : $f(x)-(x+1)=-\ln\left(e^{x}+1\right)$

Donc: $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1) = \lim_{x\to-\infty} -\ln\left(e^{x}+1\right) = 0$ car: $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

Par suite :la droite d'équation $(D): y = x+1$ est une asymptote oblique à la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

2)c) $f(x)-(x+1)=-\ln\left(e^{x}+1\right)$

On a : $e^{x} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc : $e^{x}+1>1$

Donc: $\ln\left(e^{x}+1\right) > \ln 1$ Donc: $\ln\left(e^{x}+1\right) > 0$

Donc: $-\ln\left(e^{x}+1\right) < 0$

Donc :la courbe Cf est au-dessous de la droite d'équation $(D): y = x+1$

3)a)montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+e^{x}}$?

$$f'(x) = \left(x+1-\ln\left(1+e^{x}\right)\right)' = 1-\frac{\left(1+e^{x}\right)'}{1+e^{x}} = 1-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1+e^{x}-e^{x}}{1+e^{x}} = \frac{1}{1+e^{x}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

3)b) *Tableau de variation :*

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 1$

3)c) Etude de la concavité de Cf :

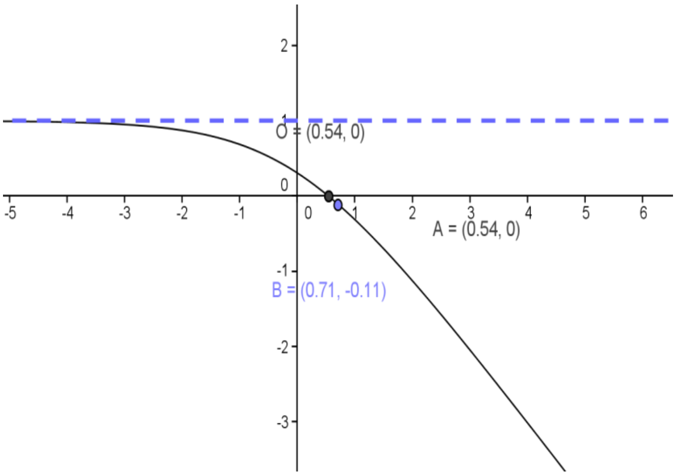
$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+e^{x}}\right)' = -\frac{\left(1+e^{x}\right)'}{\left(1+e^{x}\right)^{2}} = -\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la courbe Cf est convexe dans $\mathbb{R}$,

3)d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(1+e^{-x}\right)=1$

$\Leftrightarrow \ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln e \Leftrightarrow e^{-x}=e-1 \Leftrightarrow -x=\ln(e-1)$

$\Leftrightarrow x=-\ln(e-1)$ Donc le point d'intersection de la courbe Cf avec l'axe des abscisses est : $A\left(-\ln(e-1);0\right)$



5) a) on a f est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur l' intervalle

$J = f(I) = f(\mathbb{R}) =]-\infty;1[$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-\ln\left(1+e^{-y}\right) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow 1-x = \ln\left(1+e^{-y}\right) \Leftrightarrow 1+e^{-y} = e^{1-x}$$

$$e^{-y} = e^{1-x}-1 \Leftrightarrow -y = \ln\left(e^{1-x}-1\right) \Leftrightarrow y = -\ln\left(e^{1-x}-1\right)$$

Donc: $\forall x \in]-\infty;1[\quad f^{-1}(x) = -\ln\left(e^{1-x}-1\right)$

Exercice <u>5BIS</u> : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3-\ln\left(1+e^{-x}\right)$ et soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

1) calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$et interpréter géométriquement le résultat

2)a)vérifier que: $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x+3-\ln\left(1+e^{x}\right)$

b) en déduire la droite (D)d'équation : $y = x+3$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

c) étudier la position de la courbe Cf avec la droite (D)

3)a) montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{x}}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de Cf

d) montrer que la courbe Cf coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe C_f dans le repére$\left(O;\vec{i}\ \vec{j}\right)$

5) a)montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) déterminer : $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

Exercice6 :

Partie 1 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ par : $f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite en $+\infty$

4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.

5) a) Montrer que $(\forall t > 0)$ $0 \prec e^{-t} + t - 1 \prec \dfrac{t^2}{2}$

b) En déduire que : $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} \prec f(x) - x \prec \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$

6) Construire la courbe C_f.

Partie 2 :

Considérons la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$f_n(x) = (x+2n)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$

où $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite de 0.

b) Déterminer la limite en $+\infty$

c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f_n puis dresser le tableau de variation de f_n.

2) Montrer que l'équation $f_n(x)=\frac{2}{n}$

admet une solution unique α_n dans]0, +∞[

3)a) Montrer que $(\forall x>0)$

$$f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}\succ f_n(x)-\frac{2}{n}$$

b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et

que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)_n=0$

II) LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a.

1) Définition et résultats :

Propriété et définition : Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction $\log_a$ étant continue et strictement monotone sur]0, +∞[, elle admet donc une fonction réciproque de

$\mathbb{R}=\log_a$ (]0, +∞[) vers]0, +∞[.

Cette fonction réciproque s'appelle la fonction exponentielle de base a et se note $\boldsymbol{exp_a}$

Propriété : Soit $a>0$ et $a\neq 1$; on a :

$(\forall x\in\mathbb{R})\ \exp_a(x)=e^{x\ln a}$

Preuve : Posons : $y=\exp_a(x)$

on a donc $y>0$ et $x=\log_a y=\frac{\ln y}{\ln a}$

D'où : $\ln y=x\ln a$; finalement $y=e^{x\ln a}$

D'où la propriété.

Résultats immédiats : Soit $a>0$ et $a\neq 1$

fonction $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$

1) $\forall x\in\mathbb{R}\quad \exp_a(x)\succ 0$

2) $\forall x\in\mathbb{R}\quad \forall y\in\mathbb{R}_+^*\ \exp_a(x)=y\Leftrightarrow x=\log_a y$

3) $\forall x\in\mathbb{R}\ \log_a(\exp_a(x))=x$

4) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ \exp_a(\log_a(x))=x$

Propriété caractéristique :

Soit $a>0$ et $a\neq 1$; on a : $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}2$

$\exp_a(x+y)=\exp_a(x)+\exp_a(y)$

Conséquences :

Soit $a>0$ et $a\neq 1$ et x et y deux réels, on a :

1) $\exp_a(-x)=\frac{1}{\exp_a(x)}$ 2) $\exp_a(x-y)=\frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$

3) $\exp_a(rx)=(\exp_a x)^r$

2) Une autre écriture de la fonction $\boldsymbol{exp_a}$

Propriété : $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$(\forall x\in\mathbb{R})\left(\exp_a(x)\right)'=(\ln a)e^{x\ln a}=(\ln a)a^x$$

Exemple :

$$\left(\exp_6(x)\right)'=(\ln 6)e^{x\ln 6}=(\ln 6)6^x$$

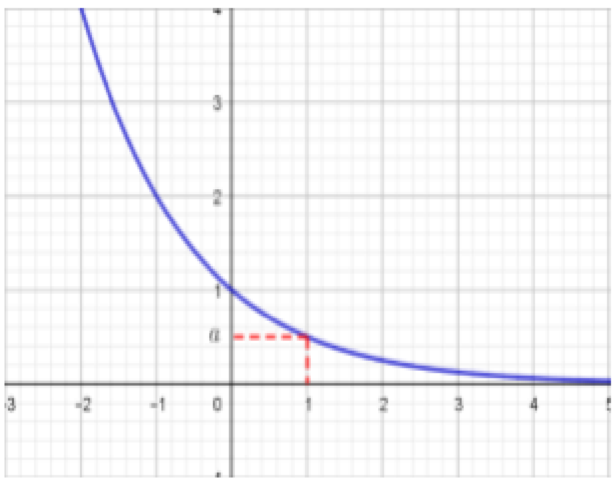
Monotonie et étude et représentation :

Si $0<a<1$:

On a $ln(a)<0$ et par suite : $(\forall x\in\mathbb{R})(exp'_a(x)<0)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

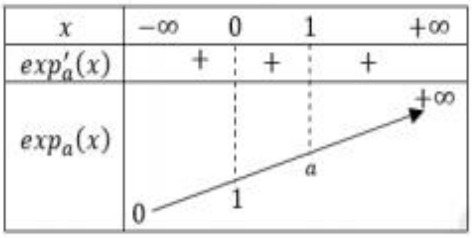
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$exp'_a(x)$	$-$	$-$	$-$	
$exp_a(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	a ↘	0

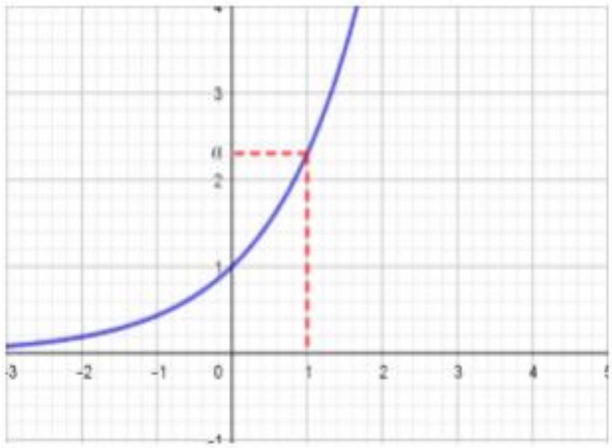


Si $0 < a < 1$:

On a $ln(a) > 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(exp'_a(x) > 0)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$





3) Les puissances réelles.

Rappelle :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}*)(x^0 = 1)$

2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}*)$ $(x^n = x \times x \times ... \times x \ : n\ fois)$

3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}*)$ $(x^{-n} = \frac{1}{x^n})$

4) $(\forall x \in \mathbb{R}*+)(\forall r \in \mathbb{Q})$ $(x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p})$ $(q \in \mathbb{N}*)$

Puissances réelle : La notation a^x

Soit a un réel strictement positif.

1) Si $a = 1$, on pose pour tout réel $x > 0$: $1^x = 1$

2) Si $a \neq 1$, on pose $a^x = e^{x\ln a}$

Propriétés :

$(\forall a \in \mathbb{R}*+)(\forall b \in \mathbb{R}*+)(\forall x \in \mathbb{R})$ $(\forall y \in \mathbb{R})$

1) $a^x \times a^y = a^{x+y}$ 2) $(a\times b)^x = a^x \times b^x$

3) $(a^x)^y = a^{x\times y}$ 4) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

6) $(a^x)' = a^x \times \ln a$

a) $x \to a^x$ est strictement croissante si $a \succ 1$

b) $x \to a^x$ est strictement décroissante si $0 \prec a \prec 1$

Exemples : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $5^x = 15$ 2) $3^{2x} \geq 5^{1-x}$ 3) $7^{x+1} - 7^{-x} \prec 6$

Solution : 1) $5^x = 15$

$5^x = 15 \Leftrightarrow e^{x\ln 5} = 15 \Leftrightarrow x\ln 5 = \ln 15 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 15}{\ln 5}$

Donc : $S = \left\{\frac{\ln 15}{\ln 5}\right\}$..

2) $3^{2x} \geq 5^{1-x} \Leftrightarrow \ln(3^{2x}) \geq \ln(5^{1-x})$

$\Leftrightarrow 2x\ln 3 \geq (1-x)\ln 5 \Leftrightarrow x(2\ln 3 + \ln 5) \geq \ln 5$

Donc : $S = \left[\frac{\ln 5}{2\ln 3 + \ln 5}; +\infty\right[$

3) $7^{x+1} - 7^{-x} \prec 6 \Leftrightarrow 7^{x+1} - \frac{1}{7^x} \prec 6$ on a $7^x \succ 0$

$7^{2x+1} - 1 \prec 6\times 7^x \Leftrightarrow 7\times(7^x)^2 - 6\times 7^x - 1 \prec 0$

on pose : $t = 7^x$ $\Leftrightarrow 7t^2 - 6\times t - 1 \prec 0$

on a : $7t^2 - 6\times t - 1 = (t-1)(7t+1)$

$7^{x+1} - 7^{-x} \prec 6 \Leftrightarrow (7^x - 1)(7\times 7^x + 1) \prec 0$

$\Leftrightarrow (7^x - 1)(7^{x+1} + 1) \prec 0 \Leftrightarrow 7^x - 1 \prec 0$ car $7^{x+1} \succ 0$

$\Leftrightarrow 7^x \prec 1 \Leftrightarrow 7^x \prec 7^0 \Leftrightarrow x \prec 0$ car $x \to 7^x$ est strictement croissante $(7 \succ 1)$ donc : $S =]-\infty; 0[$

Exercice7 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $2^{x+1} = 8^x$ 2) $3^x = 12$ 3) $5\times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0$

4) $100^x + 40 = 14\times 10^x$

5) $2^{x-1} > 4^x$ 5) $(0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1}$

Solution :1) $2^{x+1}=8^x \Leftrightarrow 2^{x+1}=\left(2^3\right)^x \Leftrightarrow 2^{x+1}=2^{3x}$

$x+1=3x \Leftrightarrow 1=2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}=x$ donc : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) $3^x=12 \Leftrightarrow x=\log_3 12$ donc : $S=\{\log_3 12\}$

3) $2^x-3\times 2^{x+1}-16=0 \Leftrightarrow 2^x-6\times 2^x-16=0$

On pose : $2^x=X$ donc : $X^2-6X-16=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2+4\times 1\times 16=100>0$

Donc : $X_1=8$ et $X_2=-2$

Donc : $2^x=8$ et $2^x=-2$ or $2^x \succ 0$ donc l'équation $2^x=-2$ n'a pas de solutions

$2^x=8 \Leftrightarrow x=\log_2 8 \Leftrightarrow x=\log_2 2^3 \Leftrightarrow x=2$ donc : $S=\{3\}$

4) $100^x+40=14\times 10^x \Leftrightarrow 10^{2x}-14\times 10^x+40=0$

$\Leftrightarrow \left(10^x\right)^2-14\times 10^x+40=0$ on pose : $10^x=X$

On a alors : $X^2-14X+40=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-14)^2-4\times 40=36>0$

$X_1=\frac{14+6}{2\times 1}$ et $X_2=\frac{14-6}{2\times 1}$ donc : $X_1=10$ et $X_2=4$

Donc : $10^{x_1}=10$ et $10^{x_2}=4$ donc **:** $x_1=1$ et $x_2=\log_{10} 4$ Donc : $S=\{1, \log_{10} 4\}$

5) $2^{x-1}>4^x \Leftrightarrow 2^{x-1}>\left(2^2\right)^x \Leftrightarrow 2^{x-1}>2^{2x} \Leftrightarrow x-1>2x$

$\Leftrightarrow -1>x$ donc : $S=]-\infty,-1[$

6) $(0,5)^{2x}>(0,5)^{x+1} \Leftrightarrow 2x<x+1$ car $x\to(0,5)^x$ est strictement décroissante car : $0\prec 0,5\prec 1$

$(0,5)^{2x}>(0,5)^{x+1} \Leftrightarrow x<1$ donc : $S=]-\infty,1[$

Remarque : a est un réel strictement positif et $a\neq 1$.Si u est une fonction dérivable alors une primitive de $u'(x)a^{u(x)}$ est $\frac{1}{\ln a}a^{u(x)}$

Exemple : Déterminer les primitives de la fonction suivante : $f(x)=3^{x-2}$

Solutions : 1) $f(x)=3^{x-2}$ Si on pose : $u(x)=x-2$

On a : $f(x)=u'(x)3^{u(x)}$ donc les primitives de f sont : $F(x)=\frac{1}{\ln 3}3^{u(x)}+\lambda=\frac{1}{\ln 3}3^{x-2}+\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R}$

Exercice8: Soit La fonction f définie par :

$f(x)=4^x-2^{x+1}$

1)déterminer D_f

2) calculer les limites aux bornes de D_f

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe Cf

5) construire la courbe C_f dans un repére$\left(O;\vec{i}\ \vec{j}\right)$

Solutions : 1) $f(x)=e^{x\ln 4}-e^{(x+1)\ln 2}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x\ln 2}-e^{(x+1)\ln 2}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln 2}\left(e^{x\ln 2}-2\right)=+\infty$

Car : $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x\ln 2}-e^{(x+1)\ln 2}=0$ Car : $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=2\ln 2\times e^{x\ln 2}\times\left(e^{x\ln 2}-1\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x\ln 2}-1=0 \Leftrightarrow x=0$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	-1	↗ $+\infty$

4) Etude des branches infinies de la courbe Cf :

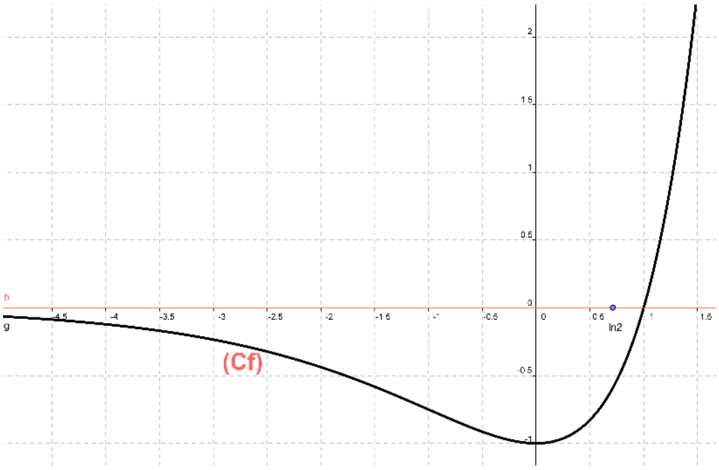
a)on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ donc : $y=0$

est une asymptote a (C)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln 2}}{x}\left(e^{x\ln 2}-2\right)=+\infty$$

Car : $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^{X}}{X}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$

Donc : la courbe Cf admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$



Exercice 9: Soit La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

f: $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

$x\to x^x$, si $x\neq 0$ et $f(0)=0$

1)Etudier la continuité de la fonction f à droite de 0.
2)Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4)Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$.
5)Tracer la courbe Cf.
6)Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=x$

7)Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0=\frac{1}{e}$

et $(\forall n\in\mathbb{N})(\ u_{n+1}=f(u_n))$.

a)Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})(\ u_n\leq 1)$

b)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$; puis en déduire qu'elle convergente.

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

Exercice 10 : Soit $n\in\mathbb{N}*$; considérons la fonction f_n définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$f_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}\ \text{ si } x>0 \text{ et } f_n(0)=0$$

et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Donner le tableau de variation de f_1.

2. Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en point d'abscisse 1.
3. Construire la courbe (C_1) et la tangente (T_1) dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.
5. a) Etudier sur l'intervalle $[1,+\infty[$ le signe de :

$f_2(x)-f_1(x)$

b) En déduire les positions relatives des deux courbes (C_1) et (C_2) ; puis construire (C_2)

6. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ où u_n est la valeur maximale de la fonction f_n.

a) Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}*)$: $u_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$

b) Pour $x\in]1,+\infty[$; calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}*)$ $(u_{n+1}=\frac{1}{2}f_n(e^{\frac{n+1}{2}}))$

d) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}*)$ $(u_n\leq\frac{1}{e}\frac{1}{2^n})$

Et en déduire $\lim_{n\to+\infty}u_n$

Exercice11 : <u>Partie 1</u>

1. En utilisant le T.A.F sur la fonction : $t\to e^{-t}$;

montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)(\exists\theta\in\mathbb{R}_+^*)$ $(e^{\theta}=\frac{x}{1-e^{-x}})$

2. En déduire que : $(\forall x>0)(\ 1-x\prec e^{-x})$ et que

$(\forall x>0)(\ 1+x\prec e^{x})$

3. En déduire que : $(\forall x > 0)(0 \prec \ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) \prec x)$

Partie 2

Considérons la fonction f définie sur $[0, +\infty[$

Par : $f(x)=\frac{xe^x}{e^x-1}$ Si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

1) Etudier la continuité de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ et étudier la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que $(\forall x > 0)$

$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \prec e^{-x}+x-1 \prec \frac{x^2}{2}\right)$$

b) Montrer que $(\forall x > 0)$ $\left(\frac{f(x)-1}{x}=\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\cdot f(x)\right)$

c) En déduire que f est dérivable à droite de 0 et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

4) a) Montrer que : $(\forall x > 0)$ $\left(f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-x-1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}\right)$

b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

c) Construire la courbe C_f.

d) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ Vers $J = f([0, +\infty[)$.

Partie 3 :Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par :

$u_0 \in]0, +\infty[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1}=\ln\left(f(u_n)\right))$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive,

2) Montrer que la suite $(u_n)_n$ strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que l'équation $ln(f(x)) = x$ admet 0 comme seule solution.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

FONCTIONS PRIMITIVES

I) FONCTION PRIMITIVE D'UNE FONCTION

1) Activités :

Activité 1 :

1- Déterminer une fonction qui admet pour fonction dérivée la fonction $f(x) = 2x^3 - x^2$

2- Déterminer une fonction qui admet pour fonction dérivée la fonction : $g(x) = \frac{3}{1+x^2}$.

3- a) Soit la fonction $H(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{\pi}{4}$; vérifier que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R})(H'(x) = \cos(2x)$

La fonction H s'appelle **une fonction primitive** de la fonction $h(x) = \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que $H_1(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 10$ est aussi une fonction primitive pour la fonction h

c) Donner une expression de toutes les fonctions primitives de h

Activité 2 :

Soient F une fonction **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I c'est-à-dire $(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$

et G une fonction **primitive** de la fonction g sur l'intervalle I, α et β deux réels.

1- Montrer que $(\alpha F + \beta G)$ est une fonction primitive de la fonction $(\alpha f + \beta g)$ sur I.

2- Soient F_1 et F_2 deux fonctions **primitives** de la fonction f sur l'intervalle I ; Montrer que :

$(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda)$ où λ est un réel quelconque.

3- Démontrer que si f admet une fonction primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique fonction F_0 fonction primitive de f telle que $F_0(x_0) = y_0$ où y_0 un réel quelconque.

2) Définition et propriétés

Définition :

Soit f une fonction définir sur un intervalle I ; On dit que la fonction F est une fonction **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I si :

- F est dérivable sur I
- $(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$

Théorème :(admis)

Si f est continue sur I alors f admet une fonction primitive sur I

Remarque :

La continuité dans le théorème précédent est une condition suffisante qui n'est pas nécessaire.

Exemples :

❶ Soit $\begin{cases} f(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1- Vérifier que f n'est pas continue en 0

2- Soit $F(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est une fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Si f admet une fonction primitive F sur I alors toutes les fonctions primitives de f sur I s'écrivent de la forme :$F + \lambda$ où λ est un réel.

Propriété :

Si F_1 et F_2 sont deux fonction primitive d'une fonction f sur I alors $(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Exemple de fonction qui n'admet pas de primitive

Soit la fonction f définie par ; $\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Montrons que f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Remarquez que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; (elle n'est pas continue en 1)

$F_1(x) = x^2 + x + \lambda_1$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]-\infty, 1]$.

$F_2(x) = x^2 - x + \lambda_2$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]1, +\infty[$.

Si f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ alors ils existent $\lambda_1$et λ_2 tels que : $\begin{cases} F(x) = x^2 + x + \lambda_1 & \text{si } x \leq 1 \\ F(x) = x^2 - x + \lambda_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

et que F soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(F'(x) = f(x))$

On a F est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $(\forall x \in]-\infty, 1[)(F'(x) = f(x))$

et F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $(\forall x \in]1, +\infty[)(F'(x) = f(x))$

Le problème il faut déterminer (s'ils existent) $\lambda_1$et λ_2 dans $\mathbb{R}$ pour que F soit dérivable en 1 et que :

$F'(1) = f(1) = 3$.

On a $F(1) = 2 + \lambda_1$

d'autre par pour que f soit dérivable en 1, il faut qu'elle soit continue en 1, ce qui implique

$\lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1^-} F(x) = F(1)$ on en déduit que $2 + \lambda_1 = \lambda_2$ d'autre part

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x + \lambda_1 - 2 - \lambda_1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x - 1} = 3 = F'_d(1)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x + \lambda_2 - 2 - \lambda_1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x - 2 + \lambda_2 - \lambda_1}{x - 1} \quad (\lambda_2 = 2 + \lambda_1)$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x - 2 + 2 + \lambda_1 - \lambda_1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1 = F_g'(1)$$

Donc pour tous réels $\lambda_1$et λ_2 ; $F_d'(1) = 3 \neq 1 = F_g'(1)$

D'où F n'existe pas et par suite f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Si f admet une fonction primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique fonction F_0 fonction primitive de f telle que $F_0(x_0) = y_0$ où y_0 un réel quelconque.

Exercice :

Déterminer la fonction primitive de la fonction $f(x) = 2x^2 + x + 1$ et qui s'annule en 3

Propriété :

Si F est une fonction **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I et G une fonction **primitive** de la fonction g sur l'intervalle I et α un réel alors :

- $(F + G)$ est une fonction **primitive** de la fonction $(f + g)$sur I
- (αF) est une fonction **primitive** de la fonction (αf) sur I

Remarque :

Ce sont **les seules opérations sur les fonctions primitives.**

3) Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive	Intervalles
$\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$	$\mathbb{R}^+$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^+$
$x^r \quad (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$	$\mathbb{R}^{*+}$
$sin(ax + b)$	$\frac{-1}{a} cos(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} sin(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$

4) Opérations sur les fonctions primitives.

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel. Mais grâce au tableau des opérations sur les fonctions dérivées on peut en déduire :

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'\sqrt[n]{u} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'ou$	$vou + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$arctan(u) + C$

Cette ligne est une généralisation des 4 lignes précédentes

5) Application :

5.1 Primitives directe

❶ Déterminons une fonction primitive de $f(x) = 7x\sqrt[3]{3x^2+5}$

On doit remarquer que la fonction $u(x) = 3x^2 + 5$ donc $u'(x) = 6x$

et par suite $f(x) = \frac{7}{6} \times 6x \times \sqrt[3]{2x^2+5}$

$= \frac{7}{6}(3x^2+5)' \times \sqrt[3]{2x^2+5}$ (c'est de la forme : $u'\sqrt[n]{u}$ $(n=3)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent de la forme : $F(x) = \frac{7}{6} \times \frac{3}{4}\sqrt[3]{(3x^2+5)^4} + C = \frac{7}{8}\sqrt[3]{(3x^2+5)^4} + C$

❷Déterminons une fonction primitive de $g(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^4}$

On doit remarquer que la fonction $u(x) = 2x^2 + x$ donc $u'(x) = 4x + 1$

Et par suite : $g(x) = \frac{(2x^2+x)'}{(2x^2+x)^4}$

$= (2x^2+x)' \times (2x^2+x)^{-4}$ (c'est de la forme : $u'u^r$ $(r=-4)$)

Donc les fonctions primitives de g s'écrivent de la forme : $G(x) = \frac{1}{-4+1}(2x^2+x)^{-4+1} + C = \frac{1}{3(2x^2+x)^3} + C$

❸ Déterminons une fonction primitive de $h(x) = 7x\,cos(\pi x^2+3)$

On pose $u(x) = \pi x^2 + 3$ donc $u'(x) = 2\pi x$ et par suite :

$h(x) = 7x\,cos(\pi x^2+3)$

$= \frac{7}{2\pi} \times 2\pi x \times cos(\pi x^2+3)$

$= \frac{7}{2\pi}(\pi x^2+3)' \times cos(\pi x^2+3)$ (C'est de la forme : $u' \times vou$)

Donc les fonctions primitives de h s'écrivent de la forme : $H(x) = \frac{7}{2\pi}\,sin(\pi x^2+3) + C$

5.2) Autres situations :

Malheureusement ce n'est pas toujours aussi "directe" ; Par fois il faut faire d'autres calcules.

① Déterminons une fonction primitive de $h(x) = \frac{2}{x^2+2x+4}$

A remarquer que $h(x) = \frac{2}{(x+1)^2+3}$ ce que nous laisse à penser à la fonction $arctan$

$h(x) = \frac{2}{(x+1)^2+3}$

$= \frac{2}{3[\frac{1}{3}(x+1)^2+1]}$

$= \frac{1}{3}\frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$ (C'est de la forme : $\frac{u'}{u^2+1}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction h sont les fonctions : $H(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$

On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :$\frac{\alpha}{ax^2+bx+c}$ où le discriminant Δ est strictement négatif.

Exercice : Déterminer les fonctions primitives des fonctions $u(x) = \frac{5}{x^2+x+1}$

Remarque :

- ✓ Si le discriminant **Δ est strictement positif**, il faut factoriser $ax^2 + bx + c$ et on va faire appel à d'autre fonctions qu'on va voir par la suite.
- ✓ Si le discriminant Δ est nul : on utilise la forme $\frac{u'}{u^2}$ comme application : Déterminer les fonctions primitives de la fonction $f(x) = \frac{6}{4x^2+4x+1}$

Exercices :

Déterminer les fonctions primitives des fonctions :

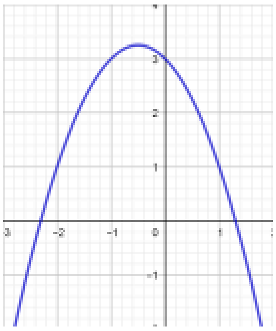
1. $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+1}$
2. $g(x) = \frac{sinx}{\sqrt[3]{2+cosx}}$
3. $k(x) = tan^2x$
4. $u(x) = cos^4 x$ (utiliser : $cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$)
5. $v(x) = sin^3 x$ (Remarquer que : $sin^3 x = sinx\, sin^2x$)

II) THEOREME DE ROLLE ; THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS (T.A.F)

1) Approche :

1.1 Activités

Activité 1 :



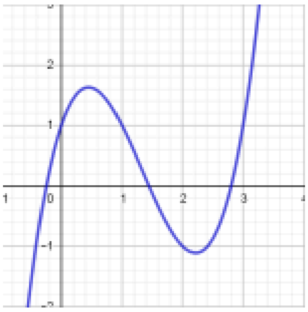
La courbe ci-contre est la courbe de la fonctions : $f(x) = -x^2 - x + 3$

1- Vérifier que $f(-2) = f(1)$.

2- Trouver le réel c dans $]-2,1[$ tel que $f'(c) = 0$

3- Interpréter géométriquement résultat.

Activité 2 :



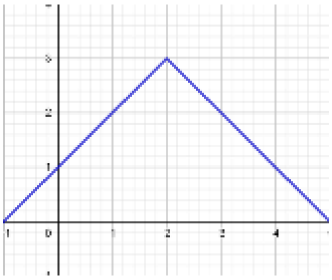
La courbe ci-contre est la courbe de la fonction $g(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

1- vérifier que : $g(0) = g(3)$.

2- Déterminer les réels c_1 et c_2 dans $]0,3[$ tels que $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$

3- Interpréter géométriquement résultat.

Activité 3 :



Dans la courbe ci-contre on a $f(0) = f(4)$

Quelle est la valeur logique de l'assertion :$(\exists c \in]0,4[)(f'(c) = 0)$?

2) Le théorème :

Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que : $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Preuve :

Puisque f est continue alors ils existent m et M dans $\mathbb{R}$ tels que : $f([a,b]) = [m,M]$, où $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

- Si $m = M$ alors f est constante sur $[a,b]$ d'où $(\forall x \in]a,b[)(f'(x) = 0)$
- Si $m \neq M$ (alors $m < M$) on a alors $f(a) > m$ ou $f(a) < M$.
    - Si $m < f(a)$ alors : il existe c dans $]a,b[$ tel que : $f(c) = m$

      $$(\forall x \in]a,c[)\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(x)-m}{x-c} \leq 0\right)$$

      et donc $\lim\limits_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_g(c) \leq 0$

      D'autre part :

      $$(\forall x \in]c,b[)\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(x)-m}{x-c} \geq 0\right)$$

      et donc $\lim\limits_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_d(c) \geq 0$

      et puisque f est dérivable en c alors $f'_d(c) = f'_g(c) = 0$
    - Si $f(a) < M$ même démonstration.

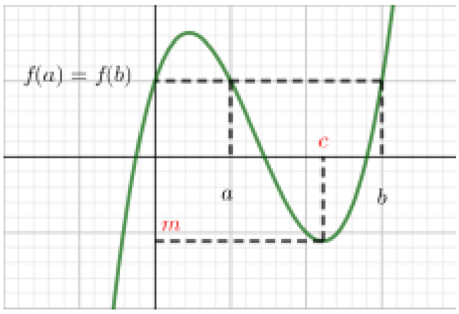


figure 1

Remarque :

- Il n'y a pas, a priori, unicité du point c tel que $f'(c) = 0$. *figure 1*
- La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$ nous donne un exemple de situation

  où f n'est pas dérivable au bord. *figure 2*

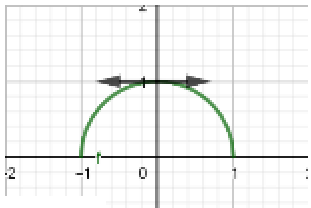


figure 2

- Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas dérivable sur $]a,b[$ tout entier comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$ *figure 3*

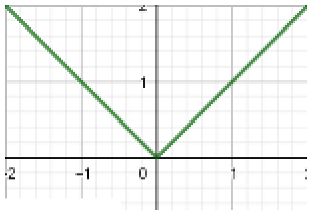


figure 3

3) Applications du théorème

Exercice 1 :

Soit P la fonction polynômiale définie par : $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$.

Montrer que P' s'annule au moins une fois sur $]0,1[$

Exercice 2 :

Soit $f : R \to R$ la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1+\cos^2 x}$,

Montrer que, pour tout $a \in R$, la fonctions f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

Exercice 3 :

Considérons une fonction f continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) - f(1) = -1$.

Montrer en utilisant le théorème de Rolle $(\exists c \in]0,1[)\left(\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2+1)^2}\right)$

Indication : $\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2+1)^2} \Leftrightarrow f'(c) - \frac{4c}{(c^2+1)^2} = 0$

Considérer $g(x) = f'(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ déterminer une fonction G fonction primitive de g et appliquer Rolle sur G.

Exercice 4 : *Détermination d'une limite.*

Considérons les deux fonctions : $u(t) = Arctan(t) - t$ et $v(t) = t^2$ et soit $x \in \mathbb{R}^*$

1- Montrer qu'il existe c compris entre 0 et x tel que : $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u\prime(c)}{v\prime(c)}$

2- En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Arctan(t)-t}{t^2}$

Indication : $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u\prime(c)}{v\prime(c)} \Leftrightarrow u(x).v'(c) - v(x).u'(t) = 0$

Considérer la fonction : $g(t) = u(x).v(t) - v(x).u(t)$ sur $[a,b]$ où $\begin{cases} a = \inf(x,0) \\ b = \sup(x,0) \end{cases}$

Exercice 5 : *Convergence d'une suite :*

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right)$.

1- En utilisant le T.A.F sur la fonction $f(x) = x\sqrt{x}$ sur les intervalles $[k, k+1]$; montrer que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(u_n - \frac{1}{n} \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{3n\sqrt{n}} \leq u_n - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

2- En déduire que $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

4) Inégalité des accroissements finies I.A.F :

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f **est dérivable sur *I*** et $(\forall x \in I)(|f'(x)| \leq k$ (où $k \in \mathbb{R}^{*+}$)

$(\forall (x,y) \in I^2)(|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|)$

Preuve :

Soient x et y deux éléments de I

Si $x \neq y$

On a f est continue sur l'intervalle fermé de borne x et y et dérivable sur l'ouvert de borne x et y.

Donc, et d'après le T. A.F , il existe c compris entre x et y tel que : $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$ et puisque $c \in I$ alors :$|f'(c)| \leq k$; donc :

$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| \leq k|x-y|$

Si $x = y$ l'inégalité est vraie.

D'où la preuve du théorème.

Exercice

En utilisant le I.A.F, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(|sinx| \leq |x|$

Applique le I.A.F sur l'intervalle de borne 0 et

Applique le I.A.F sur l'intervalle de borne 0 et .

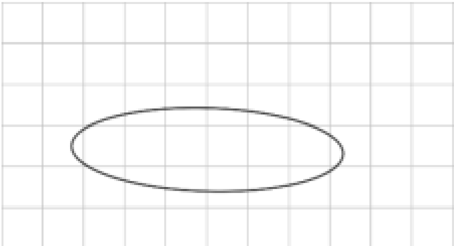
CALCULS INTEGRALES

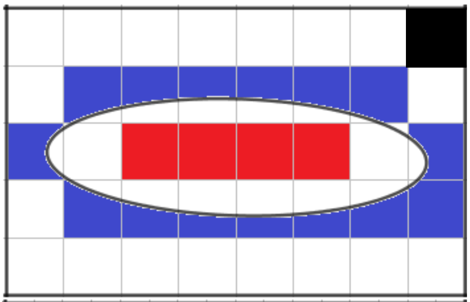
I) INTEGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE.

1) Approche :

1.1 Les ensembles quarrable

On veut encadrer la surface S d'une ellipse, pour cela en va utiliser plusieurs niveaux quadrillage :

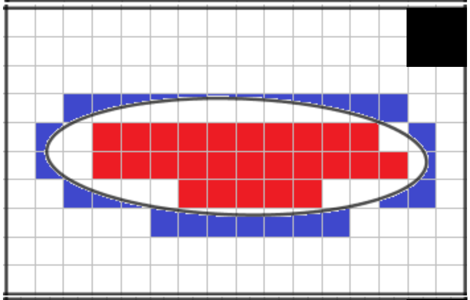




La surface d'un carré $=$ une unité de surface

$4 \leq S \leq 21$

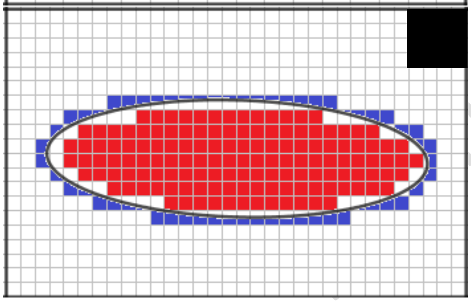
Un encadrement de S d'amplitude $21 - 4 = 17$



La surface d'un carré $= \frac{\text{une unité de surface}}{2^2}$

$\frac{26}{4} \leq S \leq \frac{60}{4}$

Un encadrement de S d'amplitude $\frac{60}{4} - \frac{26}{4} = \frac{17}{2}$



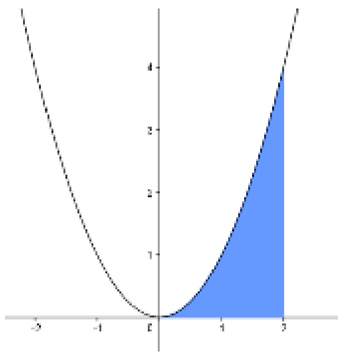
La surface d'un carré $= \frac{\text{une unité de surface}}{2^4}$

$\frac{138}{16} \leq S \leq \frac{209}{16}$

Un encadrement de S d'amplitude $\frac{209}{16} - \frac{138}{16} = \frac{71}{16}$

On peut continuer ainsi (tant qu'on a la patience), et à chaque fois on s'approche de la surface S. Théoriquement on obtient la surface S lorsque on divise l'unité de surface par 2^{2n} et on fait tendre n vers l'infinie dans ce cas l'amplitude de l'encadrement tend vers 0.

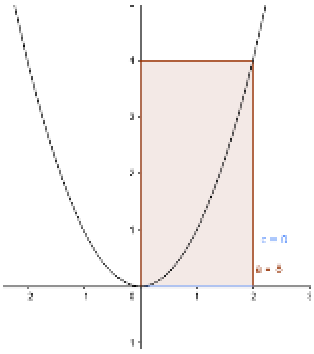
1.2 Calcul d'une aire sous une parabole



On veut encadrer l'aire du domaine (en bleu dans la figure) limité par : l'axe des abscisses les droites $(\Delta_1): x = 0$; $(\Delta_2): x = 2$ et la courbe (C_f) où $f(x) = x^2$. Pour cela on subdivise le segment $[0,2]$ selon des segments de même longueur.

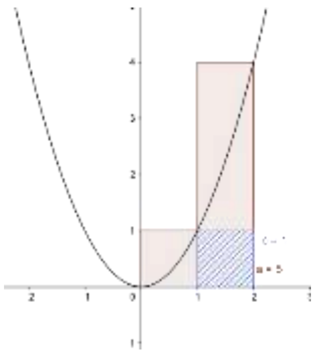
Soient s_n l'aire des rectangles contenus dans le domaine $\mathcal{A}$ et S_n l'aire des rectangles qui contient dans le domaine $\mathcal{A}$

Pour $n = 1$



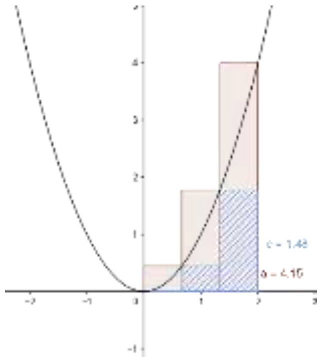
$s_1 = 0 \leq \mathcal{A} \leq S_1 = 8$
Amplitude $\delta_1 = S_1 - s_1 = 8$

Pour $n = 2$



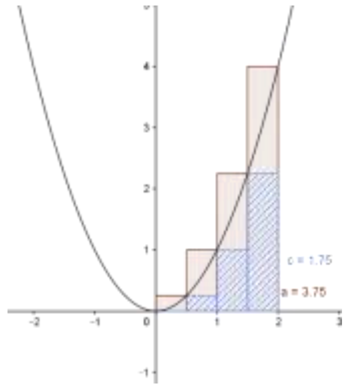
$s_2 = 1 \leq \mathcal{A} \leq S_2 = 5$
Amplitude $\delta_2 = S_2 - s_2 = 4$

Pour $n = 3$



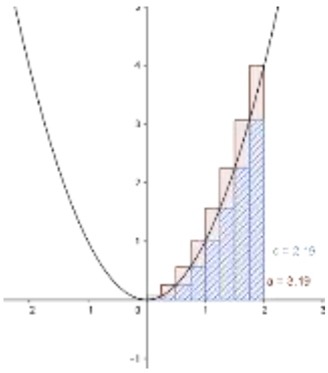
$s_3 = 1.48 \leq \mathcal{A} \leq S_3 = 4.15$
Amplitude $\delta_3 = S_3 - s_3 = 2.67$

Pour $n = 4$



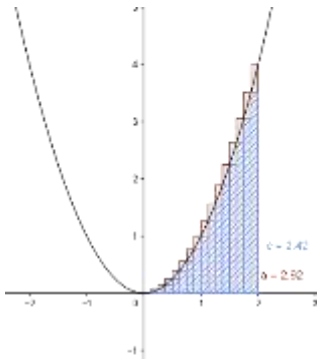
$s_4 = 1.75 \leq \mathcal{A} \leq S_4 = 3.75$
Amplitude $\delta_4 = S_4 - s_4 = 2$

Pour $n = 8$



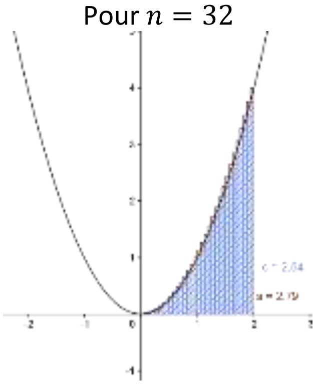
$s_8 = 2.19 \leq \mathcal{A} \leq S_8 = 3.19$
$\delta_8 = S_8 - s_8 = 1$

Pour $n = 16$



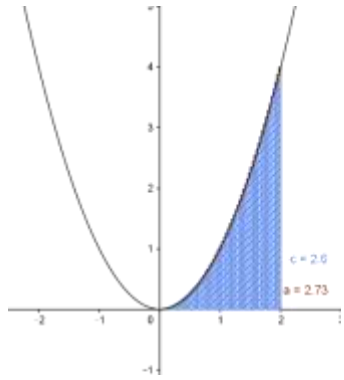
$s_{16} = 2.42 \leq \mathcal{A} \leq S_{16} = 2.92$
$\delta_{16} = S_{16} - s_{16} = 0.5$

Pour $n = 32$



$s_{32} = 2.54 \leq \mathcal{A} \leq S_{32} = 2.79$
$\delta_{32} = S_{32} - s_{32} = 0.27$

Pour $n = 64$



$s_{64} = 2.6 \leq \mathcal{A} \leq S_{64} = 2.73$
$\delta_{64} = S_{64} - s_{64} = 0.13$

Théoriquement ; lorsque on prend des valeurs "assez grand " de n la suite s_n tend vers S_n et si on fait tendre n vers l'infini on obtint la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Activité :

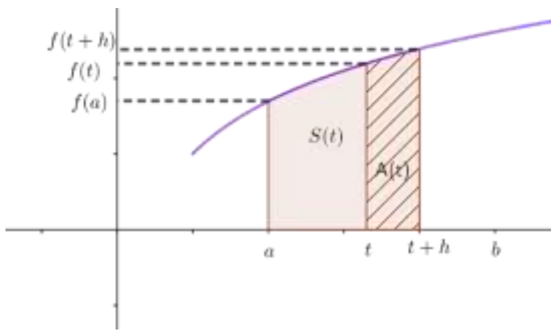
1- Exprimer s_n et S_n en fonction de n.

2- a) Démontrer que pour $n \geq 1$ on a : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) En déduire les limite de S_n et s_n $(n \to +\infty)$ puis en déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

3- Déterminer une fonction primitive F de la fonction $f(x) = x^2$ puis calculer $F(2) - F(0)$ que remarquez-vous ?

1.3 Intégral et primitive.



Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $t \in [a, b]$, on suppose dans cette étude que f est strictement croissante.

- Considérons $S(t)$ l'aire du domaine défini par :

L'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites $x = a$ et $x = t$

- Considérons $A(t)$ l'aire du domaine défini par :

L'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites $x = t$ et $x = t + h$

On voit bien que $S(a) = 0$ et que $S(b)$ est l'aire du domaine définie par : L'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites $x = a$ et $x = b$

On a $A(t) = S(t + h) - S(t)$

D'autre par :

- L'aire du plus grand rectangle contenu dans la surface $A(t)$ est $h \times f(t)$
- L'aire du plus petit rectangle qui contient la surface $A(t)$ est $h \times f(t+h)$

Et de ce fait on a : $h \times f(t) \leq A(t) \leq h \times f(t+h)$

D'où :

$$f(t) \leq \frac{A(t)}{h} \leq f(t+h) \text{ ce qui est équivalent à : } f(t) \leq \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leq f(t+h)$$

Et comme f est continue sur $[a,b]$ alors :$\lim\limits_{h\to 0} f(t+h) = f(t)$

Donc :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} = f(t)$$

De même on montre que :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} = f(t)$$

Et finalement on peut conclure que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} = f(t)$$

Et cela signifie que la fonction $t \mapsto S(t)$ est dérivable sur $[a,b]$ et que $(\forall t \in [a,b])(S'(t) = f(t))$

Donc S est une fonction primitive de f sur l'intervalle $[a,b]$.

2) Définition et interprétation géométrique.

2.1 Définition

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I ; et F une fonction primitive de f sur I. Le nombre $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$ s'appelle **l'intégrale de la fonction $\boldsymbol{f}$ entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$** on écrit :

$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ on lit **somme $\boldsymbol{f(t)}$ $\boldsymbol{d(t)}$ de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$**

Le réel a s'appelle la borne inférieure de l'intégrale et le réel b s'appelle la borne supérieure de l'intégrale.

Remarque :

❶Dans l'écriture : $\int_a^b f(t)\,dt$ la variable t s'appelle une variable **muette,** on peut le changer par n'importe qu'elle variable tant qu'elle ne figure pas dans l'une des deux bornes.

$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = \cdots = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

❷ Si F_1 et F_2 sont deux fonctions primitive de f sur I alors :$(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + C\ )$ $(C\ constante\ )$

Et on aura : $F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + C) - (F_1(a) - C) = F_1(b) - F_1(a)$ donc pour le calcul d'une intégrale, on prend $C = 0$.

Propriété :

Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$ c'est-à-dire $\int_a^b f(t)\,dt$ existe et finie.

2.2 L'interprétation géométrique de l'intégrale.

Propriété :

Soit f une fonction continue, strictement monotone et positive sur $[a,b]$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonale $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'aire du domaine limité par : L'axe des abscisses, la courbe C_f et les droite $x = a$ et $x = b$ est $\mathcal{A} = \int_a^b f(t)\,dt\ \ (u.m.s)$

$(u.m.s)$ unité de mesure des surface égale à $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

3) Règles de calculs

Propriété :

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c trois éléments de I et α un réel, on a :

- $\int_a^a f(t)\,dt = 0$
- $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$
- $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$
- $\int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt$
- $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$ (Relation de Chasles)

Preuve : (En exercice)

Généralisation :

- Soient $(f_i)_{1\le i\le n}$ une famille de fonctions contenues sur $[a, b]$ on a :

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)dt\right) = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(t)\,dt$$

- Soit f une fonction continue sur les intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ $k \in \{1,2, \dots, n\}$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx$$

II) TECHNIQUES DE CALCULS D'UNE INTEGRALE.

1) L'utilisation directe des fonctions primitives :

1.1 Rappelle

Tableau des fonctions primitives usuelles

La fonction	Sa fonction primitive	Intervalles
$\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$	$\mathbb{R}^+$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^+$
$x^r \quad (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$	$\mathbb{R}^{*+}$
$sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}cos(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}sin(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$ln(x)$	$]0, \infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions primitives.

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'\sqrt[n]{u} \ \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1} \ \sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'ou$	$vou + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$arctan(u) + C$
$\frac{u'}{u}$	$ln(\|u\|)$
$u'e^u$	e^u

1.2 Applications :

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-1}^{1} 3x(2x^2+3)^3\, dx$ $\qquad I_2 = \int_1^e \frac{1}{xln^4(x)}dx$ $\qquad I_3 = \int_0^1 x^2\sqrt[3]{x}\, dx$

$I_4 = \int_{-1}^{1} |3x^2 - x|\, dx$ $\qquad I_5 = \int_{-1}^{1} x\sqrt[3]{x+1}\, dx$ $\qquad I_6 = \int_0^1 \frac{x^3+3}{x+1}dx$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

$J_1 = \int_1^{ln2} \frac{e^x}{1+e^x}dx$ $\qquad J_2 = \int_1^{ln2} \frac{1}{1+e^x}dx$ $\qquad J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tanx)^4\, dx$

$J_4 = \int_0^1 x\sqrt[3]{2x+1}\, dx$ $\qquad J_5 = \int_1^{ln2} \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}}dx$

Exercice 3 :

Considérons les intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos^4 x)dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin^4 x)dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos^2 x\, sin^2 x)dx$

1- Calculer $I - J$; $I + J + 2K$ et $I + J - 2K$

2- En déduire les valeurs de I, J et K.

2) Intégration par partie :

Introduction :

Considérons l'intégrale $I = \int_1^e x\, ln(x)\ dx$; on ne peut pas trouver une fonction primitive usuelle de la fonction $x \mapsto x\, ln(x)$ donc on ne peut pas calculer I en se basant directement sur le tableau des fonctions usuelles.

Preuve : (d'une propriété)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I.

On sait que $(\forall x \in I)(\ (u\,.v)'(x) = u'(x).v(x) + v'(x).u(x)$

Par suite : $(\forall x \in I)(u'(x).v(x) = \ (u\,.v)'(x) - v'(x).u(x)$

En passant à l'intégrale :

$$\int_a^b u'(x).v(x)\,dx = \int_a^b (u\,.v)'(x)\,dx - \int_a^b v'(x).u(x)$$

Or $u.v$ est une fonction primitive de $(u.v)'$ donc :

$$\int_a^b u'(x).v(x)\,dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x).u(x)$$

Cette égalité porte le nom d'une **intégration par partie**

Propriété :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I on a :

$$\int_a^b u'(x).v(x)\,dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x).u(x)$$

Exemple :

On se propose de calculer $I = \int_1^e x\,ln(x)\ dx$

On pose $\begin{cases} v(x) = \ln(x) \\ u'(x) = x \end{cases}$ donc $\begin{cases} v'(x) = \frac{1}{x} \\ u(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$$I = \int_1^e x\,ln(x)\ dx = \left[\frac{1}{2}x^2\times ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2.\frac{1}{x}\right)\,dx$$

$$I = \int_1^e x\,ln(x)\ dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}[x^2]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{e^2+1}{4}$$

Remarque :

Pour le choix des fonctions on utilise $A.L.P.E.T$

A: Arctangente L: logarithme P: polynôme E: exponentielle T: fonctions trigonométrique

Exercice :

En utilisant une intégration par partie calculer :

① $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{e^x}\ dx$ ② $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2 sinx)dx$ ③$I_3 = \int_1^e (xlnx)dx$ ④ $\int_0^1 xArctanx\ dx$

⑤$I_5 = \int_1^e \cos(lnx)\,dx$

3) Intégration par changement de variable :

Propriété :

Soient g une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que g' continue sur $[a,b]$ et f une fonction continue sur $g([a,b])$ on a :

$$\int_a^b (fog)(t).g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

Cette propriété s'appelle **propriété du changement de variable.**

Preuve :

Soit F une fonction primitive de la fonction f sur $g([a,b])$ on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (fog)(t).g'(t)dt &= \int_a^b (F'og)(t)g'(t)dt \\ &= \int_a^b (Fog)'(t)\,dt \\ &= [(Fog)(t)]_a^b \\ &= F\big(g(b)\big) - F(g(a)) \\ &= [F(x)]_{g(a)}^{g(b)}\end{aligned}$$

$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$

Exemples.

❶Calculer : $I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ poser : $x = \sqrt{t}$

On a : $x = \sqrt{t}$ donc $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = 1 \\ t = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{cases}$ et $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ on en déduit que : $dt = 2x\,dx$

Donc : $I_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x\,dx}{(1+x^2)x} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2}\,dx = [2Arctanx]_1^{\sqrt{3}} = 2Arctan(\sqrt{3}) - 2Arctan(1) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

❷ Calculer : $I_2 = \int_0^{ln2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ poser : $t = e^x$

On a : $t = e^x$ donc $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = ln2 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$ et $dt = e^x\,dx$ on en déduit que : $dx = \frac{dt}{t}$

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^{ln2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}\,dx &= \int_1^2 \frac{t^3+t^2+3t}{1+t^2} \times \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^2 \frac{t^2+t+3}{1+t^2}\,dt \\ &= \int_1^2 \left(t + \frac{3}{1+t^2}\right)dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + 3Arctant\right]_1^2 \end{aligned}$$
(Continuer les calculs)

Exercice :

En utilisant les changements de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ poser : $t = \sqrt{x}$

$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$ poser : $t = 2 + \sqrt{x}$

$I_3 = \int_{-1}^{-2} \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}\,dx$ poser : $t = \frac{1}{x}$

$I_4 = \int_4^5 \sqrt{x^3 - 12x - 16}\,dx$ poser : $t = \sqrt{x-4}$

$I_5 = \int_0^{ln2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ poser : $t = e^x$

$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{sin^2x+2cos^2x}\,dx$ poser : $t = cosx$

$I_7 = \int_0^1 Arctan\sqrt[3]{x}\,dx$ poser : $t = \sqrt[3]{x}$

$I_8 = \int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{x^2 lnx\,dx}{(1+x^3)^3}$ poser : $t = 1 + x^3$

III) ORDRE ET INTEGRATION

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que : $a < b$. Si f est positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx$ est positif

Preuve :

Soit F une fonction primitive de la fonction f sur I. on a : $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Et comme $f(x) = F'(x)$ est positive alors F est croissante et par suite $(a < b)$ $F(b) - F(a) \geq 0$

Corollaire :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que : $a < b$.
Si $f \geq g$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Preuve :

On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ et on applique la propriété précédente

Exercice :

On pose $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3}\,dx$ Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$; $I_n = \int_0^1 x^n\,\sqrt{3+x}\,dx$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat, montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ on a : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Preuve :

On a $(\forall x \in [a,b])(-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|)$ on passant à l'intégrale on en déduit :

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Et par suite :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Exercice :

On définie la suite (u_n) par : $(\forall n \in \mathbb{N})\left(u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx\right)$

1- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0,1])\ \left(\frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}\right)$

2- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{e^n}\right)$

IV) DERIVATION DE $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

1) La fonction primitive d'une fonction continue sur I et qui s'annule en a

Considérons une fonction f continue sur I et $a \in I$. Soit F la fonction primitive de f sur I et qui s'annule en a on a :
$(\forall t \in I)(F'(t) = f(t))$ et par suite $\int_a^x F'(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$ et par suite :
$\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a) = F(x) \quad (F(a) = 0)$

Propriété :

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$; la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la fonction primitive de la fonction f qui s'annule en a.
La fonction F est dérivable sur I et $(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$

Exemple :

On veut déterminer la fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e.

La fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e est $F(x) = \int_e^x lnt\,dt$

On va procéder par une I.P.P

$$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = lnt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_e^x lnt\,dt &= [tlnt]_e^x - \int_e^x t \times \frac{1}{t}\,dt \\ &= xlnx - x - [t]_e^x \\ &= x\,lnx - x - x + e \\ &= x\,lx - 2x + e \end{aligned}$$

La fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e est $F(x) = x\,lx - 2x + e$

Dérivée de la fonction $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

Preuve : d'une propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle J, u et v deux fonctions définie, dérivable sur I telles que $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$. On définit sur I la fonction : $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$; Montrons que F est dérivable sur I et déterminons sa fonction dérivée.

Soit φ une fonction primitive de f sur J on a : φ est dérivable sur J et $(\forall x \in J)(\varphi'(x) = f(x))$. d'autre part :

$$\begin{aligned} F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt &= [\varphi(t)]_{u(x)}^{v(x)} \\ &= \varphi(v(x)) - \varphi(u(x)) \\ &= (\varphi o v)(x) - (\varphi o u)(x) \end{aligned}$$

La fonction $(\varphi o v)$ et $(\varphi o u)$ sont dérivables sur I car φ est dérivable sur J et u et v sont dérivable sur I et $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$ et :

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\varphi o v)'(x) - (\varphi o u)'(x) \\ &= v'(x) \times \varphi'(v(x)) - u'(x) \times \varphi'(u(x)) \\ &= v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x)) \end{aligned}$$

Propriété :

> Soit f une fonction continue sur un intervalle J, u et v deux fonctions définie, dérivable sur I telles que $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$. La fonction $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I et :
> $$(\forall x \in I)(F'(x) = v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x))$$

Exemple :

$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{lnx} e^{-t^2}\, dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto lnx$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$ et la fonction $f: t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ soit φ une fonction primitive de f.

On a: $$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(F(x) &= [\varphi(t)]_{\frac{1}{x}}^{lnx}) \\ &= \varphi(lnx) - \varphi\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(F'(x) &= (ln'(x)\varphi'(lnx) - \left(\frac{1}{x}\right)' \varphi'\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \varphi' = f \\ &= \frac{1}{x}\, e^{-ln^2 x} + \frac{1}{x^2} e^{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} \end{aligned}$$

Exercice :

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $(\forall t \in]0, +\infty[\,)\ \left(f(t) = e^{\frac{1}{lnt}}\right)$

1- Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

2- Considérons la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)$.

  a) Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[\,)(f(x+1) \leq F(x) \leq f(x))$

  b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

3- a) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[)(e^t \geq t + 1)$

  b) En déduire que : $(\forall x > 1)(F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{lnt} dt$

4- a) Montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[)(lnt \leq t - 1)$

  b) En déduire que $(\forall x > 1)(F(x) - 1 \geq ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

  c) En déduire $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$

5- Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 1$

6- Dresser la tableau de variation de la fonction F

7- Construire la courbe C_F.

V) LA VALEUR MOYENNE ET THEOREME DE LA MEDIANE

Théorème et définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.
Il existe au moins un élément c de $]a, b[$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ s'appelle **la valeur moyenne de la fonction f entre a et b.**

Preuve :

On a : f est continue sur $[a, b]$ donc $\exists(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que $m \leq f(x) \leq M$ en passant à l'intégrale :

$$\int_a^b m\,dt \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dt$$

d'où :

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

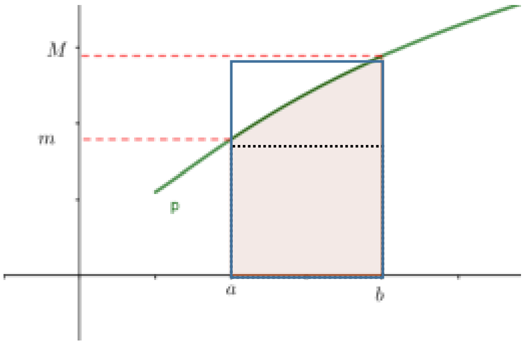
Finalement :

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

Donc et d'après le T.V.I Il existe au moins un élément c de $]a, b[$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Interprétation géométrique :

Si f est positive alors : $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)dx$ qui est la surface (en rose dans la figure) du domaine limité par : $x = a$; $x = b$; (Ox) et C_f
est **contenue** dans le rectangle de dimension M et $(b-a)$ et **contient** le rectangle de dimension m et $(b-a)$.



Exercice :

Considérons la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(0) = 0$ et $(\forall x > 0)\left(F(x) = \int_x^{4x} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt\right.$

1- a) Montrer que $(\forall x > 0)(\exists c \in]x, 4x[)\ \left(F(x) = 3x\,\frac{e^{-c}}{\sqrt{c}}\right)$

b) En déduire que : $(\forall x > 0)\ \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\,e^{-4x} \leq F(x) \leq 3\sqrt{x}\,e^{-x}\right)$

c) Calculer les limites $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} F(x)$

d) Calculer : $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x}$.que pouvez-vous en déduire ?

2- a) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$

b) Dresser la tableau de variation de F.

c) Construire la courbe C_F

VI) SOMMES DE RIEMANN

Théorème définition :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
On pose : $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$ et $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$
Les sommes s_n et S_n s'appelle **les somme de Riemann.**
Les suites $(s_n)_n$ et $(S_n)_n$ sont convergentes et :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve :

On suppose que f est positive.

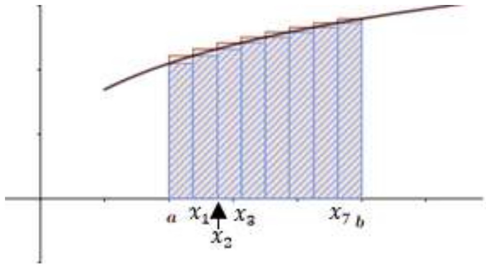
On pose : $\begin{cases} x_0 = a \text{ et } x_n = b \\ x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \end{cases}$

On a :

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= \frac{b-a}{n} \\ x_2 - x_3 &= \frac{b-a}{n} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ x_k - x_{k-1} &= \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

En faisant la somme

$$x_k - x_0 = k\left(\frac{b-a}{n}\right)$$



Dans la figure ci-dessus :
$s_8 = \frac{b-a}{8}\sum_{k=0}^{7} f\left(a+\frac{k}{8}(b-a)\right)$
$S_8 = \frac{b-a}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(a+\frac{k}{8}(b-a)\right)$

Or $x_0 = a$

Donc : $x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$

- s_n est la somme des rectangles **contenus** le domaine $(\mathcal{D})$ la largeur de chaque rectangle est $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ et sa longueur est $f(x_k) = f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$ où $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

  L'air de chaque rectangle est $a_k = \left(\frac{b-a}{n}\right) f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$donc :

  $$s_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\right) f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$$

- S_n est la somme des rectangles **qui contient** le domaine $(\mathcal{D})$ la largeur de chaque rectangle est $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ et sa longueur est $f(x_k) = f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$ où $k \in \{1,2,\dots,n\}$

  L'air de chaque rectangle est $\mathcal{A}_k = \left(\frac{b-a}{n}\right) f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$donc donc :

  $$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$$

On a $S_n - s_n = \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(x_n) - f(x_0))$ (Tous les termes vont se simplifier sauf le premier et le dernier)

Or $x_n = b$ et $x_0 = a$: donc : $S_n - s_n = \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b) - f(a))$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - s_n) = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$

Finalement et puisque : l'aire du domaine $(\mathcal{D})$ est $\int_a^b f(x)dx$ (f positive)

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple :

1- En utilisant les somme de Riemann calculons :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

Pour cet exemple il faut faire apparaitre les bornes (a et b) puis l'expression de la fonction f:
Si on factorise par n à l'intérieur de la somme on aura :

$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)$ et d'après cette expression on conclut que : $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ f(x)=\frac{1}{1+x^2}\end{cases}$

On aura : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

$= [Arctanx]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

Exemple 2 :

Calculons : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+n}$

On pose (changement d'indice) $j = k-n$ on obtient : $\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+2n}$ $\quad (n+k = n+j+n = 2n+j)$

Donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+2n}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{j}{n}\right)+2}$ de l'expression on peut remarquer que : $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ f(x)=\frac{1}{2+x}\end{cases}$

$= \int_0^1 \frac{1}{2+x}dx$

$= [ln(2+x)]_0^1 = ln\left(\frac{3}{2}\right).$

Remarque : Dans le calcul de la $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{j}{n}\right)+2}$ est aussi somme de Riemann de la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[2,3]$ car : $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{j}{n}\right)+2} = \frac{3-2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\left(j\frac{(3-2)}{n}\right)}$ et :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3-2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\left(j\frac{(3-2)}{n}\right)} = \int_2^3\frac{1}{x}dx = ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Exercices :

❶Calculer les limites des sommes suivantes :

$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n\sqrt{4n^2-k^2}}$

$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2+k^2}$

❷

1- Calculer en utilisant un intégration par partie :$\int_0^1 ln(1+x^2)dx$

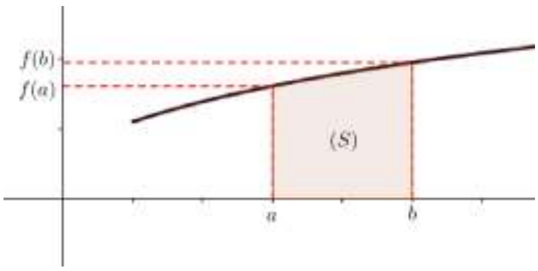
2-En déduire la limite de la suite : $u_n = \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$ (Introduire ln dans l'expression de u_n)

VII) INTEGRALE ET SURFACE.

Dans tout ce qui va suivre : C_f est la courbe représentative de la fonction f sur $[a,b]$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$; S est la surface du domaine limité par :C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x=a$ et $x=b$ et $u^2 = \|\vec{\imath}\|\|\vec{\jmath}\|$

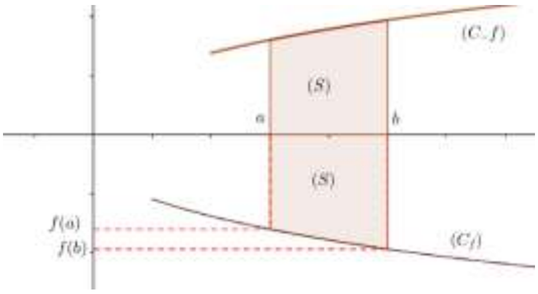
Rappel :

$\boxed{\text{Si } f \text{ est continue positive sur } [a,b] \text{ alors } S = \int_a^b f(x)dx\ \ u^2}$



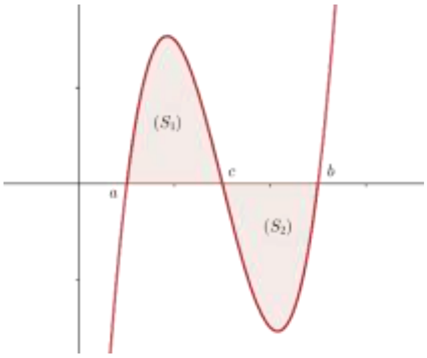
Propriété :

Si f est continue **négative** sur $[a,b]$ alors $S = \int_a^b -f(x)dx \quad u^2$



Propriété :

Si f est continue sur $[a,b]$ alors $S = \int_a^b |f(x)| \; dx \;\; u^2$

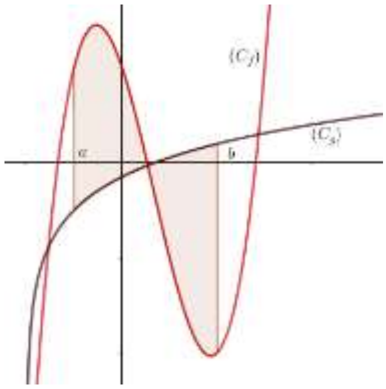


Preuve :

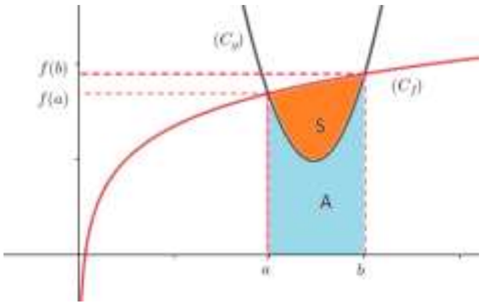
Il suffit de déterminer les racines de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a,b]$ et d'appliquer les deux propriétés précédentes et la relation de Chasles.

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et soit S la surface du domaine limité par C_f ; C_g et les droites $x = a$; $x = b$ on a :
$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$



Preuve :



Il suffit d'étudier les cas :
Par exemple si $f \geq 0$ et $g \geq 0$ et $f \geq g$ sur $[a,b]$
On aura :
$S = \int_a^b f(t)dt - A = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$
Et de la même façon on étudie les autres cas.

Exercice :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{xe^x+x+1}{e^x+1}$

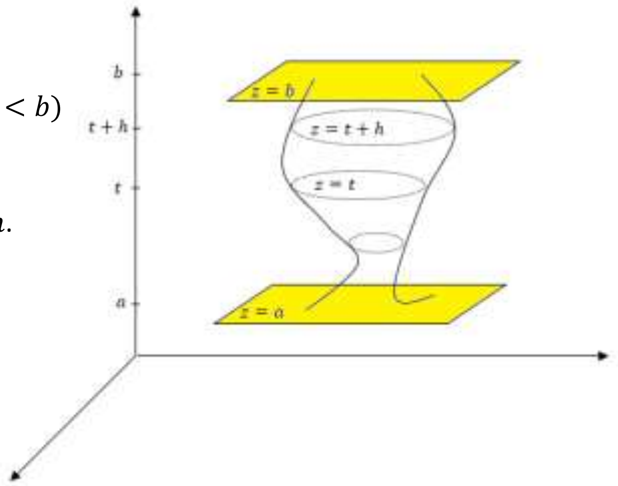
1- Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.

2- Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droite $x = 0$ et $x = 1$.

3- Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite (Δ) $y = x$; la courbe C_f et les droite $x = 0$ et $x = 1$.

VIII) INTEGRALE ET CALCUL DES VOLUMES

1) Volume d'un solide



L'espace est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$
On considère un solide $\mathcal{S}$ compris entre les plan $z = a$ et $z = b$ $(a < b)$
Soit t un élément de $[a,b]$ et $h > 0$ tel que $t + h \in [a,b]$
Soit $S(t)$ la surface de l'intersection du solide $\mathcal{S}$ et du plan $z = t$.
$v(t)$ le volume du solide compris entre les plans $z = t$ et $z = t + h$.
$V(t)$ le volume du solide compris entre les plans $z = a$ et $z = t$.
Remarquez que $V(t + h) - V(t) = v(t)$
D'autre part : (pour $h > 0$)

$$h \times S(t) \leq v(t) \leq h \times S(t + h)$$

Donc :

$$S(t) \leq \frac{v(t)}{h} \leq S(t + h)$$

Et donc :

$$S(t) \leq \frac{V(t+h)-V(t)}{h} \leq S(t + h)$$

Et comme la fonction $t \mapsto S(t)$ et continue sur $[a,b]$ alors : $\lim\limits_{h\to 0^+} S(t + h) = S(t)$ On aura donc :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{V(t+h)-V(t)}{h} = S(t)$$

De la même façon on montre que : $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{V(t+h)-V(t)}{h} = S(t)$

Donc :

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{V(t+h)-V(t)}{h} = S(t)$ et donc $t \mapsto V(t)$ est dérivable sur $[a,b]$ et $(\forall t \in [a,b])(V'(t) = S(t))$ et par suite :

$$\int_a^b V'(t)dt = \int_a^b S(t)dt$$

Ce qui signifie que :

$$\int_a^b S(t)dt = [V(t)]_a^b = V(b) - V(a)$$

Et comme $V(a) = 0$ et $V(b) = V_{\mathcal{S}}$ le volume du solide, alors :

$$V_{\mathcal{S}} = \int_a^b S(t)dt$$

Propriété :

Soit $\mathcal{S}$ un solide compris entre les plans $Z = a$ et $z = b$ e volume par unité de volume du solide $\mathcal{S}$ est

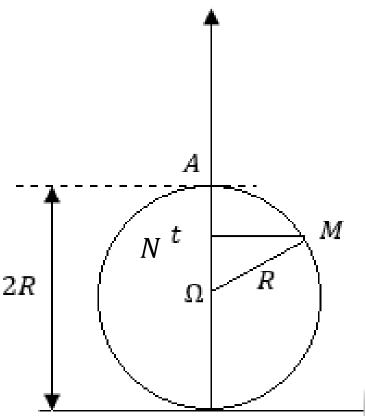
$$V_{\mathcal{S}} = \int_a^b S(t)dt$$

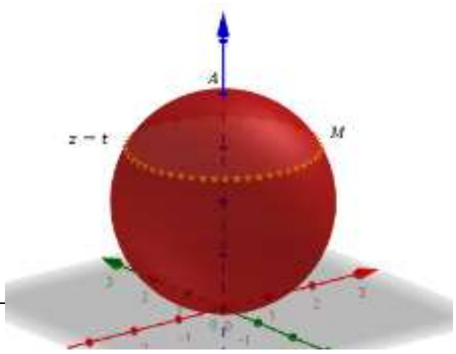
Où $S(t)$ est la surface de l'intersection du solide $\mathcal{S}$ et du plan $z = t$

Applications

❶ Volume d'une sphère :

Soit S la sphère de centre Ω et de rayon R
Après découpage de la sphère (suivant le plan $x = 0$)
on obtient la figure suivante :
Le plan $z = t$ coupe la sphère suivant un cercle
de rayon r
D'après le théorème de Pythagore dans le
triangle ΩMN on a :





$$MN^2 = R^2 - \Omega N^2 \quad \text{donc} \quad r^2 = R^2 - (t - R)^2$$
$$= 2tR - t^2$$

D'où $s(t) = \pi r^2 = 2\pi tR - \pi t^2$
et le volume de la sphère S est :

$$V = \int_0^{2R} s(t)dt = \int_0^{2R} (2\pi tR - \pi t^2)dt$$
$$= \left[\pi t^2 R - \frac{1}{3}\pi t^3\right]_0^{2R}$$
$$= \frac{4}{3}\pi R^2$$

Remarque :

On pouvait prendre $\Omega = O$ le centre du repère et le volume de la sphère sera : $V = \int_{-R}^{R} s(t)dt = \int_{-R}^{R} (R^2 - t^2)dt$ et on trouvera le même résultat.

❷ Volume d'un cône

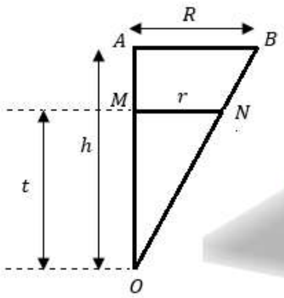
Soit $(\mathcal{C})$ le cône de rayon R et de hauteur h

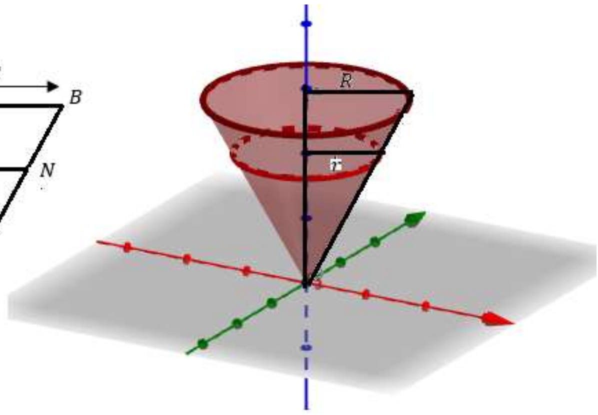
$z = t$ coupe le cône $(\mathcal{C})$ suivant un cercle $\Gamma(t)$ de rayon r

1- En utilisant le théorème de Thalès, déterminer r en fonction de h, R et t

2- Déterminer la surface $S(t)$ de $\Gamma(t)$

3- Calculer le volume du cône $(\mathcal{C})$





2) Volume d'un solide engendré par la rotation d'une courbe

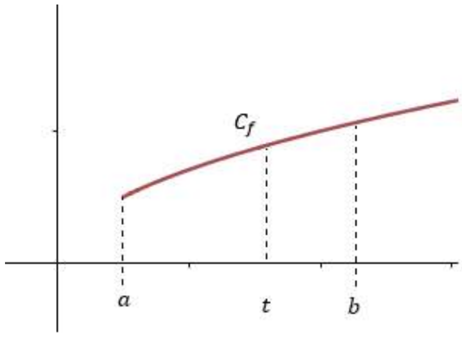
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$

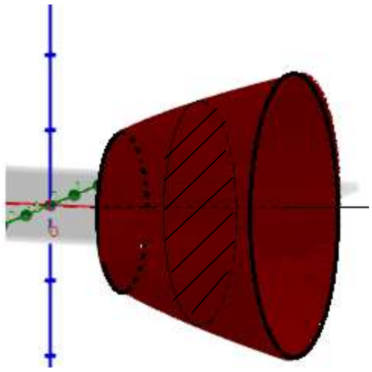
La rotation de la courbe C_f engendre un solide $(\mathcal{S})$.

Le plan $x = t$ coupe le solide $(\mathcal{S})$ suivant un cercle de rayon $f(t)$ donc $s(t) = \pi(f(t))^2$

Et le volume du solide $(\mathcal{S})$ est

$V = \int_a^b \pi(f(t))^2 \ dt$





Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses engendre un solide de volume (par unité de volume)

$V = \int_a^b \pi(f(t))^2 \ dt$

Exemple :

$f(x) = \sqrt{x}$

La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 1$ et $b = 3$ engendre un solide de volume (par unité de volume)

$$V = \int_1^3 \pi\left(\sqrt{t}\right)^2 \ dt = \int_1^3 \pi t \ dt$$
$$= \frac{1}{2}[\pi t^2]_1^3$$
$$= 4\pi \ u^3 \qquad (u^3 \text{ unité de volume})$$

NOMBRES COMPLEXES

Partie 1

I) L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

1) Approche historique :

L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du XVIe siècle avec une première apparition en 1545, dans l'œuvre deCardan, d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appelle *sophistiqué*. C'est Raphaël Bombelli qui met en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appelle alors *impossibles* avant de leur donner le nom d'imaginaires.

Durant trois siècles, ces *nombres* sont regardés avec méfiance, n'en étant pas vraiment mais permettant des raccourcis intéressants tant en algèbre que dans la toute nouvelle branche du calcul infinitésimal. Les mathématiciens du XVIIIe siècle tentent avec audace de généraliser les fonctions de la variable réelle à la variable imaginaire, tantôt avec succès, comme pour l'exponentielle complexe, tantôt avec plus d'aléas, comme pour la fonction racine *n*-ième ou la fonction logarithme complexe.

Durant la première moitié du XIXe siècle se succèdent les tentatives de légitimation des nombres complexes comme représentation du plan, ensemble de polynômes ou structure algébrique définie sur des couples de réels. Cependant leur utilité dans tous les domaines de l'algèbre et l'analyse et l'utilisation qu'en font les physiciens, tant en optique que dans le domaine de l'électricité, en avaient déjà fait des outils essentiels des sciences mathématiques et physiques.

fr.wikipedia.org

2) Définition d'un nombre complexe.

2.1 L'ensemble $\mathbb{C}$

On admet qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ ses éléments s'appelles **des nombres complexes** qui vérifie :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- On définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux opérations appelées la somme et le produit et qui prolonge la somme et le produit dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un nombre non réel noté i et qui vérifie $\boldsymbol{i^2 = -1}$
- Tout nombre complexe z s'écrit et de façon unique comme : $\boldsymbol{z = a + ib}$ où a et b sont des réels
  - Le réel a s'appelle **la partie réel** du nombre complexe z ; on écrit : $\boldsymbol{a = Re(z)}$
  - Le réel a s'appelle **la partie imaginaire** du nombre complexe z ; on écrit : $\boldsymbol{b = Im(z)}$
  - L'écriture : $\boldsymbol{z = a + ib}$ s'appelle **l'écriture algébrique du nombre complexe z .**

2.2 Relations algébriques

- $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $a + ib = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$

2.3 Remarque :

- L'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonné, c'est-à-dire : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)(x \leq y \ ou\ y \leq x\ )$
- L'ensemble des nombres complexe n'est pas ordonné.

2.3 Des sous-ensembles de $\mathbb{C}$

- L'ensemble $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels est une partie de $\mathbb{C}$; $(\forall x \in \mathbb{R})(x = x + 0i)$
  $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$
- L'ensemble $i\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$, s'appelle **L'ensemble des imaginaires purs ;** $\boldsymbol{i\mathbb{R} = \{iy/\ \ y \in \mathbb{R}\}}$
  $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$
- $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ $\quad \mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ $\quad$ ($\subsetneq$ veut dire strictement inclus strictement $2 + 3i \notin \mathbb{R}\ \ et\ 2 + 3i \notin i\mathbb{R}$)

II) LES OPERATIONS DANS $\mathbb{R}$.

1) L'addition dans $\mathbb{R}$.

1.1 Définition

Définition :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.
La somme des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z + z'$ définie par :
$\boldsymbol{z + z' = (a + a') + i(b + b')}$
On en déduit que : $\begin{cases} Re(z + z') = Re(z) + Re(z') \\ Im(z + z') = Im(z) + Im(z') \end{cases}$

1.2 Propriétés

L'addition dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est :

- Associative :$(\forall (z, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3)((z + z_1) + z_2 = z + (z_1 + z_2))$
- Commutative : $(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2)(z + z' = z' + z)$
- 0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{C}$: $(\forall z \in \mathbb{C})(0 + z = z + 0 = z)$
- Chaque élément z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'opposé de z noté $(-z)$; $z + (-z) = (-z) + z = 0$

On dit que $\mathbb{C}$ muni de l'addition est un groupe commutatif, on le note par : $(\mathbb{C}, +)$

1.3 La différence de deux nombres complexes.

Soient z et z' deux nombres complexes tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$
La différence de z et z' est la somme de z avec le symétrique de z' c'est-à-dire : $z + (-z')$ qu'on la note : $z - z'$

$$\boldsymbol{z - z' = (a - a') + i(b - b')}$$

2) La multiplication dans $\mathbb{C}$.

2.1 Définition :

Comme la multiplication dans $\mathbb{C}$ prolonge celle dans $\mathbb{R}$ on peut définir la multiplication dans $\mathbb{C}$ par :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.
Le produit des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z \times z'$ définie par :

$$\begin{aligned} z \times z' &= (a + ib) \times (a' + ib') \\ &= aa' + ab'i + iba' + bb'i^2 \qquad (i^2 = -1) \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + ba') \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')}$$

2.2 Propriétés

La multiplication dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est :

- Associative :$(\forall (z, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3)((z \times z_1) \times z_2 = z \times (z_1 \times z_2))$
- Commutative : $(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2)(z \times z' = z' \times z)$
- 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$: $(\forall z \in \mathbb{C})(1 \times z = z \times 1 = z)$
- Chaque élément non nul z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'inverse de z noté : $\left(\frac{1}{z}\right)$ ou z^{-1};
  $z \times \left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z}\right) \times z = 1$

On dit que $\mathbb{C}^*$ muni de la multiplication est un groupe commutatif, on le note par : $(\mathbb{C}*, \times)$
En plus des 8 propriétés que vérifient l'addition et la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{C}$ il y a une propriété commune entre les deux opérations :

- La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$:
  $(\forall (z, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3)(z \times (z_1 + z_2) = z \times z_1 + z \times z_2)$

Définition :

Puisque $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif et $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif et a multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$; on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

2.2 Le quotient de deux complexes.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes où $z' \neq 0$ le quotient des nombres z et z' est le produit de z et de l'inverse de z' et se note $\frac{z}{z'}$ ou $z(z'^{-1})$

2.3 Règles de calculs dans $\mathbb{C}$

$(\mathbb{C}, +, \times)$ étant un corps commutatif ; toutes les règles de calculs qu'on a connu dans $\mathbb{R}$ sont vraies dans $\mathbb{C}$.

- $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$
- $z^0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(z^n = \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}_{n\ fois}$
- $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$
- $z^{n+m} = z^n\, z^m$
- $z^{n-m} = \frac{z^n}{z^m}$
- $(z^n)^m = z^{m\times n}$
- $z^n - z_1^n = (z - z_1)(z^{n-1} + z^{n-2}z_1 + \cdots + zz_1^{n-2} + z_1^{n-1})$
- Si $z \neq 1$ alors $S = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ somme des termes d'une suite géométrique
- $(z + z_1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n z^k\, z_1^{n-k}$ formule de binôme

2.4 Applications

Exercice 1:

1- Calculer i^3 et i^4 , en déduire i^n en fonction de n.

2- Calculer la somme $S = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2018}$; écrire S sous sa forme algébrique.

Exercice 2 :

1- Factorise $2x^2 + 5$

2- Résoudre l'équation $2x^2 + 5 = 0$

Exercice 3 :

1- Effectuer la division Euclidienne de $P(z) = 3z^3 + 2iz^2 - 3z + 2i$ par $(z + 2i)$

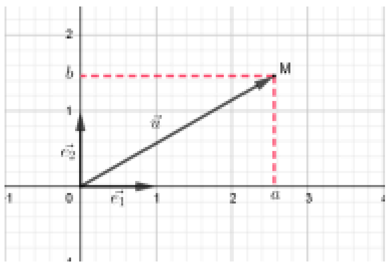
2- $-2i$ est il une racine de P.

III) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) L'interprétation géométrique.

Le plans $(\mathcal{P})$ est muni du repère $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$; et soit $\mathcal{V}_2$ le plan vectoriel associé à $(\mathcal{P})$.
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe le couple (a, b) est associé à un point unique M dans le plan $(\mathcal{P})$.

- L'application : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \to (\mathcal{P}) \\ z \mapsto M(a, b) \end{array}$ où $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$ est une bijection
- Le point M s'appelle **l'image du nombre complexe dans le plan** $(\mathcal{P})$, et l'application
- Le complexe z s'appelle **l'affixe du point M** on écrit : $z = aff(M)$ on écrit $z_M = a + ib$
- L'application : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathcal{V}_2 \\ z \mapsto \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array}$ où $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$ est une bijection



- Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle **l'image du nombre complexe dans le plan** $(\mathcal{P})$, et l'application
- Le complexe z s'appelle **l'affixe vecteur $\vec{u}$** on écrit : $z = aff(\vec{u})$ on écrit $z_{\vec{u}} = a + ib$
- Le plan $(\mathcal{P})$ s'appelle **un plan complexe**
- L'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$ s'appelle l'axe des réels
- L'axe $(O, \overrightarrow{e_2})$ s'appelle l'axe imaginaire

Dans tout qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

2) Les opérations sur les affixes.

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}_2$; M et N deux points dans le plan $(\mathcal{P})$ et α un réel ; On a :

- $aff(A) = aff(B) \Leftrightarrow A = B$ et $aff(\vec{u}) = aff(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$
- $aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$
- $aff(\alpha\vec{u}) = \alpha \times aff(\vec{u})$
- $aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$

Preuve : En exercice.

Propriété :

- Soient $[AB]$ un segment de milieu I ; on a : $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$.
- Si $G = Bar\{(A_k, \alpha_k)_{1\leq k\leq n}\}$ et $z_k = aff(A_k)$ alors : $z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$
  - Cas particuliers 2 points pondérés : $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a : $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha+\beta}$
  - Cas particuliers 3 points pondérés : $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ on a : $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

Preuve : En exercice.

3) Condition complexe d'alignement de 3 points

Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs : z_A, z_B et z_C

On sait que :

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow (\exists\alpha \in \mathbb{R})(\overrightarrow{AC} = \alpha\,\overrightarrow{AB})$

$$\Leftrightarrow (\exists\alpha \in \mathbb{R})(z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A))$$
$$\Leftrightarrow (\exists\alpha \in \mathbb{R})\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

Propriété :

Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs : z_A, z_B et z_C ; les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Exercice :

Soit les points $A_{(2-3i)}$; $B_{(1+i)}$ et $C_{(1+2i)}$.

1- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2- Déterminer l'affixe de I, milieu de $[AB]$.

3- Déterminer le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$

4- Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

IV) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

Définition :

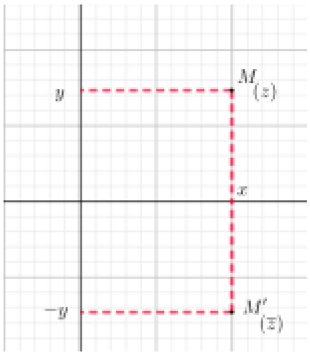
Soit le nombre complexe $z = a + ib$ (a et b sont des réels) ; le nombre complexe qu'on note $\bar{z}$ et qui est égale à $\bar{z} = a - ib$ s'appelle le conjugué du nombre complexe z

Exemple :

- $z_1 = 3 - 2i$ son conjugué est $\overline{z_1} = 3 + 2i$
- $z_2 = 3i + 1$ son conjugué est $\overline{z_2} = -3i + 1$
- $z_3 = 3 - \sqrt{2}$ son conjugué est $\overline{z_3} = 3 - \sqrt{2}$

Propriété : (Règles de calculs)

- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z-z'} = \bar{z} - \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$
- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $\bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$



Propriété :

- $z + \bar{z} = 2Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2iIm(z)$
- Si $M_{(z)}$ est l'image de z et $M'_{(\bar{z})}$ alors M et M' sont symétrique par rapport à l'axe des réels.

Exercice :

❶ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z - 3\,\bar{z} + 1 + 2i = 0$
2. $z + (1-i)\ \bar{z} + 3 - 2i = 0$
3. $(3+i)z\ + \bar{z} = \frac{1}{i}$

❷ Déterminer les ensembles suivants :

1. $(\Gamma_1) = \{M_{(z)}\ /\ \frac{z-2i}{z+i}\ \in \mathbb{R}\}$
2. $(\Gamma_2) = \{M_{(z)}\ /\ \frac{z-2i}{z+i}\ \in i\mathbb{R}\}$

V) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1) Définition et applications

Définition :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, le réel positif $\sqrt{x^2+y^2}$ s'appelle le module du nombre complexe z et on le note $|z|$

Propriété :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe ; on a $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}$

Preuve : en exercice

Exercice :

❶ Déterminer les modules des complexes suivants :

1. $z_1 = 3 + \sqrt{2}\,i$
2. $z_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}\,i$
3. $z_3 = \frac{1}{1+i}$
4. $z_4 = x$ où $x \in \mathbb{R}$

❷ Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

1. $u_1 = \frac{2+5i}{1+3i}$
2. $u_2 = \frac{1+i}{i-3\sqrt{2}}$
3. $u_3 = (2-\sqrt{3}\,i)(\sqrt{2}+i)$

❸ Déterminer l'ensemble des points $M_{(z)}$ tels que : $M_{(z)}$ $N_{(\bar{z})}$ et $Q_{\left(\frac{1}{z}\right)}$ soit alignés.

2) Règle de calculs

Propriétés :

Pour tous complexes z et z' et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a :

- $|z|^2 = z\,\bar{z}$
- $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$
- $|\bar{z}| = |-z| = |z|$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$
- $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ où $z' \neq 0$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ où $z' \neq 0$
- $|z^n| = |z|^n$

Remarque :

- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|\sum_{k=0}^{n} z_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |z_k|$

Propriété :

Pour tous points A et B d'affixes respectifs z_A et z_B on a : $AB = |z_A - z_B|$

Applications :

Déterminer les ensembles suivants :

① $(\Gamma_1) = \{M_{(z)} /\ |z + 3 - i| = 4\}$
② $(\Gamma_2) = \{M_{(z)} /\ |-z - \sqrt{3} - 2i| = 3\}$
③ $(\Gamma_3) = \{M_{(z)} /\ |z - 1| = |z - 1 - 2i|\}$
④ $(\Gamma_4) = \{M_{(z)} /\ |z - 1| = |2i - z|\}$
⑤$(\Gamma_2) = \{M_{(z)} /\ |2iz - 1| = |2z + 4 - 6i|\}$

VI) FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

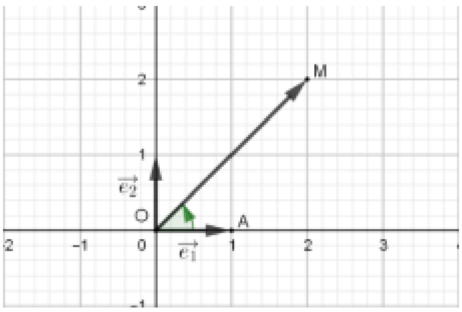
1) L'argument d'un nombre complexe non nul.

Définition :

Le plan complexe est menu d'un repère $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$
Soit z un nombre complexe non nul et $M_{(z)}$ son image. On appelle **argument du nombre complexe z** une mesure (en radian) de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}_{(z)}})$, On le note par $\boldsymbol{arg(z)}$

Exemples :

- $z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\ [2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\boldsymbol{\pi}]$
- $\arg(2 + 2i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ (figure ci-contre)



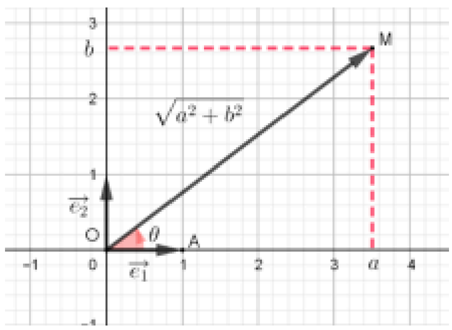
2) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul, on a donc $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ et en suite :

$z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$; Or : si $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

alors : $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

et finalement $z = |z|(\cos\theta + i\,\sin\theta)$



Propriété :

Tout nombre complexe non nul z à une écriture de la forme $z = |z|(cos\theta + i\, sin\theta)$; où $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$
Cette écriture s'appelle **la forme trigonométrique du nombre complexe non nul z**

Exercices :

Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

1. $z = 3 + 3i$
2. $z = \sqrt{3} - i$
3. $z = -4 + 4i$
4. $z = -2 - 2\sqrt{3}\, i$
5. $z = 7$
6. $z = -12$
7. $z = \frac{1}{2i}$

3) Règles de calculs sur les arguments :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ et $\arg(z') \equiv \theta'\ [2\pi]$
On donc :

$$z = |z|(cos\theta + i\, sin\theta) \text{ et } z' = |z'|(cos\theta' + i\, sin\theta')$$

et par suite :

$$\begin{aligned} zz' &= |z||z'|(cos\theta + i\, sin\theta)(cos\theta' + i\, sin\theta') \\ &= |z||z'|(cos\theta cos\theta' + i\, cos\theta\, sin\theta' + i\, sin\theta\, cos\theta - sin\theta\, sin\theta') \\ &= |z||z'|(cos\theta cos\theta' - sin\theta\, sin\theta' + i\,(cos\theta\, sin\theta' + sin\theta\, cos\theta)) \\ &= |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

(en utilisant les formules de transformations)

Propriété principale :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, on a : $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

Propriété Règles de calculs pour les arguments :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

Preuves (en exercice)

Notations :

Soit z un nombre complexe dont la forme trigonométrique est : $z = r\,(cos\theta + i\, sin\theta)$ c'est-à-dire
$\begin{cases} |z| = r \\ \arg(z) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$ on écrit : $z = [r, \theta]$

Règles de calculs

- $[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta\theta']$
- $\frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$
- $\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$
- $-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$
- $\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$
- $[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$

Ces propriétés ne sont que l'assemblage des propriétés sur les calculs des modules et les calculs des arguments.

4) Applications :

Exercice 1 :

Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z et placer le point $M_{(z)}$ dans le plan complexe muni d'un repère $\mathcal{R}(O,\vec{u},\vec{v})$ dans les cas suivants :

1. $z = 2 + 2i$
2. $z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
3. $z = -5 - 5i$
4. $z = -6 + 6\sqrt{3}i$

Exercice 2 :

Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z dans les cas suivants :

1. $z = (3 - 3i)^4$
2. $z = \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)(-1 + i)$
3. $z = \frac{4-4i}{6-6\sqrt{3}i}$

Exercice 3 :

1. Ecrivez les nombres complexe $u = -2 - 2i$ et $v = 3 - 3\sqrt{3}i$ sous leurs formes trigonométriques.
2. En déduire une écriture trigonométrique des complexes :
   a) $z = uv$
   b) $z = \frac{u}{v}$
   c) $z = u^3v^5$
3. Ecrire le complexe $z = \frac{u}{v}$ sous sa forme algébrique puis en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

5) Les formes trigonométriques des racines carrées

Définition

On appelle **racine carrée d'un complexe z** tout complexe u tel que $u^2 = z$

Remarque

Un complexe non nul admet deux racines carrées.

Preuve d'une propriété :

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul et $u = [\rho, \alpha]$ une racine de z donc $u^2 = r$ ce que se traduit par :

$$\begin{cases} \rho^2 = r \\ 2\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ \alpha \equiv \frac{\theta}{2}\,[2\pi] \;\; ou\; \alpha \equiv \frac{\theta}{2} + \pi\;[2\pi] \end{cases}$$

Propriété :

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul ; les racines carrées de $[r, \theta]$ sont les complexes :
$u_1 = \left[\sqrt{r}, \frac{\theta}{2}\right]$ et $u_2 = \left[\sqrt{r}\,,\ \frac{\theta}{2} + \pi\right]$

Exercice :

Soit le complexe $u = (\sqrt{3} - 1) + i(1 + \sqrt{3})$

1. Calculer u^2 puis déterminer le forme trigonométrique de u^2
2. En déduire la forme trigonométrique de u

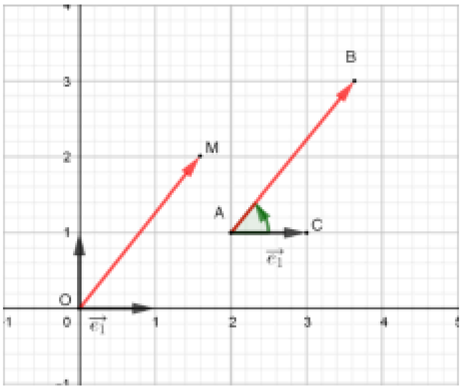
VI) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES

1) Angles orientés et argument.

On sait que si le nombre complexe z est non nul alors $\overline{(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}_{(z)})} \equiv \arg(z)\ [2\pi]$

- Soit z et z' deux complexes non nuls d'images respectives M et $'$, on a :

$$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OM}, \vec{e_1}\right) + \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM'}\right) \quad [2\pi]$$
$$\equiv -\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}\right) + \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM'}\right) \quad [2\pi]$$
$$\equiv -\arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$
$$\equiv arg\left(\frac{z'}{z}\right) \quad [2\pi]$$



- Soient A et B deux points dans le plan complexe d'affixes respectifs a et b, on sait qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ et M aura pour affixe le complexe $(b-a)$

Donc : $$\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv \arg(b-a)\ \ [2\pi]$$

- Soient A, B et C trois points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs a, b et , on a :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \vec{e_1}\right) + \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{AC}\right) \quad [2\pi]$$
$$\equiv -\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{AC}\right) \quad [2\pi]$$
$$\equiv -\arg(b-a) + \arg(c-a) \quad [2\pi]$$
$$\equiv arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$$

- Soient , B , C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs a, b, c et d , on a :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}\right) \quad [2\pi]$$
$$\equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) + \pi \quad [2\pi]$$
$$\equiv arg\left[\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{d-c}{a-c}\right) \times (-1)\right] \quad [2\pi]$$
$$\equiv arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)\ [2\pi]$$

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\overline{-\vec{u}}, \vec{v}) + \pi \quad [2\pi]}$$

Propriété :

- Soit z et z' deux complexes non nuls d'images respectives M et $'$, on a : $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv arg\left(\frac{z'}{z}\right) [2\pi]$
- $\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(b-a)\ \ [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\ \ [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)\ [2\pi]$

Exercice :

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_1 = -\sqrt{2}$, $z_2 = 1+i$ et $z_3 = 1-i$

1. Placer dans le repère $\mathcal{R}$ les points A, B et C
2. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ et déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}}\right)$.
3. Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[BC]$ et en déduire que : $\left(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$
4. Ecrivez le nombre $\frac{z_1-z_2}{z_1}$ sous sa forme algébrique puis en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

2) Applications

2.1 Alignement de 3 points.

Corolaire :

> Trois points $A_{(a)}, B_{(b)}$ et $C_{(c)}$ sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est un réel.

Preuve :

On sait que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \; [2\pi]$ et que $\frac{c-a}{b-a} = r(cos\theta + i\, sin\theta)$ où $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta \; [2\pi]$ et $r = \left|\frac{c-a}{b-a}\right|$

$$\begin{aligned} A_{(a)}, B_{(b)} \text{ et } C_{(c)} \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv 0 \; [2\pi] \;\; ou \;\; \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi \; [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = r \text{ ou } \frac{c-a}{b-a} = -r \\ &\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice :

1- Vérifier que les points $A_{(5+3i)}$, $B_{(2+i)}$ et $C_{(-1-i)}$ sont alignés

2- Les points $M_{(-2+2i)}$, $N_{(2-i)}$ et $N_{(1-i)}$ sont alignés.

2.2 Cocyclicité de 4 points.

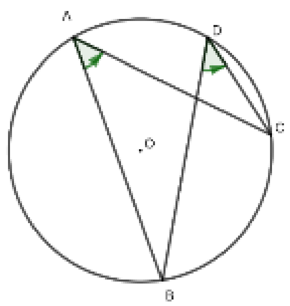
Rappelle :

Soit (C) le cercle qui circonscrit le triangle ABC, le point D appartient au cercle (C) si et seulement si

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right) \;\; [2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi - \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right) \;\; [2\pi]$

<table>
<tr>
<td>

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right) \;\; [2\pi]$



Ceci se traduit par :

$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv arg\left(\frac{c-d}{b-d}\right) \;\; [2\pi]$

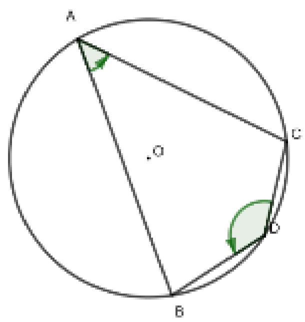
$\Leftrightarrow arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) - arg\left(\frac{c-d}{b-d}\right) \equiv 0 \;\; [2\pi]$

$\Leftrightarrow arg\left[\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right)\right] \equiv 0 \;\; [2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) \in \mathbb{R}^{*+}$

</td>
<td>

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi - \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}\right) \;\; [2\pi]$



Ceci se traduit par :

$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \pi - arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right) \;\; [2\pi]$

$\Leftrightarrow arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) + arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right) - \pi \equiv 0 \;\; [2\pi]$

$\Leftrightarrow arg\left[\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) \times (-1)\right] \equiv 0 \;\; [2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) \in \mathbb{R}^{*-}$

</td>
</tr>
</table>

Théorème:

> Soit $A_{(a)}, B_{(b)}, C_{(c)}$ et $D_{(d)}$ quatre points dans le plan complexe.
>
> Les points $A_{(a)}, B_{(b)}, C_{(c)}$ et $D_{(d)}$ sont **cocycliques si** et seulement si : $\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) \in \mathbb{R}^*$

Exercice :

1- Montrer que les points : $A_{(i)}, B_{(2+3i)}, C_{(6+i)}$ et $D_{(4-3i)}$

2- Montrer que $\Omega_{(3)}$ est le centre du cercle qui circonscrit le quadrilatère $ABCD$

NOMBRES COMPLEXES

Partie 2

I) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE NON NUL.

1) Notation et conséquence :

1.1 Notation

Définition :

Soit θ un réel ; on pose : $cos\theta + i\, sin\theta = e^{i\theta}$
Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a : $z = r(cos\theta + i\, sin\theta) = re^{i\theta}$
Cette écriture s'appelle **la forme exponentielle du complexe non nul z**

1.2 Conséquence de la notation :

Tous les résultats qu'on a vus au paravent concernant les modules et les arguments des nombres complexes non nuls on peut les rapporter en utilisant la notation exponentielle.

Propriété :

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls, on a :

- $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$
- $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
- $\bar{z} = re^{-i\theta}$
- $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

1.3 Formule de Moivre

Propriété :

Pour tout réel θ on a : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ d'où : $(cos\theta + i\, sin\theta)^n = \left(cos(n\theta) + i\, sin(n\theta)\right)$

Soit $z = e^{i\theta} = cos\theta + i\, sin\theta$ un nombre complexe non nul et son conjugué $\bar{z} = (cos\theta - i\, sin\theta) = e^{-i\theta}$
En faisant la somme membre à membre on obtient : $2cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$; puis en faisant la différence membre à membre on obtient : $2i\, sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

1.4 Formule d'Euler

Propriété :

Pour tout réel θ on a : $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Application :

Linéarisation de $cos^4 x$
On a $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Donc : $cos^4 x = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4$
$= \frac{1}{16}\left(e^{i4\theta} + 3e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{-i2\theta} + 3e^{i\theta}e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta}\right)$
$= \frac{1}{16}\left(e^{i4\theta} + 3e^{i2\theta} + 6 + 3e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}\right)$
$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}}{2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}\right) + \frac{6}{16}$
$= \frac{3}{8} + \frac{1}{8}cos(4\theta) + \frac{3}{8}cos(2\theta)$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
triangle de Pascal

Exercice :

Linéariser $sin^4 x$

Exercice :

Montrer que $(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2)\left(e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right]\right)$

Cette égalité nous permet de déterminer la forme géométrique de la somme de deux complexes de même module

Exemple :

$u=3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v=3e^{i\frac{\pi}{7}}$

On a : $u+v=3e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{14}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}\right)}\right]$

$=3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\pi}{35}\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{35}\right)}\right]$

$=6cos\left(\frac{\pi}{35}\right)e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}$ et puisque $6cos\left(\frac{\pi}{35}\right)>0$ alors

$|u+v|=6cos\left(\frac{\pi}{35}\right)$ et $arg(u+v)\equiv\frac{6\pi}{35}\ [2\pi]$

Exercice

Déterminer le module et l'argument des complexes :

1. $z_1=1+e^{i\frac{\pi}{5}}$
2. $z_2=1-e^{i\frac{\pi}{5}}$
3. $z_3=i+e^{i\frac{\pi}{5}}$
4. $z_4=i-e^{i\frac{\pi}{5}}$

II) LES EQUATION DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$:

1) Les racines carrées d'un complexe :

Définition :

On appelle racine carrée d'un complexe Δ tout complexe δ qui vérifie : $\delta^2=\Delta$.

Propriété :

Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposés.

Preuve :

Soit $z=a+ib$ un complexe non nul

- *1^er^* cas : $b=0$ et $a>0$
  $\Delta=a=(\sqrt{a})^2$ donc $\delta_1=\sqrt{a}$ et $\delta_2=-\sqrt{a}$ sont les racines carrées de Δ
- *2^ème^* cas : $b=0$ et $a<0$
  $\Delta=a=-(-a)=(i\sqrt{-a})^2$ donc $\delta_1=i\sqrt{-a}$ et $\delta_2=-i\sqrt{-a}$ sont les racines carrées de Δ
- *3^ème^* cas : $a=0$ donc $b>0$
  On sait que : $(1+i)^2=2i$ donc $\Delta=bi=\frac{b}{2}(1+i)^2$
  Et comme $b>0$ alors $\Delta=\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)}(1+i)\right)^2$
  et par suite les racines de Δ sont $\delta_1=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)}(1+i)$ et $\delta_2=-\delta_1$
- *4^ème^* cas : $a=0$ donc $b<0$
  On sait que : $(1-i)^2=-2i$ donc $\Delta=-b(-i)=\frac{-b}{2}(1-i)^2$
  Et comme $-b>0$ alors $\Delta=\left(\sqrt{\left(\frac{-b}{2}\right)}(1-i)\right)^2$
  et par suite les racines de Δ sont $\delta_1=\sqrt{\left(\frac{-b}{2}\right)}(1-i)$ et $\delta_2=-\delta_1$

- $5^{ème}$ cas : $a \neq 0$ et $b \neq 0$

  On pose $\delta = x + iy$ une racine de Δ donc $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = \Delta$ $|\delta^2| = |\Delta|$ et par suite :

  $$\begin{cases} x^2 - y^2 = Re(\Delta) = a \\ 2xy = Im(\Delta) = b \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

  On en déduit :

  $$\begin{cases} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ Sig(xy) = Sig(b) \end{cases}$$

  D'où :

  $$\begin{cases} x = \pm\alpha \\ y = \pm\beta \\ Sig(xy) = Sig(b) \end{cases} \quad \text{où} \begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta = \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{cases}$$

  - Si $b > 0$

    $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -\alpha \\ y = -\beta \end{cases}$

    $\delta_1 = \alpha + i\beta$ et $\delta_2 = -\alpha - i\beta$ sont les racines carrées du complexe Δ
  - Si $b < 0$

    $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\beta \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \beta \end{cases}$

    $\delta_1 = \alpha - i\beta$ et $\delta_2 = -\alpha + i\beta$ sont les racines carrées du complexe Δ

Exemple :

On va déterminer les racines carrées du complexe $\Delta = 2 + 3i$
Soit $\delta = x + iy$ une racine carrée de Δ on a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{13} \\ 2xy = 3 \end{cases} \quad \text{par suite :} \begin{cases} 2x^2 = 2 + \sqrt{13} \\ 2y^2 = -2 + \sqrt{13} \\ 2xy = 3 > 0 \end{cases} \quad \text{et on aura} \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}} \\ x = \pm\sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{2}} \\ xy > 0 \end{cases}$$

Donc les racines de $\Delta = 2 + 3i$ sont :

$\delta_1 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}} + i\sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{2}}$ et $\delta_2 = -\delta_1$

Exercice :

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -12$
- $z_2 = cos\alpha - 2$
- $z_3 = 4 - 2i$
- $z_4 = -4 - 3i$

Remarque :

Dans certain cas on peut déterminer les racines carrées du complexe Δ sans passer par la procédure précédente :

- Si $\Delta = re^{i\theta}$ alors les racines carrées de Δ sont $\delta_1 = \sqrt{r}\, e^{\left(i\frac{\theta}{2}\right)}$ et $\delta_2 = -\delta_1$

- Si on remarque une identité remarquable par exemple $\Delta = -8 + 6i$ on a $6i = 2 \times 1 \times 3i$

  et $1^2 + (3i)^2 = -8$ donc $\Delta = -8 + 6i = 1^2 + 2.1.3i + (3i)^2 = (1 + 3i)^2$
  donc les racines carrées de Δ sont : $\delta_1 = 1 + 3i$ et $\delta_2 = -\delta_1$

2) Les équations de second degré

Considérons l'équation $P(z) = az^2 + bz + c = 0 \ (E)$ où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$

On a :
$$\begin{aligned} P(z) &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z\right) + c \\ &= a\left(z^2 + \mathbf{2}\frac{b}{2a} + \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^{\mathbf{2}} - \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^{\mathbf{2}}\right) + c \\ &= a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$
$$= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\boldsymbol{\Delta}}{4a^2}\right]$$

- Si $\Delta = 0$ l'équation (E) admet racine double : $z_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$; soit δ l'un des deux racines carrées de Δ, on aura :

$$\begin{aligned} P(z) &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\right] \end{aligned}$$

Donc l'équation $P(z) = 0$ aura deux solutions : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$

Propriété :

Considérons dans $\mathbb{C}$l'équation $az^2 + bz + c = 0 \ (E)$ où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$
et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant on a :
Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet comme solution le complexe $z_0 = -\frac{b}{2a}$
Si $\Delta \neq 0$ l'équation (E) admet comme solution les complexes $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ une racine carrées de Δ

Exercices :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

❶ $z^2 + 2z + 5 = 0$
❷ $2z^2 + 3iz + (1 - i) = 0$
❸$3iz^2 + (1 - 2i)z + 5i + 1 = 0$

Remarque :

Si les coefficients a, b et c sont des réels et $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux racines complexes conjugué $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Propriété :

Si l'équation (E) admet deux racines distinctes z_1 et z_2 alors $\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \\ z_1 . z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Exercice :

Soit $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = 0$

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur comme racine.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

III) LES RACINES N-EME D'UN COMPLEXE NON NUL

1) Les racines n-ème de l'unité :

Définition :

On appelle **racine n-éme de l'unité** tout complexe u qui vérifie : $u^n = 1$
Autrement dit ; les racines n-éme de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n - 1 = 0$

Exemples :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1
- Les racines cubique de l'unité sont : 1 , j et j^2 où $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$

Preuve (d'une propriété)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons l'équation : $z^n = 1$

$u = 0$ n'est pas une racine de l'équation précédente. On pose $u = e^{i\alpha}$ (à remarquer que si u est une racine ; $|u| = 1$)

On a donc :

$$\begin{aligned} u^n = 1 &\Leftrightarrow [1,\alpha]^n = [1,0] \\ &\Leftrightarrow n\alpha = 0 \quad [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{n} \quad (\text{où } k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Donc les racines n-éme de l'unité sont les complexes $u_k = e^{\left(i\frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$

Propriété :

L'unité admet n racines n-éme qui s'écrivent de la forme : $u_k = e^{\left(i\frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$

Exemple :

Les racines 4éme de l'unité sont : $u_k = u_k = e^{\left(i\frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k \in \{0,1,2,3\}$

- $u_0 = e^{\left(i\frac{0}{4}\right)} = 1$
- $u_1 = e^{\left(i\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = i$
- $u_2 = e^{\left(i\frac{4\pi}{4}\right)} = e^{(i\pi)} = -1$
- $u_3 = e^{\left(i\frac{6\pi}{4}\right)} = e^{\left(i\frac{3\pi}{2}\right)} = -i$

Exercice :

Ecrire sous les formes algébriques les racines $6^{ème}$ de l'unité.

Exercice :

Considérons l'équation : $(E) : z^6 = \bar{z}$.

1- Montrer que si $z \neq 0$ et z solution de (E) alors $|z| = 1$

2- Résoudre l'équation (E)

2) Les racines n-éme d'un nombre complexe non nul.

Soit $a = re^{i\theta}$ un complexe non nul $(r > 0)$ et considérons l'équation (E): $z^n = a$

Si $u = \rho e^{i\alpha}$ est une solution de l'équation (E) alors : $\left(\rho e^{i\alpha}\right)^n = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} \left(\rho e^{i\alpha}\right)^n = re^{i\theta} &\Leftrightarrow [\rho, \alpha]^n = [r, \theta] \\ &\Leftrightarrow [\rho^n, n\alpha] = [r, \theta] \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \quad (\text{Où } k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \end{aligned}$$

Propriété :

Le nombre complexe non nul $a = re^{i\theta}$ admet n racines $n - ème$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ différentes qui sont :
$u_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right]$ où $k \in \{0,1,2,\dots,(n-1)\}$

3) Applications :

Exercice 1 :

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$

2- Ecrire les solutions sous leurs formes algébrique et déterminer $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice2 :

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - i\sqrt{3}\,z - 1 - i\sqrt{3} = 0$

2- En déduire sous les formes trigonométriques et algébriques les solutions de l'équation : $z^6 - i\sqrt{3}\,z^3 - 1 - i\sqrt{3} = 0$

IV) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation :

1.1 Définition géométrique.

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$; on appelle **translation** la transformation dans le plan qui associe à tout point Mdu plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

1.2 Ecriture complexe d'une translation.

$\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que : $aff(\vec{u}\,) = a$ et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. La translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{MM'}) = aff(\vec{u})$$
$$\Leftrightarrow z' - z = a$$
$$\Leftrightarrow z' = z + a$$

Propriété :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que $aff(\vec{u}\,) = a$, la translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ si et seulement si :
$z' = z + a$

Cette égalité s'appelle **l'écriture complexe de la translation** $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ **tel que** $\boldsymbol{aff(\vec{u}) = a}$

Exercice :

1- Donner l'écriture complexe de la translation t qui transforme $A_{(1-2i)}$ en $B_{(-4+3i)}$

2- Déterminer l'image du point $C_{(-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i)}$ par la translation t.

2) L'homothétie

2.1 Définition géométrique.

Définition :

Soient $\Omega_{(\omega)}$ un point dans le plan et k un réel non nul ; on appelle **l'homothétie de centre Ω et de rapport k,** la transformation dans le plan qui associe à tout point Mdu plan le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ et se note $h_{(\Omega,k)}$

- Si $k = 1$ alors la transformation $h_{(\Omega,1)}$ est l'identité de $(\mathcal{P})$ et tous les points du plan seront invariants
- Si $k \neq 1$ alors le seul point invariant par $h_{(\Omega,k)}$ est le point Ω le centre de la transformation $h_{(\Omega,k)}$.

2.2 Ecriture complexe d'une homothétie.

$\Omega_{(\omega)}$ un point dans le plan complexe et k un réel non nul et diffèrent de 1. l'homothétie de centre $\Omega_{(\omega)}$ et de rapport k, transforme le point $M_{(z)}$en $M'_{(z')}$ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ et se note

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{\Omega M'}) = aff(k\,\overrightarrow{\Omega M})$$
$$\Leftrightarrow z' - \omega = k(z-\omega)$$
$$\Leftrightarrow z' = kz + \omega(1-k)$$

Propriété :

l'homothétie de centre $\Omega_{(\omega)}$ et de rapport k, admet une écriture complexe de la forme : $z' = kz + \omega(1-k)$

3) La rotation :

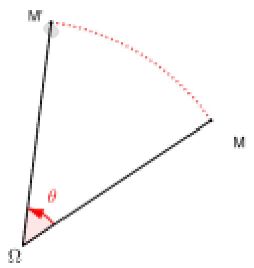
3.1 Définition géométrique :

Définition :

Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, **la rotation de centre Ω et d'angle θ** est l'application qui transforme tout point M en M' tel que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega M = \Omega M'} \\ \left(\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega M}}, \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega M'}}\right) \equiv \boldsymbol{\theta}\ [2\boldsymbol{\pi}] \end{cases}$$

On la note par : $R_{(\Omega,\theta)}$



Remarque :

- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ alors la rotation d'angle nul est l'identité de $(\mathcal{P})$ et tous les points du plan seront invariants.
- Si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ alors le seul point invariant par $R_{(\Omega,\theta)}$ est le point Ω le centre de la rotation $R_{(\Omega,\theta)}$.

3.2 L'écriture complexe d'une rotation.

Soient $\Omega_{(\omega)}$ un point dans le plan complexe et θ un réel non nul. la rotation de centre $\Omega_{(\omega)}$ et d'angle θ, transforme le point $M_{(z)}$en $M'_{(z')}$ tel que : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-\omega| = |z'-\omega| \\ arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$$
$$\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$$
$$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega$$

Propriété :

La rotation de centre $\Omega_{(\omega)}$ et d'angle θ, admet une écriture complexe de la forme : $z' = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega$

Exercice :

1- Montrer qu'il existe une rotation R de centre $\Omega_{(3+i)}$ qui transforme $A_{(2+4i)}$ en $B_{(6+2i)}$.

2- Donner l'écriture complexe de la rotation R

3- Déterminer l'image de $C_{(-1+3i)}$.

4) Etude de la transformation qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$:

1er cas : $a = 0$

La transformation f est une constante, elle lie chaque point $M_{(z)}$ au point fixe $B_{(b)}$

2éme cas : $a = 1$

f est la transformation qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que $z' = z + b$

Donc $z' - z = b$ ce qui se traduit par $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ où $aff(\vec{u}) = b$ (constant)
Dans ce cas la transformation f est une **translation de vecteur** $\vec{u}$ tel que : $aff(\vec{u}) = b$

Propriété

> La transformation plane f qui associe à tout point $M_{(z)}$le point $M'_{(z')}$ tel que $z' = z + b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ tel que $aff(\vec{u}) = b$

3éme cas : $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

Soit f une transformation plane qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$

On a : $f\left(M_{(z)}\right) = M'_{(z')} \Leftrightarrow z' = az + b$ soit $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a :

Le point $\Omega_{(\omega)}$ où est un point invariant par f car : $\omega' = a\left(\frac{b}{1-a}\right) + b = \frac{ab+b-ab}{1-a} = \frac{b}{1-a} = \omega$

D'où $\begin{cases} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases}$ en faisant la différence on obtient : $z' - \omega = a(z - \omega)$ qui se traduit par $\overrightarrow{\Omega M'} = a\,\overrightarrow{\Omega M}$ donc :

f est l'homothétie de centre $\Omega_{(\omega)}$ et de rapport a où $\omega = \frac{b}{1-a}$

Propriété

> La transformation plane f qui associe à tout point $M_{(z)}$le point $M'_{(z')}$ tel que $z' = az + b$ où a est un réel non nul et diffèrent de 1 est l'homothétie de rapport a et de centre $\Omega_{(\omega)}$ tel que $\omega = \frac{b}{1-a}$

Exercice :

1- Donner l'écriture complexe de l'homothétie de rapport 2 et qui transforme $A_{(1-2i)}$ en $B_{(-4+3i)}$

2- Déterminer l'image du point $C_{(-1+5i)}$ par l'homothétie h.

4éme cas : $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$

Soit f une transformation plane qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$; $b \in \mathbb{C}$

On a : $f\left(M_{(z)}\right) = M'_{(z')} \Leftrightarrow z' = az + b$ soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$ (ω est la solution de l'équation : $= az + b$) on a :

$\Omega_{(\omega)}$ est un point invariant par f. On pose $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \neq 2k\pi$ (car $a \neq 1$)

On a : $\begin{cases} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases}$ en faisant la différence on obtient : $z' - \omega = a(z - \omega)$ on en déduit : $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = a$ et par suite :

$\left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = |a| = 1$ par suite $|z - \omega| = |z' - \omega|$ ce que se traduit par $\overline{\Omega M'} = \overline{\Omega M}$

et : $$\begin{aligned} arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) &\equiv arg(a)\ [2\pi] \\ &\equiv \alpha \quad [2\pi] \end{aligned}$$

Ce qui se traduit : $\left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \alpha\ [2\pi]$

et finalement : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \alpha\ [2\pi] \end{cases}$ donc la transformation f est la rotation de centre $\Omega_{\left(\frac{b}{1-a}\right)}$ et d'angle α.

Propriété

La transformation plane f qui associe à tout point $M_{(z)}$le point $M'_{(z')}$ tel que $z' = az + b$ où a est un complexe tel que $|a| = 1$ est la rotation d'angle $\alpha \equiv arg(a)\ [2\pi]$ et de centre $\Omega_{(\omega)}$ tel que $\omega = \frac{b}{1-a}$

$5^{éme}$ cas : $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

Soit f une transformation plane qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$ où $\in \mathbb{C}$, on pose $a = re^{i\alpha}$

On a : $f\left(M_{(z)}\right) = M'_{(z')} \Leftrightarrow z' = az + b$

$$\Leftrightarrow z' = re^{i\alpha}z + b$$
$$\Leftrightarrow z' = r\left(e^{i\alpha}z + \frac{b}{r}\right)$$

D'après le $4^{éme}$ cas ; la transformation plane qui transforme $M_{(z)}$ en $M_{1(z_1)}$ tel que : $z_1 = e^{i\alpha}z + \frac{b}{r}$ est la rotation R de d'angle α et de centre le point $\Omega_{(\omega)}$ tel que : $\omega = e^{i\alpha}\omega + \frac{b}{r}$ ($\Omega_{(\omega)}$ est le point fixe par R). (**)

Donc :

$f\left(M_{(z)}\right) = M'_{(z')} \Leftrightarrow z' = rz_1$ où $z_1 = e^{i\alpha}z + \frac{b}{r}$

D'après le $3^{éme}$ cas ; la transformation plane qui transforme $M_{1(z_1)}$ en $M'_{(z')}$tel que : $z' = rz_1$ est l'homothétie h de rapport r de centre le point $O_{(0)}$ ($O_{(0)}$ est le point fixe par h).

Donc :

$f\left(M_{(z)}\right) = M'_{(z')} \Leftrightarrow z' = az + b$

$$\Leftrightarrow z' = r(R(z))$$
$$\Leftrightarrow z' = h(R(z))$$
$$\Leftrightarrow z' = (hoR)(z)$$

Finalement f est la composition de la rotation R d'angle $\alpha \equiv arg(a)\ [2\pi]$ et de centre $\Omega_{(\omega)}$ tel que $\omega = \frac{b}{r(1-e^{i\alpha})}$ (**) $\omega = \frac{b}{|a|-a}$; et de l'homothétie h de rapport $r = |a|$ et de centre $O_{(0)}$.

Théorème :

Soit a un complexe ($a \notin \mathbb{R}$). La transformation plane f qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$ est la composition de la rotation R et de l'homothétie h ; $f = hoR$ où :

- R est la rotation d'angle $\alpha \equiv arg(a)\ [2\pi]$ et de centre $\Omega_{(\omega)}$ où $\omega = \frac{b}{|a|-a}$
- h est l'homothétie rapport $r = |a|$ et de centre $O_{(0)}$.

Exercice :

Soit u un complexe non nul, et f la transformation plane qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = uz + i - \bar{u}$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques dans chacun des cas suivant :

1. $u = 1$
2. $u = -3$
3. $u = j$
4. $u = 4 - i\,4\sqrt{3}$

Problème :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$. soit a un complexe non nul ; Pour tout nombre z de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, on pose $f_a(z) = z' = \frac{az}{z-a}$.

1. Montrer que $f_a(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2\mathcal{R}e(a) = |a|^2\mathcal{R}e(z)$
2. Soit z un élément de $\mathbb{C}^* \setminus \{a\}$, on pose : $|z - a| = r$ et $\arg(z - a) \equiv \theta\ [2\pi]$

a. Calculer $|f_a(z) - a|$ en fonction de r est $|a|$

b. Calculer $arg(f_a(z) - a)$ en fonction de θ er r.

3. on pose $a = -1 + i$ et considérons les ensembles des points $M_{(z)}$ définis par :

$$(D) = \{M_{(z)}\,;\arg(z - a) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\,\}$$

$$(\mathcal{C}) = \{M_{(z)}\,;\left|f_a(z) - a\right| = 2\,\}$$

$$(\mathcal{E}) = \{M_{(z)}\,; f_a(z) \in i\mathbb{R}\,\}$$

a. Déterminer les ensembles $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{C})$ et montrer que (D) est une demi droite d'origine $A_{(a)}$ privée de A et déterminer son équation cartésienne.

b. soit z_0 un élément de $\mathbb{C} \setminus \{\,a\}$,et $B_{(z_0)}$ tel que $B \in (D) \cap\ (\mathcal{C})$; écrire $f_a(z_0)$ sous sa forme algébrique puis déterminer z_0.

c. Construire les ensembles (D); $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{E})$.

4. Déterminer la représentation complexe de la rotation ρ de centre a et d'angle $\frac{\pi}{3}$

5. Déterminer la représentation complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a.

6. Déterminer la transformation $to\rho$ et ses éléments caractéristiques.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I) DEFINITIONS ET NOTATIONS.

1) Définition :

Définition :

Une équation différentielle d'ordre n est une relation entre la variable réelle x, une fonction **inconnue** $\boldsymbol{x \mapsto y(x)}$ et ses dérivées d'ordre inférieure ou égale à n.

Remarque :

Pour s'simplifier l'écriture d'une équation différentielle on note l'inconnu (qui est une fonction) y au lieu de $y(x)$.

Exemples :

- L'équation différentielle : $y' = sin(2x)$ à pour solution les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto sin(2x)$ qui sont : $x \mapsto \frac{-1}{2} cos(x) + c$
- $y' + 2y = 0$ est une équation différentielle de 1^{er} ordre sans second membre.
- $y' + 2y = 3x^2 + x$ est une équation différentielle de 1^{er} ordre avec second membre.
- $y'' - 3y' + 5y = e^x$ est une équation différentielle de $2^{éme}$ ordre avec second membre.

II) L'EQUATION $\boldsymbol{y' = ay + b}$ OU $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*$

1) L'équation $\boldsymbol{y' = ay}$ ou $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*$

Soit a un réel non nul et Considérons l'équation différentielle $(E)\;\; y' = ay$

$(E) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = ay(x))$

- A noter que la fonction nulle θ $(\forall x \in \mathbb{R})(\theta(x) = 0)$ est une solution de l'équation différentielle.
- On suppose que y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ on aura :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = ay(x)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\left(\frac{y'(x)}{y(x)} = a\right) \quad \text{On passe au primitives} \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(l\,n|y(x)| = ax + c) \\ &\Leftrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{R})(|y(x)| = e^{ax+c} \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \pm e^c\, e^{ax}\,) \quad \text{où } \; c \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \lambda\, e^{ax}\,) \quad \text{où } \; \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Et puisque même la fonction nulle θ peut s'écrire de la forme $\theta(x) = \lambda\, e^{ax}$ $(\lambda = 0)$, on peut conclure que :

Propriété :

Soit a un réel non nul et $(E)\;\; y' = ay$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$.
La solution **générale de** l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions $\boldsymbol{x \mapsto y(x) = \lambda\, e^{ax}}$ où λ est un réel.

Applications :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. (E_1): $y' = 3y$
2. (E_2): $y' - y = 0$
3. (E_3): $3y' - 2y = 0$

2) L'équation $\boldsymbol{y' = ay + b}$ ou $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$.

Soient a un réel non nul, b un réel quelconque, Considérons l'équation différentielle $(E)\;\; y' = ay + b$

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\left(y'(x) = a\left(y(x) + \frac{b}{a}\right)\right)\\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\left(y(x) + \frac{b}{a}\right)' = a\left(y(x) + \frac{b}{a}\right)\\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(z'(x) = az(x)) \quad \text{où } z(x) = y(x) + \frac{b}{a}\\ &\Leftrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{R})\left(y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax}\right)\\ &\Leftrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{R})\left(y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

Propriété :

Soit a un réel non nul et b un réel, (E) $y' = ay + b$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$.
La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions $\boldsymbol{x \mapsto y(x) = \lambda\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$ où λ est un réel.

Remarque :

Le réel λ dans la solution générale de l'équation différentielle (E) peut-être déterminé par les conditions initiales

Exemple :

1- Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 3$

2- déterminer la solution φ de (E) telle que $\varphi(1) = -1$.

Solution :

1- d'après la propriété précédente : La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions $\boldsymbol{x \mapsto y(x) = \lambda\, e^{-2x} + \frac{3}{2}}$ où λ est un réel.

2- φ est une solution de (E) donc $\boldsymbol{\varphi(x) = \lambda\, e^{-2x} + \frac{3}{2}}$ et puisque $\varphi(1) = -1$ alors : $\lambda\, e^{-2} + \frac{3}{2} = -1$
donc $\lambda e^{-2} = \frac{-5}{2}$ d'où $\lambda = \frac{-5e^2}{2}$ et par suite : $\varphi(x) = \frac{-5e^2}{2}\, e^{-2x} + \frac{3}{2}$

Exercice :

Considérons les équations différentielles (E_0): $y' - y = 0$ et (E): $y' - y = 2x^2 + x$

1- Résoudre l'équation différentielle (E_0)

2- a) Soit P une fonction polynôme, quel sera le degré de P affin que P soit une solution de (E)

b) Déterminer le polynôme P pour que P soit une solution de (E)

c) Montrer que : y est solution de (E) si et seulement si $(y - P)$ est solution de (E)

d) En déduire la solution générale de l'équation (E)

3) déterminer la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = 2$

III) LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES : $ay'' + by' + cy = 0$

Soit a un réel non nul et b et c sont des réels quelconques.

Définition :

Considérons l'équation différentielle : (E): $ay'' + by' + cy = 0$ l'équation (1): $ar^2 + br + c = 0$ a variable réelle r s'appelle **l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E).**

Exemple :

- l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E): $-3y'' + 2y' - 4y = 0$ est (1): $-3r^2 + 2r - 4 = 0$
- l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E): $y'' + y = 0$ est (1): $r^2 + 1 = 0$.

1) Résolution de l'ED (E): $ay'' + by' + cy = 0$

L'équation $ay" + by' + cy = 0$ est dite à coefficients constants car a, b et c sont des réels donnés. On supposera $a \neq 0$ (sinon, l'équation est du premier ordre).

1.1) Linéarité

L'équation $ay" + by' + cy = 0$ possède la propriété suivante :

Si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions de l'équation : $ay" + by' + cy = 0$, alors, pour tous nombres A et B, la fonction $Ay_1 + By_2$ est aussi une solution.

La démonstration de cette propriété est facile et utilise les propriétés de la dérivation.

A cause de cette propriété, on dit que l'équation : $ay" + by' + cy = 0$ est linéaire.

1.2) Résolution

Par analogie avec une équation du premier ordre, on cherche une solution de la forme : $y(x) = e^{rx}$ où r est un complexe.

La fonction $g(x) = e^{rx}$ est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x : $y'(x) = re^{rx}$, $y''(x) = r^2e^{rx}$

Donc, dire que y est solution équivaut à dire que, pour tout réel x : $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$

soit encore, puisque e^{rx} n'est jamais nul, à : $ar^2 + br + c = 0$

La résolution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ permet donc de trouver des solutions (a priori à valeurs complexes). De plus, lorsque l'on connaît deux solutions y_1 et y_2 de l'équation $ay" + by' + cy = 0$, on en connaît une famille car toutes les fonctions $Ay_1 + By_2$, avec A et B complexes, sont aussi solutions.

- **Premier cas** : Si $\Delta > 0$ alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines, r_1 et r_2, réelles et distinctes.

D'après ce qui précède, les fonctions y_1 et y_2, définies sur IR par : $y_1(x) = e^{r_1x}$ et $y_2(x) = e^{r_2x}$ sont des solutions (à valeurs réelles dans ce cas).

Nous admettrons que toute autre solution réelle s'écrit : $y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ où A et B réels.

- **Deuxième cas** : Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines, z_1 et z_2, complexe conjugués.

Alors les fonctions g_1 et g_2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $g_1(x) = e^{z_1x}$, et $g_2(x) = e^{\bar{z}_1x}$ sont des solutions à valeurs complexes.

Notons $z_1 = \alpha + i\omega$ où $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sont des réels.

$g_1(x) = e^{z_1x} = e^{(\alpha+i\omega)x} = e^{\alpha x}.e^{i\omega x} = e^{\alpha x}.(cos(\omega x) + isin(\omega x))$ et

$g_2(x) = e^{\overline{z_1}x} = e^{(\alpha-i\omega)x} = e^{\alpha x}.e^{-i\omega x} = e^{\alpha x}.(cos(\omega x) - isin(\omega x))$

$y_1 = \frac{g_1(x)-g_2(x)}{2}$ et $y_2 = \frac{g_1(x)+g_2(x)}{2i}$ sont aussi des solutions de l'ED (E) et à valeurs réelles et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})(y_1(x) = e^{\alpha x}\, cos(\omega x)$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(y_2(x) = e^{\alpha x}\, sin(\omega x)$

Nous admettrons que toutes les solutions s'écrivent de la forme : $y = Ae^{\alpha x}cos(\omega x) + Be^{\alpha x}\, sin(\omega x)$

Pour résumer : si $z_1 = p + iq$ alors toutes les solutions de l'ED s'écrivent de la forme :

$y = e^{px}(Acos(qx) + Bsin(qx))$ où A et B sont des réels.

- **Troisième cas** : Si $\Delta = 0$ l'équation $ar^2 + br + c = 0$ a une racine double $r = \frac{-b}{2a}$

La fonction $y_1 = e^{rx}$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'ED (E) ; nous admettrons que la fonction $y_2 = xe^{rx}$ est aussi solutions de (E) et que toutes les solutions de (E) s'écrivent de la forme $y = (Ax + B)e^{rx}$ où A et B sont des réels

Théorème :

Soit l'équation différentielle (E) $ay'' + by' + cy = 0$ et soit (E_1): $ar^2 + br + c = 0$ son équation caractéristique. $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E_1)

- Si $\Delta > 0$ l'équation (E_1) a deux racines , r_1 et r_2, réelles et distinctes et les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où A et B réels

- Si $\Delta < 0$ l'équation (E_1) a deux racines, z_1 et z_2, complexes conjugués et si $z_1 = p - iq$ alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $y = e^{px}(Aco\,s(qx) + B\,sin(px))$ où A et B réels

- Si $\Delta = 0$ l'équation (E_1) admet une racine double $r = \frac{-b}{2a}$ et les solutions de l' ED (E) sont les fonctions : $y = (Ax + B)e^{rx}$ où A et B sont des réels .

Exercice :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2y'' + y' - 3y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' + 4y' + 4y = 0$
4. $y'' + 2y = 0$

L'ARITHMETIQUE

I) REPPEL

1) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; on dit que l'entier relatif b divise a s'il existe un entier relatif k tel que $\boldsymbol{a = kb}$; on écrit : $\boldsymbol{b|a}$.
On dit que a est divisible par b ou a est un multiple de b

Définition :

- Si $b|m$ et $b|n$ on dit que b est un diviseur commun de m et n
- Si $b|m$ et $b'|m$, on dit que m est un multiple commun de b et b'.

Propriété :

Etant donnés des entiers relatifs non nuls. On a les assertions suivantes :

① $\begin{cases} a|b \\ b|a \end{cases} \Rightarrow |a| = |b|$

② $\begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \Rightarrow a|c$

③ $\begin{cases} a|m \\ a|n \end{cases} \Rightarrow a|\alpha m + \beta n$ où α et β sont des entiers relatifs quelconques.

Application :

Soient $a_n = 2n + 1$ et $b_n = 5n + 4$

1- Montrer que tout diviseur commun de a_n et b_n divise 3.

2- Déterminer tous les diviseurs communs de a_n et b_n

Propriété :

① $\begin{cases} d|a \\ \delta|b \end{cases} \Rightarrow d\delta|ab$

② $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n$

③ $\begin{cases} d|a \\ d|a+b \end{cases} \Rightarrow d|b$

2) Division Euclidienne

Propriété :

Considérons a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$ ils existent un entiers relatif q et un entier naturel r tels que : $a = bq + r$ où $0 \leq r < |b|$

- L'entier a s'appelle : ***Le divisé***
- L'entier b s'appelle : ***Le diviseur***
- L'entier q s'appelle : ***Le quotient***
- L'entier r s'appelle : ***Le reste***

Exercice 1 :

Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 3 ne peut pas être égale à 2.

Exercice 2 :

a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme $p = 6n + 1$ ou $p = 6n + 5$

b) L'inverse est-il vraie ?

3) Les nombres premiers

Définitions

- On dit que l'entier d est un diviseur **effectif** de l'entier relatif a si $d|a$ et $|d| \neq 1$ et $|d| \neq |a|$
- On dit qu'un entier relatif non nul p est **premier** s'il est différent de 1 et s'il n'admet pas de diviseurs effectifs.

Remarque :

- Un nombre premier p admet exactement deux diviseurs positifs 1 et $|p|$.

- Si p est un nombre premier positif alors p n'admet pas de diviseurs effectifs de même $-p$ n'admet pas de diviseurs effectif d'où : $-p$ est aussi premier ;
  Pour l'étude des nombres premiers on se contente d'étudier les nombres premiers positifs.

Propriété :

Soit a un entier naturel non nul différent de 1 et non premier, **le plus petit diviseur de a diffèrent de 1 est un nombre premier**

Propriété :

Soit n un entier naturel non nul, diffèrent de 1 et non premier, il existe un nombre premier p qui divise l'entier n et qui vérifie $p^2 \leq n$.

Remarque :

Cette propriété nous permet de déterminer si un nombre est premier ou non.

Corolaire :

Si un entier n n'est divisible par aucun entier premier p et qui vérifie $p^2 \leq n$ alors n est premier.

Crible d'Eratosthène. Les nombres premiers inferieurs à 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Application : Montrer que le nombre 2003 est premier.

Théorème :

L'ensemble des nombres premiers est infini.

4) Plus grand diviseurs commun

Définition :

On dit que le nombre d est **le plus grand diviseur commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque d divise a et d divise b et qu'il n'y a pas d'autre plus grands diviseurs de ces deux nombres. On note $d = PGDC(a,b) = a \wedge b$

Propriétés :

- $a \wedge a = |a|$
- $1 \wedge a = 1$
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
- Si $b|a$ alors $a \wedge b = |b|$
- $\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \Rightarrow d|(a \wedge b)$
- $a \wedge b = a \wedge (a - b)$

Exercice :

1- Montrer que tout diviseur commun de $a = 2n + 3$ et $b = 5n + 1$ est un diviseur de 13

2- Déterminer tous les diviseurs commun de a et b.

3- Déterminer les valeurs de n pour lesquels $a \wedge b = 13$.

Définition :

On dit que deux entier relatifs a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

5) L'algorithme d'Euclide.

Théorème :

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul on a : $a = bq + r$ où $0 \leq r < b$ on a : $a \wedge b = b \wedge r$

L'algorithme d'Euclide.

Soient a et b deux entiers naturels ($b \neq 0$) on a :

$a = bq_1 + r_1$ si $r_1 \neq 0$ alors :

$b = r_1 q_2 + r_2$ si $r_2 \neq 0$ alors :

$r_1 = r_2 q_3 + r_3$ si $r_3 \neq 0$ alors :

…….

$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$ si $r_n \neq 0$ alors :

$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}$ si $r_{n+1} = 0$ on arrête le processus.

Et d'après la propriété précédente : $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \cdots = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$ car : $r_n | r_{n-1}$

Propriété :

Soient a et b deux entier naturels non nuls.
Le plus grand diviseur commun de a et b est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.

Application :

1- Trouver le $PGDC(362154\,, 82350)$.

2- Déterminer tous les diviseurs commun de 362154 et 82350.

Propriété :

Soient a et b deux entier relatifs non nuls et $\delta = a \wedge b$, on a les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs de δ. On peut dire que : $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b = \mathcal{D}_{a \wedge b}$

6) Le plus petit multiple commun.

Définition :

On dit que le nombre entier naturel m est **le plus petit multiple commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque m est un multiple de a et de b et qu'il n'y a pas d'autre plus petit multiple non nuls de ces deux nombres. On note : $m = PPCM(a, b) = a \vee b$

Propriétés :

- $a \vee a = |a|$
- $a \vee b = b \vee a$
- $a \vee 1 = |a|$
- Si $b|a$ alors $a \vee b = |a|$
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
- $a|(a \vee b)$; $b|(a \vee b)$ et $(a \vee b)|ab$

Propriété :

Considérons a et b deux entiers relatifs.
Si $a \vee b = m$ et M un multiple commun de a et b alors $m|M$.

7) la congruence modulo n.

Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs ; et n **un entier naturel non nul.** on dit que : **a est congrue à b modulo n** si $n|(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$. On écrit : $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} \quad [\boldsymbol{n}]$

Propriété :

Si $a \equiv b \quad [n]$ alors a et b ont le même reste de la division euclidienne sur n

Propriété fondamentale :

- $(\forall a \in \mathbb{Z})(a \equiv a \quad [n])$ on dit que la relation de congruence est **réflexive.**
- $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2)(\, a \equiv b \quad [n] \Leftrightarrow b \equiv a \quad [n]\,)$, on dit que la relation de congruence est **symétrique.**
- $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3)\left(\begin{matrix} a \equiv b & [n] \\ b \equiv c & [n] \end{matrix} \Rightarrow a \equiv c \quad [n]\right)$, on dit que la relation de congruence est **transitive.**

Définition :

Puisque la relation est de congruence est réflexive, symétrique et transitive on dit que la relation de congruence est une **relation d'équivalence**

Propriété et définition :

Soit n un entier naturel non nul. Si $a \equiv b \quad [n]$ et $c \equiv d \quad [n]$ alors ;

- $a + c \equiv b + d \quad [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$
- $ac \equiv bd \quad [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Corolaire :

Si $a \equiv b \quad [n]$ alors pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a : $a^k \equiv b^k \quad [n]$

Applications

❶ Déterminer le reste de la division euclidienne de 4587^{2018} par 9

❷ Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13

❸ Montrer que pour tout n entier naturel : $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

❹ Montrer que pour tout n entier naturel, $5n^3 + n$ est divisible par 6

❺ Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors : $n^6 - 1$ est un multiple de 7

❻ Montrer que pour tout entier naturel, le nombre $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6

8) Les classes d'équivalences.

Définition :

Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste r de la division euclidienne par n s'appelle **la classe d'équivalence de r** et se note : $\bar{r}$ ou $\dot{r}$

$$\bar{r} = \{m \in \mathbb{Z} \,/\, m \equiv r \quad [n]\} = \{nk + r \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

Définition :

Soit n un entier naturel non nul. On définit dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ les deux lois :

- **L'addition :** On pose : $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$
- **La multiplication :** On pose : $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$

Exemple :

Dans $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$: $\bar{3} \times \bar{4} = \bar{0} \qquad \bar{5} + \bar{4} = \bar{3}$

Exercice :

1- Dresser les tables des opérations de $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$

2- Résoudre dans $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$ les équations :

a) $\bar{2}x = \bar{1}$ b) $\bar{4}x + \bar{1} = x + \bar{3}$ c) $\bar{5}x^2 + \bar{3}x + \bar{1} = \bar{0}$

9) Décomposition d'un entier en facteurs des nombres premiers

Théorème :

- Chaque entier **naturel** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite : $m = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$
- Chaque entier **relatif** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite : $m = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \varepsilon \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$ où $\varepsilon \in \{-1,1\}$

Propriété 1:

Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme : $a = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$; un entier d non nul divise l'entier a si et seulement si d à une décomposition de la forme :

$d = \varepsilon'\, p_1^{\delta_1} \times p_2^{\delta_2} \times p_3^{\delta_3} \times \dots \times p_n^{\delta_n}$ où $(\forall i \in [\![1,n]\!])(0 \leq \delta_i \leq \alpha_i)$

Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme : $a = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$ et $d = \varepsilon'\, p_1^{\delta_1} \times p_2^{\delta_2} \times p_3^{\delta_3} \times \dots \times p_n^{\delta_n}$ un diviseur de a le nombre des valeurs possibles de δ_i est $\alpha_i + 1$

On en déduit que :

Propriété 2:

Si $a = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$ est un entier, le nombre des diviseurs de a est : $2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$

Application :

1- Décomposer le nombre 2975 en facteurs des nombres premiers

2- Déterminer le nombre des diviseurs de 2975.

3- Déterminer tous les diviseurs positifs de 2975.

Propriété 3 :

Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme : $a = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$; un entier m est un multiple de a si et seulement si $m = \varepsilon'\, p_1^{\mu_1} \times p_2^{\mu_2} \times p_3^{\mu_3} \times \dots \times p_n^{\mu_n}$ où $(\forall i \in [\![1, n]\!])(\alpha_i \leq \mu_i)$

9.1 Le P.G.C.D de deux nombres.

Soient $a = \varepsilon \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$ et $b = \varepsilon' \prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ; si $d = \varepsilon'' \prod_{k=1}^{n} p_k^{\delta_k}$ est un diviseur commun de a et b alors :

$$(\forall k \in [\![1, n]\!])\begin{cases} 0 \leq \delta_k \leq \alpha_k \\ 0 \leq \delta_k \leq \beta_k \end{cases}$$

On en déduit que le $P.G.D.C\ (a, b)$ est l'entier $\delta = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\delta_k}$ où $(\forall k \in [\![1, n]\!])(\delta_k = \inf(\alpha_k, \beta_k))$

Propriété :

Si $a = \varepsilon \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$ et $b = \varepsilon' \prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers alors $a \wedge b = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\inf(\alpha_k, \beta_k)}$

Exercice :

1- Décomposer les nombres 362154 et 82350 en produit des facteurs premiers

2- Déterminer le P.G.C.D de 362154 et 82350

3- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350

9.2 Le P.P.C.M de deux nombres.

Soient $a = \varepsilon \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$ et $b = \varepsilon' \prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ; si $m = \varepsilon'' \prod_{k=1}^{n} p_k^{\mu_k}$ est un multiple commun de a et b alors :

$$(\forall k \in [\![1, n]\!])\begin{cases} \alpha_k \leq \mu_k \\ \beta \leq \mu_k \end{cases}$$

On en déduit que le $P.P.C.M\ (a, b)$ est l'entier $\mu = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\mu_k}$ où $(\forall k \in [\![1, n]\!])(\mu_k = \sup(\alpha_k, \beta_k))$

Propriété :

Si $a = \varepsilon \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$ et $b = \varepsilon' \prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers alors $a \vee b = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\sup(\alpha_k, \beta_k)}$

Propriété :

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, on a les assertions suivantes :

- $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$
- $ca \vee cb = c(a \vee b)$
- $ca \wedge cb = c(a \wedge b)$

Exercice :

Si $d|a$ et $d|b$ alors : $d|(a \wedge b)$.

II) THEOREMES PRINCIPAUX.

1) Théorème de Bézout :

Théorème 1 :

Soient a et b et des entiers relatifs non nuls :

$$a \wedge b = d \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 ; \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$$

Preuve :

$(\Rightarrow)$ On suppose que $a \wedge b = d$

On a $d|a$ et $d|b$ donc $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a = \alpha d$ et $b = \beta d$ donc :

$$d = \alpha d \wedge \beta d$$
$= |d|(\alpha \wedge \beta)$ et puisque $d \in \mathbb{N}^*$ alors $\alpha \wedge \beta = 1$

$(\Leftarrow)$ On suppose que $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 ; \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$ On a :

$a \wedge b = \alpha d \wedge \beta d = |d|(\alpha \wedge \beta) = d$ car $(|d| = d$ et $\alpha \wedge \beta = 1)$

Théorème 2 :

Soient a et b et des entiers relatifs non nuls : $a \wedge b = d \Rightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \,; d = au + bv$

Preuve :

1- Si $a|b$ alors $a \wedge b = |b|$

- si $b > 0$ alors $b = 0a + 1b$
- si $b < 0$ alors $b = 0a + (-1)b$

2- Si $b|a$ (même raisonnement)

3- On suppose que $b \nmid a$ tel que $0 < b < a$

d'après l'algorithme d'Euclide on a

$a = bq_0 + r_0$ si $r_0 \neq 0$ alors :
$b = r_0q_1 + r_1$ si $r_1 \neq 0$ alors :
$r_0 = r_1q_2 + r_2$ si $r_2 \neq 0$ alors :
…….
$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ si $r_n \neq 0$ alors :
$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}$ si $r_{n+1} = 0$ on arrête le processus .

Et d'après la propriété précédente : $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \cdots = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$ car : $r_n | r_{n-1}$
et $0 < r_n < r_{n-1} < \cdots < r_1 < r_0 < b$

On obtient :

$r_0 = a - bq_0 = u_0a + v_0b$ où $u_0 = 1$ et $v_0 = -q$
$r_1 = b - r_0q_1 = b - (a - bq_0)q_1 = -aq_1 + b(1 + q_0q_1) = u_1a + v_1b$ où $u_1 = -q_1$ et $v_1 = (1 + q_0q_1)$

On répète le processus et à chaque fois on montre que : $r_k = au_k + bu_k$ cette opération est valable pour tous les reste r_k en particulier pour le dernier reste r_n qui est $a \wedge b$ donc : $\exists (u_n, v_n) \in \mathbb{Z}^2 \,; a \wedge b = au_n + bv_n$.

Remarque

- Dans l'écriture $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \,; a \wedge b = au + bv$ le couple (u, v) n'est pas unique.
  $12 \wedge 9 = 3$ on a $3 = 1 \times 12 + (-1) \times 9$ et $3 = (-2) \times 12 + 3 \times 9$
- La réciproque du théorème n'est pas vraie :
  $2 \times 12 + (-2) \times 9 = 6$ mais $12 \wedge 9 = 3 \neq 6$

Théorème (Théorème de Bézout)

Soient a et b et des entiers relatifs non nuls : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \,; 1 = au + bv$

$(\Rightarrow)$ C'est le théorème précèdent.
$(\Leftarrow)$ On suppose que $1 = au + bv$
Soit $d = a \wedge b$ on aura : $\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases}$ donc $\begin{cases} d|ua \\ d|vb \end{cases}$ par suite $d|ua + vb = 1$ donc $d = 1$ $(d \in \mathbb{N}^*)$
et donc $a \wedge b = 1$

Exemples :

- $(5n + 3) \wedge (2n + 1) = 1$ car : $2 \times (5n + 3) + (-5) \times (2n + 1) = 1$
- $(n + 2) \wedge (n^2 + 2n - 1) = 1$ car $n \times (n + 2) + (-1) \times (n^2 + 2n - 1) = 1$

Application :

❶L'utilisation de l'algorithme d'Euclide pour déterminer les coefficients de *Bezout*
Montrons que : $360 \wedge 84 = 12$ et déterminons u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $360u + 84v = 12$
on a : $360 = 2^3.3^2.5$ et $84 = 2^2.3.7$ donc $360 \wedge 84 = 2^2.3 = 12$
D'autre part :

$$360 = 84 \times 4 + \boxed{24} \longrightarrow 24 = \boxed{a - (b \times 4)}$$

$$84 = 24 \times 3 + \boxed{12} \longrightarrow b - \left(\overbrace{a - (b \times 4)}^{24}\right) \times 3 = 12$$

$24 = 12 \times 2 + 0$

Donc : $-3a + 13b = 12$

❷ Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $17x + 36y = 1$ et détérminons une solution particulière de (E).

On a $17 \wedge 36 = 1$ donc d'après le théorème de $Bézout$; il existe u et v tels que : $17u + 36v = 1$ donc (E) admet une solution.

On pose $a = 36$ et $b = 17$ on obtient :

$a = 2b + 2$
$b = 8 \times 2 + 1$

Donc : $2 = a - 2b$ et $b = 8 \times (a - 2b) + 1$

D'où : $-8a + 17b = 1$ donc le couple $(-8,17)$ est une solution de l'équation (E).

2) Application du théorème de Bézout :

Théorème de Gauss

Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls : $\begin{cases} c|ab \\ c \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow c|a$

Preuve :

On a : $c \wedge a = 1$ d'après le théorème de Bézout : $(\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vc = 1)$ d'où $bau + bvc = b$

Et puis que $c|ab$ alors $ab = kc$ (où $k \in \mathbb{Z}$) donc $kcu + bvc = b$ d'où $c(ku + bv) = b$ et $ku + bv \in \mathbb{Z}$ donc $c|b$.

Remarque :

La condition $c \wedge b = 1$dans le théorème de Gauss est indispensable ; $6|4 \times 3$ mais $6 \nmid 3$ et $6 \nmid 4$

Théorème

Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls : $\begin{cases} a|c \text{ et } b|c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab|c$

Preuve :

On a : $a|c$ et $b|c$ donc ils existent k et h tels que : $c = ka = hb$ et puisque $a \wedge b = 1$ alors :

$(\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb = 1)$

Donc : (on multipliant par c) $c = cau + cvb$

$= hbau + kavb$

$= ab(hu + kv)$ et par suite $ab|c$

Remarque :

La condition $c \wedge b = 1$dans le théorème précèdent est indispensable ; $6|12$ et $3|12$ mais $6 \times 3 = 18 \nmid 12$.

Propriétés :

Soients a, b et c des entiers relatifs non nuls :

❶ $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1$ ❷ $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1$ ❸ $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^n \wedge b^m = 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Preuve :

❶

$(\Rightarrow)$ On suppose que $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} (\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb = 1) \\ (\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2)(a\alpha + \beta c = 1) \end{cases}$

Par le produit on obtient : $(au + vb)(a\alpha + \beta c) = 1$; d'où après développement on obtient :

$a^2u\alpha + au\beta c + vba\alpha + vb\beta c = 1$ et donc $(au\alpha + u\beta c + vb\alpha)a + (v\beta)bc = 1$ donc et d'après Bézout $a \wedge bc = 1$

$(\Leftarrow)$ On suppose que $a \wedge bc = 1$ donc $(\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vbc = 1)$

D'où $au + (vb)c = 1$ donc $a \wedge c = 1$ et $au + (vc)b = 1$ donc $a \wedge b = 1$

❷

($\Rightarrow$) On suppose que $a \wedge b = 1$ et on montre par récurrence que : $a \wedge b^n = 1$

- Pour $n = 1$ la propriété est vraie.
- On suppose que la propriété est vraie pour n
- On montre qu'elle est vraie pour $n + 1$

  On a : $\begin{cases} a \wedge b^n = 1 \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$ donc et d'après ❶ on a : $a \wedge bb^n = 1$ d'où $a \wedge b^{n+1} = 1$

  Donc si $a \wedge b = 1$ alors $a \wedge b^n = 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

($\Leftarrow$)

On suppose que $a \wedge b^n = 1$ donc et d'près le théorème de Bézout $(\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb^n = 1)$

Donc : $au + (vb^{n-1})b = 1$ donc $(\exists (u', v') \in \mathbb{Z}^2)(au' + v'b = 1)$ et par suite $a \wedge b = 1$

❸ Est un résultat immédiat de ❷.

3) L'équation $ax + by = c$

Théorème : (fondamental)

L'équation (E) : $ax + by = c$ admet une solution si et seulement si $(a \wedge b)|c$

Preuve :

- On suppose que $d = (a \wedge b)|c$ alors : $(\exists k \in \mathbb{Z})(c = kd)$ et on a : $(\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb = d)$

  $kd = k(a \wedge b) = (ku)a + (kv)b$

  C'est-à-dire : $c = (ku)a + (kv)b$ donc l'équation (E) admet (x_0, y_0) comme solution où $\begin{cases} x_0 = ku \\ y_0 = kv \end{cases}$
- In versement : On suppose que : $ax + by = c$ admet une solution (x_0, y_0), donc :

  $ax_0 + by_0 = c$ puisque : $\begin{cases} (a \wedge b)|a \\ (a \wedge b)|b \end{cases}$ alors $\begin{cases} (a \wedge b)|x_0 a \\ (a \wedge b)|y_0 b \end{cases}$ donc $(a \wedge b)|(ax_0 + by_0) = c$ donc : $(a \wedge b)|c$.

Théorème :

Si le couple (x_0, y_0) est une solution de l'équation (E) : $ax + by = c$ alors, l'ensemble des solutions de (E) est : $S = \left\{\left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b}\right) / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Démonstration :

On pose : $A = \left\{\left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b}\right) / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ et on montre que $\begin{cases} A \subset S \\ S \subset A \end{cases}$

- Montrons que $A \subset S$: il suffit de montrer que le couple $\left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b}\right)$ est solution de l'équation (E) :

  On a : $$a\left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}\right) + b\left(y_0 - \frac{ka}{a \wedge b}\right) = ax_0 + \frac{ak\cancel{b}}{a \wedge b} + by_0 - \frac{bk\cancel{a}}{a \wedge b}$$
  $$= ax_0 + by_0 = c$$

  Donc le couple $\left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b}\right)$ (pour $k \in \mathbb{Z}$) est solution : d'où : $A \subset S$.
- Inversement : On suppose que le couple $(x, y) \in S$

  Donc (x, y) es solution de l'équation (E) d'où $ax + by = c$; or : (x_0, y_0) est une solution de l'équation (E) , donc : $ax_0 + by_0 = c$ donc (différence membre à membre) $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$

  Soit $d = a \wedge b$ on a : $(\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2)$ $\begin{cases} a = \alpha d \quad \text{et } b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$

  Donc :
  $$\begin{aligned} (x, y) \in S &\Leftrightarrow a(x - x_0) = -b(y - y_0) \\ &\Leftrightarrow \alpha d(x - x_0) = -\beta d(y - y_0) \\ &\Leftrightarrow \alpha(x - x_0) = -\beta(y - y_0) \ (*) \qquad (d \neq 0) \end{aligned}$$

  On conclut que : $\beta |\ \alpha(x - x_0)$ et puisque : $\alpha \wedge \beta = 1$ alors (d'après T. Gauss) $\beta|(x - x_0)$

  Donc $(\exists k \in \mathbb{Z})((x - x_0) = k\beta)$ et par suite : (*) $\alpha k\beta = -\beta(y - y_0)$ d'où : $y - y_0 = -k\alpha$

  Par suite : $(x, y) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} (y - y_0) = -k\alpha \\ (x - x_0) = k\beta \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$ en remplaçant $\begin{cases} \alpha \quad \text{par } \frac{a}{d} \\ \beta \quad \text{par } \frac{b}{d} \end{cases}$ on obtient :

$(x,y) \in S \Leftrightarrow x = x_0 + \frac{kb}{d}$ et $y = y_0 - \frac{ka}{d}$ C.Q.F.D.

Exemple :

Considérons l'équation (E): $756x - 245y = 14$

1- Montrer l'équation (E) admet une solution.

2- Déterminer une solution particulière de (E)

3- Résoudre l'équation (E)

Solution :

$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$ et $245 = 5 \times 7^2$

1- On a : $756 \wedge 245 = 7$ et $7|14$ donc l'équation (E) admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

2- En utilisant l'algorithme d'Euclide on obtient $a = 756$ et $b = 245$

$a = 3 \times b + 21$

$b = 11 \times 21 + 14$

$21 = 14 + 7$

On a donc :

$21 = a - 3b$

$b = 11 \times (a - 3b) + 14 \Leftrightarrow 14 = 34b - 11a$

$7 = (a - 3b) - (34b - 11a) \Leftrightarrow 7 = 12a - 37b$

Finalement :

$14 = 24a - 74b$ et donc le couple $(24{,}74)$ est une solution particulière de (E) d'où

$S = \left\{\left(24 - \frac{k\times 245}{7}, 74 - \frac{k\times 756}{7}\right) / \ k \in \mathbb{Z}\right\} = \{(24 - 35k, 74 - 108k) / \ k \in \mathbb{Z}\} = \{(24 + 35k, 74 + 108k) / \ k \in \mathbb{Z}\}$

4) La congruence modulo n ,complément.

Théorème :

Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. et $n \in \mathbb{N}^*$ et $d = n \wedge c$ on a : $ac \equiv bc\ [n] \Leftrightarrow a \equiv b \left[\frac{n}{d}\right]$

Preuve :

$(\Rightarrow)$

On suppose : $ac \equiv bc\ [n]$, donc $n|(ac - bc) = c(a - b)$ donc $\frac{n}{d} | \frac{c}{d}(a - b)$ et comme $\frac{n}{d} \wedge \frac{c}{d} = 1$

Alors :(D'après théorème de Gauss)

$\frac{n}{d}|(a - b)$ donc : $a \equiv b \left[\frac{n}{d}\right]$

$(\Leftarrow)$

On suppose que : $a \equiv b \left[\frac{n}{d}\right]$ donc $a = b + k\frac{n}{d}$ $(k \in \mathbb{Z})$ donc $da = db + kn$ $(d = n \wedge c \Rightarrow c = \alpha d)$

Donc : $\alpha da = \alpha db + \alpha kn$ d'où $ca = cb + hn$ donc $ac \equiv bc\ [n]$.

Propriété :

❶ $\begin{cases} ac \equiv bc\ [n] \\ c \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b\ [n]$ ❷ $\begin{cases} a \equiv b\ [n] \\ m|n \end{cases} \Rightarrow a \equiv b\ [m]$ ❸ $\begin{cases} ac \equiv bc\ [p] \\ p \text{ premier et } p \nmid c \end{cases} \Rightarrow a \equiv b\ [m]$

Preuve :

Ce sont des résultats immédiats du théorème précédent.

5) Le P.G.D.C et le P.P.M.C de plusieurs nombres.

Définition :

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers relatifs non nuls, le plus grand entier naturel d qui divise en même temps tous les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ s'appelle le plus grand diviseur commun des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ et se note : $d = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$

Théorème :

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers relatifs non nuls ; on a :

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-2}) \wedge (a_{n-1} \wedge a_n)$$

Exemple :

$$756 \wedge 350 \wedge 616 = 756 \wedge (350 \wedge 616) = 756 \wedge 14 = 14$$

Théorème $(Généralisation\ de\ Bézout)$

Si $d = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge\ a_n$ alors $\exists(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que : $d = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$

Preuve : par récurrence

Définition :

On dit que les entiers relatifs non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont premiers entre eux si $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge\ a_n = 1$

Remarque :

Les entiers relatifs non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont premiers entre eux ne veut pas dire que les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont premiers entre eux deux à deux.

Exemple :

3, 5 et 6 sont premiers entre eux.

Théorème $(Généralisation\ de\ Bézout)$

Si $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge\ a_n = 1$ si et seulement si $\exists(u_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que : $1 = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i$

Définition :

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers relatifs non nuls, le plus petit entier naturel m qui est multiple en même temps tous les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ s'appelle le plus grand diviseur commun des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et se note : $d = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee\ a_n$

6) Propriétés des nombres premiers.

Théorème :

① Si p et q sont des nombres premiers positifs alors ils sont premier entre eux.

② Si p est premier alors il est premier avec tout nombre entier non nul a tel que $p \nmid a$

Preuve : En exercice.

Remarque :

La réciproque de ① n'est pas vrais ; 14 et 9 sont premiers entre eux mais aucun d'eux n'est premiers.

Propriétés :

❶ $\begin{cases} p \text{ premier} \\ p|ab \\ p \nmid a \end{cases} \Rightarrow p|b$ ❷ $\begin{cases} p \text{ premier} \\ p|ab \end{cases} \Rightarrow p|a \text{ ou } p|b$ ❸ $\begin{cases} p \text{ premier} \\ p|a_1 a_2 \ldots a_n \end{cases} \Rightarrow \exists i \in \{1,2,..,n\}\ p|a_i$

❹ $\begin{cases} \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}; p_i \text{ premier} \\ p \text{ premier} \\ p|p_1 p_2 \ldots p_n \end{cases} \Rightarrow \exists i \in \{1,2,..,n\}\ p = p_i$

Preuve : Résultat du théorème de Gauss.

7) Le petit théorème de Fermat.

Théorème :

Si p est un nombre premier et a un entier relatif non nul et pas divisible par p alors :$a^{p-1} - 1$ est divisible par p c'est-à-dire $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$ ou encore : $a^p \equiv a\ [p]$

Preuve :

Soient p un nombre premier et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq p-1$

On a p premier et $p > k$ donc $p \nmid k$ et par suite $p \wedge k = 1$ d'autre part :

$$kC_p^k = k\frac{p!}{k!\,(p-k)!} = \frac{p \times (p-1)!}{(k-1)!\,(p-k)!} = pC_{p-1}^{k-1}$$

Donc $p|kC_p^k$ et comme $p \wedge k = 1$ alors d'après T. Gauss $p|C_p^k$

Montrons que $p|(a+1)^p - a^p - 1$

On a d'près la formule de binôme On a : $(a+1)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \cdots + C_p^{p-1} a + 1$

Donc $(a+1)^p - a^p - 1 = C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \cdots + C_p^{p-1} a$

Et comme $p|C_p^k$ pour $1 \leq k \leq p-1$ alors $p|(a+1)^p - a^p - 1$

On a donc : $(a+1)^p - 1 \equiv a^p \ [p]$.

Montrons par récurrence sur a (On prend pour le moment $a \in \mathbb{N}$) que $a^p \equiv a \ [p]$

- Pour $a = 0$ la propriété est vraie car $0^p = 0 \equiv 0 \ [p]$
- On suppose que la propriété est vraie pour a c'est-à-dire $a^p \equiv a \ [p]$
- Montrons que le propriété est vraie pour $(a+1)$ c'est-à-dire $(a+1)^p \equiv a+1 \ [p]$
  On a : d'après les questions précédente $(a+1)^p \equiv a^p + 1 \ [p]$.
  Or d'après H.R $a^p \equiv a \ [p]$ donc : $(a+1)^p \equiv a+1 \ [p]$.
  Donc $(\forall a \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{P})(a^p \equiv a\ [p])$

Si $a < 0$ alors $-a > 0$

- Si $p = 2$ on aura $a^2 = (-a)^2 \equiv (-a)\ [2]$ et $-a \equiv a\ [2]$ car $(2|\big(a-(-a)\big) = 2a)$
- si $p \geq 3$ alors p est impaire et $(-a)^p = -a^p$ et $(-a)^p \equiv (-a)\ [p]$ on en déduit que $-a^p \equiv -a\ [p]$ et finalement $a^p \equiv a\ [p]$

D'où le théorème.

Exemple :

Montrons que : $(\forall n \geq 2)\ n^5 \equiv n \ [30]$

On a : d'après le petit théorème de Fermat : $n^5 \equiv n \ [5]$

Donc $5|n^5 - n$

D'autre part : $n^5 - n = n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Donc $2|n(n-1)$ et $3|(n-1)n(n+1)$ et puisque 2 et 3 sont premiers alors $6 = (2 \times 3)|n^5 - n$

Finalement :

$$\begin{cases} 6|n^5 - n \ \text{ et } \ 5|n^5 - n \\ 6 \wedge 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \ (30|n^5 - n)$$

Exercices

❶ Soient p et q deux nombres premiers distincts ; montrer que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1\ [pq]$

❷ Considérons dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E): $x^4 + 781 = 3y^4$ et soit S son ensemble de solution :

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^4 \equiv 1 \ [5] \ \text{ou} \ x^4 \equiv 0 \ [5])$

2- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^4 + 781 \equiv 2 \ [5] \ \text{ou} \ x^4 + 781 \equiv 1 \ [5])$

3- Déterminer l'ensemble S.

Remarque :

La réciproque du théorème de Fermat n'est pas vraie : $7^{25} \equiv 1\ [24]$ mais 25 n'est pas premier.

III) SYSTEMES DE NUMERATION

1) Théorème et définition

Théorème :

Soit b un entier naturel tel que : $b > 1$
Chaque entier naturel non nul n s'écrit d'une façon unique de la forme :

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

Où : les $(a_i)_{1 \le i \le n}$ sont des entiers naturel $0 \le a_i \le b - 1$ et $a_m \ne 0$

Preuve :

En utilisant la division Euclidienne de n sur b on obtient : $n = q_1 b + a_0$ où $0 \le a_0 < b$

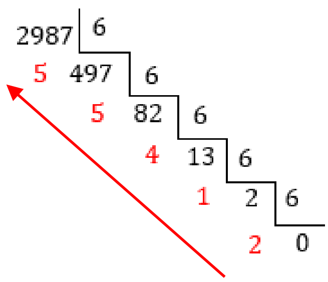
- Si $q_1 \le b - 1$ on s'arrête et $a_1 = q_1$
- si $q_1 \ge b$, On effectue une autre division Euclidienne de q_1 sur b on obtient : $q_1 = q_2 b + a_1$ et par suite $n = (q_2 b + a_1)b + a_0 = q_2 b^2 + a_1 b + a_0$.
  - Si $q_2 \le b - 1$ on s'arrête et $a_2 = q_2$
  - Si non on continue le processus

Notation :

Si $n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b + a_0$ on écrit : $n = \overline{a_m a_{m-1} \dots . a\, a_0}_{(b)}$ cette écriture s'appelle l'écriture de l'entier n dans la base b

Exemple :

Le nombre $n = 2987$ s'écrit $n = \overline{2987}_{(10)}$ car $n = 2 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7$
Essayons d'écrire n dans la base 6 :
On a :
$2987 = 6 \times 497 + 5$
$497 = 6 \times 82 + 5$
$82 = 6 \times 13 + 4$
$13 = 6 \times 2 + 1$
$2 = 6 \times 0 + 2$
Donc $2987 = 2 \times 6^4 + 1 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 5 \times 6 + 5 = \overline{21455}_{(6)}$
Cette succession de divisions Euclidiennes se représente comme ci-contre :



2) Les opérations dans une base de numération

2.1 La somme :

On peut effectuer la somme dans une base donnée b par deux façons différentes :

- *La décomposition :*

$$\begin{aligned} \overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} &= (2 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 3 \times 7 + 4\,) + (6 \times 7^2 + 3 \times 7 + 1\,) \\ &= 2 \times 7^3 + (5+6) \times 7^2 + (3+3) \times 7 + (4+1) \\ &= 3 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 6 \times 7 + 5 \\ &= \overline{3465}_{(7)} \end{aligned}$$

$5 + 6 = 7 + 4$

- *Calcul direct avec le retenu*

$$\begin{array}{r} 1 \\ \overline{2534}_{(7)} \\ + \quad \overline{631}_{(7)} \\ \hline = \overline{3465}_{(7)} \end{array}$$

2.2 Le produit :

Il est préférable d'effectuer le produit en utilisant **le calcul direct avec le retenu** car la décomposition risque d'être longue :

$$\begin{array}{rr} & {\scriptstyle 1\,4} \\ & {\scriptstyle 2\,5} \\ \times & \overline{327}_{(8)} \\ & \overline{56}_{(8)} \\ \hline + & 2412 \\ & 2063 \\ \hline = & \overline{23242}_{(8)} \end{array}$$

Pour vérifier :

$$\begin{aligned}\overline{327}_{(8)} \times \overline{56}_{(8)} &= (3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7) \times (5 \times 8 + 6) \\ &= 9890 \\ &= \overline{23242}_{(8)}\end{aligned}$$

2.3 Opérations dans différentes bases :

Pour effectuer des opérations dans différentes base on développe les deux nombres dans la base 10 ; on effectue l'opération et on écrit le résultat dans la base demandée.

Exemple : effectuer dans la base 9

$$\begin{aligned}\overline{6432}_{(7)} \times \overline{54}_{(8)} &= (6 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 3 \times 7 + 2) \times (5 \times 8 + 4) \\ &= 100188 \\ &= 1 \times 9^5 + 6 \times 9^4 + 2 \times 9^3 + 3 \times 9^2 + 8 \times 9 + 0 \\ &= \overline{162380}_{(9)}\end{aligned}$$

IV) CRITERES DE DIVISIBILITE DES NOMBRES 5,25,3,9,11 ET 4

Théorème :

Soit x un entier naturel non nul tel que : $x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + a_1.10 + a_0$ où $0 \leq a_i \leq 9$; on a :

- $x \equiv 0\ [5] \Leftrightarrow\ a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$
- $x \equiv 0\ [25] \Leftrightarrow\ \overline{a_1a_0} \in \{0,25,50,75\}$
- $x \equiv 0\ [3] \Leftrightarrow\ \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\ [3]$
- $x \equiv 0\ [9] \Leftrightarrow\ \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\ [9]$
- $x \equiv 0\ [11] \Leftrightarrow\ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv 0\ [11]$
- $x \equiv 0\ [4] \Leftrightarrow\ \overline{a_1a_0} \equiv 0\ [4]$

Preuve en exercice :

V) L'ENSEMBLE $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ OU p EST UN NOMBRE PREMIER.

Théorème :

Pour tous entiers relatifs non nuls a et b ; $a \wedge n = 1 \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z})(am = 1\ [n])$

Preuve :

($\Rightarrow$) On suppose que : $a \wedge n = 1$, alors d'près T. Bézout $(\exists (m,u) \in \mathbb{Z}^2)(ma + un = 1)$

Donc : $(\exists (m,u) \in \mathbb{Z}^2)(un = 1 - ma)$ donc $n|ma - 1$ et finalement : $am = 1\ [n]$

($\Leftarrow$) On suppose que : $(\exists m \in \mathbb{Z})(am = 1\ [n])$ donc $n|(am - 1)$ donc $(\exists k \in \mathbb{Z})(am - 1 = kn)$

donc : $am - kn = 1$ et d'après T. Bézout inverse $a \wedge n = 1$

Théorème :

Si p est un nombre premier positif alors tout élément $\bar{x} \neq \bar{0}$ admet un inverse dans $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} - \{\bar{0}\}$

Preuve :

Soit p un nombre premier positif ; on pose $E = \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} - \{\bar{0}\}$

$\dot{x} \in E \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \{1,2, \dots, p-1\})(\bar{x} = \bar{\alpha})$

p étant, premier donc p ne divise aucun nombre de l'ensemble $\{1,2, \dots, p-1\}$ d'où $p \wedge \alpha = 1$

Et d'après la propriété précédente : $(\exists y \in \mathbb{Z}^*)(y\alpha \equiv 1[p])$

Donc : $\overline{\alpha y} = \bar{1}$

D'où : $\bar{\alpha}\,\bar{y} = \bar{1}$ et comme $\bar{x} = \bar{\alpha}$ donc $\bar{x}\,\bar{y} = \bar{1}$

PROBABILITES – EXERCICES CORRIGES

Vocabulaire des probabilités

Exercice n°1.

Dans chacune de situations décrites ci-dessous, énoncer l'événement contraire de l'événement donné.

1) Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard. A : « Les deux élèves sont des filles ».
2) Dans un groupe de suisses et de belges, on discute avec une personne. B : « La personne est un homme belge ».
3) Au restaurant, Luc prend un plat et un dessert. C : « Luc prend une viande et une glace ».
4) A une loterie, Elise achète 3 billets.

D : « L'un des billets au moins est gagnant » , E : « Deux billets au maximum sont gagnants.

Exercice n°2.

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :

A : « Tirer une boule blanche ».

B : « Tirer une boule ni blanche ni rouge ».

C : Tirer une boule noire ou une boule rouge ».

1) A et B sont-ils incompatibles ?
2) B et C sont-ils incompatibles ?
3) Traduire par une phrase ne comportant pas de négation $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice n°3.

Lors d'un jet de deux dés cubiques, on s'intéresse aux événements suivants :

A : « La somme obtenue est au moins égale à 5 ».

B : « La somme obtenue est au plus égale à 5 ».

C : « La somme obtenue est strictement inférieure à 3 ».

1) A et B sont-ils contraires ?
2) $\overline{B}$ et C sont-ils incompatibles ?
3) Traduire par une phrase $\overline{C}$.
4) A et $\overline{C}$ sont-ils incompatibles ?

Dénombrements simples et probabilités - équiprobabilité

Exercice n°4.

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note :

A l'événement : "La carte choisie est un pique".

B l'événement : "La carte choisie est rouge (cœur ou carreau)".

C l'événement : "La carte choisie est une figure (valet, dame, roi)".

1) Présenter un modèle mathématique décrivant l'expérience aléatoire.
2) Déterminer les probabilités des évènements $A,B,C,A\cap B,B\cap C,A\cup B,A\cup C$.
3) Déterminer la probabilité de l'événement D "La carte choisie n'est ni un pique ni une figure".

Exercice n°5.

On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite.

1) Donner la liste de tous les résultats possibles en notant P pour Pile et F pour Face (exemple : PPF).

2) Donner la probabilité des événements suivants :

A « le tirage ne comporte que des Piles ».

B « le tirage comporte au moins une fois Face ».

Exercice n°6.

Dans une assemblée de 250 personnes, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate.

On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

1) Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate.
2) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate.
3) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate.
4) Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

Exercice n°7.

Lors d'un référendum, deux questions étaient posées.

65 % des personnes ont répondu « oui » à la première question, 51 % ont répondu « oui » à la seconde question, et 46 % ont répondu « oui » aux deux questions.

1) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « oui » à l'une ou l'autre des questions ?
2) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « non » aux deux questions ?

Autres situations

Exercice n°8.

On lance un dé à 6 faces. On note p_i la probabilité de sortie de la face marquée i . Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont : $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}1$; $p_5 = 0{,}15$.

Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée 6 ?

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Exercice n°9.

On lance un dé à 6 faces. On suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur elle.

Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.

Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

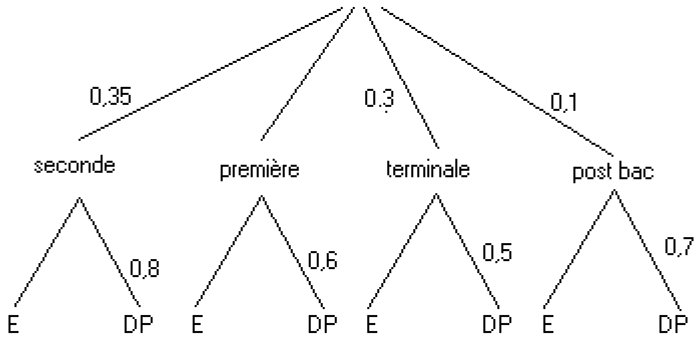
Arbre pondéré

Exercice n°10.

Dans un lycée, quel que soit le niveau, un élève peut être externe ou demi-pensionnaire.

L'arbre ci-contre indique la répartition selon le niveau et la qualité de l'élève (E: externe ; DP: demi-pensionnaire)

1) Recopier et compléter cet arbre.



2) a) Déterminer le pourcentage d'élèves externes dans ce lycée.

b) Déterminer la part des Terminales parmi les externes.

Probabilité conditionnelles.

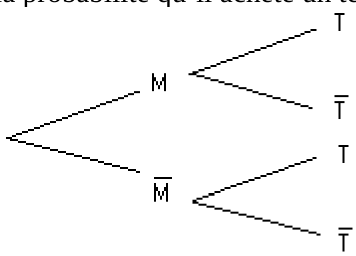
Exercice n°11.

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6.

La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.

La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?
3) Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?
4) Compléter l'arbre de probabilité suivant :



Exercice n°12.

On dispose de deux urnes u_1 et u_2 . L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire . L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro d inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1. Sinon on tire une boule dans l'urne u_2 . (On suppose que les boules sont indiscernables au toucher)

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
2) On a tiré une boule blanche. Calculer le probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1 .

Exercice n°13.

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

a) Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$

b) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?

c) Le vaccin est-il efficace ?

Variable aléatoire

Exercice n°14.

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule

Si elle est rouge, il gagne 10 € , si elle est jaune, il perd 5 €, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 €, sinon il perd 4 €.

1) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.

2) Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).

a) Etablir la loi de probabilité de la variable X

b) Calculer l'espérance de X

3) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

Exercice n°15.

On considère un dé rouge et un dé vert, cubiques, équilibrés.

Le dé rouge comporte : deux faces numérotées -1 ; deux faces numérotées 0 ; -deux faces numérotées 1.

Le dé vert comporte : une face numérotée 0;trois faces numérotées 1;deux faces numérotées 2.

On lance simultanément les deux dés. On note X la somme des points obtenus.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Définir F, fonction de répartition de X et construire sa représentation graphique

Evénements indépendants

Exercice n°16.

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie. On choisit un élève au hasard.

	Tennis	Equitation	Voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

1) Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?

2) Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

Loi Binomiale

Exercice n°17.

Dans une académie, les élèves candidats au baccalauréat série ES se répartissent en 2003 selon les trois enseignements de spécialité : mathématiques, sciences économiques et sociales et langue vivante. Nous savons de plus que : 37% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.

25% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité langue vivante.

21% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques et ont obtenu le baccalauréat.

32,5% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité SES et ont obtenu le baccalauréat. De plus, parmi les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité langue vivante, 72,5% ont obtenu le baccalauréat. On interroge un candidat pris au hasard. On note :

M l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques » ;

S l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales » ;

L l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité langue vivante » ;

R l'événement « le candidat a obtenu le baccalauréat ».

On pourra faire un arbre pour faciliter la réponse aux questions. Les résultats seront arrondis au millième.

1) Traduire en termes de probabilités les informations numériques données ci-dessus.

2) a) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de SES.

b) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait réussi aux épreuves du baccalauréat.

3) Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait échoué au baccalauréat ?
4) Ce candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat ?
5) Montrer que le pourcentage de réussite au baccalauréat pour les candidats de ES dans cette académie est 71,6%.
6) On interroge successivement au hasard et de façon indépendante trois candidats.
a) Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit reçu ?
b) Quelle est la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient reçus ?

Exercice n°18.
On utilise deux pièces de monnaie : l'une pipée, de sorte que lorsqu'on la lance, la probabilité d'obtenir pile soit $1/4$; l'autre normale dont la probabilité d'obtenir pile est $1/2$ à chaque lancer.
1) On prend une pièce au hasard (chacune des deux pièces a une probabilité $1/2$ d'être prise)
  a) Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?
  b) On a obtenu pile : quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce pipée.
  c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile en faisant trois lancers avec la pièce choisie ?
2) Trois fois on choisit l'une des pièces au hasard qu'on lance (chacune des deux pièces a donc à chaque fois une probabilité $1/2$ d'être lancée) : déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile
3) On lance les deux pièces ensembles : quelle est la probabilité d'obtenir le même résultat pour les deux pièces ?

Exercice n°19.
On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en les faisant répondre à dix questions. Ils devront choisir, pour chacune des questions, parmi quatre affirmations, celle qui est exacte. Un candidat se présente et répond à toutes les questions *au hasard*. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l'issue du questionnaire.
1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
2) Calculer la probabilité pour qu'il fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi sélectionné.

Exercice n°20.
Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux d'entre elles sont normales : elles possèdent un côté « Pile » et un côté « Face ». La troisième est truquée et possède deux côtés « Face ».
On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce. On considère les évènements suivants:
B : la pièce prise est normale. $\overline{B}$: la pièce prise est truquée.
P : on obtient « Pile » au premier lancer. F_n : on obtient « Face » pour les n premiers lancers.
1) a) Quelle est la probabilité de l'évènement B ?
b) Quelle est la probabilité de l'évènement P sachant que B est réalisé ?
2) Calculer la probabilité de l'événement $P \cap B$, puis de l'évènement $P \cap \overline{B}$.
En déduire la probabilité de l'évènement P.
3) Calculer la probabilité de l'évènement $F_n \cap B$ puis de l'évènement $F_n \cap \overline{B}$.
En déduire la probabilité de l'évènement F_n .

Exercice n°21.
Un sondage est effectué dans un conservatoire de musique.
60 % des élèves pratiquent un instrument à cordes (C) . 45 % des élèves pratiquent un instrument à vent (V)
10 % des élèves pratiquent un instrument à cordes et vent.
1) On choisit un élève au hasard dans le conservatoire.
a) Quelle est la probabilité de l'événement « Cet élève pratique au moins un des instruments considérés »
b) Quelle est la probabilité de l'événement « Cet élève pratique un et un seul des instruments considérés »
2) On choisit au hasard un élève pratiquant un instrument C. Quelle est la probabilité pour que cet élève pratique un instrument V ?
3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard n élèves. On suppose que le nombre d'élèves du conservatoire est suffisamment grand pour que la probabilité de rencontrer un instrumentiste du type donné soit constante au cours du sondage.
a) Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un des élèves choisis pratique un instrument C ?
b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0{,}999$

Dénombrements et probabilités

Exercice n°22.

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher, de 3 sortes : 4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».

Un joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes.

Exercice n°23.

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les probabilités :

a) De ne tirer que 3 jetons verts ;

b) De ne tirer aucun jeton vert

c) De tirer au plus 2 jetons verts ;

d) De tirer exactement 1 jeton vert.

2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

Graphes probabilistes

Exercice n°24.

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.

Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.

L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.

Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10% des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.

3. a. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

b. Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0{,}3 \;\; 0{,}7)$.

4. a. Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.

b. En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.

Dans la question suivante, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

5. Soit $P = (a \;\; b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.

a. Déterminer a et b.

b. Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.

PROBABILITES – CORRECTION

Exercice n°1

1) L'événement $\overline{A}$ est « au moins un des deux élèves est un garçon ».
2) L'événement $\overline{B}$ est « La personne est soit une femme, soit un suisse ».
3) L'événement $\overline{C}$ est « Luc ne prend pas de viande ou ne prend pas de glace ».
4) L'événement $\overline{D}$ est « aucun billet n'est gagnant ».
5) L'événement $\overline{E}$ est « les trois billets sont gagnants ».

Exercice n°2

1) A et B sont incompatibles car une boule ne peut être simultanément blanche et non blanche.
2) B et C ne sont pas incompatibles car le tirage d'une boule noire les réalise simultanément.
3) L'événement $\overline{A}$ est « tirer une boule noire ou rouge ».
4) L'événement $\overline{B}$ est « tirer une boule blanche ou rouge ».

Exercice n°3

1) A et B ne sont pas contraires car une somme égale à 5 les réalise simultanément.
2) $\overline{B}$ et C sont incompatibles car la somme ne peut être simultanément strictement supérieure à 5 (événement $\overline{B}$) et strictement inférieure à 3 (événement C).
3) L'événement $\overline{C}$ est « La somme est supérieure ou égale à 3 ».
4) A et $\overline{C}$ ne sont pas incompatibles car ils sont simultanément réalisés par une somme supérieure ou égale à 5.

Exercice n°4

1) On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 32 cartes du jeu. Ainsi $Card(\Omega)=32$.
Il y a équiprobabilité des tirages de cartes. Ainsi

2) $p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}$, $p(B)=\dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\dfrac{16}{32}=\dfrac{1}{2}$, $p(C)=\dfrac{Card(C)}{Card(\Omega)}=\dfrac{3\times 4}{32}=\dfrac{3}{8}$,

$p(A\cap B)=0$ car une carte ne peut être simultanément rouge et pique,

$$p(B\cap C)=\frac{Card(B\cap C)}{Card(\Omega)}=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}.$$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-0=\frac{3}{4}.$$

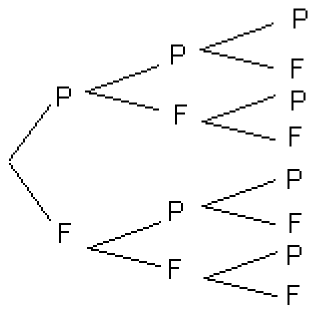
$$p(A\cup C)=p(A)+p(C)-p(A\cap C)=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{32}=\frac{17}{32}.$$

3) On cherche $p(\overline{A\cup C})=1-p(A\cup C)=1-\dfrac{17}{32}=\dfrac{15}{32}$.

Remarque : on a $p\left(\overline{A\cup C}\right)=p\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)$.

Exercice n°5

1) A l'aide d'un arbre comme ci-contre,



On peut lister $\Omega=\{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$.
D'où $Card(\Omega)=8$.

2) Les tirages étant équiprobables, on a $p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\dfrac{1}{8}$ (seul le tirage PPP convient).

Enfin, on remarque que $B=\overline{A}$ donc $p(B)=p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$.

Exercice n°6

Le tableau suivant permet de dénombrer les différentes catégories :

	Cravate (événement C)	Pas de Cravate (événement $\overline{C}$)	Total
Yeux Bleus (événement B)	50	35	85
Yeux non bleus (événement $\overline{B}$)	70	95	165
Total	120	130	250

On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 250 personnes. Ainsi $Card(\Omega)=250$.

Il y a équiprobabilité des choix de personnes. Ainsi

1) $p(C)=\frac{Card(C)}{Card(\Omega)}=\frac{120}{250}=\frac{12}{25}$, 2) $p(B\cap C)=\frac{Card(B\cap C)}{Card(\Omega)}=\frac{50}{250}=\frac{1}{5}$,

3) $p(B\cup C)=p(B)+p(C)-p(B\cap C)=\frac{85}{250}+\frac{120}{250}-\frac{50}{250}=\frac{155}{250}=\frac{31}{50}$ (on pouvait aussi directement écrire $p(B\cup C)=\frac{Card(B\cup C)}{Card(\Omega)}=\frac{50+70+35}{250}=\frac{155}{250}=\frac{31}{50}$).

3) $p\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)=p\left(\overline{B\cup C}\right)=1-p(B\cup C)=1-\frac{31}{50}=\frac{19}{50}$.

Exercice n°7

Si on note A l'événement « la personne a répondu oui à la première question » et B l'événement « la personne a répondu oui à la deuxième question », l'énoncé nous fournit $p(A)=0,65$, $p(B)=0,51$ et $p(A\cap B)=0,46$.

1) On calcule $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0,65+0,51-0,46=0,7$.

2) On calcule $p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=p\left(\overline{A\cup B}\right)=1-p(A\cup B)=1-0,7=0,3$.

Exercice n°8

Si on note p_6 la probabilité d'apparition du chiffre 6, la somme des probabilités des événements élémentaires valant 1, on a $p_6=1-(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5)=1-0,85=0,15$.

L'événement A « obtenir un nombre pair » étant $A=\{2;4;6\}$, on a $p(A)=p_2+p_4+p_6=0,2+0,1+0,15=0,45$.

Il ne fallait surtout pas écrire $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ car **il n'y a pas équiprobabilité des faces de dés.**

Exercice n°9

Si on note p la probabilité d'apparition du chiffre 1, les probabilités d'apparition des autres faces sont respectivement égales à $2p,3p,4p,5p,6p$, puisque proportionnelles au numéro de chaque face.

Puisque la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1, on a $p+2p+3p+4p+5p+6p=1$, donc

$21p=1\Leftrightarrow p=\frac{1}{21}$. On en déduit donc :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

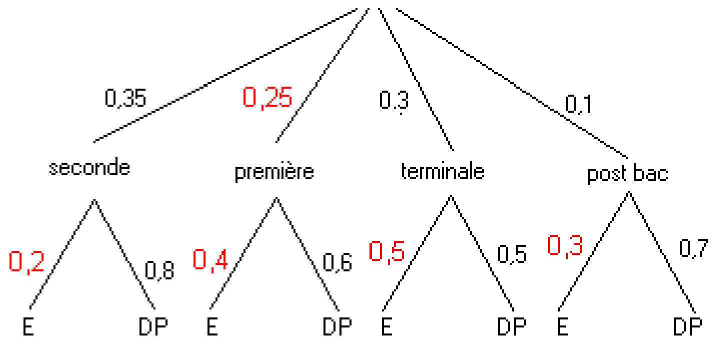
Et ainsi , l'événement A « obtenir un nombre pair » étant $A=\{2;4;6\}$, on a $p(A)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}$.

Il ne fallait surtout pas écrire $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ car **il n'y a pas équiprobabilité des faces de dés.**

Exercice n°10

L'arbre nous renseigne sur le fait que « 35 % des élèves du lycée sont en seconde, et parmi ces élèves de seconde, 80 % sont demi-pensionnaires, etc… ».

1) La somme des poids figurant sur les arêtes au départ de chaque « nœud » doit être égale à 1 (coefficients multiplicateurs traduisant des pourcentages). On obtient ainsi l'arbre :



2) Les élèves de seconde externes représentent une fraction de l'effectif total égale à $0,35\times 0,2=0,07$, soit 7 %.

Les externes représentent donc une fraction égale à $0,35\times 0,2+0,25\times 0,4+0,3\times 0,5+0,1\times 0,3=0,35$, soit 35 %.

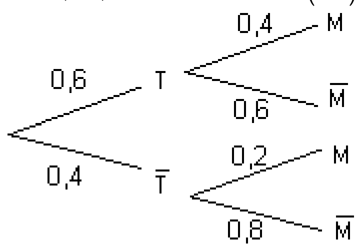
3) Sur 1000 élèves, 350 sont donc externes. Les élèves de terminale externes représentent $1000\times 0,3\times 0,5=150$ élèves, soit une part égale à $\frac{150}{350}\times 100\approx 43\%$ à 1% près..

Exercice n°11

On note T l'événement « le client achète un téléviseur » et M l'événement « le client achète un magnétoscope ».

L'énoncé fournit $p(T)=0,6$ (donc $p\left(\overline{T}\right)=1-0,6=0,4$), $p_T(M)=0,4$ (donc $p_T\left(\overline{M}\right)=1-0,4=0,6$), et $p_{\overline{T}}(M)=0,2$ (donc $p_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)=1-0,2=0,8$,

ce que l'on peut traduire par l'arbre de probabilités



1) En appliquant la formule de définition d'une probabilité conditionnelle, dans sa « version multiplicative »,

$$p_T(M)=\frac{p(T\cap M)}{p(T)}\Leftrightarrow p(T\cap M)=p(T)\times p_T(M)=0,6\times 0,4=0,24$$

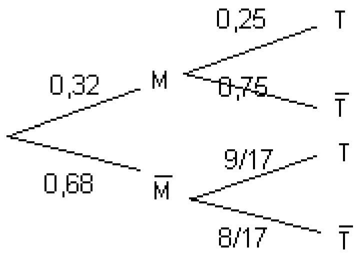
2) En appliquant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}p(M)&=p(T\cap M)+p\left(\overline{T}\cap M\right)\\&=p(T)\times p_T(M)+p\left(\overline{T}\right)\times p_{\overline{T}}(M)\\&=0,6\times 0,4+0,4\times 0,2=0,32\end{aligned}$$

3) On demande $p_M(T)=\frac{p(M\cap T)}{p(M)}=\frac{0,6\times 0,4}{0,32}=0,75$

4) Puisque $p(M)=0,32$, on a $p\left(\overline{M}\right)=1-0,32=0,68$. Puisque $p_M(T)=0,75$, on a $p_M\left(\overline{T}\right)=1-0,75=0,25$

On calcule de la même manière qu'à la question 3), $p_{\overline{M}}(T)=\frac{p\left(\overline{M}\cap T\right)}{p\left(\overline{M}\right)}=\frac{0,6\times 0,6}{0,68}=\frac{0,36}{0,68}=\frac{9}{17}$, donc $p_{\overline{M}}\left(\overline{T}\right)=1-\frac{9}{17}=\frac{8}{17}$. On peut donc « inverser » l'arbre de probabilité :



Exercice n°12

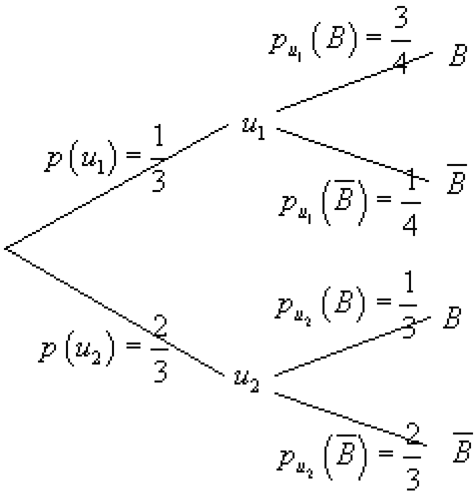
Notons Ω l'ensemble des résultats possibles du jet de dé. On a donc $Card(\Omega)=6$.

Notons u_1 l'événement « Le tirage s'effectue dans l'urne u_1 » et u_2 l'événement « Le tirage s'effectue dans l'urne u_2 ».
Notons B l'événement « obtenir une boule blanche »

La répartition des boules blanches et noires données dans l'énoncé nous fournit les probabilités : $p_{u_1}(B)=\frac{3}{4}$ donc $p_{u_1}(\overline{B})=\frac{1}{4}$, ainsi que $p_{u_2}(B)=\frac{1}{3}$ et $p_{u_2}(\overline{B})=\frac{2}{3}$

Enfin, puisqu'il y a équiprobabilité dans les résultats du lancer de dé, $p(u_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $p(u_2)=\frac{2}{3}$.

On peut résumer cette situation par l'arbre de probabilités suivant :



1) En appliquant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(B) &= p(u_1\cap B)+p(u_2\cap B)\\ &= p(u_1)\times p_{u_1}(B)+p(u_2)\times p_{u_2}(B)\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{2}{9}=\frac{17}{36}\end{aligned}$$

2) On demande $p_B(u_1)$. Puisque $p(B)\neq 0$, on peut appliquer la formule de définition de la probabilité conditionnelle de l'événement u_1 conditionné par B : $p_B(u_1)=\frac{p(B\cap u_1)}{p(B)}=\frac{p(u_1\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}{17/36}=\frac{1}{4}\times\frac{36}{17}=\frac{9}{17}$

Exercice n°13

Notons V l'événement « être vacciné » et M l'événement « être malade »

L'énoncé fournit $p(V)=\frac{1}{4}$ donc $p(\overline{V})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. De plus $p_M(\overline{V})=4\times p_M(V)$. Puisque $p_M(V)+p_M(\overline{V})=1$, on déduit $p_M(V)=\frac{1}{5}$ et $p_M(\overline{V})=\frac{4}{5}$. Enfin l'énoncé indique que $p_V(M)=\frac{1}{12}$ donc $p_V(\overline{M})=\frac{11}{12}$.

a) **La formule des probabilités totales** appliquée au système complet d'événements $\{V;\overline{V}\}$, permet de calculer :

$$p(M)=p(V\cap M)+p(\overline{V}\cap M)=p(V)\times p_V(M)+p(\overline{V})\times p_{\overline{V}}(M)$$

Puisque $p_{\overline{V}}(M)=\frac{p(M\cap\overline{V})}{p(\overline{V})}=\frac{p(M)\times p_M(\overline{V})}{3/4}=\frac{p(M)\times 4/5}{3/4}=p(M)\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{16}{15}p(M)$, on se retrouve avec l'équation $p(M)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}+\frac{3}{4}\times\frac{16}{15}p(M)\Leftrightarrow p(M)-\frac{12}{15}p(M)=\frac{1}{48}\Leftrightarrow p(M)\left(1-\frac{12}{15}\right)=\frac{1}{48}$ d'où l'on tire :

$$\boxed{p(M)=\frac{1}{48}\times\frac{15}{3}=\frac{5}{48}}$$

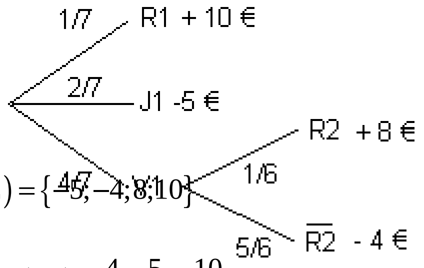
b) Du coup, on calcule $\boxed{p_{\overline{V}}(M)=\frac{16}{15}p(M)=\frac{16}{15}\times\frac{5}{48}=\frac{1}{9}}$

c) D'après les calculs précédents, en moyenne, 1 individu sur 9 non vaccinés tombe malade, contre 1 individu sur 12 vaccinés….

Exercice n°14

On désigne par R_1 l'événement « la boule tirée au 1er tirage est rouge », R_2 l'événement « la boule tirée au 2ème tirage est rouge », et ainsi de suite avec les autres couleurs. Par équiprobabilité , on a $p(R_1)=\frac{1}{7}$, $p(J_1)=\frac{2}{7}$ et $p(V_1)=\frac{4}{7}$ En cas de deuxième tirage, l'urne ne contient plus que 6 boules, dont une rouge, deux jaunes et **trois** vertes, ce qui permet d'affirmer que $p_{V_1}(R_2)=\frac{1}{6}$ donc $p_{V_1}\left(\overline{R_2}\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

1) L'arbre de probabilités (et les gains qui sont associés au différents événements) est donc



2) a) X peut prendre quatre valeurs distinctes : -5 , -4 , +8 , 10 (on note $X(\Omega)=\{-5;-4;8;10\}$

On détermine les probabilités :

$p(X=-5)=p(J_1)=\frac{2}{7}$ $\qquad$ $p(X=-4)=p\left(V_1\cap\overline{R_2}\right)=p(V_1)\times p_{V_1}\left(\overline{R_2}\right)=\frac{4}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{21}$

$p(X=+8)=p(V_1\cap R_2)=p(V_1)\times p_{V_1}(R_2)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{21}$ $\qquad$ $p(X=+10)=p(R_1)=\frac{1}{7}$

Les résultats présentés dans un tableau sont :

x_i	-5	-4	8	10
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$

b) Par définition, $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\,p(X=x_i)$

$=(-5)\times p(X=-5)+(-4)\times p(X=-4)+8\times p(X=8)+10\times p(X=10)$

$=-5\times\frac{2}{7}-4\times\frac{10}{21}+8\times\frac{2}{21}+10\times\frac{1}{7}=-\frac{24}{21}=-\frac{8}{7}$

3) Notons a le gain correspondant à l'événement $V_1\cap R_2$.

On a donc $E(X)=-5\times\frac{2}{7}-4\times\frac{10}{21}+a\times\frac{2}{21}+10\times\frac{1}{7}=\frac{2a-40}{21}$

Il suffit alors de résoudre l'équation : $E(X)=0\Leftrightarrow 2a-40=0\Leftrightarrow a=20$€

Exercice n°15

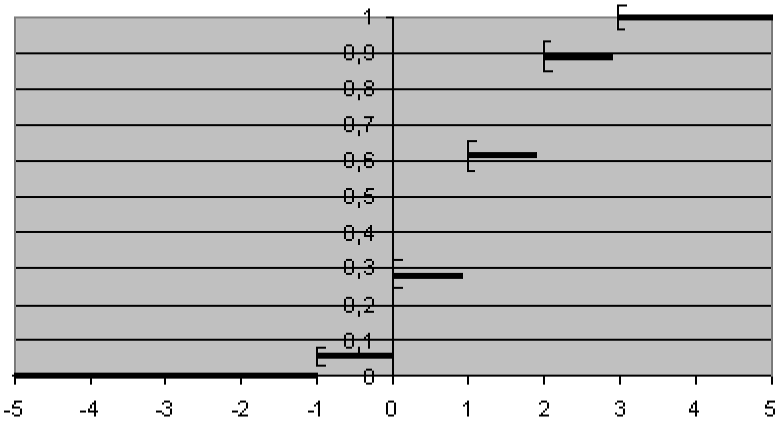
On peut consigner les résultats dans le tableau suivant :

Dé vert / Dé Rouge	0	1	1	1	2	2
-1	-1	0	0	0	1	1
-1	-1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	2	2
0	0	1	1	1	2	2
1	1	2	2	2	3	3
1	1	2	2	2	3	3

1) Si on note X la somme des points obtenus, on a donc $X(\Omega)=\{-1;0;1;2;3\}$, avec

x_i	-1	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$	$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$	$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$	$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

2) On définit ainsi la fonction de répartition de X par : $F(x)=p(X\le x)=\begin{cases}0\text{ si }x<-1\\ \frac{1}{18}\text{ si }-1\le x<0\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}=\frac{5}{18}\text{ si }0\le x<1\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{11}{18}\text{ si }1\le x<2\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{5}{18}=\frac{8}{9}\text{ si }2\le x<3\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{5}{18}+\frac{1}{9}=1\text{ si }3\le x\end{cases}$



Exercice n°16

Après avoir complété le tableau des effectifs :

	Tennis (T)	Equitation (E)	Voile (V)	Total
Anglais (A)	45	18	27	90
Allemand (D)	33	9	18	60
Total	78	27	45	150

On choisit un élève au hasard et on note On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 150 élèves . Ainsi $Card(\Omega)=32$. Il y a équiprobabilité dans le choix des élèves. Ainsi pour tout événement A, $p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

1) On calcule séparément :

$p(D\cap T)=p(T)\times p_T(D)=\dfrac{78}{150}\times\dfrac{11}{26}=\dfrac{11}{50}$ et $p(T)\times p(D)=\dfrac{78}{150}\times\dfrac{60}{150}=\dfrac{26}{50}\times\dfrac{20}{50}=\dfrac{13}{25}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{26}{125}$

Puisque $p(D\cap T)\neq p(T)\times p(D)$, on peut conclure que les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » ne sont pas indépendants

2) On calcule séparément :

$p(A\cap V)=p(V)\times p_V(A)=\dfrac{45}{150}\times\dfrac{27}{45}=\dfrac{27}{150}=\dfrac{9}{50}$ et $p(A)\times p(V)=\dfrac{90}{150}\times\dfrac{45}{150}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{50}$

Puisque $p(A\cap V)=p(A)\times p(V)$, on peut conclure que les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont indépendants

Exercice n°17

Le début de l'exercice est l'archétype classique d'un exercice de probabilités conditionnelles.

1) En utilisant les notations de l'énoncé, nous avons $p(M)=0{,}37$, $p(L)=0{,}25$, $p(M\cap R)=0{,}21$, $p(S\cap R)=0{,}325$ et $p_L(R)=0{,}725$

2) a) On calcule $p(S)=1-\left(p(M)+p(L)\right)=1-(0{,}37+0{,}25)=1-0{,}62=0{,}38$

b) On calcule $p(L\cap R)=p(L)\times p_L(R)=0{,}25\times0{,}725=0{,}18125\approx0{,}181$ arrondi au millième

3) On calcule $p\left(L\cap\overline{R}\right)=p(L)\times p_L\left(\overline{R}\right)=0{,}25\times\left(1-p_L(R)\right)=0{,}25\times(1-0{,}725)=0{,}06875\approx0{,}069$ arrondi au millième

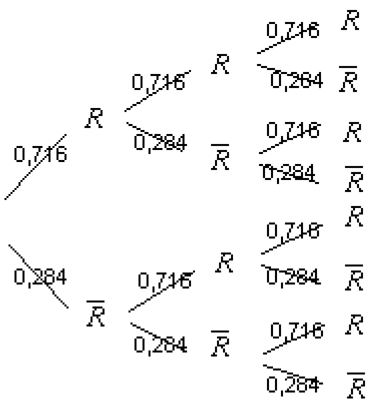
4) On calcule $p_M\left(\overline{R}\right)=\dfrac{p\left(M\cap\overline{R}\right)}{p(M)}=\dfrac{p\left(M\cap\overline{R}\right)}{0{,}37}$ Puisque $p(M)=0{,}37$ et $p(M\cap R)=0{,}21$, on calcule $p_M(R)=\dfrac{p(M\cap R)}{p(M)}=\dfrac{0{,}21}{0{,}37}=\dfrac{21}{37}$ et donc $p_M\left(\overline{R}\right)=1-p_M(R)=1-\dfrac{21}{37}=\dfrac{16}{37}\approx0{,}432$ arrondi à 10^{-3}

5) En appliquant la formule des probabilités totales,

$p(R)=p(L\cap R)+p(S\cap R)+p(M\cap R)\approx0{,}181+0{,}325+0{,}21\approx0{,}716$, d'où la réponse

6) On répète 3 fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à choisir un élève qui peut avoir été reçu (issue R que nous appellerons SUCCES, de probabilité 0,716) ou qui peut avoir échoué (issue $\overline{R}$ que nous appellerons ECHEC, de probabilité 1-0,716=0,284). Le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre 3 et 0,716.

On peut matérialiser cette situation par un arbre :



a) L'événement contraire de l'événement « au moins un des trois candidats est reçu » est l'événement « les trois candidats ne sont pas reçus », de probabilité $0,284^3$. L'événement considéré a donc pour probabilité $1-0,284^3\approx 0,977$ arrondi au millième

b) Pour calculer la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient reçus, soit on compte le nombre de chemins répondant à cette situation sur l'arbre (on en compte trois : $RR\overline{R}$, $R\overline{R}R$ et $\overline{R}RR$, chacun d'eux représentant une probabilité égale à $0,716^2\times 0,284^1$), soit on applique la formule donnant le nombre de succès dans une situation binomiale, pour aboutir au calcul :

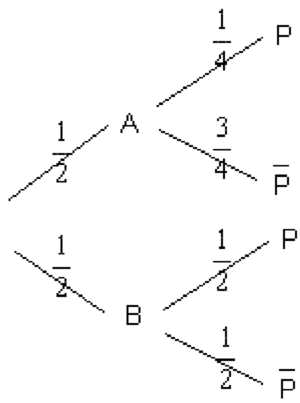
$$\underset{\text{nombre de succès}}{\overset{\text{nombre de répétitions}}{}}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\times \underbrace{0,716}_{\substack{\text{probabilité}\\\text{d'un succès}}}^{\overset{\text{nombre de succès}}{\widehat{2}}}\times \underbrace{0,284}_{\substack{\text{probabilité}\\\text{d'un échec}}}^{\overset{\text{nombre d'échec}}{\widehat{1}}}=3\times 0,716^2\times 0,284^1\approx 0,437 \text{ arrondi au millième}$$

Exercice n°18

Notons A l'événement « le lancer s'effectue avec la pièce truquée » et B l'événement « le lancer s'effectue avec la pièce équilibrée ». L'énoncé nous fournit $p(A)=p(B)=\frac{1}{2}$.

1) (a) Notons P l'événement « obtenir Pile lors d'un lancer ». L'énoncé nous fournit $p_A(P)=\frac{1}{4}$ donc $p_A(\overline{P})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; et $p_B(P)=\frac{1}{2}$ donc $p_B(\overline{P})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Ceci peut se traduire par l'arbre de probabilités →

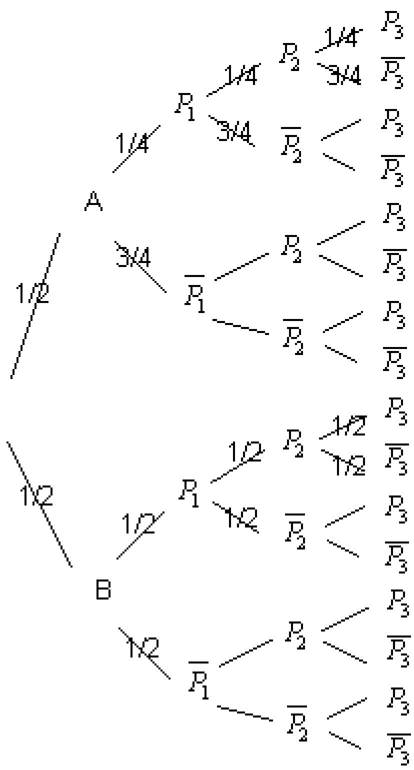


La formule des probabilités totales appliqué au système complet $\{A;B\}$ fournit :

$$\boxed{p(P)=p(A\cap P)+p(B\cap P)=p(A)\times p_A(P)+p(B)\times p_B(P)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}}$$

(b) On demande $\boxed{p_P(A)=\frac{p(A\cap P)}{p(P)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{8}\times\frac{8}{3}=\frac{1}{3}}$

(c) Notons P_1,P_2,P_3 les probabilités d'obtenir Pile respectivement aux tirages n°1,2 et 3. On peut ainsi dresser l'arbre de probabilité :



Raisonnons avec l'événement contraire de « obtenir au moins une fois pile », qui est « obtenir trois fois face ». D'après la formule des probabilités totales, ce dernier événement a pour probabilité :

$$p(F_1\cap F_2\cap F_3)=p(A\cap F_1\cap F_2\cap F_3)+p(B\cap F_1\cap F_2\cap F_3)$$
$$=p(A)\times p_A(F_1\cap F_2\cap F_3)+p(B)\times p_B(F_1\cap F_2\cap F_3)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{27}{128}+\frac{1}{16}=\frac{35}{128}$$

La probabilité d'obtenir au moins une fois pile avec une pièce choisie est donc égale à $\boxed{1-\frac{35}{128}=\frac{93}{128}}$

2) La situation est cette fois ci différente de la question 1) (c) car on retire une pièce au hasard avant chaque lancer. On répète ainsi 3 fois consécutivement et

de manière indépendante, l'épreuve de Bernoulli décrite dans la question 1) (a), qui admet deux issues : $p(P)=\frac{3}{8}$ donc $p(\overline{P})=\frac{5}{8}$. Le nombre de succès (obtention de Pile) sur les trois répétitions suit donc une loi binomiale de paramètre $p(P)=\frac{3}{8}$ et $n=3$. On raisonne encore une fois avec l'événement contraire de « obtenir au moins une fois pile », qui est « obtenir trois fois face », de probabilité $\left(p(\overline{P})\right)^3=\left(\frac{5}{8}\right)^3=\frac{125}{512}$. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile sur les trois lancers (et choix) est donc $\boxed{1-\frac{125}{512}=\frac{387}{512}}$

3) Les résultats des deux pièces sont indépendants l'un de l'autre. Si on note P_A l'événement « obtenir Pile à l'aide de la pièce truquée » et P_B l'événement « obtenir Pile à l'aide de la pièce équilibrée», l'événement cherché aura donc une probabilité égale à :

$$\boxed{p(P_A\cap P_B)+p(F_A\cap F_B)=p(P_A)\times p(P_B)+p(F_A)\times p(F_B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}}$$

Exercice n°19

1) On répète 10 fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à répondre à une question en choisissant au hasard et de manière équiprobable une réponse parmi les quatre proposées. Chaque épreuve a donc une probabilité de réussite égale à $p=0,25$ et une probabilité 'échec égale à $q=1-p=1-0,25=0,75$. Le nombre de succès X parmi les 10 répétitions suit donc une loi binomiale de paramètre 10 et 0,25.

2) On a ainsi :

$p(X=8)=\binom{10}{8}0,25^8\times0,75^2=\frac{10\times9}{2}\times0,25^8\times0,75^2$, $p(X=9)=\binom{10}{9}0,25^9\times0,75^1=10\times0,25^9\times0,75^1$ et enfin $p(X=10)=\binom{10}{10}0,25^{10}\times0,75^0=0,25^{10}$. L'événement considéré a donc pour probabilité la somme de ces trois derniers nombres.

Exercice n°20

1) a) Les choix de pièces dans l'urne étant équiprobables, $p(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{2}{3}$

b) Si l'événement B est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « normale » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Pile » vaut $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $p_B(P)=\frac{1}{2}$

2) On calcule $p(P\cap B)=p(B)\times p_B(P)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

Puisque $p(B)=\frac{2}{3}$, alors $p(\overline{B})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. Si l'événement $\overline{B}$ est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « truquée » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Pile » est nulle, puisque la pièce truquée possède «deux « faces ». Ainsi $p_{\overline{B}}(P)=0$. On en déduit $p(P\cap\overline{B})=p(\overline{B})\times p_{\overline{B}}(P)=\frac{1}{3}\times0=0$.

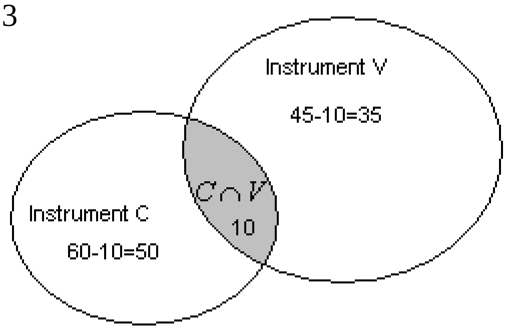
En utilisant la formule des probabilités totales, pusique le système $(B,\overline{B})$ est un système complet d'événement, on obtient $p(P)=p(P\cap B)+p(P\cap\overline{B})=\frac{1}{3}$

3) Si l'événement B est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « normale » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Face » au cours des n premiers lancers suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, donc $p_B(F_n)=\binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, et ainsi

$$p(F_n\cap B)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Si l'événement $\overline{B}$ est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « truquée » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Face » vaut 1 à chaque lancer, donc la probabilité d'obtenir « Face » au cours des n premiers lancers vaut 1, c'est-à-dire $p_{\overline{B}}\left(F_n\right)=1$ et ainsi $p\left(F_n \cap \overline{B}\right)=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$

En utilisant la formule des probabilités totales, puisque le système $\left(B,\overline{B}\right)$ est un système complet d'événement, on obtient $p\left(F_n\right)=p\left(F_n\cap B\right)+p\left(F_n\cap\overline{B}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}$



Exercice n°21

L'énoncé nous fournit $p(C)=0,6$, $p(V)=0,45$ et $p(C\cap V)=0,1$

1) On calcule $p(C\cup V)=p(C)+p(V)-p(C\cap V)=0,6+0,45-0,1=0,95$

(on aurait pu aussi raisonner avec les effectifs ramenés à 100 élèves, conformément au diagramme ci-contre)

2) a) On calcule $p(C\cup V)-p(C\cap V)=0,95-0,1=0,85$

(on aurait pu aussi raisonner avec les effectifs ramenés à 100 élèves, conformément au diagramme ci-dessus)

b) L'énoncé (ou le diagramme) fournit $p_C(V)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$

3) On répète n fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à choisir un élève qui peut pratiquer un instrument C (SUCCES, de probabilité 0,6) ou ne pas pratiquer un instrument C (issue $\overline{C}$ que nous appellerons ECHEC, de probabilité 1-0,6=0,4). Le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre n et 0,6.

a) L'événement contraire de l'événement « au moins un des élèves choisis pratique un instrument C » est l'événement « les n élèves choisis ne pratiquent pas un instrument C » de probabilité $0,4^n$. Ainsi $p_n=1-0,4^n$

b)

$p_n\geq 0,999 \Leftrightarrow 1-0,4^n\geq 0,999 \Leftrightarrow 0,4^n\leq 0,001$

$\Leftrightarrow 0,4^n\leq 0,001$ car la fonction ln est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$

$\Leftrightarrow n\ln(0,4)\leq\ln(0,001)$

$\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,4)}$ car $\ln(0,4)<0$

$\Leftrightarrow n\geq 7,53$ à 10^{-2} près

Puisque n est entier, on déduit donc $n\geq 8$

Exercice n°22

L'univers est constitué de l'ensemble des combinaisons de 2 éléments pris parmi 10, d'où $Card(\Omega)=\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$.

Notons A l'événement « d'obtenir deux bulletins de sortes différentes ».
2 raisonnements s'offrent à nous :

- Ou bien on décide de déterminer $Card(A)$. Il y a trois possibilités (1 bulletin « oui » et 1 bulletin « non », 1 bulletin « oui » et 1 bulletin « blanc », ou 1 bulletin « non » et 1 bulletin « blanc ») donc $Card(A)=\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{3}{1}\binom{3}{1}=4\times 3+4\times 3+3\times 3=33$, et ainsi $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{33}{45}=\frac{11}{15}$

- Ou bien on raisonne avec l'événement contraire $\overline{A}$ qui est « obtenir deux bulletins identiques ». Il y a trois possibilités (deux bulletins « oui », deux bulletins « non » , deux buleltins « blanc », donc $Card\left(\overline{A}\right)=\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{3}{2}=\frac{4\times 3}{2}+\frac{3\times 2}{2}+\frac{3\times 2}{2}=6+3+3=12$, d'où $p\left(\overline{A}\right)=\frac{Card\left(\overline{A}\right)}{Card(\Omega)}=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$ et donc $p(A)=1-p\left(\overline{A}\right)=1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$

Les deux méthodes fournissent le même résultat !

Exercice n°23

1) Tirages successifs sans remise de 3 jetons parmi 9. Il y a $A_9^3 = 504$ possibilités

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ». On a $\boxed{p(A) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5}{42}}$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $\boxed{p(B) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{1}{21}}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »

1ère méthode : $p(C) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{42} = \boxed{\frac{37}{42}}$

2ème méthode

$$p(C) = \frac{\overbrace{A_9^3}^{\text{Ne tirer aucun vert}} + \overbrace{3 \times A_5^1 \times A_4^2}^{\substack{\text{Tirer exactement 1 vert :} \\ \text{- choix de la place du jeton vert} \\ \text{- choix d'1 vert et de 2 rouges}}} + \overbrace{3 \times A_5^2 \times A_4^1}^{\text{Tirer exactement 2 verts}}}{A_9^3} = \frac{37}{42}$$

d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ». $p(D) = \frac{3 \times A_5^2 \times A_4^1}{A_9^3} = \boxed{\frac{5}{14}}$

2) Tirages simultanés de 3 jetons parmi 9. Il y a $C_9^3 = 84$ possibilités

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ». On a $\boxed{p(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}}$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $\boxed{p(B) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »

1ère méthode : $p(C) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{42} = \boxed{\frac{37}{42}}$

2ème méthode

$$p(C) = \frac{\overbrace{C_9^3}^{\text{Ne tirer aucun vert}} + \overbrace{C_5^1 \times C_4^2}^{\substack{\text{Tirer exactement 1 vert :} \\ \text{- choix de la place du jeton vert} \\ \text{- choix d'1 vert et de 2 rouges}}} + \overbrace{C_5^2 \times C_4^1}^{\text{Tirer exactement 2 verts}}}{C_9^3} = \frac{37}{42}$$

d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ». $p(D) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{C_9^3} = \boxed{\frac{5}{14}}$

Commentaire sur l'exercice :

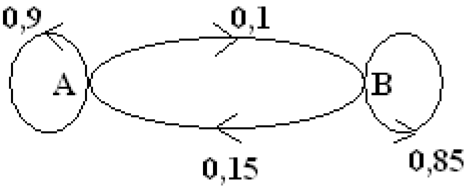
Selon toute logique, on doit retrouver les mêmes résultats dans les deux parties. En effet, tirer successivement sans remise 3 boules ou les tirer simultanément revient au même. Que l'on traite un tirage comme un arrangement ou comme un sous-ensemble, les questions a) et b) nous fournissent le même résultat si on a conservé l'ordre jusqu'au bout (numérateurs et dénominateurs des fractions) le même mode de comptage. En ce qui concerne la question c), si on travaille avec des arrangements, on induit ainsi un ordre. Il ne faut donc pas oublier de multiplier par 3, c'est à dire de choisir d'abord une place pour le jeton vert. Ce problème ne se pose pas avec des combinaisons. Conclusion : Il est plus facile de travailler avec des combinaisons.
Cette dernière remarque est valable car le type d'événements étudié ne fait pas intervenir d'ordre.

Exercice n°24

1. Puisqu'au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore, on aura $a_0 = 0,2$ donc $b_0 = 0,8$.

La matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial est donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

2. Le graphe probabiliste sera constitué de deux sommets A et B origines et extrémités de deux arêtes orientées et pondérées. L'arête reliant A à B dans le sens A->B sera pondérée par la probabilité qu'une personne préférant Aurore une semaine donnée, ait changé pour Boréale la semaine suivante, soit 0,1.
On obtient ainsi :



3. a. La matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets est égale à :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}}$$

b. On a :

$$P_1 = P_0 M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,2\times 0,9 + 0,8\times 0,15 & 0,2\times 0,1 + 0,8\times 0,85 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}}$$

4. a. Pour tout entier naturel *n*, $\boxed{P_n = P_0 M^n}$

b. Ainsi, $P_3 = P_0 M^3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}^3$

A l'aide d'une calculatrice, après avoir défini dans le menu MATRICE, une matrice [A], de dimension 1×2 correspondant à P_0 et une matrice [B], de dimension 2×2 correspondant à M, on calcule :

Ainsi, $\boxed{P_3 = \begin{pmatrix} 0,43125 & 0,56875 \end{pmatrix}}$

On peut estimer qu'au bout de la 3ème semaine de campagne, plus de 43% de la population sera favorable au parfum Aurore.

5. a. L'état stable *P*=(*a* *b*) est solution de l'équation matricielle $P = PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

De surcroît, on a $a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$

Les nombres *a* et *b* sont donc solutions du système $\begin{cases} a = 0,9a + 0,15b \\ a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a \end{cases}$ que l'on résout :

$$\begin{cases} a = 0,9a + 0,15b \\ a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,9a + 0,15(1-a) \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,9a + 0,15 - 0,15a \\ b = 1 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,25a = 0,15 \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{0,15}{0,25} \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,6 \\ b = 1 - 0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = 0,6 \\ b = 0,4 \end{cases}}$$

L'état stable est donc $\boxed{P = (0,6 \quad 0,4)}$

b. On peut donc estimer qu'à terme, 60% de la population sera favorable au parfum Aurore, qui sera donc préféré au parfum Boréale

Structures algébriques : groupes, anneaux et corps

Table des matières

1 Groupes

1.1 Lois de composition interne

DFINITION 1
Soit E un ensemble. Une *loi de composition interne* (LCI) sur E est une application T de $E \times E$ dans E, notée généralement de façon infixe : on écrit $x\,T\,y$ plutôt que $T(x,y)$, lorsque $(x,y) \in E \times E$.

EXEMPLES 1
- *La somme sur* $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *(mais pas sur* $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$*).*
- *Le produit sur* $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}\ldots$
- *La différence sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{Z}$ *(mais pas sur* $\mathbb{N}$*).*
- *La composition des applications sur* F^F *(applications de* F *dans* F*).*
- *La loi* $\oplus$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$.
- *La loi* $\otimes$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $(x_1,y_1) \otimes (x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ *(vous la reconnaissez ?)*
- *Les lois* $\cup$, $\cap$ *et* Δ *(réunion, intersection et différence symétrique) définies sur* $\mathcal{P}(F)$.

DFINITION 2
- Une LCI T sur E sera dite *associative* lorsque :
$$\forall x,y,z \in E^3, \qquad (x\,T\,y)\,T\,z = x\,T\,(y\,T\,z).$$
- Une LCI T sur E sera dite *commutative* lorsque :
$$\forall x,y \in E^2, \qquad x\,T\,y = y\,T\,x.$$
- Si T est une LCI associative sur E, $e \in E$ est un *neutre* pour T lorsque :
$$\forall x \in E, \qquad x\,T\,e = e\,T\,x = x.$$

PROPOSITION 1 *Si T est une LCI associative sur E qui admet un neutre, alors ce neutre est unique. On peut alors parler DU neutre de T.*

PREUVE : On suppose e_1 et e_2 neutres pour T, et on considère $e_1\,T\,e_2\ldots$ ■

EXEMPLES 2
- *La somme et le produit sur* $\mathbb{C}$ *(**donc sur ses sous-ensembles**) est associative et commutative, et admettent pour neutres respectifs* 0 *et* 1.
- *La différence n'est ni associative ni commutative sur* $\mathbb{R}$.
- *La loi* $\circ$ *(composition des fonctions de* F *dans* F*) est associative, mais n'est pas commutative (sauf si* F *est un singleton, auquel cas...). Elle admet un neutre, qui est l'application* Id_F.
- *Les lois* $\cup$, $\cap$ *et* Δ *sur* $\mathcal{P}(F)$ *sont associatives et commutatives. Elles admettent pour neutres respectifs* $\emptyset$, F, *et* $\emptyset$.
- $\oplus$ *et* $\otimes$ *sont associatives et commutatives sur* $\mathbb{R}^2$.
- *Vue comme LCI sur* $\mathbb{N}^*$, $+$ *n'admet pas d'élément neutre.*

EXERCICE 1 *Montrer que les lois $\oplus$ et $\oplus$ sur $\mathbb{R}^2$ (cf exemples 1) admettent chacune un neutre.*

DFINITION 3
Si T est une LCI associative sur E qui admet un neutre e et $x \in E$, on dit que x admet un *symétrique pour* T s'il existe $y \in E$ tel que $x\,T\,y = y\,T\,x = e$.

PROPOSITION 2 *Dans la définition précédente, si y existe, il est unique. On peut alors parler DU symétrique de x pour T. On le note généralement x^{-1}.*

PREUVE : Partir de $y_1\,T(x\,T\,y_2) = (y_1\,T\,x)T\,y_2\ldots$ ■

Remarques 1

- On peut avoir $x\,T\,y = e_G$ sans avoir $y\,T\,x = e_G$. On prendra par exemple $E = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, T la loi $\circ$ de composition des fonctions, $y : n \mapsto n+1$ et $x : n \mapsto \mathrm{Max}(n-1, 0)$.
- Les lois notées . sont souvent "oubliées" dans l'écriture : $x.y$ devient xy.
- Grâce à l'associativité, on s'autorise à noter $x\,T\,y\,T\,z$ la valeur commune de $(x\,T\,y)\,T\,z$ et $x\,T\,(y\,T\,z)$.
- Lorsque la loi est additive $+$, le symétrique est noté $-x$ et est appelé "opposé". Lorsque la loi est multiplicative ., le symétrique est appelé "inverse". On n'utilisera JAMAIS la notation $\dfrac{1}{x}$ (sauf pour les complexes-réels-entiers), puisqu'alors la notation $\dfrac{y}{x}$ serait ambigüe dans le cas d'une loi multiplicative non commutative (ce qui sera la règle en algèbre linéaire) : a priori, $y\cdot\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x}\cdot y$ peuvent être distincts...

Exercice 2 *Si x et y admettent un symétrique pour une loi $*$, montrer que $x * y$ admet également un symétrique.*

1.2 Groupes

Dfinition 4
Un *groupe* est un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $(G, *)$ tels que :

- $*$ est associative ;
- $*$ admet un neutre e_G ;
- tout élément de G est symétrisable (admet un symétrique) pour $*$.

Si $*$ est commutative, on dit que $(G, *)$ est commutatif, ou encore *abélien*.

Exemples 3
On fournit d'abord des exemples de groupes : dans les deux premiers cas et le dernier, il s'agit de groupes abéliens. Les deux autres (comme la plupart des groupes fonctionnels) sont non commutatifs.

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *munis de la somme.*
- $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$ *munis du produit.*
- *L'ensemble des homothéties et translations du plan, muni de la loi $\circ$.*
- *L'ensemble des permutations (bijections) de $[\![1, n]\!]$ muni de la loi $\circ$.*
- *L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni de la différence symétrique Δ.*

Exemples 4
Pour diverses raisons (à déterminer), les couples suivants ne sont pas des groupes :

- $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{R}, .)$.
- $(\mathbb{U}, +)$.
- $(E^E, \circ)$.
- $(\mathcal{P}(E), \cup)$, $(\mathcal{P}(E), \cap)$.

Exercice 3 *Montrer que $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ et $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \otimes)$ sont des groupes commutatifs.*

1.3 Sous-groupes

Dfinition 5
Un *sous-groupe* d'un groupe $(G, *)$ est une partie *non vide* H de G telle que :

- $*$ induit sur H une loi de composition interne.
- Muni de cette loi, H est un groupe.

On note alors : $H < G$.

Remarques 2

- *En pratique*, pour montrer qu'une partie non vide H de G en constitue un sous-groupe, il suffit de vérifier :
  - $e_G \in H$;

– H est stable par $*$;
– pour tout $x \in H$, le symétrique x, a priori dans G, est en fait dans H.

- L'intérèt principal de la remarque précédente tient dans le fait que dans bien des cas, on peut montrer que $(H, *)$ est un groupe en montrant grâce au critère précédent que c'est un *sous-groupe d'un groupe connu.* Il est alors inutile de montrer l'associativité, la commutativité et même l'existence d'un neutre : il n'y a que des VERIFICATIONS à faire.

Exemples 5

- *Pour la loi +, on a la "tour de groupe" (inclusions successives de sous-groupes/groupes) suivante :*

$$\{0\} < 1515\mathbb{Z} < \mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R} < \mathbb{C}$$

- *Pour la multiplication usuelle :*

$$\{1\} < \mathbb{U}_n < \mathbb{U} < \mathbb{C}^*$$

mais aussi :

$$\{1\} < \{-1, 1\} < \mathbb{Q}^* < \mathbb{R}^* < \mathbb{C}^*$$

- *Si G est un groupe, $\{e_G\}$ et G en constituent des sous-groupes (dits* triviaux*)*

Exercice 4 *Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes de $(G, .)$. Montrer que $H_1 \cap H_2$ est également un sous-groupe de G.*

On verra en TD que ça se passe moins bien pour la *réunion* de deux sous-groupes.

Exercice 5 *On définit l'ensemble :*

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{k + l\sqrt{2} \mid k, l \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ constitue un groupe (+ est l'addition usuelle des réels).

1.4 Morphismes de groupes

Dfinition 6

- Soient $(G, *)$ et (H, T) deux groupes. Une application de G dans H est un "*morphisme de groupes*" lorsque :

$$\forall x, y \in G, \qquad f(x * y) = f(x)\, T\, f(y).$$

- Si $G = H$ et $* = T$, on parle d'*endomorphisme.*
- Si f est bijective, on parle d'*isomorphisme.*
- Si f est un endomorphisme bijectif, on parle d'*automorphisme.*

Exemples 6

- $x \mapsto 2^x$ *réalise un isomorphisme de* $(\mathbb{R}, +)$ *sur* $(\mathbb{R}_+^*, .)$ *;*
- $x \mapsto 2x$ *réalise un automorphisme de* $(\mathbb{R}, +)$ *;*
- $x \mapsto 3 \ln x$ *réalise un isomorphisme de* $(\mathbb{R}_+^*, .)$ *sur* $(\mathbb{R}, +)$ *;*
- $z \mapsto |z|$ *réalise un morphisme de* $(\mathbb{C}^*, .)$ *dans* $(\mathbb{R}^*, .)$.
- *Si G est un groupe* ***abélien****, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^{-1}$ réalisent des endomorphismes de G.*
- $\theta \mapsto e^{i\theta}$ *réalise un morphisme de* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(\mathbb{C}^*, .)$*, et même sur* $(\mathbb{U}, .)$.

Exercice 6 *Si f est un morphisme de $(G, *)$ dans $(H, \circ)$ et g un morphisme de $(H, \circ)$ dans (K, T), montrer que $g \circ f$ réalise un morphisme de $(G, *)$ dans (K, T).*

Exercice 7 *Montrer que si f est un isomorphisme de $(G, *)$ sur $(H, \circ)$, alors son application réciproque f^{-1} réalise un isomorphisme de $(H, \circ)$ sur $(G, *)$.*

Proposition 3 *Quelques propriétés élémentaires des morphismes de groupes : f est ici un morphisme de $(G,*)$ dans (H,T).*

- $f(e_G) = e_H$.
- *Si f est un isomorphisme, alors son application réciproque réalise un isomorphisme de (H,T) sur $(G,*)$.*
- *Si $G_1 < G$, alors $f(G_1) < H$.*
- *Si $H_1 < H$, alors $f^{-1}(H_1) < G$.*

Preuve : Elémentaire, donc à savoir faire seul ! ■

Dfinition 7

Soit f un morphisme de G dans H.

- Le *noyau* de f, noté Ker f est l'ensemble des antécédents par f de e_H :

$$\operatorname{Ker} f = \left\{x \in G;\quad f(x) = e_H\right\} = f^{-1}(e_H)$$

  (attention, f n'est pas supposée bijective ; il n'est donc pas question de la bijection réciproque de f).
- L'*image* de f, noté $\operatorname{Im} f$ est $f(G)$ (ensemble des images par f des éléments de G).

D'après les deux derniers points de la proposition 3, le noyau et l'image de f sont des sous-groupes respectifs de G et H.

Exercice 8 *Montrer que $(\mathbb{U}, .)$ est un groupe, en le voyant successivement comme image et noyau d'un morphisme de groupe.*

Bien entendu, et c'est une trivialité, un morphisme de G dans H est surjectif si et seulement si son image est égale à H. Ce résultat est d'ailleurs sans intérèt … Le résultat suivant est bien plus intéressant, puisqu'il réduit énormément le travail, pour montrer qu'un morphisme est injectif.

Proposition 4 *Soit f un morphisme de $(G,*)$ dans (H,T). Alors f est injectif si et seulement si son noyau est réduit à $\{e_G\}$.*

Preuve : Elémentaire, donc à savoir faire seul… ■

Exercice 9 *L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (2x-y, 3x+2y)$ est-elle injective ?*

2 Anneaux

2.1 Structure d'anneau

Dfinition 8

Un *anneau* est un ensemble muni de deux LCI $(A,+,.)$ tels que :

- $(A,+)$ est un groupe *commutatif* de neutre noté 0_A.
- La loi . est une LCI sur A associative et *distibutive* à gauche et à droite par rapport à + :

$$\forall x,y,z \in A, \qquad x.(y+z) = x.y + x.z \quad \text{et} \quad (x+y).z = x.z + y.z$$

- La loi . admet un neutre différent de 0_A, noté $\mathbf{1}_A$.

Si la loi . est commutative, l'anneau est dit commutatif ou abélien.

Exercice 10 *Si $x \in A$, montrer que $0_A.x = 0_A$ (considérer $0_A.x + 0_A.x$).*

Exemples 7

- $(\mathbb{Z},+,.)$, $(\mathbb{Q},+,.)$, $(\mathbb{R},+,.)$ *et* $(\mathbb{C},+,.)$ *sont des anneaux bien connus.*
- $\big(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap\big)$ *est un anneau plus anecdotique.*
- $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ *est un anneau… connu sous une autre identité !*

- *L'ensemble des suites réelles, muni de l'addition et du produit des suites, est un anneau. Même chose pour l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On déterminera précisément les neutres de ces anneaux.*

Remarques 3
- Il est nécessaire d'imposer la distributivité à droite et à gauche. Par exemple, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$ n'est pas un anneau : on a bien $(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$ pour tout f, g, h, mais pas nécessairement $f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$.
- Lorsqu'on travaille dans un anneau, de nombreux calculs se passent "comme dans $\mathbb{R}$". Cela dit, il faut faire attention par exemple à ne pas diviser. Le meilleur moyen pour ne pas dire d'ânerie consiste en fait à "faire comme dans $\mathbb{Z}$".

2.2 Sous-anneaux

Dfinition 9

Soit $(A, +, .)$ un anneau. Une partie non vide A_1 de A est un *sous-anneau* de A lorsque :
- $\mathbf{1}_A \in A_1$;
- les lois + et . induisent des LCI sur A_1, et, muni de ces lois, $(A_1, +, .)$ est un anneau.

Remarque 4 Contrairement aux sous-groupes, on ne peut pas se passer de la condition $\mathbf{1}_A \in A_1$, qui ne découle pas des autres conditions[1]. On verra en exercice un contre-exemple.

Comme pour les sous-groupes, il est assez moyennement intéressant de montrer à nouveau les associativités et même la distributivité. Fort heureusement, on a le résultat (quasi-évident) suivant :

Proposition 5 *Une partie A_1 de A est un sous-anneau si et seulement si*
- *$(A_1, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$;*
- *$\mathbf{1}_A \in A_1$;*
- *. induit une LCI sur A_1.*

Exemples 8
- *Bien entendu, $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ qui est un sous-anneau de...*
- *L'ensemble des fonctions dérivables sur I constitue un sous-anneau des fonctions continues sur I, qui constitue lui-même un sous-anneau de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.*
- *L'ensemble des suites réelles stationnaires est un sous-anneau de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$, qui est un sous-anneau de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, .)$*

Exercice 11 *Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.*

Exercice 12 *Montrer que si A_1 et A_2 sont deux sous-anneaux d'un anneau A, alors $A_1 \cap A_2$ est également un sous-anneau de A.*

2.3 Morphismes d'anneaux

Dfinition 10

Soient $(A, +, .)$ et $(B, +, .)$ deux anneaux (on note de la même façon les lois de A et B...). Un *morphisme d'anneaux* de A vers B est une application de A vers B telle que :
- $f(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_B$;
- pour tout $x, y \in A$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(x.y) = f(x).f(y)$.

Exemples 9
- *$z \mapsto \overline{z}$ réalise un automorphisme d'anneaux de $\mathbb{C}$.*
- *$f \mapsto f(\pi)$ réalise un morphisme d'anneaux de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sur[2] $\mathbb{R}$.*

[1] on se rappelle que dans le cas d'un sous-groupe H de G, la relation $e_G \in H$ est une conséquence de la définition

[2] comme pour les fonctions, on dit "de E *sur* F" plutôt que "de E *dans* F", lorsque le morphisme est surjectif

- $u \mapsto u_{1515}$ *réalise un morphisme d'anneaux surjectif (pourquoi ?) de* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *sur* $\mathbb{C}$.

REMARQUES 5
- La relation $f(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_B$ ne découle pas des autres relations[3] ; on ne peut donc pas s'en passer dans la définition.
- A fortiori, un morphisme d'anneaux est un morphisme de groupe (pour la première loi). A ce titre, on peut parler de son image et de son noyau. Malheureusement, si l'image est un sous-anneau de l'anneau d'arrivée (le montrer), le noyau n'est pas nécessairement un sous-anneau de l'anneau de départ, ce qui limite l'intéret des morphismes d'anneaux. Cependant, on garde l'équivalence entre l'injectivité de f et le fait que $\operatorname{Ker} f = \{0_A\}$.

EXERCICE 13 *Montrer que la composée de deux morphismes d'anneaux est un morphisme d'anneaux.*

EXERCICE 14 *Montrer que si f est un isomorphisme d'anneaux, alors son application réciproque également.*

2.4 Divisibilité

DFINITION 11
Soit $(A, +, .)$ un anneau *commutatif*.
- On dit que $x \in A$ est *inversible* s'il admet un symétrique pour la loi .
- On dit que a *divise* b s'il existe $c \in A$ tel que $b = ca$. On note $a|b$.
- On dit que a est un *diviseur de* 0 s'il existe $b \neq 0$ tel que $ab = 0$.
- Un anneau est dit *intègre* s'il ne contient pas de diviseur de 0 autre que 0 lui-même.

Les faits suivants sont faciles à montrer :

PROPOSITION 6 *Dans un anneau commutatif* $(A, +, .)$ *:*
- 0_A *n'est jamais inversible.*
- *Si x est inversible, alors ce n'est pas un diviseur de* 0.
- *Si $x_1, x_2, y \in A$ intègre, avec $y \neq 0$ et $x_1 y = x_2 y$, alors $x_1 = x_2$. On dit qu'*"on peut simplifier" *(ce qui ne veut pas dire* diviser*) par $y \neq 0$.*

EXEMPLES 10
- *$\mathbb{Z}$ est intègre, et ses éléments inversibles sont 1 et -1.*
- *$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des anneaux intègres dont tous les éléments non nuls sont inversibles.*
- *L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas intègre : toute application f qui s'annulle est diviseur de 0 (le montrer). Les éléments inversibles sont les fonctions qui ne s'annullent pas.*

EXERCICE 15 *Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau intègre de $\mathbb{C}$, dont les inversibles sont 1, i, -1 et $-i$.*

2.5 Calculs dans les anneaux

- On rappelle la formule du *binôme de Newton*, qui s'étend de $\mathbb{Z}$ aux anneaux commutatifs, mais aussi (et cela sert effectivement[4]) dans un anneau quelconque, *avec deux éléments qui commutent* :

  PROPOSITION 7 *Soient $a, b \in A$, avec $ab = ba$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

  $$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}.$$

  PREUVE : Récurrence sur $\mathbb{N}$ et formule du triangle de Pascal. ■

[3] contrairement aux morphismes de groupes, pour lesquels la relation $\varphi(e_G) = e_H$ est une conséquence de la définition
[4] en particulier dans les anneaux de matrices

- Si $x, y \in A$ commutent et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $x - y | x^n - y^n$, et plus précisément :

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

BIEN ENTENDU, pour les deux derniers résultats, l'hypothèse essentielle $xy = yx$ ne sera jamais oubliée...

- Cas particulier de ce qui précède : si $1 - x$ est inversible (ce qui n'est pas EQUIVALENT à $x \neq 1$), on peut calculer $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ grâce à la formule :

$$1 - x^n = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

$\mathbf{1}_A$ *commute en effet avec tous les éléments de l'anneau.*

- On verra en TD de Maple l'algorithme d'*exponentiation rapide*, qui permet de calculer a^n en $O(\ln n)$ multiplications. L'idée apparaît dans l'exemple suivant :

$$a^{53} = a.(a^2)^{26} = a.(a^4)^{13} = a.a^4.(a^8)^6 = a.a^4.(a^{16})^3 = a.a^4.a^{16}.a^{32}.$$

Il suffit donc de calculer les a^{2^k}, et d'en tenir compte dans le résultat final lorsque la puissance en cours est impaire (si $(a^4)^{13}$ apparaît en cours de calcul, alors a^4 interviendra dans le résultat). Au vu de cet exemple, on peut formaliser l'algorithme d'exponentiation rapide de la façon suivante :

```
Fonction Expo_rapide(x,n)
Debut
  Res<-1;  # Contiendra à la fin le résultat
  Puis<-x; # Contiendra les puissances successives de x
  N<-n;    # Puissance à laquelle Puis doit encore être évalué
  Tant_que N>0
    Si N est impair Alors Res<-Res*Puis Fsi;
    Puis<-Puis^2;
    N<-N/2 # en fait, le quotient dans la division euclidienne
    Fin_Tant_que;
  RETOURNER(Res)
Fin
```

Mise en oeuvre en TD Maple... où on verra une seconde version récursive plus rapide à écrire, mais qui semble un peu magique !

Pour prouver la validité de cet algorithme, on peut noter (là encore au vu de l'exemple) PUIS prouver que la quantité `Res*Puis^N` reste égale à x^n en cours d'exécution[5]. Quand on veut frimer, on parle d'*invariant de boucle*.

3 Corps

3.1 Structure de corps

DFINITION 12

- Un *corps* est un anneau commutatif dans lequel tout élément non nul est inversible.
- Si $(\mathbb{K}, +, .)$ est un corps, un *sous-corps* de $\mathbb{K}$ est un sous-anneau $\mathbb{K}_1$ de $\mathbb{K}$ tel que pour tout élément non nul x de $\mathbb{K}_1$, on a $x^{-1} \in \mathbb{K}_1$; $(\mathbb{K}_1, +, .)$ est alors un corps.

[5] au début et à la fin de chaque tour de boucle

Remarque 6 Si on enlève l'hypothèse de commutativité, on obtient ce que les anglo-saxons appellent "*division ring*", traduit piteusement par "*anneau à division*". En taupe, dans les temps anciens, le terme de *corps* désignait d'ailleurs ces anneaux à divisions.

En anglais, les corps se nomment "*fields*". Pourquoi ? mystère...

3.2 Exemples

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps, mais pas $\mathbb{Z}$ (2 n'est pas inversible).
- On verra plus tard le *corps des fractions rationnelles* (quotients de polynômes).
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[i]$ sont des sous-corps respectifs de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
- Si on reprend les lois $\oplus$ et $\otimes$ des exemples 1, $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ est un corps... qui ressemble fortement à $\mathbb{C}$.

3.3 Pour la suite

Il n'existe en Spé (hors MP/MP*) que $2,5$ corps : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, et (accessoirement...) $\mathbb{Q}$.

Bien entendu, si on passe l'X (et si on n'a pas trop de chance...), il ne faudra rien ignorer des corps finis $\mathbb{F}_q$, mais c'est une autre histoire !