المادة: الرياضيات

ملخص لدرس المتتاليات الترجعية

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

I. المتتاليات الحسابية: تذكير

تمرين1

لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1. $0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10$, ...
2. $6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12$, ...
3. $1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243$, ...
4. $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32}$, ...
5. $1 , 2 , 4 , 9 , 16 , 32 , 64$, ...

مثال1 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n = 2n-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- أحسب حدها الأول u_0
- أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$
- أحسب $u_{n+1}-u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. تعريف :

نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث : $u_{n+1} = u_n + r \quad \forall n \geq n_0$

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

تمرين2

: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n = 2n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب : $u_{n+1}-u_n$
2. ماذا تستنتج ؟

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} فان : $u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فان : $u_n = u_p + (n-p)r$ لكل $n \geq n_0$ و $p \geq n_0$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية

نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$ حيث $n \succ p \geq n_0$

لدينا $S_n = (n-p+1)\left(\frac{u_n+u_p}{2}\right)$

المجموع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$ يحتوي على $(n-p+1)$ حد

تمرين3 :

1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0=1$

أحسب المجموع التالي : $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ و حدها الأول $u_0=4$

أحسب المجموع التالي : $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}$

تمرين4 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_n=\dfrac{n+3}{4}$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية
2. أحسب المجموع : $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_6$

II. المتتاليات الهندسية

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n=2\times 3^n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب حدها الأول u_0
2. أحسب $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$
3. ماذا تستنتج ؟

1. تعريف:

نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث : $u_{n+1}=qu_n$ $\quad \forall n\geq n_0$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

تمرين5 :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n=3\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

بين أن (u_n) متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_{n_0} فان : $u_n=u_{n_0}q^{n-n_0}$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم فان : $u_n=u_mq^{n-m}$ لكل $n\geq n_0$ و $m\geq n_0$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم نضع $S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_n$

حيث $n\succ p\geq n_0$ لدينا :

- إذا كان $q\neq 1$ فان : $S_n=u_p\left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-p}\right)$
- إذا كان $q=1$ فان : $S_n=(n-p+1)\times u_p$

تمرين6 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_{n+1}=3\times U_n$ و $u_0=2$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية
2. أعبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_6$

III. المتتاليات من صنف $U_{n+1} = aU_n + b$

مثال : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجعية التالية : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

ملاحظة : *هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعيه*

تمرين7 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 8$

1. نفترض أن : $u_0 = 12$ أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. نفترض أن : $u_0 = 3$ أحسب u_1 و u_2 و u_3

تمرين8 : نعتبر المتتالية الترجعية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$ أحسب u_1 و u_2 و u_3

تمرين9 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1 \\ u_0 = 10 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب v_0 و v_1 و v_2
2. أحسب $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب بدلالة n المجموع : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

تمرين10 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب v_0 و v_1
2. أحسب $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ و المستقيم ذو المعادلة : $y = 2x + 2$
6. مثل مبيانيا الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n)

تمرين11 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n = 5^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : $u_{n+1} = 5u_n + 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

تمرين 12 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n = 2 \times 3^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : $u_{n+1} = 3u_n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

تمرين 13 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1 \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - \frac{2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $-\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ و المستقيم ذو المعادلة : $y = 2x + 2$
6. مثل مبيانيا الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n)

تمرين14 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$

تمرين15 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + \frac{3}{2} \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n + \frac{3}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج أن : $u_n = \frac{13}{12} \times 3^n - \frac{3}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
5. أحسب : $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$

تمرين16 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - \frac{8}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\frac{1}{4}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$
6. بين أن: $$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}=-\frac{44}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$
7. بين أن: $$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}=-\frac{44}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)+\frac{8}{3}n$$

المادة: الرياضيات

ملخص لدرس نهاية متتالية

مستوى:السنة الثانية من سلك البكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

محتوى الدرس	القدرات المنتظرة	المكتسبات السابقة	الامتدادات
❖ **نهايةالمتتاليات المرجعية :** (n) و (n^2) و (n^3) و $(\sqrt{n})$ و (n^p) $p\geq 3$ و $p\in\mathbb{N}$ ❖ **نهايةالمتتاليات المرجعية :** $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ حيث $p\geq 3$ و $p\in\mathbb{N}$ ❖ **نهاية متتالية هندسية:** (a^n) حيث $a\in\mathbb{R}$	استعمال نهاية المتتاليات المرجعية لتحديد نهاية متتالية	○ نهايات الدوال العددية ○ المتتاليات الهندسية و المتتاليات الحسابية ○ المتتاليات من صنف $U_{n+1}=aU_n+b$	دراسة وضعيات متقطعة من مجالات مختلفة

I. متتاليات مرجعية نهايتها $+\infty$

تمرين1

]حسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 9x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{8}x^4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^6$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 7\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^7$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -6\sqrt{x}$

ولكون المتتالية العددية هي نوع من الدوال العددية معرفة على $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$ فإننا نحصل على نتائج مشابهة :

1. خاصية :

المتتاليات المرجعية : (n) و (n^2) و (n^3) و $(\sqrt{n})$ و (n^p) حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\geq 4$ تؤول الى $+\infty$ عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} n^p=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$

2. خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية مرجعية نهايتها $+\infty$ فان المتتالية $(-u_n)$ تؤول الى $-\infty$

II. متتاليات مرجعية نهايتها 0

خاصية

المتتاليات المرجعية : $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\geq 4$ تؤول الى 0 عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

تمرين

]حسب النهايات التالية :

$\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{n^3}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

$\lim_{n\to+\infty}-3n^5$ و $\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}n^6$ و $\lim_{n\to+\infty}2n^9$

III. متتاليات نهايتها عدد

مثال :

]حسب النهايات التالية :

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

$\lim_{n\to+\infty}-3n^5$ و $\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}n^6$ و $\lim_{n\to+\infty}2n^9$

ملاحظات :

- كل متتالية تكون نهايتها عددا حقيقيا تسمى متتالية متقاربة
- كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة

IV. نهاية المتتالية (a^n)

خاصية: ليكن a عددا حقيقيا

1. إذا كان : $a\succ 1$ فان : (a^n) تؤول إلى $+\infty$
2. إذا كان : $a=1$ فان : (a^n) تؤول إلى 1
3. إذا كان : $-1\prec a\prec 1$ فان : (a^n) تؤول إلى 0
4. إذا كان : $a\leq -1$ فان : المتتالية (a^n) ليست لها نهاية

أمثلة : [حسب النهايات التالية :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}(-5)^n$$

تمرين : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}(0,7)^n$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n$, $\lim_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}$,

$$\lim_{n\to+\infty}(-2)^n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}(4)^{-n} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{n^2}-1 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} n^2-n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$$

V. العمليات على النهايات

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و l و l' و α أعدادا حقيقية

العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

1. الجمع و الضرب:

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞
$\lim v_n$	l'	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n\times v_n)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

2. المقلوب:

$\lim u_n$	$l\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

3. الخارج:

$\lim u_n$	l	$l \succ 0$	$l \prec 0$	$l \succ 0$	$-\infty$	$l \prec 0$	l	∞	0
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$l \prec 0$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0^+	0^-	0^-	$+\infty$	0^+	0	شكل غير محدد	شكل غير محدد

مثال : أحسب النهاية التالية : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n$

تمرين : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}$, $\lim_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1$,

$\lim_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{9n-3}{3n+5}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4}$,

$\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$, $\lim_{n\to+\infty} (n+1)^2-(n-1)^2$

ملاحظة :

- نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

تمرين : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2} \\ u_0=3 \end{cases} \forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=u_n+1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$

تمرين : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=3u_n+\frac{3}{2} \\ u_0=\frac{1}{3} \end{cases} \forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=u_n+\frac{3}{4} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج أن : $u_n=\frac{13}{12}\times 3^n-\frac{3}{4} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

5. أحسب : $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$

تمرين : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+2 \\ u_0=-1 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=u_n-\frac{8}{3}$

1. أحسب v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\frac{1}{4}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$
6. بين أن: $v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}=-\frac{44}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$
7. بين أن: $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}=-\frac{44}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)+\frac{8}{3}n$

المادة: الرياضيات

ملخص لدرس الاشتقاق

ودراسة الدوال

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

I. اشتقاق دالة في نقطة:

تعريف:

نقول ان دالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=\ell$

أو $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$

العدد ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0. و نكتب $\ell=f'(x_0)$

ملاحظة:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فان معادلة مماس المنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 هي:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

II. الدالة المشتقة:

مشتقات الدوال الاعتيادية:

$f(x)$	$f'(x)$	المجال
k	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$

العمليات على الدوال المشتقة:

الدالة	مشتقتها	الشرط
$u+v$	$u'+v'$	
$k\cdot u$	$k\cdot u'$	
$u\cdot v$	$u'v+uv'$	
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	u لا تنعدم في I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v+uv'}{v^2}$	v لا تنعدم في I
$u^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$nu^{n-1}u'$	

III. رتابة دالة و إشارة مشتقتها:

خاصية:

I مجال من $\mathbb{R}$ و f دالة قابلة للاشتقاق على I.

- f ثابتة على I $\Leftrightarrow$ $f'(x)=0$ لكل x من I.
- f تزايدية على I $\Leftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$ لكل x من I.
- f تناقصية على I $\Leftrightarrow$ $f'(x)\leq 0$ لكل x من I.

ملاحظة: f قابلة للاشتقاق على المجال I.

إذا انعدمت $f'(x)$ في x_0 مغيرة اشارتها بالمرور من فان f تقبل مطرافا في x_0.

IV. نهايات دالة:

نهاية دالة حدودية في $+\infty$ أو في $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}\quad(c\neq 0)$$

و نهاية الدالة $x\to\frac{ax+b}{cx+d}$ في $-\frac{d}{c}$ هي $+\infty$ أو في $-\infty$.

ملاحظة:

- إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ أو $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\ell$ فان المستقيم ذا المعادلة $y=\ell$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).
- إذا كان $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ أو $\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ فان المستقيم ذا المعادلة $x=x_0$ مقارب عمودي.

V. المعادلة و المتراجحة:

f دالة عددية و (C_f) منحناها و c عدد حقيقي.

- حلول المعادلة $f(x)=c$ هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم $y=c$.
- حلول المتراجحة $f(x)=c$ هي المجالات التي يكون فيها المنحنى (C_f) تحت المستقيم $y=c$.
- حلول المتراجحة $f(x)=c$ هي المجالات التي يكون فيها المنحنى (C_f) فوق المستقيم $y=c$.

مثال 1 : <u>دراسة دالة حدودية:</u>

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=x^3-3x^2+4$

1. حدد أرتوب مركز تماثل منحنى الدالة f علما أن أفصولها يساوي 1.
2. حدد حيز الدراسة و أحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
3. أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على حيز الدراسة.
4. أنشئ منحنى الدالة f.
5. حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ على المجال $]-\infty,1]$.

<u>الحل:</u>

1. الدالة f حدودية يعني معرفة على $\mathbb{R}$, و يعني أن مركز تماثل (C_f) ينتمي اليه.

فإذا كان أفصول مركز التماثل هو 1 فان أرتوبه هو $f(1)=2$.

2. حيز دراسة الدالة f هو $D=[1,+\infty[$.

و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

3. لكل x من $[1,+\infty[$: $f'(x)=\left(x^3-3x^2+4\right)'=3x^2-6x$

يعني: $f'(x)=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ يعني $3x(x-2)=0$

يعني $x=0$ أو $x=2$

جدول إشارة $f'(x)$

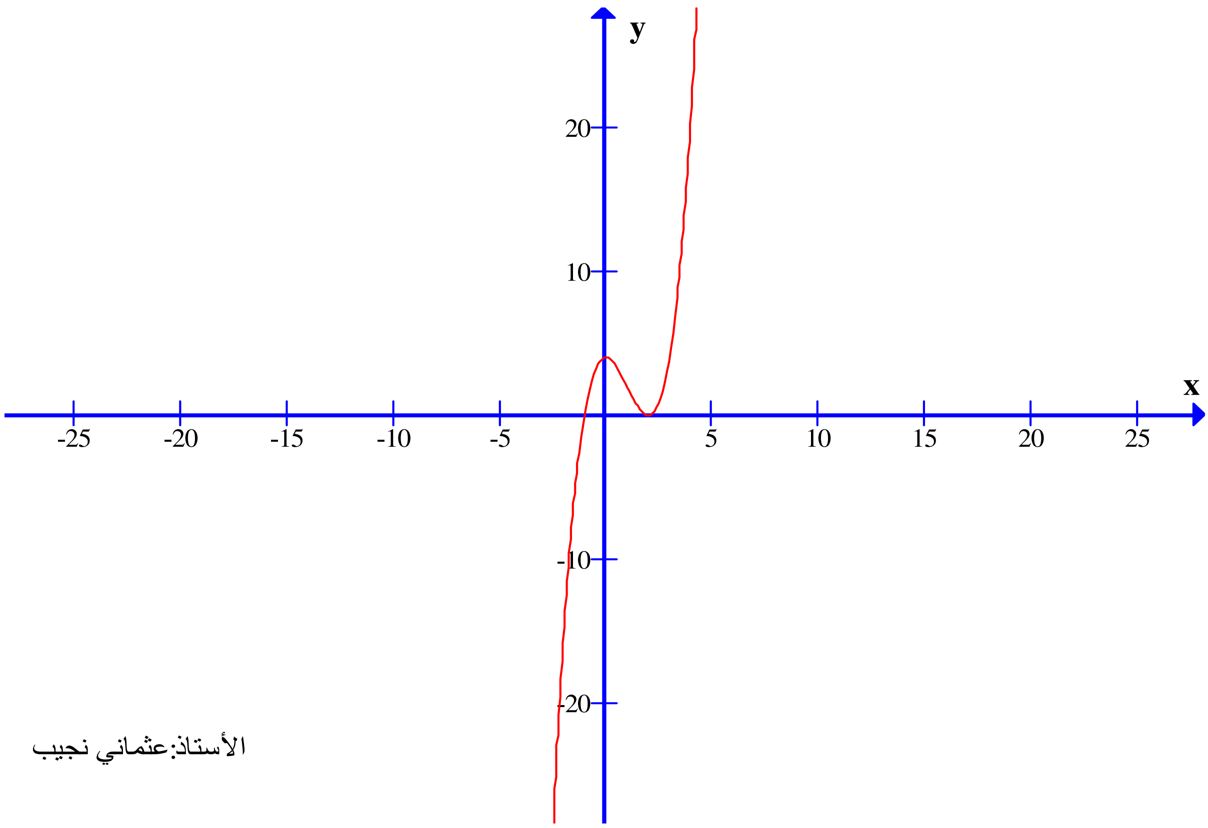
x	1		2		$+\infty$
$3x$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f.

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f(x)	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. التمثيل المبياني للدالة f.

نبدأ برسم المنحنى على المجال $]1,+\infty[$ ثم نستعمل التماثل المركزي الذي مركزه $I(1,2)$ لإتمام المنحنى على $\mathbb{R}$.



الأستاذ:عثماني نجيب

5. مبيانيا, نلاحظ أن المستقيم ذا المعادلة $y=3$ يقطع المنحنى (C_f) مرتين على المجال $]-\infty,1]$.

و منه المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلين على المجال $]-\infty,1]$.

مثال 2 : <u>دراسة دالة متخاطة:</u>

نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g.
2. أحسب نهايات الدالة g في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g.
4. أنشئ منحنى الدالة g.
5. حل مبيانيا المتراجحة $-2 \prec g(x) \prec 2$.

الحل:

1. حيز تعريف الدالة g هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{1\}$

و منه $D=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+2}{x-1}=-\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى.

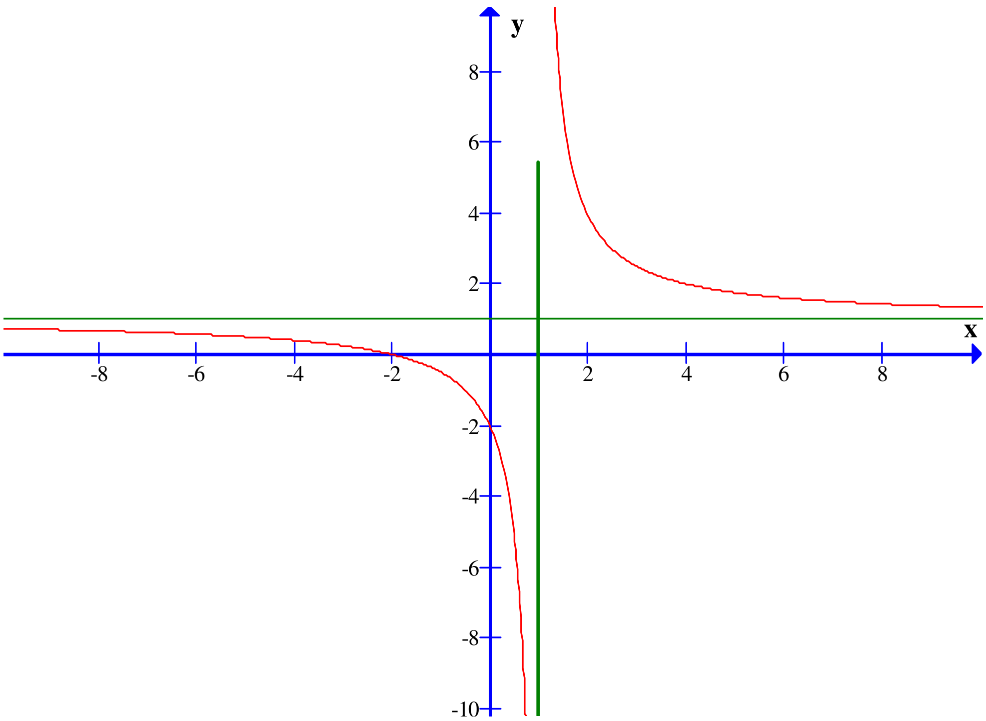
3. لكل x من D لدينا: $g'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\, g'(x)\prec 0$

جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	||	-	
$g(x)$	1 ↘ $+\infty$		||	$-\infty$ ↘ 1	

4. منحنى الدالة g.



5. لدينا $g(4)=2$ و $g(0)=-2$

مجموعة حلول المتراجحة $-2\prec g(x)\prec 2$ هي:

$S=]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$

VI. دراسة الدالة $x\mapsto\sqrt{ax+b}\,(a\neq0)$:

1. مجموعة تعريف الدالة $x\mapsto\sqrt{ax+b}\,(a\neq0)$:

مجموعة تعريف الدالة $f: x\mapsto\sqrt{ax+b}\,(a\neq0)$ هي:

- إذا كان $a \succ 0$ $D_f = \left]-\frac{b}{a},+\infty\right[$
- إذا كان $a \prec 0$ $D_f = \left]-\infty,-\frac{b}{a}\right[$

في جميع الحالات يجب أن يكون $ax+b \geq 0$.

2. نهايات الدالة $(a \neq 0)x \mapsto \sqrt{ax+b}$ **:**

- إذا كان $a \succ 0$ فان $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{ax+b} = +\infty$
- إذا كان $a \prec 0$ فان $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{ax+b} = +\infty$.

لدينا: $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ في الحالتين.

3. اشتقاق الدالة $(a \neq 0)x \mapsto \sqrt{ax+b}$ **:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $(a \neq 0)f(x) = \sqrt{ax+b}$

- إذا كان $a \succ 0$ فان الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $-\frac{b}{a}$ و قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{b}{a},+\infty\right[$

فان: $\left(\forall x \in \left]-\frac{b}{a},+\infty\right[\right) f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

- إذا كان $a \prec 0$ فان الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $-\frac{b}{a}$ و قابلة للاشتقاق على $\left]-\infty,-\frac{b}{a}\right[$ فان: $\left(\forall x \in \left]-\infty,-\frac{b}{a}\right[\right) f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

إذا كان $a \succ 0$ فان $\frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \succ 0$ يعني $f'(x) \succ 0$.
إذا كان $a \prec 0$ فان $\frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \prec 0$ يعني $f'(x) \prec 0$.

4. جدول تغيرات الدالة $(a \neq 0)x \mapsto \sqrt{ax+b}$ **:**

حالة $a \prec 0$

x	-b/a		+∞
$f'(x)$	||	+	
f(x)	0	↗	+∞

حالة $a \prec 0$

x	-∞		-b/a
f'		-	||
f(x)	+∞	↘	0

ملاحظة : الرمز $\|$ يعني أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $-\frac{b}{a}$

مثال: لدراسة الدالة من قبيل $(a \neq 0)x \mapsto \sqrt{ax+b}$ **:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x) = \sqrt{3x-5}$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f.
2. أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة في النقطة $\frac{5}{3}$ على اليمين.
4. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f.
5. أحسب $f(2)$ و $f(3)$ و $f(7)$.
6. مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

الحل:

1. $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $3x-5\geq 0$ يعني $3x\geq 5$ و منه $x\geq\frac{5}{3}$

يعني حيز تعريف الدالة f هو: $D=\left[\frac{5}{3},+\infty\right[$

2. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sqrt{3-\frac{5}{x}}=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

3. نحسب النهاية $\lim_{x\to\left(\frac{5}{3}\right)^+}\frac{f(x)-f\left(\frac{5}{3}\right)}{x-\frac{5}{3}}$

لدينا: $\frac{f(x)-f\left(\frac{5}{3}\right)}{x-\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{3x-5}-0}{x-\frac{5}{3}}=\frac{3\sqrt{3x-5}}{3x-5}=\frac{3}{\sqrt{3x-5}}$

لدينا: $\lim_{x\to\left(\frac{5}{3}\right)^+}\sqrt{3x-5}=0$ و $\left(\forall x\succ\frac{5}{3}\right):\sqrt{3x-5}\succ 0$ ومنه $\lim_{x\to\left(\frac{5}{3}\right)^+}\frac{f(x)-f\left(\frac{5}{3}\right)}{x-\frac{5}{3}}=+\infty$

هذا يعني أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في $\frac{5}{3}$ على اليمين.

4. لدينا: $\left(\forall x\in\left]\frac{5}{3},+\infty\right[\right)f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$

بما أن $\frac{3}{2}\succ 0$ و $\sqrt{3x-5}\succ 0$ فان: $f'(x)\succ 0$.

جدول التغيرات:

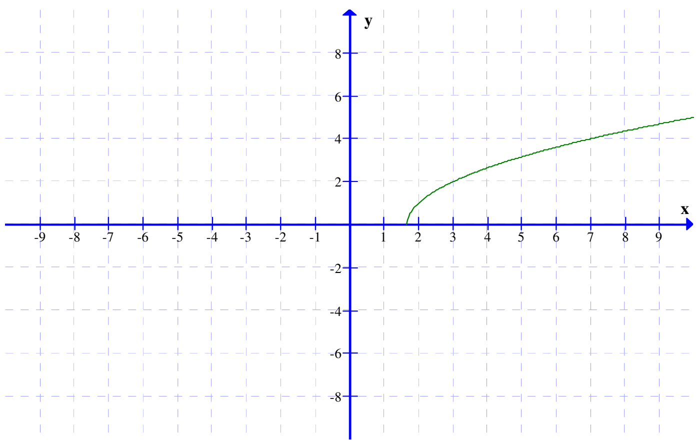
x	5/3	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

5. **لدينا:** $f(2)=\sqrt{3\times 2-5}=\sqrt{1}=1$

و $f(3)=\sqrt{3\times 3-5}=\sqrt{4}=2$

و $f(7)=\sqrt{3\times 7-5}=\sqrt{16}=4$

6. **التمثيل المبياني:**



$f\left(\frac{5}{3}\right)=0$ يعني أن النقطة $A\left(\frac{5}{3},0\right)$ تنتمي ل (C_f).

$f(2)=1$ يعني أن النقطة $B(2,1)$ تنتمي ل (C_f).

$f(3)=2$ يعني أن النقطة $B(3,2)$ تنتمي ل (C_f).

$f(7)=4$ يعني أن النقطة $B(7,4)$ تنتمي ل (C_f).

المادة: الرياضيات

ملخص لدرس اللوغاريتم النبيري

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

1) تعريف:

- دالة اللوغاريتم النبيري يرمز لها ب ln و هي الدالة الأصلية للدالة $x \to \frac{1}{x}$

على المجال $]0,+\infty[$ التي تنعدم في 1.

و لدينا: $(\forall x \in]0,+\infty[): \ln'(x) = \frac{1}{x}$

- دالة اللوغاريتم النبيري تنعدم في 1 أي $\ln(1) = 0$.

2) النهايات: تقبل النهايات التالية:

الخاصية 1: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

الخاصية 2: $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

3) خاصية جبرية:

1. $(\forall a \succ 0)(\forall b \succ 0)$
2. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
3. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
4. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
5. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
6. $(\forall n \in \mathbb{Z}) \ln(a^n) = n\ln(a)$

تطبيق الخاصية 1:

لدينا $\ln(2) \simeq 0,7$

و $\ln(3) \simeq 1,1$

اذن:

$\ln(6) = \ln(2 \times 3)$

$= \ln(2) + \ln(3)$

$\simeq 0,7 + 1,1 \simeq 1,8$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبري:

مثال : إذا علمت أن $\ln(2) \simeq 0,7$ و $\ln(3) \simeq 1,1$ فاحسب ما يلي:

$\ln\left(\frac{8}{12}\right)$ $\qquad \ln(72)$ $\qquad \ln(\sqrt{6})$ $\qquad \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$ $\qquad \ln(3\sqrt{2})$

الحل:

$$\ln\left(\frac{8}{12}\right) = \ln\left(\frac{2 \times 4}{3 \times 4}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \ln(2) - \ln(3)$$

$$= 0,7 - 1,1 = -0,4$$

$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$

$$\ln(72) = \ln(9 \times 8) = \ln(9) + \ln(8)$$

$\boxed{72 = 9 \times 8}$

$$= \ln(3^2) + \ln(2^3)$$
$$= 2\ln(3) + 3\ln(2)$$
$$= 2\times(1,1) + 3\times(0,7)$$
$$= 2,2 + 2,1 = 4,3$$

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$$
$$\boxed{\ln(a^n) = n\ln(a)}$$
$$\boxed{\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)}$$

$$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2}\ln(6) = \frac{1}{2}\ln(2\times3)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln(2) + \ln(3)) = \frac{1}{2}(0,7+1,1)$$
$$= \frac{1}{2}(1,8) = 0,9$$

$$\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\times3\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$\ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln(3) - \ln(2))$$
$$= \frac{1}{2}(1,1-0,7) = \frac{1}{2}\times0,4 = 0,2$$
$$\ln(3\sqrt{2}) = \ln(3) + \ln(\sqrt{2})$$
$$= \ln(3) + \frac{1}{2}\ln(2)$$
$$= 1,1 + \frac{1}{2}(0,7)$$
$$= 1,1 + 0,35 = 1,45$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \\ \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a) \end{array}}$$

4) جدول تغيرات الدالة $x \to \ln(x)$:

لدينا: $(\forall x \in]0,+\infty[) : \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

بما أن $x \succ 0$ فان $(\forall x \in]0,+\infty[) : \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \succ 0$

و بالتالي الدالة ln تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

و منه الجدول:

x	0		$+\infty$
f'	‖	+	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$(\forall a \succ 0)(\forall b \succ 0)$

$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

$(\forall a \succ 0)(\forall b \succ 0)$

$\ln(a) \succ \ln(b) \Leftrightarrow a \succ b$

$\ln(a) \prec \ln(b) \Leftrightarrow a \prec b$

لأن الدالة ln تزايدية قطعا.

5) العدد e : $e \simeq 2,71828\cdots$

← e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\ln(e) = 1$.

← بتطبيق الخاصية الخامسة على العدد e

نحصل على: $(\forall n \in \mathbb{Z})\ln(e^n) = n\ln(e)$

أي: $(\forall n \in \mathbb{Z})\ln(e^n) = n$

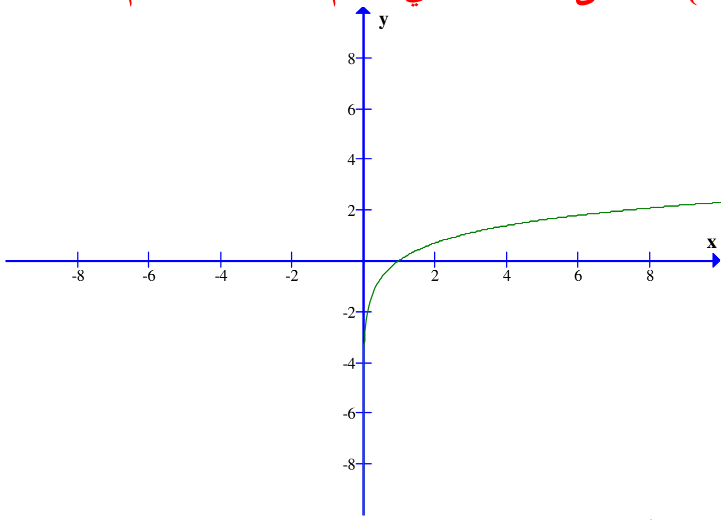
$\ln(e^3) = 3$

$\ln(e^4) = -4$

حل المعادلة $\ln(x) = 7$

هو العدد $x = e^7$

6) منحنى الدالة $\ln$ في معلم متعامد ممنظم



ملاحظات:

معادلة مماس المنحنى الدالة $\ln$ في النقطة $(1,0)$ هي:

$$y=\ln'(1)(x-1)+\ln(1)$$

أي: $y=x-1$

معادلة مماس المنحنى الدالة $\ln$ في النقطة $(e,0)$ هي:

$$y=\ln'(e)(x-e)+\ln(e)$$

أي: $y=\frac{1}{e}(x-e)+1$

أي: $y=\frac{1}{e}x$

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}$$
$$\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$$
$$\ln(1)=0$$
$$\ln'(e)=\frac{1}{e}$$
$$\ln(e)=1$$

منحنى الدالة $\ln$ يوجد تحت محور الأفاصيل في المجال $]0,1[$ و هذا يعني أن $(\forall x\in]0,1[):\ln(x)\prec 0$.

منحنى الدالة $\ln$ يوجد تحت محور الأفاصيل في المجال $]1,+\infty[$ و هذا يعني أن $(\forall x\in]1,+\infty[):\ln(x)\succ 0$.

7) اللوغاريتم العشري:

تعريف:

يرمز لدالة اللوغاريتم العشري ب: $\log$ و هي معرفة على $]0,+\infty[$

كما يلي: $(\forall x\in]0,+\infty[):\log(x)\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

لاحظ أن $\ln(10)\neq 1$

في حين $\log(10)=1$

خاصيات هامة لدالة اللوغاريتم العشري:

1. $\log(1)=0$ و $\log(10)=1$
2. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$
3. $(\forall a\succ 0):\log\left(\frac{1}{b}\right)=-\log(b)$
4. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$
5. $(\forall a\succ 0)(\forall n\in\mathbb{Z}):\log(a^n)=n\log(a)$
6. $(\forall n\in\mathbb{Z}):\log(10^n)=n$
7. $(\forall x\in]0,+\infty[):\log'(x)=\frac{1}{x\ln(10)}$

تطبيق الخاصية 2:

نريد حساب $\log(20)$

علما أن $\log(2)\simeq 0,30103$

$$\log(20)=\log(2\times 10)$$
$$=\log(2)+\log(10)$$
$$\simeq 0,30103+1$$
$$\simeq 1,30103$$

8. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\log(x)=+\infty$

9. إذا كان $10^c\le x\prec 10^{c+1}$ فان $c\le\log(x)\prec c+1$

10. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log(a)=\log(b)\Leftrightarrow a=b$

11. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log(a)\succ\log(b)\Leftrightarrow a\succ b$

نضع: $x=104,27$
لدينا: $100\le x\le 1000$
أي: $10^2\le x\prec 10^3$
إذن: $2\le\log(x)\prec 3$
أي: $\log(x)\simeq 2,\cdots\cdots$

جدول تغيرات دالة اللوغاريتم العشري:

x	0	+∞
f'	‖ +	
f(x)	‖ -∞ ↗	+∞

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبري: المعادلات:

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(x)=0$ 2) $\ln(x)=1$ 3) $\ln(x)=7$

4) $\ln(x+1)=\ln(3)$ 5) $\ln(x-1)=\ln(2x+3)$ 6) $\ln(x)+\ln(4-x)=\ln(6-x)$

الحل:

1) يجب أن يكون $x\succ 0$ في المعادلة $\ln(x)=0$
و منه مجموعة تعريف هذه المعادلة هي $]0,+\infty[$
المعادلة $\ln(x)=0$ تكافئ $\ln(x)=\ln(1)$
و منه $x=1$ و بما أن $1\in]0,+\infty[$
فان مجموعة حلول المعادلة هي: $S=\{1\}$

الكتابة $\ln(x)$ لها معنى إذا كان $x\succ 0$.

$\ln(1)=0$.

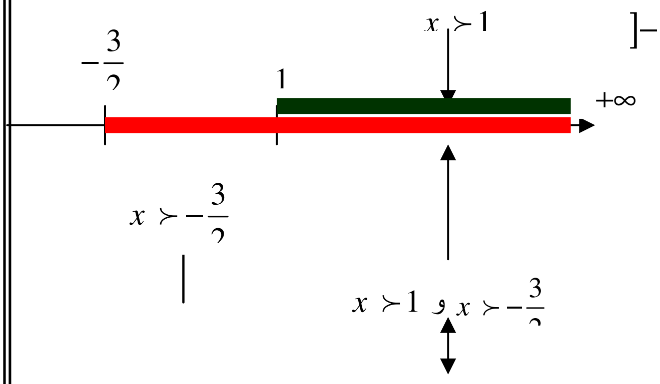
2) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x)=1$ هي $]0,+\infty[$
و هي تكافئ $\ln(x)=\ln(e)$ أي $x=e$
و بما أن $e\in]0,+\infty[$ فان $S=\{e\}$

3) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x)=7$ هي $]0,+\infty[$
و هي تكافئ $\ln(x)=\ln(e^7)$ أي $x=e^7$
و بما أن $e^7\in]0,+\infty[$ فان $S=\{e^7\}$.

$7=\ln(e^7)$
$(\forall n\in\mathbb{Z}):\ln(e^n)=n$.

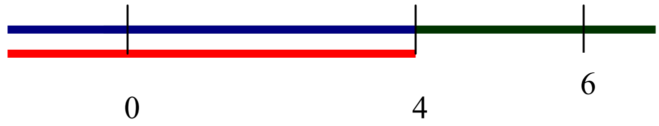
4) يجب أن يكون $x+1\succ 0$ أي $x\succ -1$
و منه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x+1)=\ln(3)$ هي $]-1,+\infty[$
المعادلة تكافئ $x+1=3$ أي $x=2$
و بما أن $2\in]-1,+\infty[$ فان $S=\{2\}$

5) يجب أن يكون $x-1\succ 0$ و $2x+3\succ 0$
أي $x\succ 1$ و $2x\succ -3$ أي $x\succ 1$ و $x\succ -\frac{3}{2}$ أي $x\succ 1$
و منه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x-1)=\ln(2x+3)$
هي $]1,+\infty[$ و $-4\notin$ و هي تكافئ $x-1=2x+3$ أي $x=-4$
و بما أن $]1,+\infty[\ \ -4\notin$ فان $S=\phi$



يكافئ $x\succ 1$

6) يجب أن يكون $x \succ 0$ و $4-x \succ 0$
و $6-x \succ 0$.
أي $x \succ 0$ و $x \prec 4$ و $x \prec 6$.
و منه مجموعة تعريف
المعادلة $\ln(x)+\ln(4-x)=\ln(6-x)$
هي $]0,4[$ و هي تكافئ $\ln[x(4-x)]=\ln(6-x)$



$x \succ 0$ و $x \prec 4$ و $x \prec 6$ يكافئ $0 \prec x \prec 4$.

أي $x(4-x)=6-x$
أي $4x-x^2=6-x$ أي $x^2-5x+6=0$
و هذه الأخيرة معادلة من الدرجة الثانية
يتم حلها بحساب المميز Δ

$$ax^2+bx+c=0 \;\Big\downarrow\; \Delta=b^2-4ac$$

إذا كان $\Delta \succ 0$ فان المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\Delta=(-5)^2-4(1)(6)=25-24=1$$

لدينا $\sqrt{\Delta}=1$ و منه المعادلة $x^2-5x+6=0$
تقبل حلين مختلفين $x_1=\dfrac{5-1}{2}=2$ و $x_2=\dfrac{5+1}{2}=3$.
و بما أن $2\in]0,4[$ و. $3\in]0,4[$
فان مجموعة حلول المعادلة $\ln(x)+\ln(4-x)=\ln(6-x)$
هي: $S=\{2,3\}$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبيري: دراسة دالة تحتوي صيغتها على اللوغاريتم النيبري:

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $(\forall x \in]0,+\infty[) f(x)=x\ln x - x+1$

1. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(4)$ و $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ علما أن $\ln(2)\simeq 0,69$ و $\ln(3)\simeq 1,1$ و $e\simeq 2,71$.
2. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.
3. أعط جدول تغيرات الدالة f.
4. حدد معادلة مماس (C_f) في 4.

الحل:

1. $f(1)=1\ln(1)-1+1=0$

$$f(e)=e\ln(e)-r+1$$
$$=e\times 1-e+1$$
$$=e-e+1=1$$
$$f(4)=4\ln(4)-4+1$$
$$=4\ln(2^2)-4+1$$
$$=8\ln(2)-3$$
$$=8\times 0,69-3=2,52$$
$$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln(3)\simeq -1,1$$

$\boxed{\ln(1)=0}$

$\boxed{\ln(e)=1}$

$\boxed{\ln(2^2)=2\ln(2)}$

$\boxed{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln(x)}$

2. حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=(x\ln(x)-x+1)$$
$$=(x\ln(x))'-(x)'+(1)'$$
$$=(x)'\ln(x)+x\cdot\ln'(x)-1+0$$
$$=\ln(x)+1-1$$

$$\boxed{f'(x)=\ln(x)}$$

3. معادلة المماس عند النقطة ذات الأفصول 4

هي: $y=f'(4)(x-4)+f(4)$

أي $y=1,38x-3$ لأن $f(4)=2,25$ و $f'(4)=1,38$.

معادلة المماس عند النقطة ذات الأفصول 1

هي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

أي $y=0$ لأن $f(1)=0$ و $f'(1)=0$

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $f(x)=2\ln(x)-x$

أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,3]$

أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم على المجال. $]0,3]$

الحل:

لدينا $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to0^+}x=0$ اذن $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

$f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$ اشارة $f'(x)$ هي اشارة $(2-x)$ لأن x موجب قطعا.

و منه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	0		2		3
$f'(x)$		+		-	
f(x)	$-\infty$	↗	-0,6	↘	-0,8

الأستاذ: نجيب عثماني

المادة: الرياضيات

ملخص لدرس الدالة الأسية النبيرية

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

1) العدد الحقيقي العدد e : $e \simeq 2,71828\cdots$

e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\ln(e)=1$.

ولدينا : $(\forall n \in \mathbb{Z})\ln(e^n)=n\ln(e)$

أي: $(\forall n \in \mathbb{Z})\ln(e^n)=n$

2) تعريف الدالة الأسية النبيرية

الدالة الأسية النبيرية يرمز لها بالرمز exp وهي معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $(\forall x \in \mathbb{R}); \exp x = e^x$

3) خاصية مقبولة

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0;+\infty[) \ , \ (y=e^x \Leftrightarrow x=\ln(y))$$

4) خاصيات جبرية

$e^0=1$ و $e^1=e$.

$(\forall x \in \mathbb{R}); \ln(\exp x)=x$

الدالة exp تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ يعني $e^x \succ e^y \Leftrightarrow x \succ y$

$e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$ لكل x و y من $\mathbb{R}$

5) النهايات : نقبل النهايتين التاليتين

خاصية1 : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

خاصية2 : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

6) خاصيات: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$

$$(\forall x \in \mathbb{R})e^x \succ 0 \qquad e^x \times e^y = e^{x+y} \qquad e^{-x}=\frac{1}{e^x} \qquad \frac{e^x}{e^y}=e^{x-y} \qquad e^{rx}=\left(e^x\right)^r$$

$$\left(e^x \succ e^y \Leftrightarrow x \succ y\right) \qquad \left(e^x=e^y \Leftrightarrow x=y\right)$$

7) مشتقة الدالة. $x \mapsto e^x$

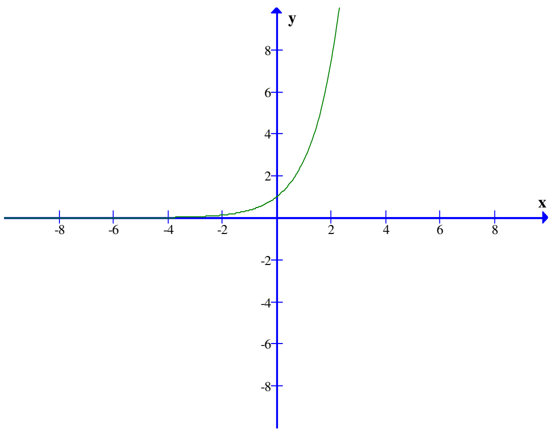
نقبل أن : $\left(e^x\right)'=e^x \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$

الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

8) جدول تغيرات الدالة $x \to e^x$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

9) منحنى الدالة exp :



10) العدد a^x

تعريف : لكل x من $]0,+\infty[$ و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $a^x = a^y$

خاصيات:

لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $a^x a^y = a^{x+y} ; \frac{1}{a^x} = a^{-x} ; \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} ; \left(a^x\right)^y = a^{xy}$

لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $a^x = a^y$ يكافئ $x = y$

المادة: الرياضيات

ملخص لدرس الاحتمالات

مستوى:السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

I. تذكير

تمرين1:السحب بإحلال- الترتيبات بتكرار:

يحتوي كيس على 12 كرة مرقمة من 1 إلى 12 (كل كرة تحمل رقما) نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال ثلاث كرات من الكيس.
(يعني نسحب كرة نسجل رقمها ثم نعيدها إلى الصندوق نكرر هذه العملية ثلاث مرات متتالية).

1. ما عدد النتائج الممكن؟
2. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاثة أعداد كلها قابلة للقسمة على 3؟
3. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاثة أعداد كلها فردية و كلها قابلة للقسمة على 3؟

تمرين2 :السحب بدون إحلال- الترتيبات بدون تكرار

يحتوي صندوق على 16 بيدقة: 4 حمراء و 7 بيضاء و 5 سوداء. نسحب عشوائيا بالتتابع, و بدون إحلال, أربع بيد قات من الصندوق
(يعني نسحب بيدقة نسجل لونها و لا نعيدها إلى الصندوق, نكرر هذه العملية أربع مرات).

1. ما عدد النتائج الممكنة؟
2. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على أربع بيد قات كلها بيضاء؟
3. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على بيدقة بيضاء في السحبة الأولى فقط؟

تمرين3 :التبديلات

ما عدد الكلمات من ستة حروف لها معنى أو لا , و التي يمكن كتابتهما باستعمال جميع حروف الكلمة " المغرب"

تمرين4 :السحب تآنيا- التأليفات

يحتوي صندوق على إحدى عشرة كرة: 4 بيضاء و 5 سوداء و كرتان زرقاوان. نسحب عشوائيا و تآنيا ثلاث كرات من الصندوق
(يعني سحب ثلاث كرات في آن واحد).

1. ما عدد النتائج الممكنة؟
2. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاث كرات من نفس اللون؟
3. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على كرتين بيضاوين بالضبط؟

II. تجربة عشوائية- مصطلحات:

تجربة عشوائية: نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها مسبقا.

إمكانية: كل نتيجة لتجربة عشوائية تسمى إمكانية.

كون الإمكانيات: مجموعة كل الإمكانيات لتجربة عشوائية تسمى كون الإمكانيات و نرمز لها بالرمز Ω, و تسمى أيضا الحدث الأكيد.

الحدث: كل مجموعة مكونة من إمكانية أو أكثر (أي كل جزء من الكون Ω) تسمى حدثا.

الحدث $A\cap B$ و الحدث $A\cup B$: الحدث $A\cap B$ هو الحدث A و B , الحدث $A\cup B$ هو الحدث A أو B.

الحدث المضاد: الحدث المضاد لحدث A هو الحدث B الذي يحقق:

$A\cap B=\phi$ و $A\cup B=\Omega$ نرمز لهذا الحدث بالرمز $\overline{A}$ و لدينا: $B=\overline{A}$.

الحدث الابتدائي: كل حدث يحتوي على إمكانية واحدة يسمى حدثا ابتدائيا.

مثال:رمي نرد مكعب و وجوهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 واحدة هو تجربة عشوائية و كون الإمكانيات المرتبط بهذه التجربة هو: $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

III. استقرار تردد حدث_احتمال حدث:

مثال:رمينا نردا مكعبا (وجوهه الستة مرقمة من 1 الى 6) 1000 مرة و حصلنا على الترددات التالية:

الرقم	1	2	3	4	5	6
تردد الرقم	0,160	0,162	0,171	0,166	0,167	0,174

▪ تردد رقم 4 هو $\frac{166}{1000}=0{,}166$, أي أن النرد عين 166 مرة الرقم 4 خلال 1000 رمية.

لدينا: $\left(\frac{1}{6}\simeq 0{,}1666\cdots\right)$ تردد الرقم 4 يستقر حول العدد $\frac{1}{6}$, نقول إن احتمال الحصول على الرقم 4 هو $\frac{1}{6}$.

و نكتب: $p(\{4\})=\frac{1}{6}$. (نلاحظ أن ترددات الأرقام الأخرى قريبة أيضا من العدد $\frac{1}{6}$).

▪ نعتبر الحدث A "الحصول على عدد زوجي" يعني: $A=\{2;4;6\}$, لدينا تردد الحدث A هو مجموع ترددات كل من الأرقام 2 و 4 و 6, أي: $0{,}162+0{,}166+0{,}174=0{,}502$ نقول إن احتمال الحدث A هو $0{,}502$, و نكتب $P(A)=0{,}502$.

لدينا: $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0{,}5$ و $P(A)\simeq 0{,}5$, و هو ما يفسر استقرار تردد الحدث A .

خاصية:

ليكن Ω كون إمكانية تجربة عشوائية,

$p(\Omega)=1$ $\quad$ $p(\phi)=0$ $\quad$ لكل حدث A, $0\le p(A)\le 1$

لكل حدثين غير منسجمين A و B (أي $A\cap B=\phi$), $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

لكل حدث A, $p(\overline{A})=1-p(A)$ لكل حدثين A و B, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.

تمرين 5: A و B حدثان مرتبطان بنفس التجربة العشوائية بحيث:

$p(A)=0{,}7$ و $p(B)=0{,}4$ و $p(A\cap B)=0{,}3$.

أحسب: $p(\overline{A})$ و $p(\overline{B})$ و $p(A\cup B)$

تمرين 6: في إحدى الثانويات التأهيلية, 54% من التلاميذ يمارسون كرة القدم, و 32% يمارسون كرة السلة, و 13% يمارسون كرة القدم و كرة السلة.

صادفنا أحد تلاميذ هذه الثانوية و سألناه عن الرياضة التي يمارسها. أحسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

A " التلميذ يمارس الرياضتين معا".

C "التلميذ يمارس إحدى الرياضتين على الأقل"

E " التلميذ لا يمارس كرة القدم و لا كرة السلة".

IV. فرضية تساوي الاحتمالات:

خاصية: إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω, فان احتمال كل حدث A هو:

$$p(A)=\frac{A}{\Omega}=\frac{CardA}{Card\,\Omega}$$

تمرين 7: نرمي نردا غير مزيف أوجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة .

1. حدد فضاء الإمكانيات Ω وحدد عدد الإمكانيات $card(\Omega)$

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" ظهور الرقم 4 "A

" ظهور رقم فردي "B

" ظهور رقم زوجي " C

" ظهور الرقم 8 "D

" ظهور رقم أكبر قطعا من 1 "E

" ظهور رقم أصغر قطعا من 9 "F

تمرين 8: نرمي نردا أوجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 مرتين متتاليتين

1. حدد شجرة الإمكانيات

2. حدد فضاء الإمكانيات Ω وحدد عدد الإمكانيات $card(\Omega)$

3. حدد احتمال الأحداث التالية :

" ظهور الرقم 4 مرة واحدة فقط "A

" ظهور رقمين متساويين "B

تمرين 9: يحتوي كيس غير كاشف على أربع كرات مرقمة من 1 إلى 4 ونسحب عشوائيا من الكيس *كرة واحدة*

1. حدد فضاء الإمكانيات Ω وحدد عدد الإمكانيات $(card(\Omega))$

2. حدد كل الأحداث الابتدائية في هذه التجربة

3. حدد احتمال الأحداث التالية :

" الحصول على كرة تحمل الرقم 1 "A

" الحصول على كرة تحمل الرقم 3 "B

" الحصول على كرة تحمل رقما زوجيا "C

" الحصول على كرة تحمل رقما فرديا "D

" الحصول على عدد قابل للقسمة على 3 "E

" عدم الحصول على عدد قابل للقسمة على 3 "F

تمرين 10: يحتوي صندوق غير كاشف على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كرتين حمراوتين

نسحب عشوائيا من الصندوق *كرة واحدة*

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرة بيضاء "B

" سحب كرة سوداء " N

" سحب كرة حمراء "R

" عدم سحب كرة سوداء "D

تمرين 11: يحتوي صندوق غير كاشف على6 أقراص مرقمة : 1 , 1 , 1 , 2 , 2 , 3 .

نسحب عشوائيا من الصندوق *قرصا واحدا*

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب قرص يحمل الرقم 1 "A

" سحب قرص يحمل الرقم 2" B

" سحب قرص يحمل الرقم 3 "C

" سحب قرص يحمل رقم فردي "D

" سحب قرص لا يحمل الرقم 1 "E

تمرين 12 : يحتوي صندوق غير كاشف على أقراص مرقمة :

قرصان منهم يحملان الرقم 1 و ثلاث أقراص منهم يحملون الرقم 2 و خمسة أقراص تحمل الرقم 4

نسحب عشوائيا من الصندوق *قرصا واحدا*

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب قرص يحمل الرقم 1 "A

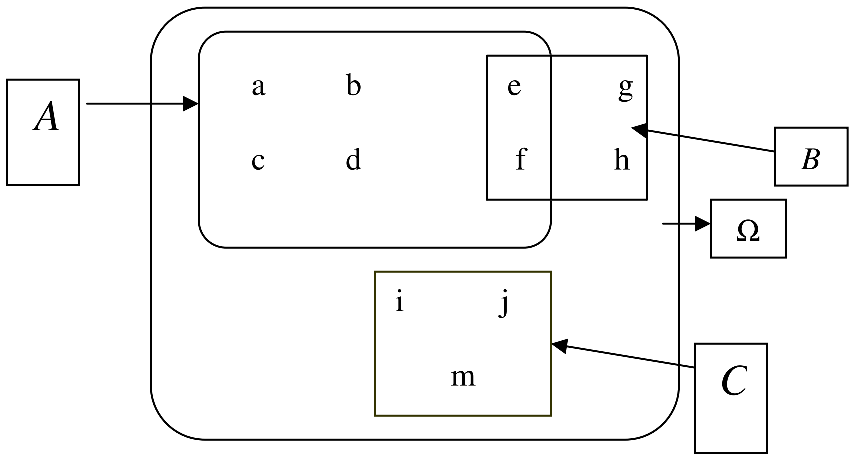
" سحب قرص يحمل الرقم 3 " B

" سحب قرص يحمل رقم زوجي "C

" سحب رقم أصغر من أو يساوي 2 "D

" سحب قرص لا يحمل الرقم 1 "E

تمرين 13 : الخطاطة جانبه تبين توزيع تلاميذ أحد الأقسام حسب الممارسة الرياضية :



الفئة A يمارسون كرة القدم

الفئة B يمارسون كرة اليد

الفئة C يمارسون كرة السلة

نختار عشوائيا احد التلاميذ من هذا القسم

1. أكتب A و B و C و Ω و $A\cap B$ و $A\cup B$ و $A\cap C$ و $A\cup C$ بالتفصيل
2. أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ و $P(A\cap B)$ و $P(A\cup B)$ و $P(A\cap C)$ و $P(A\cup C)$
3. تحقق أن : $P(A\cup B)=P(A)+P(A)-P(A\cap B)$
4. تحقق أن : $P(A\cup C)=P(A)+P(C)$

تمرين 14 :

1. أحسب : $4!$ و $5!$ و $7!$
2. أحسب : C_4^2 و C_5^2 و C_7^4 و C_{12}^3
3. أحسب : A_4^2 و A_5^3 و A_7^4
4. أحسب و بسط : $\dfrac{10!\times 5!}{6!\times 8!}$ و $\dfrac{A_6^3\times A_{10}^4}{A_{10}^5}$

تمرين 15 :

يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 6 كرات حمراء و 8 كرات سوداء و كرتين صفراوين

نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق _في آن واحد_

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين حمراوين "R

" سحب كرتين صفراوين "J

" سحب كرتين من نفس اللون "M

" سحب كرتين من لون مختلف "D

" الحصول على كرة سوداء و كرة بيضاء "E

تمرين 16 :

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء

نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق *في آن واحد*

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B

" سحب كرتين حمراوين "R

" سحب كرتين من نفس اللون "M

" سحب كرتين من لون مختلف "D

تمري17 :

يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق *في آن واحد*

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء "B

" سحب ثلاث كرات سوداء " N

" سحب ثلاث كرات حمراء "R

" سحب ثلاث كرات من لون مختلف "D

" سحب ثلاث كرات من نفس اللون "M

تمرين 18 :

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون "M

" سحب كرتين من لون مختلف "D

تمرين 19 :

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون "M

" سحب كرتين من لون مختلف "D

الأستاذ: نجيب عثماني