الدّوال الأصلِية

1. تعريف :

➢ نقول أن F دالة أصلية ل f على I إذا كانت F قابلة للاشتقاق على I و $\forall x \in I \quad F'(x)=f(x)$

2. خاصيات :

➢ كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على هذا المجال
➢ إذا كانت F دالة أصلية ل f على I فإن مجموعة الدوال الأصلية ل f على I هي الدوال :
$x \mapsto F(x) \quad (\quad \mathbb{R})$
➢ ليكن x_0 و y_0 من $\mathbb{R}$ توجد دالة أصلية وحيدة F ل f تحقق $F(x_0)=y_0$
➢ لتكن F و G دالتان أصليتان ل f و g على التوالي و $k \in \mathbb{R}$ لدينا :
- $F+G$ دالة أصلية ل $f+g$
- $k.F$ أصلية ل $k.f$

3. جدول الدوال الأصلية الاعتيادية :

f دالة معرفة على المجال I بما يلي : $f(x)=.......$	الدوال الأصلية ل f على I معرفة بما يلي: $F(x)=......$	المجال I
k (k عدد حقيقي ثابت)	$kx+c$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \neq -1; n \in \mathbb{Z}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$
$x^r \quad r \in \mathbb{Q}-\{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$]0,+\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,(k \in \mathbb{Z})$
$(a \neq 0),\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$(a \neq 0),\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}+c$	$]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$

4. العمليات على الدوال الأصلية :

الدالة	الدوال الأصلية ل على I	شروط على u
$u'u^n$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$u'u^n$ $\left(n\neq-1;n\in\mathbb{Z}^*\right)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	لكل x من I , $u(x)\neq0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	لكل x من I , $u(x)>0$
$u'u^r$ $r\in\mathbb{Q}-\{-1\}$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+c$	لكل x من I , $u(x)>0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	لكل x من I , $u(x)\neq0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|+c$	لكل x من I , $u(x)\neq0$
$u'e^u$	e^u+c	

الــــــدوال الأصليـــة

1- تعريـــف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I. نقول أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :
F دالة قابلة للاشتقاق على المجال I.
ولكل x من I : $\quad F'(x) = f(x)$

مثـــال :

1- لتكن $\quad F(x) = x^2 + x + 1$

إذن : $\quad F'(x) = 2x + 1$

إذن : الدالة F هي دالة أصلية للدالة f المعرفة بـــ : $\quad f(x) = 2x + 1$

2- حدد دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية :

-a $\quad f(x) = 2$

$$F(x) = 2x + C \;\; / \;\; C \in \mathbb{R}$$

-b $\quad f(x) = x$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

-c $\quad f(x) = x^3$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$$

-d $\quad f(x) = x^n \;\; / \;\; n \in \mathbb{N}^*$

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

-e $\quad f(x) = x^r \;\; ; \;\; r \in \mathbb{N}^* - \{-1\}$

$$F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$$

-f $\quad f(x) = \sqrt{x}$

$$= x^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \text{Cte}$$

-g $\quad f(x) = (x^2 + 1)^3 (2x)$

$$F(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + \text{Cte}$$

$u^r \cdot u'$: الأصليــة $\quad \frac{1}{r+1}u^{r+1} + C$

2- خـاصيــة :

لتكن f دالة عددية.

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن مجموعة الدالة الأصلية للدالة f على I هــي :

$F+\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

بـرهــان :

لتكن F دالة أصلية للدالة f على I و λ عدد حقيقي.

لدينا : $(F+\lambda)'=F'=f$

إذن : $F+\lambda$ هـي أيضـا دالة أصلية للدالة f على I .

ومنه : مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I هــي $F+\lambda$.

3- خـاصيــة :

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على I.

ليكن x_0 من I و y_0 عنصر حقيقي $y_0\in\mathbb{R}$.

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على I .

حيث : $F(x_0)=y_0$

أمثلــة :

حدد الدالة الأصلية للدالة f والتي تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

-1 $f(x)=x+1$ $\qquad$ $F(2)=1$

لدينا : $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+C=1$

وبما أن : $F(2)=1$

فإن : $\frac{1}{2}x^2+x+C=1$

$2+2+C=1$

ومنه : $C=-3$

-2 $f(x)=\frac{2}{x^2+1}$ $\qquad$ $F(0)=0$

لدينا : $F(x)=2\,Arc\tan x+C$

وبما أن : $F(0)=0$

فإن : $C=0$

إذن : $F(x)=2\,Arc\tan x$

-3 $f(x)=\cos 2x$ $\qquad$ $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

لدينا : $F(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)+C$

وبما أن : $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

فإن : $C=0$

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

4- خـاصيــة :

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I .
و G دالة أصلية للدالة g على I .
فإن : الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .

5- خـاصيــة :

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية .

ملاحـظـة وخـاصيـــة :

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I ، فإنه يوجد عدد حقيقي λ
حيث : $F - G = \lambda$

6- جـدول الـدوال الأصليـة الاعتياديـــة :

ملاحظــات	الدالــة F (الأصليـة)	الدالــة f
$C \in \mathbb{R}$	$x + C$	1
$C \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{2} x^2 + C$	x
$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	x^n
$r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$	x^r
$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$	$u^n \cdot u'$
$r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C$	$u^r \cdot u'$
	$Arc\tan x + C$	$\frac{1}{x^2+1}$
	$\sin x + C$	$\cos x$
	$-\cos x + C$	$\sin x$
$a \neq 0$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$	$\cos(ax+b)$
$a \neq 0$	$\frac{-1}{a} \cos(ax+b) + C$	$\sin(ax+b)$
$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\tan x + C$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

تطبيقـــــات :

حدد دالة أصلية للدالة f في الحالات التالية :

-1 $$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-2}{x^2 + 1} + 1$$

إذن : $$F(x) = x - 2\,Arc\tan x + C$$

-2 $$f(x) = x\sqrt[3]{x^2 + 1}$$

لدينا : $$f(x) = \frac{1}{2}\,2x\sqrt[3]{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{3}}(2x)$$

ومنه : $$F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{3}+1}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{3}+1}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{3}{8}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{4}{3}}$$

إذن : $$F(x) = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2 + 1}^{\,4}$$

-3 $$f(x) = (2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 3}$$

$$= \left(x^2 + x + 3\right)^{\frac{1}{2}}(2x + 1)$$

$$F(x) = \frac{2}{3}\left(x^2 + x + 3\right)^{\frac{3}{2}}$$

-4 $$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}$$

$$F(x) = \tan^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x$$

-5 لدينا : $$f(x) = \sqrt[3]{\left(x^2 + 1\right)^2}\;x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{2}{3}} 2x$$

إذن :

$$F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{5}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{5}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{10}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{5}{3}} + C$$

النهايات و الاتصال

I- النهاية المنتهية

1- النهاية l عند x_0

أ- النهاية 0 عند 0

تمرين

نعتبر الدالتين f و g حيث $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{x^3}{|x|}$

1- أ) مثل مبيانيا f

ب) بين مبيانيا أن $\forall\varepsilon\succ 0 \quad \exists\alpha\succ 0/ \quad f\left(\left]-\alpha;\alpha\right[-\{0\}\right)\subset\left]-\varepsilon;\varepsilon\right[$

ج) بين ذلك جبريا

2- 2- أ) مثل مبيانيا g

ب) بين مبيانيا أن $\forall\varepsilon\succ 0 \quad \exists\alpha\succ 0/ \quad g\left(\left]-\alpha;\alpha\right[-\{0\}\right)\subset\left]-\varepsilon;\varepsilon\right[$

ج) بين ذلك جبريا

3- أتمم الجدول التالي

x	$f(x)$	$g(x)$
-10^{-2}		
-10^{-5}		
-10^{-100}		
0	/////////////////////	/////////////////////
10^{-100}		
10^{-5}		
10^{-2}		

ملاحظة:

نلاحظ كلما اقترب x من 0 يقترب $f(x)$ من 0، بل أكثر كلما كان x يؤول إلى 0 فان $f(x)$ يؤول إلى 0

نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى 0

نكتب $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

نفس الملاحظة على الدالة g

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه0

نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى 0 إذا وفقط إذا كان

$$\forall\varepsilon\succ 0 \quad \exists\alpha\succ 0 \quad \forall x\in D_f \quad 0\prec|x|\prec\alpha\Rightarrow|f(x)|\prec\varepsilon$$

نكتب $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

ملاحظة

* $\lim_{x\to 0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}|f(x)|=0$

* إذا كانت f و g منطبقتين على مجال مفتوح منقط مركزه0 و $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ فان $\lim_{x\to 0} g(x)=0$

خاصية

$$\forall a\in\mathbb{R}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \lim_{x\to 0} ax^n=0\qquad \lim_{x\to 0} a\sqrt{x}=0$$

خاصية

إذا وجد مجال I مفتوح منقط مركزه 0 بحيث $|f(x)|\le u(x)$ $\forall x\in I$ و كان $\lim_{x\to 0} u(x)=0$ فان $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

البرهان

ليكن $\beta\succ 0$ و $I=]-\beta;\beta[-\{0\}$

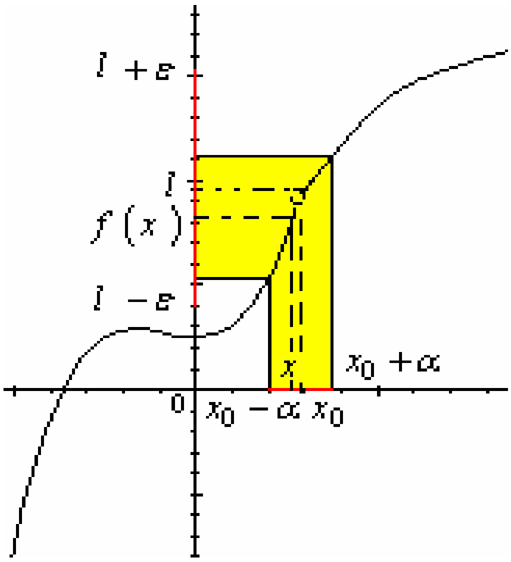
لدينا $|f(x)|\le u(x)\qquad \forall x\in]-\beta;\beta[-\{0\}$

و حيث أن $\lim_{x\to 0} u(x)=0$ فان $\forall\varepsilon\succ 0\ \ \exists\alpha\succ 0\ \ \forall x\in D_f\ \ 0\prec|x|\prec\alpha\Rightarrow|u(x)|\prec\varepsilon$

نعتبر $\lambda=\inf(\alpha;\beta)$ $\forall\varepsilon\succ 0\ \ \exists\lambda\succ 0\ \ \forall x\in D_f\ \ 0\prec|x|\prec\lambda\Rightarrow\begin{cases}|u(x)|\prec\varepsilon\\ |f(x)|\le u(x)\end{cases}$

و بالتالي $\forall\varepsilon\succ 0\ \ \exists\lambda\succ 0\ \ \forall x\in D_f\ \ 0\prec|x|\prec\lambda\Rightarrow|f(x)|\prec\varepsilon$

إذن $\lim_{x\to 0} f(x)=0$



<u>تمرين</u>

بين أن $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$; $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+1}=0$

<u>ب- النهاية l عند x_0</u>

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0

حدسيا: $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤو ل x إلى x_0

عندما يقترب x من x_0 أي عندما تقترب h من 0

حيث $h=x-x_0$ فان $f(x)-l$ تقترب من 0

أي $f(x_0+h)-l$ تقترب من 0

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0

نقول إن نهاية f هي l عندما يؤول x إلى x_0 إذا وفقط إذا كان نهاية الدالة $h\to f(x_0+h)-l$ هي0 عندما يؤول h إلى 0

نكتب $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$

ملاحظة

* $\lim_{x\to x_0} f(x)=l\Leftrightarrow\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=l$

* $\lim_{x\to x_0} f(x)=l\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0} f(x)-l=0$

* إذا كانت لدالة نهاية عند x_0 فان هذه النهاية وحيدة

* $\lim_{x\to x_0} f(x)=l\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0} f(x)-l=0$

* $\lim_{x\to x_0} a(x-x_0)^n=0\qquad \forall a\in\mathbb{R}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

<u>تمرين</u> بين أن $\lim_{x\to 4}\frac{2x-1}{x-3}=9$

خاصية

اذا وجد مجال I مفتوح منقط مركزه x_0 بحيث $\left|f(x)-l\right|\le u(x)$ $\forall x\in I$ و كان $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$

فان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

تمرين

بين أن $\lim\limits_{x\to 0} 2+x^2\cos\frac{1}{x}=2$

خاصية

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ فان $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|l\right|$

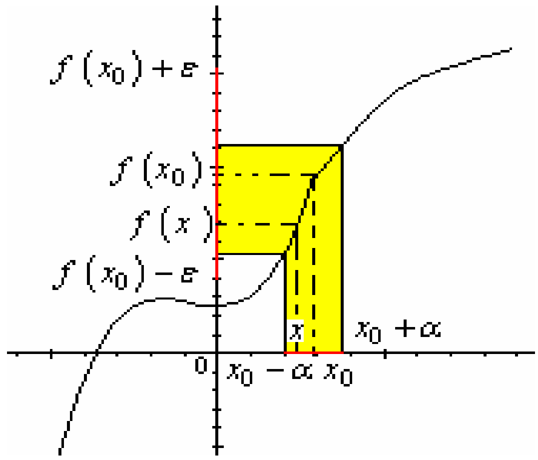
2- اتصال دالة

أ- تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0

تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$



أمثلة

الدوال $x\to ax^n$ متصلة في 0 $\left(n\in\mathbb{N}^* \quad a\in\mathbb{R}\right)$

الدوال الثابتة متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها

الدالة $x\to\sqrt{|x|}$ متصلة في 0

اصطلاح

إذا كانت f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و كانت غير متصلة في x_0 فإننا نقول إن f متقطعة في x_0

تمرين

نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ f(1)=2 \end{cases}$$

أدرس اتصال f في1

ب- خاصية

كل دالة حدودية متصلة في كل نقطة من $\mathbb{R}$

البرهان

لتكن P دالة حدودية و x_0 عنصر من $\mathbb{R}$

نعلم أنه توجد حدودية Q حيث $P(x)-P(x_0)=(x-x_0)Q(x)$

نفترض أن

$Q(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.......+a_1x+a_0$ $\left|Q(x)\right|\le\left|a_n\right|\left|x^n\right|+\left|a_{n-1}\right|\left|x^{n-1}\right|+.......+\left|a_1\right|\left|x\right|+\left|a_0\right|$

ليكن M أكبر الأعداد $\left|a_i\right|$ حيث $i\in\{0;1...;n\}$ ومنه $\left|Q(x)\right|\le M(\left|x^n\right|+\left|x^{n-1}\right|+.......+\left|x\right|+1)$

نفترض أن $x_0-1\prec x\prec x_0+1$ و $\alpha=\sup\left(\left|x_0-1\right|;\left|x_0+1\right|\right)$ ومنه $\left|x\right|\prec\alpha$

و بالتالي $\left|Q(x)\right|\le M(\alpha^n+\alpha^{n-1}+....+\alpha+1)$

نضع $k=M(\alpha^n+\alpha^{n-1}+....+\alpha+1)$ ومنه $\left|x-x_0\right|\left|Q(x)\right|\le k\left|x-x_0\right|$

وبالتالي $\left|P(x)-P(x_0)\right| \le k\left|x-x_0\right|$

و حيث أن $\lim_{x\to x_0} k\left|x-x_0\right| = 0$ فان $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

إذن P متصلة في x_0

ج- تطبيقات على حساب النهايات

حدد $\lim_{x\to -1} 3x^2+4x-2$; $\lim_{x\to 2}\left|x^2-7x-2\right|$; $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x-1}$; $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-4x^2-4x-5}{x-5}$

د- تمديد بالاتصال

الدالة $f: x \to \frac{x^2-1}{x-1}$ غير معرفة في 1

ولدينا $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$

الدالة g المعرفة بـ $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} & x \ne 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$ تنطبق على f في $\mathbb{R}-\{1\}$ ومتصلة في 1

نقول ان g تمديد بالاتصال لدالة f في 1

تعريف

لتكن f دالة غير معرفة في x_0 لكن لها نهاية l في x_0

الدالة g المعرفة بـ $\begin{cases} g(x) = f(x) & x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$ هي دالة متصلة في x_0 تسمى تمديد بالاتصال لدالة f في x_0

تمرين

أعط تمديدا بالاتصال لدالة f في x_0 في الحالتين

$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2+2x-8}{x+2} \\ x_0 = -2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} f(x) = x\sin\frac{1}{x^2} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

3- النهاية على اليمين- النهاية على اليسار

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{|x-1|(x+2)}{x-1}$

$D_f = \mathbb{R}-\{1\}$ (أنشئ C_f)

* نلاحظ أن قصور الدالة f على $]1;+\infty[$ ينطبق مع قصور الدالة g حيث $g(x) = x+2$

ونعلم أن $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} x+2 = 3$

نقول ان نهاية f هي 3 على يمين 1

و نكتب $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$ أو $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x) = 3$

* نلاحظ أن قصور الدالة f على $]-\infty;1[$ ينطبق مع قصور الدالة h حيث $h(x) = -x-2$

ونعلم أن $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} -x-2 = -3$

نقول ان نهاية f هي -3 على يسار 1

و نكتب $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-3$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)=-3$

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول ان f تقبل النهاية l على يمين x_0 إذا كان قصورها على $]x_0;x_0+a[$ حيث $a\succ 0$ ينطبق مع قصور

دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 تكون نهايتها l عند x_0 و نكتب $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l$

أو $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\succ x_0}} f(x)=l$

بالمثل نعرف النهاية على اليسار

خاصية

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l$$

تمرين

أدرس نهاية الدالة f في x_0 في الحالتين التاليتين

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+2|x|}{x} \\ x_0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=x^2+4x+4 & x\succ -2 \\ f(x)=2x^2+2x & x\le -2 \\ x_0=-2 \end{cases}$$

نتائج

تكون f متصلة على يمين x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

تكون f متصلة على يسار x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان تكون f متصلة على يمين x_0 وعلى يسار x_0

تمرين

1- حدد a لكي تكون f متصلة في -1

$$\begin{cases} f(x)=x^3+ax & x\succ -1 \\ f(x)=-x+1 & x\le -1 \end{cases}$$

2- أدرس اتصال f في x_0 في الحالتين

$$\begin{cases} f(x)=2x+1 & x\succ 2 \\ f(x)=x^2-1 & x\le 2 \end{cases} \quad ; \quad x_0=2$$

$$\begin{cases} f(x)=x\sin\dfrac{1}{x} & x\succ 0 \\ f(x)=x^2-x & x\le 0 \end{cases} \quad ; \quad x_0=0$$

4- الاتصال في مجال

تعريف

لتكن f دالة معرفة على $[a;b]$

تكون f متصلة على $]a;b[$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a;b[$

تكون f متصلة على $[a;b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a;b[$ ومتصلة على يمين a و متصلة على يسار b

بالمثل نعرف الاتصال على $]a;b]$ و على $[a;b[$

ملاحظة

التمثيل المبياني لدالة متصلة على $[a;b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتين اللتين

إحداثيتيهما $(a;f(a))$ و $(b;f(b))$

II- النهاية المنتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

1- النهاية 0 عند $+\infty$

تمرين

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=\frac{1}{x}$

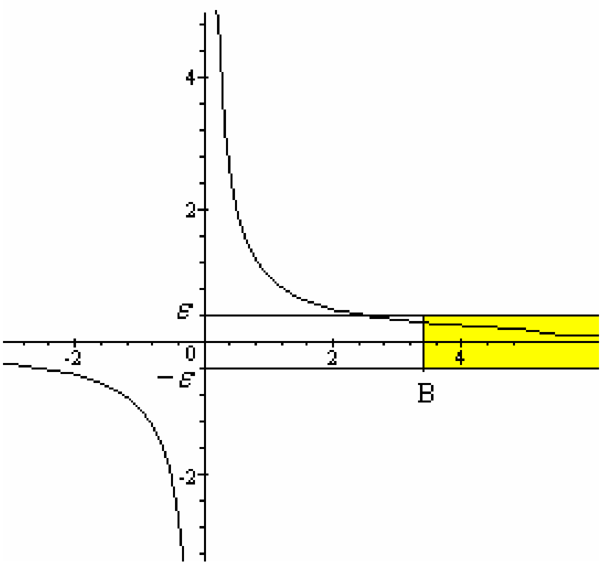
1- أرسم C_f

2- أتمم الجدول التالي و ماذا تلاحظ

x	10^{100}	10^{10^9}	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$				

3- بين أن

$\forall\varepsilon\succ 0 \quad \exists B\succ 0 \quad f(]B;+\infty[)\subset]-\varepsilon;\varepsilon[$



-3

ليكن $\varepsilon\succ 0$

نبحث عن $B\succ 0$ حيث $x\succ B\Rightarrow|f(x)|\prec\varepsilon$

لدينا $\forall x\succ 0 \quad |f(x)|\prec\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{x}\prec\varepsilon\Leftrightarrow x\succ\frac{1}{\varepsilon}$

نأخذ $B=\frac{1}{\varepsilon}$

للحصول $\forall\varepsilon\succ 0 \quad \exists B\succ 0 \quad x\succ B\Rightarrow|f(x)|\prec\varepsilon$

نقول إن $f(x)$ تؤول الى0 عندما يؤول x إلى $+\infty$

نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

تعريف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a;+\infty[$

نقول إن $f(x)$ تؤول الى0 عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان

$x\succ B\Rightarrow|f(x)|\prec\varepsilon \quad \exists B\succ 0 \quad \forall\varepsilon\succ 0$ نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

خاصيات

خاصية1

$$\forall(k;n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^* \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{\sqrt{x}}=0$$

خاصية2

إذا وجد مجال على شكل $]a;+\infty[$ بحيث

$|f(x)|\le u(x)$ $\forall x\in]a;+\infty[$ وكان $\lim_{x\to+\infty}u(x)=0$ فان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

تمرين تطبيقي

أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{4x^2+3}$

$4x^2+3\succ x^2$ ومنه $\left|\frac{7}{4x^2+3}\right|\le\frac{7}{x^2}$ وحيث $\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x^2}=0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{4x^2+3}=0$

2- النهاية l عند $+\infty$

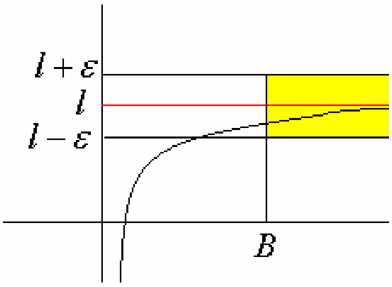
تعريف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a;+\infty[$

نقول إن $f(x)$ تؤول الى l عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا وفقط

إذا كان $\forall\varepsilon\succ0 \quad \exists B\succ0 \quad x\succ B\Rightarrow|f(x)-l|\prec\varepsilon$

نكتب $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$



مثال

بين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x^2+1}=1$

3- النهاية l عند $-\infty$

تعريف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]-\infty;a[$

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $-\infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(-x)=l$

نكتب $\lim_{x\to-\infty}f(x)=l$

ملاحظات

- إذا كانت f زوجية فان $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$
- إذا كانت f فردية فان $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\lim_{x\to+\infty}f(x)$

III- النهايات المنتهية والترتيب

خاصيات

خاصية1

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ و f موجبة على I فان $l\geq 0$

خاصية2

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ بحيث $l\neq 0$ فانه يوجد مجال مفتوح منقط J مركزه x_0 بحيث $\forall x\in J \quad f(x)\times l\succ 0$

خاصية3

f و g دالتان معرفتان على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=l'$ و كان $f\geq g$ على I فان $l\geq l'$

خاصية4

f و g و h دوال معرفة عى مجال مفتوح منقط I مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=l$ وكان $f\geq h\geq g$ على I فان $\lim_{x\to x_0} h(x)=l$

IV- العمليات على النهايات المنتهية

f و g دالتان لكل منهما نهاية منتهية في x_0 و λ عدد حقيقي
الدوال $f+g$ و λf و $f\times g$ و $|f|$ لها نهاية منتهية في x_0

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x) \qquad \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\times\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad \lim_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$$

إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)\geq 0$ فان $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)}$

إذا كان $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ فان $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

ملاحظة الخاصيات تبقى صالحة في $x_0=+\infty$ و $x_0=-\infty$

V- العمليات على الدوال المتصلة

خاصيات

*- مجموع دالتين متصلتين في x_0 هي دالة متصلة في x_0
*- جداء دالتين متصلتين في x_0 هي دالة متصلة في x_0
*- جداء دالة متصلة في x_0 في عدد حقيقي هي دالة متصلة في x_0
*- اذا كانتا f و g دالتين متصلتين في x_0 وكان $g(x_0)\neq 0$ فان الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتان في x_0
*- اذا كانت f موجبة على مجال مفتوح مركزه x_0 ومتصلة في x_0 فان دالة $\sqrt{f}$ متصلة في x_0
*- اذا كانت f متصلة وكانت $x\to f(ax+b)$ دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 فان الدالة $x\to f(ax+b)$ متصلة في x_0

نتيجة

كل دالة جدرية متصلة على مجموعة تعريفها

تذكير الدالة الجدرية هي خارج دالتين حدوديتين

تمارين

-1 حدد $\lim_{x\to3}\frac{x^2-x}{x^2+x-6}$; $\lim_{x\to1}\frac{3x^2-5x+2}{x^2-1}$ $\lim_{x\to1}\sqrt{x^2+5x-2}$; $\lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x-2}$

-2 أدرس اتصال الدوال

$f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x^2-x}$ $g(x)=x^2-1+\sqrt{x-2}$ $\begin{cases}h(x)=2x^2-x & x\succ1\\ h(x)=-x^2+2 & x\le1\end{cases}$ $t(x)=\frac{2x^2-3x}{|x|}$

VI - الدوال المثلثة

نقبل النتيجة $|\sin x|\le|x|\le|\tan x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

-1 نهايات و اتصال الدوال $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$ و $x\to\tan x$

* لدينا $|\sin x|\le|x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و $\lim_{x\to0}|x|=0$ ومنه $\lim_{x\to0}\sin x=0$

إذن الدالة $x\to\sin x$ متصلة في 0 ومنه الدالة $x\to\sin(ax+b)$ متصلة في 0

$\lim_{x\to0}\cos x=\lim_{x\to0}1-2\sin^2\frac{x}{2}=1$*

إذن $x\to\cos x$ متصلة في0

$\lim_{x\to0}\tan x=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}=0$

$x\to\tan x$ متصلة في 0

* ليكن $x_0\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\lim_{h\to0}\sin(x_0+h)$$
$$=\lim_{h\to0}[\sin x_0\cos h+\sin h\cos x_0]$$
$$=\sin x_0\cos0+\sin0\cos x_0=\sin x_0$$

إذن دالة $x\to\sin x$ متصلة في x_0

خاصية

الدالتان $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$ متصلتان في $\mathbb{R}$
الدالة $x\to\tan x$ متصلة في حيز تعريفها $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

نتائج

الدالتان $x\to\sin(ax+b)$ و $x\to\cos(ax+b)$ متصلتان في $\mathbb{R}$
الدالة $x\to\tan(ax+b)$ متصلة في حيز تعريفها

-2 نهايات اعتيادية هامة

نحدد $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$

لدينا $|\sin x|\le|x|\le|\tan x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ومنه $\frac{1}{|\sin x|}\le\frac{1}{|x|}\le\frac{1}{|\tan x|}$ حيث $x\ne0$

وبالتالي $\frac{|\sin x|}{|\sin x|}\le\frac{|\sin x|}{|x|}\le\frac{|\sin x|}{|\tan x|}$ أي أن $|\cos x|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le1$

و حيث أن $\lim_{x\to0}\cos x=1$ و x و $\sin x$ لهما نفس الإشارة بجوار 0 فان $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

*

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=1 \quad *$$

خاصية

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

نتيجة

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}=1$$

تمرين

حدد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{1+\sin x}$; $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}$ ، $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{4x}$ $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}$ ، $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 3x}$ ،

$\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}$ ، $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ ، $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{4}}$ $\lim_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\sin 4x+\sin 2x}$

VII- النهايات اللامنتهية

1- النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند x_0

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{1}{|x|}$

1- أنشئ C_f

2- أتمم الجدول التالي

x	10^{-100}	10^{-10^9}	$10^{-10^{12}}$	$10^{-10^{100}}$
$f(x)$				

ماذا تلاحظ (بين ذلك)

تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0.

$$\lim_{x\to0}f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall A\succ0)\quad(\exists\alpha\succ0)\quad(\forall x\in D_f)\quad 0\prec|x|\prec\alpha\Rightarrow f(x)\succ A$$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{h\to0}f(x_0+h)=+\infty$$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}-f(x)=+\infty$$

خاصية

ليكن $k\in\mathbb{R}^{+*}$; $n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{x\to0}\frac{k}{\sqrt{|x|}}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{k}{|x^n|}=+\infty$$

2- النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند $+\infty$ أو $-\infty$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]a;+\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall A\succ 0)\quad (\exists B\succ 0)\quad \forall x\in D_f\quad x\succ B\Rightarrow f(x)\succ A$$

خاصية

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} -f(x)=+\infty$$

خاصية

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

النهايات والترتيب

* إذا كان لكل x من I , $f(x)\geq u(x)$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x)=+\infty$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

* إذا كان لكل x من I , $f(x)\leq u(x)$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x)=-\infty$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

ملاحظة الخاصيات السابقة تبقى صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار مع تعويض I على التوالي بالمجالات $]a;+\infty[$ و $]-\infty;a[$ و $]x_0;x_0+\alpha[$ و $]x_0-\alpha;x_0[$ $(\alpha\succ 0)$

VIII- العمليات على النهايات اللامنتهية

تعتبر دالتين f و g.

عند x_0 أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ تكون لدينا النتائج التالية:

أ- نهاية مجموع

نهاية f	نهاية g	نهاية $f+g$
l $\quad l\neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
l $\quad l\neq 0$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

ب- نهاية جداء

نهاية f	نهاية g	نهاية $f\times g$
l $\quad l\neq 0$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l
l $\quad l\neq 0$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l
0	$+\infty$	شكل غير محدد
0	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

ملاحظة:

لحساب نهاية λf حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ يمكن اعتبار λf كجداء الدالة الثابتة $x\to\lambda$ التي نهايتها هي λ و الدالة f

ج- نهاية خارج

نهاية $\frac{f}{g}$	نهاية g	نهاية f
0	$+\infty$	l
0	$-\infty$	l
∞ مع وضع إشارة l	0^{+}	l حيث $l \neq 0$
∞ مع وضع عكس إشارة l	0^{-}	l حيث $l \neq 0$
شكل غير محدد	0	0
شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
∞ مع وضع إشارة l	l حيث $l \neq 0$	$+\infty$
∞ مع وضع عكس إشارة l	l حيث $l \neq 0$	$-\infty$

د- نهاية $\sqrt{f}$

نهاية $\sqrt{f}$	نهاية f
$+\infty$	$+\infty$

IX- تطبيقات

1- دالة القوة الصحيحة

ليكن $n \in \mathbb{N}^{*}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^{n} = +\infty$

- إذا كان n زوجي فان $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{n} = +\infty$

- إذا كان n فردي فان $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{n} = -\infty$

نتيجة

ليكن $n \in \mathbb{N}^{*}$ $\quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^{n}} = 0$

2- الدالة الحدودية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

وحيث $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right] = 1$ فان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$

نهاية دالة حدودية عند ما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

أمثلة

$$\lim_{x\to+\infty} -4x^5+3x^2-5x+1=\lim_{x\to+\infty} -4x^5=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^7+7x^3-x+31=\lim_{x\to-\infty} -3x^7=+\infty$$

3- الدالة الجدرية

نهاية دالة جدرية عند ما يؤول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

أمثلة

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5+3x^2-5x+1}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{3}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7+7x^3-x+31}{x^9+3x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7}{x^9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5+3x^2-5x+1}{3x^5-x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5}{3x^5}=\frac{7}{3}$$

تمارين

حدد النهايات

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}\quad;\quad\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}\qquad\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-6}{x-2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x-2}{x^2-3x+2}\qquad\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2-2}-x\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+3x}{2x-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-x}\quad;\quad\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2-2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-4}{x}\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x+1}-4}$$

(الثانية علوم تجريبية)

1) <u>تذكير : النهايات</u>

1. لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{زوجي } n \\ -\infty & \text{فردي } n \end{cases}$

2. نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

3. نهاية دالة جذرية هي خارج نهاية حدها الأعلى درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام

4. $\lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{x} = a$ و $\lim_{x\to0}\frac{\tan(ax)}{x} = a$ و $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

5. جداول النهايات:

	l					$+\infty$
g	l					$-\infty$
$f+g$	$l+l$				$-\infty$	شكل غير

$\lim$		$l >$	$l >$	$l <$	$l <$					$\pm\infty$
$\lim g$	l'		$-\infty$	$+\infty$						0
$f\times g$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$					$+\infty$	شكل غير

درس الاتصال

	$l \neq 0$	$^{+}$	$^{-}$		
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$		$-\infty$	0	0

$\lim$		$l >$	$l >$	$l <$	$l <$						$-\infty$
g	$l \neq$	0^{+}	$^{-}$	$^{+}$	$^{-}$			0^{+}	$^{-}$	$^{+}$	0^{-}
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0					$+\infty$

2) <u>اتصال دالة في عدد :</u>

<u>تعريف 1:</u>

$$\lim_{x \to a} f \quad x \quad = f \quad a \qquad\qquad f$$

<u>مثال :</u> أدرس اتصال الدالة f في العدد $a=1$: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+6x-7}{x-1} & ;x \neq 1 \\ f(1)=8 \end{cases}$

لدينا : $f(1)=8$.

$\lim_{x \to 1} f(x)$

$$\lim_{x \to 1} f(x)=\lim_{x \to 1}\frac{x^2+6x-7}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{x-1}=\lim_{x \to 1}(x+7)=8$$

بما أن $\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$ فإن f متصلة في العدد 1.

:2

- ✓ f على اليمين $\Leftrightarrow$
  $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$
- ✓ f متصلة في a على اليسار $\Leftrightarrow$
  $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$
- ✓ f متصلة في a $\Leftrightarrow$
  $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

<u>مثال</u> : أدرس اتصال الدالة f في العدد $a = 0$:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = x^2 - x + 2 & ; x \le 0 \end{cases}$$

لدينا : $f(0) = (0)^2 - (0) + 2 = 2$

لنحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 2 . \frac{\sin(2x)}{2x} = 2$$

لنحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x^2 - x + 2 = 2$$

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0)$

3) <u>الإتصال على مجال :</u>

<u>خاصيات :</u>

- f $]a,b[$ $]a\ b[$
- f متصلة على مجال $[a,b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b
- f متصلة على مجال $[a,b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يمين a
- f متصلة على مجال $]a,b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يسار b

متصلة على تعريف

العمليات على الدوال المتصلة

- الدوال الحدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- الدوال الجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- الدوال المثلثية $\sin$ و $\cos$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- دالة $\tan$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- إذا كانت f و g متصلتان على مجال I فإن $f+g$ و $f\times g$ متصلتان على I
- إذا كانت f و g متصلتان على مجال I و $g\neq 0$ على I فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتان على I .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و $f\geq 0$ على I فإن $\sqrt{f}$ متصة على I .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على J بحيث $f(I)\subset J$ فإن $g\circ f$ متصلة على I

أمثلة :

1. $f:x\mapsto x^3-\frac{1}{2}x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$
2. $f:x\mapsto\frac{2x}{x-2}$ متصلة على كل مجال ضمن $]2,+\infty[$ $D_f=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ لأن f دالة جدرية
3. $f:x\mapsto cosx+x^2-7x+3$

لدينا : $f_1:x\mapsto cosx$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f_2:x\mapsto x^2-7x+3$ متصلة على $\mathbb{R}$

إذن $f=f_1+f_2$ متصلة على $\mathbb{R}$ كمجموع لدالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

4. $f:x\mapsto(x-1)\times\sin x$

لدينا : $f_1:x\mapsto x-1$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f_2:x\mapsto\sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$

إذن $f=f_1\times f_2$ متصلة على $\mathbb{R}$ كجداء لدالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

5. $f:x\mapsto\sqrt{x-2}$

$f_1 : x \mapsto x-2$ متصلة على $[2,+\infty[$ و لكل x من $[2,+\infty[$: $f_1(x) \geq 0$

إذن $f=\sqrt{f_1}$ متصلة على $[2,+\infty[$

.6 $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

لدينا : $f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

و لدينا $f_2 : x \mapsto x^2+1$ متصلة على $\mathbb{R}$ بالخصوص على $\mathbb{R}^+$ و لكل x من $\mathbb{R}^+$: $f_2(x) \neq 0$

إذن $f=\dfrac{f_1}{f_2}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$.

.7 $f : x \mapsto \sin\left(x^2+\dfrac{\pi}{7}\right)$

لدينا $f_1 : x \mapsto x^2+\dfrac{\pi}{7}$ حدودية متصلة على $\mathbb{R}$ بحيث $f_1(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ و الدالة $f_2 : x \mapsto \sin(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

إذن $f=f_2 o f_1$ متصلة على $\mathbb{R}$

لدينا :

صورة مجال بدالة متصلة و رتيبة قطعا

$f\left(I\right)$	المجال I	
$\left[f(a),f(b)\right]$	$\left[a,b\right]$	
$\left[f(a),\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x)\right[$	$\left[a,b\right[$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x),f(b)\right]$	$\left]a,b\right]$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x),\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x)\right[$	$\left]a\ b\right[$	f تزايدية قطعا
$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(a)\right]$	$\left]-\infty,a\right]$	
$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)\right[$	$\left]-\infty,a\right[$	
$\left[f(b),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left[b,+\infty\right[$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\x>b}}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]b,+\infty\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]-\infty,+\infty\right[$	
$\left[f(b),f(a)\right]$	$\left[a,b\right]$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x),f(a)\right]$	$\left[a,b\right[$	
$\left[f(b),\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)\right[$	$\left]a,b\right]$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x),\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)\right[$	$\left]a,b\right[$	
$\left[f(a),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$	$\left]-\infty\ a\right]$	f
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$	$\left]-\infty,a\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(b)\right]$	$\left[b,+\infty\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{\substack{x\to b\\x>b}}f(x)\right[$	$\left]b,+\infty\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$	$\left]-\infty,+\infty\right[$	

:1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

لدينا : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 1\}=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

لنحدد صور المجالات التالية : $[2;3]$ و $]1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$ و $]1;4]$ و $[0;1[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن D_f (لأنها دالة جدرية)

ليكن $x\in D_f$:

$$f'(x)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2.(x-1)-(2x+1).1}{(x-1)^2}=\frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

إذن : $(\forall x\in D_f)\quad f'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$. من الواضح أن $(\forall x\in D_f)\quad f'(x)<0$ و منه الدالة f تناقصية قطعا على D_f

$$f([2;3])=[f(3);f(2)]=\left[\frac{7}{2};5\right]$$

$$f(]1;+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x);\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)\right[=]2;+\infty[$$

$$f(]-\infty;1[)=\left]\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x);\lim_{x\to-\infty}f(x)\right[=]-\infty;2[$$

$$f(]1;4])=\left[f(4);\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)\right[=[3;+\infty[$$

$$f([0;1[)=\left]\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x);f(0)\right]=]-\infty;-1]$$

مثال

:2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^3+7x-2$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(x^3+7x-2\right)'=3x^2+7$ إذن : $f'(x)>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

و منه الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

لنحدد صور المجالات التالية : $]-\infty;+\infty[$ و $[1;3]$

$$f\left(\left]-\infty;+\infty\right[\right)=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=\left]-\infty;+\infty\right[$$

$$f\left(\left[1;3\right]\right)=\left[f(1);f(3)\right]=\left[6;46\right]$$

6) مبرهنة القيم الوسيطية :

إذا كانت f $[a\ b]$ $f(a)$ $f(b)$ $[a\ b]$

: $f(c)=\lambda$

نتائج :

- مبرهنة القيم الوسيطية (وجودية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f $[a\ b]$ $f(a)\times f(b)<0$ $f(x)=0$

$]a\ b[$

مثال :

لنبين أن المعادلة : $x^4+x-3=0$ تقبل حلا على الأقل في $]0;2[$

✓ نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=x^4+x-3$

- الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية) بالخصوص على المجال $[0,2]$
- لدينا $f(0)=-2$ و $f(2)=15$ إذن $f(0)\times f(2)<0$

فإن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $]0;2[$

- مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f $[a\ b]$ $f(a)\times f(b)<0$ $f(x)=0$
المجال $]a,b[$

مثال :

لنبين أن المعادلة $x^3+2x=1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0,1]$ $\left(x^3+2x=1 \Leftrightarrow x^3+2x-1=0\right)$

✓ نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=x^3+2x-1$

- الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية) بالخصوص على المجال $[0,1]$

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية) بالخصوص على المجال $[0,1]$
ليكن $x\in[0;1]$: $f'(x)=\left(x^3+2x-1\right)'=3x^2+2$
إذن : $f'(x)>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ و منه f تزايدية قطعا على $[0,1]$

- $f(0)=-1$ و $f(1)=2$ إذن $f(0)\times f(1)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية فإن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $[0;1]$

و منه حسب

- مبرهنة (وجودية ووحدانية الحل على مجال I)

إذا كانت	و $0\in f(I)$	$f\ \ x\ \ =0$	I

مثال :

لنبين أن المعادلة $2x^3+5x-4=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $0<\alpha<1$

✓ نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=2x^3+5x-4$

- الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(2x^3+5x-4\right)'=3x^2+5$

إذن : $f'(x)>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ و منه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

- لنحسب $f(\mathbb{R})$: $f(\mathbb{R})=f\left(\left]-\infty;+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=\left]-\infty;+\infty\right[=\mathbb{R}$

إذن : $0\in f(\mathbb{R})$

و بالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

✓ لنتحقق أن $0<\alpha<1$:

- الدالة f متصلة $[0,1]$
- $f(0)=-4$ و $f(1)=3$ إذن $f(0)\times f(1)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية فإن : $0<\alpha<1$

تقبل حلا وحيدا في المجال

7) **الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا :**

خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال $J=f(I)$ نحو I

نتائج:

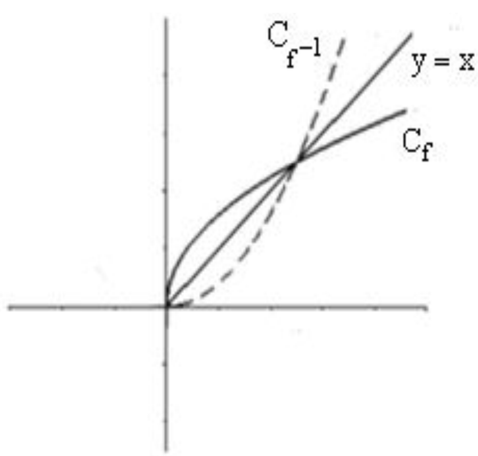
$$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f^{-1}\circ f(x)=x & ;x\in I \\ f\circ f^{-1}(x)=x & ;x\in J \end{cases} \quad (2)$$

خاصيات:

لتكن دالة و f^{-1} J لدينا :

- f^{-1} متصلة على المجال J
- f و f^{-1} لهما نفس الرتابة
- منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$ (المنصف الأول للمعلم)



دالتها العكسية على المجالf

<u>مثال :</u>

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+1}$

- لنبين أن g قصور f على المجال $[0;1]$ تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده :

✓ g قصور دالة جدرية معرفة على المجال $[0;1]$ إذن g <u>متصلة</u> على $[0;1]$

✓ g قصور دالة جدرية معرفة على المجال $[0;1]$ إذن g قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

ليكن $x\in[0;1]$: $g'(x)=\left(\dfrac{3x+5}{x+1}\right)'=\dfrac{-2}{(x+1)^2}$

إذن : $g'(x)<0$ $\left(\forall x\in[0;1]\right)$ و منه g <u>تناقصية قطعا</u> على $[0;1]$

و بالتالي g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J نحو $[0;1]$

بحيث : $J=g\left([0;1]\right)=\left[g(1);g(0)\right]=[4;5]$

- لنحدد : $g^{-1}(x)$ $\left(\forall x\in J\right)$

✓ ليكن $x\in J=[4;5]$

$$y=g^{-1}(x)\Leftrightarrow x=g(y)\quad \left(y\in I=[0;1]\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3y+5}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow x.(y+1)=3y+5$$

$$\Leftrightarrow xy+x=3y+5$$

$$\Leftrightarrow xy-3y=5-x$$

$$\Leftrightarrow y.(x-3)=5-x$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{5-x}{x-3}$$

إذن : $\left(\forall x\in J=[4;5]\right)\quad g^{-1}(x)=\frac{5-x}{x-3}$

8) الجذر من الرتبة n $\left(n\in \mathbb{N}^*\right)$

أ. تعريف :

ليكن n $\mathbb{N}$

الدالة العكسية للدالة $x\mapsto x^n$ على المجال $[0,+\infty[$ تسمى دالة الجدر من الرتبة n و نرمز لها ب : $x\mapsto \sqrt[n]{x}$

الدالة $x\mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

ب. أمثلة :

$(n=1)\quad \sqrt[1]{x}=x$

$(n=2)\quad \sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ (الجذرالمربع)

$(n=3)\quad \sqrt[3]{x}$ (الجذر المكعب)

ج. خصائص :

ليكن x y

$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x\qquad \sqrt[n]{x^n}=x\qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[nm]{x}\qquad \sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n]{x}^m$

$\sqrt[n]{x.y}=\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}\qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\quad (y\neq 0)$

أمثلة :

أ. لنبسط ما يلي :

$a=\sqrt[3]{27}\quad b=\sqrt[4]{16}\quad c=\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

$a=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

$b=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

$c=\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{729}}=\sqrt[6]{729}=\sqrt[6]{3^6}=3$

ب. قارن العددان : $x = \sqrt[3]{4}$ و $y = \sqrt[4]{5}$

لدينا : $x = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3\times 4]{4^4} = \sqrt[12]{256}$ و $y = \sqrt[4]{5} = \sqrt[4\times 3]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

بما أن $125 < 256$ فإن $\sqrt[12]{125} < \sqrt[12]{256}$ و منه $y < x$

ج. اجعل مقام العدد التالي جذريا: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1} = \frac{1}{\dfrac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 - 1^3}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 + \sqrt[3]{4} + 1^2}} = \frac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 + \sqrt[3]{4} + 1^2}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 - 1^3} = \frac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 + \sqrt[3]{4} + 1}{4-1} = \frac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 + \sqrt[3]{4} + 1}{3}$$

د. خاصية:

لتكن f دالة و $n \in \mathbb{N}^*$

- إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$
- إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فإن : $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$
- إذا كانت f متصلة و موجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

أمثلة :

1. لنحسب $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$:

لدينا : $\lim_{x \to -\infty} x^2 + x - 1 = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ إذن : $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2 + x - 1} = +\infty$

2. لنحسب $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{8x}{x+1}}$:

لدينا $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{8x}{x} = 8$ = $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{8x}{x+1}$ إذن : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{8x}{x+1}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

3. لندرس اتصال الدالة : $h : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$

لدينا : $f : x \mapsto x^2$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) \geq 0$

إذن الدالة $h=\sqrt[3]{f}$ متصلة على $\mathbb{R}$

9) <u>القوى الجدرية لعدد حقيقي:</u>

أ. <u>تعريف :</u>

ليكن $x >$ $\mathbb{N}^*$

$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ و $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$

<u>أمثلة :</u>

- $5^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^3}$
- $4^{-\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{4^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt[2]{4^5}}=\dfrac{1}{\sqrt[2]{2^{10}}}=\dfrac{1}{2^{10}}$

ب. <u>خاصية :</u>

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا و لكل r r من $\mathbb{Q}^*$

- $x^{r+r'}=x^r x^{r'}$
- $x^r.y^r=(x.y)^r$
- $\left(x^r\right)^{r'}=x^{r.r'}$
- $\dfrac{1}{x^r}=x^{-r}$
- $\dfrac{x^r}{y^r}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^r$
- $\dfrac{x^r}{x^{r'}}=x^{r-r'}$

<u>مثال :</u>

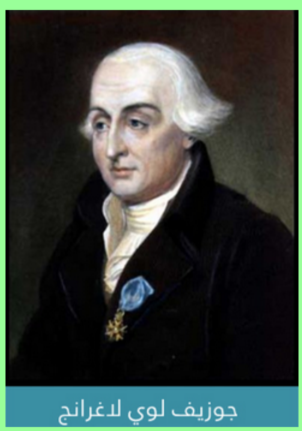
لنبسط العدد $A=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{8}}\times\sqrt{\sqrt[4]{32}}}{\sqrt{2}\times\sqrt[12]{64}}$

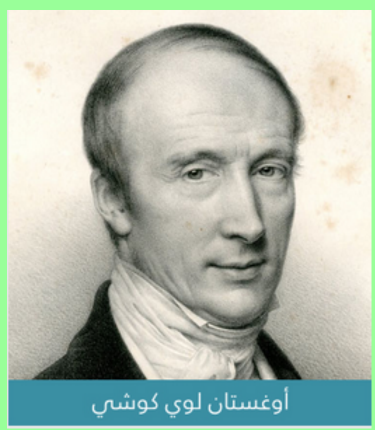
$$A=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{8}}\times\sqrt{\sqrt[4]{32}}}{\sqrt{2}\times\sqrt[12]{64}}=\frac{\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(32^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\times64^{\frac{1}{12}}}=\frac{8^{\frac{1}{6}}\times32^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{1}{2}}\times64^{\frac{1}{12}}}=\frac{\left(2^3\right)^{\frac{1}{6}}\times\left(2^5\right)^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{1}{2}}\times\left(2^6\right)^{\frac{1}{12}}}=\frac{2^{\frac{3}{6}}\times2^{\frac{5}{8}}}{2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{6}{12}}}=\frac{\cancel{2^{\frac{1}{2}}}\times2^{\frac{5}{8}}}{\cancel{2^{\frac{1}{2}}}\times2^{\frac{1}{2}}}=2^{\frac{5}{8}-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{2}$$

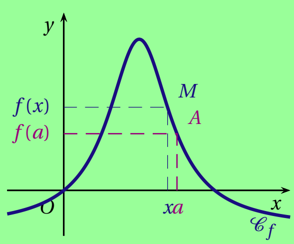
つづく

نبذة عن عالم

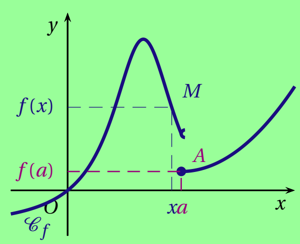
للتحليل . و كان عالم الرياضيات و الفيزياء الفرنسي أوغستان لوي كوشي (1789 – 1857م) *Augustin – Louis Cauchy* من بين رموز هذا التوجه .
دخل كوشي مدرسة الهندسة (مدرسة الجسور و الطرق) وأشرف عليه بيير جيرارد *Pierre Girard* في مشروع قناة *Ourcq* ، وأسهم في انشاء ميناء بحري في شيربوغ عام 1810.
تميز كوشي بأعماله في الرياضيات ، وحلّ مجموعة مسائل تحد طرح عليه لاغرانج *Lagrange* ، و في عام 1814 نشر بحثا عن التكاملات المحدودة ، وعين كوشي في هذا العام أستاذا مساعدا في التحليل في مدرسة البوليتكنيك . درّس طرق التكامل في كلية العلوم ، ووضع تعاريف دقيقة للنهايات والاتصال و التكامل و لتقارب المتتاليات و المتسلسلات . و ساهم في تعريف الاتصال على مجال $[a,b]$.


جوزيف لوي لاغرانج


أوغستان لوي كوشي



f في متصلة a



f في غير متصلة a

**La notion de continuité nous est familière : le temps s'écoule d'une manière continue , on ne passe pas brutalement de 12h à 12h01s , il n'y pas de saut .
C'est en ce sens que l'expression fonction continue est employée en mathématiques .**

عرف القرن التاسع عشر اهتماما واسعا بالدّقة الرياضية المؤدية إلى تحديد المفاهيم الأساسية

بطاقة تقنية رقم : 02

ثانوية : الفتح التأهيلية السنة الدراسية : 2016 – 2015 الأستاذ : عادل بناجي	المستوى : الثانية باكلوريا علوم تجريبية درس : النهايات و الاتصال التذبير الزمني : 15 ساعة

فقرات الدرس	4 الاتصال في نقطة - الاتصال على مجال 5 العمليات على الدوال المتصلة 6 صورة مجال بدالة متصلة 1 مبرهنة القيم الوسطية 2 الدالة العكسية لدالة متصلة 3 دالة الجذر من الرتبة n
المكتسبات القبلية	• عموميات حول الدوال العددية • دراسة الدوال العددية • مفاهيم أساسية في درس النهايات و الاشتقاق
الكفاءات المستهدفة	• تحديد صورة قطعة أو مجال بدالة متصلة و بدالة متصلة و رتيبة قطعا ؛ • تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية في دراسة بعض المعادلات و المتراجحات أو دراسة إشارة بعض التعابير... ؛ • استعمال طريقة التفرع الثنائي $(ladichotomie)$ في تحديد قيم مقربة لحلول المعادلة أو لتأطير هذه الحلول ؛ • تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية و مبرهنة الدالة التقابلية في حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال ؛
التوجيهات التربوية	• يتم اعتماد التعريف التالي : نقول إن دالة f متصلة في النقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ؛ • نقبل النتائج المتعلقة باتصال الدوال الحدودية والجذرية و الدوال المثلثية والدالة جذر مربع ويتم التركيز على تطبيقاتها ؛ • نقبل أن صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة وأن صورة مجال بدالة متصلة هي مجال ثم نستنتج مبرهنة القيم الوسطية ؛ • نقبل خاصيات العمليات على الدوال المتصلة و اتصال مركب دالتين .
الوسائل الديداكتيكية	سلسلة أنشطة - سلسلة تمارين - الكتاب المدرسي - ملخص المكتسبات السابقة ؛

✌ النهايات ✌

نشاط

...

1 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to+\infty} 27x^7 - x^3 - 4x \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 - 3x^3 + x \qquad \lim_{x\to+\infty} 2x^2-5x^3-x^5-3 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 + 3x^5 - 4$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-30}{x^3-7x^2-5x+75} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4-4x}{8x^4+2x^3} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{27x^7-x^3}{11x^5-2x^2-15}$$

2 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to3^+} \frac{-5x-3}{-3x^2+11x-6} \qquad \lim_{x\to-4^+} \frac{x^2+x-4}{x^2+6x+8} \qquad \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2+4}{x+2} \qquad \lim_{x\to3^+} \frac{20-x^3}{11x-2x^2-15}$$

$$\lim_{x\to3^-} \frac{-5x-3}{-3x^2+11x-6} \qquad \lim_{x\to-4^-} \frac{x^2+x-4}{x^2+6x+8} \qquad \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2+4}{x+2} \qquad \lim_{x\to3^-} \frac{20-x^3}{11x-2x^2-15}$$

3 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to-\sqrt{5}} \frac{x+\sqrt{5}}{5-x^2} \qquad \lim_{x\to3} \frac{27-x^3}{11x-2x^2-15} \qquad \lim_{x\to0} \frac{x^2-3x^3+x}{2x-x^2}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} \qquad \lim_{x\to-1} \frac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3} \qquad \lim_{x\to5} \frac{x^2+x-30}{x^3-7x^2-5x+75}$$

4 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x} \qquad \lim_{x\to4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} \qquad \lim_{x\to25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5} \qquad \lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

5 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{7x-9} + 8x^5 - 4x^3 + 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} -4x^2 - 1 - 12x + \sqrt{4x+7} \qquad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2-4x+7} - 3x + 8$$

$$\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{-9x-4} - 8x^2 - 3x - 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 - \sqrt{8x-3} + 2x^4 - 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2-6x-2} - x + 12$$

الأشكال غير محددة

الأشكال غير المحددة هي : $"+\infty-\infty"$ $"0\times\infty"$ $"\frac{\infty}{\infty}"$ $"\frac{0}{0}"$

خاصيات النهايات

خاصية

نهايات دوال اعتيادية في $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{|x|} = +\infty$$

خاصية

نهايات دوال اعتيادية في $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

$$\lim_{x\to6\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to6\infty}\frac{1}{x^2}=0 \qquad \lim_{x\to6\infty}\frac{1}{x^3}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=0$$

خاصية

نهايات دوال اعتيادية في 0

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^2}=+\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^3}=+\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^2}=+\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^3}=-\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=+\infty$$

خاصية

نهايات الدوال الجذرية والحدودية

1 نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

2 نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

خاصية

نهايات الدوال المثلثية

$$\lim_{x\to0}\frac{sin(x)}{x}=1 \qquad (a\neq0);\ \lim_{x\to0}\frac{sin(ax)}{x}=a \qquad \lim_{x\to0}\frac{tan(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

خاصية

النهايات و الترتيب

$$\begin{cases}g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\\ \lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=l\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=l \qquad \begin{cases}f(x)\leqslant g(x)\\ \lim_{x\to a}g(x)=l'\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=l$$

$$\begin{cases}|f(x)-l|\leqslant u(x)\\ \lim_{x\to a}u(x)=l\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=l \qquad \begin{cases}0<f(x)\leqslant u(x)\\ \lim_{x\to a}u(x)=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=0$$

$$\begin{cases}f(x)\leqslant u(x)\\ \lim_{x\to a}u(x)=-\infty\end{cases}\quad\lim_{x\to a}f(x)=-\infty \qquad \begin{cases}u(x)\leqslant f(x)\\ \lim_{x\to a}u(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$$

✌ الاتصال ✌

1 الاتصال في نقطة - الاتصال على مجال

1.1 الاتصال في نقطة

نشاط

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} & ; x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$

1 حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

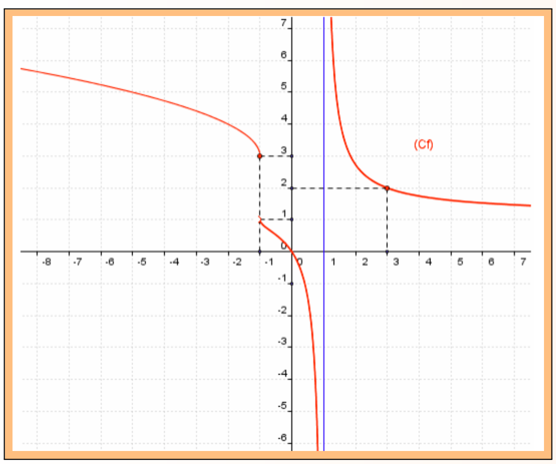
2 أحسب $\lim_{x\to 2} f(x)$

3 أنشئ التمثيل المبياني للدالة f

✌ نلاحظ أن $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ نقول إن الدالة f متصلة في 2

نشاط

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (أنظر الشكل جانبه) .



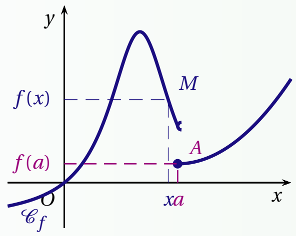
1 من خلال الشكل كيف ترى المنحنى C_f عند النقطة ذات الأفصول -1 ثم عند النقطة ذات الأفصول 3

2 ا. أوجد مبيانيا $\lim_{x\to 3} f(x)$ و $f(3)$. ماذا تستنتج ؟

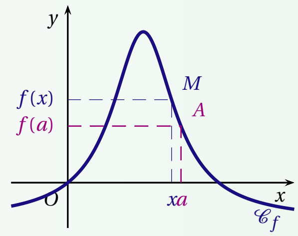
ب. أوجد مبيانيا $f(-1)$ ونهاية f عند -1 . ماذا تستنتج ؟

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I ، تكون f متصلة في a إذا وفقط إذا كان : $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$



f غير متصلة في a



f متصلة في a

مثال

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2-2}{x-1} & ; x \neq 1 \\ f(2) = 4 \end{cases}$ لنبين أن f متصلة في 1 .

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{2(x^2-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} 2(x-1) \\
&= 4 = f(2)
\end{aligned}$$

✌ بما أن $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ فإن f متصلة في 1 .

ملاحظة

إذا كانت f غير متصلة في a فإننا نقول إن f غير متصلة (أو منفصلة) في a .

تمرين تطبيقي

...

1 نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3} & ; x\neq 3 \\ f(3)=6 \end{cases}$ بين أن f متصلة في 3 .

2 نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & ; x\neq 1 \\ f(1)=3 \end{cases}$ هل f متصلة في 1 ؟

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2} & ; x\neq 2 \\ f(2)=a & ; a\in\mathbb{R} \end{cases}$ حدد قيمة العدد الحقيقي a لكي تكون f متصلة في 2 .

2.1 الاتصال على اليمين - الاتصال على اليسار

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a,a+\alpha[$ حيث $(\alpha>0)$ تكون f متصلة على اليمين في a إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)}$$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]a-\alpha,a]$ حيث $(\alpha>0)$ تكون f متصلة على اليسار في a إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)}$$

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I ، تكون f متصلة في a إذا وفقط إذا كانت متصلة على اليمين ومتصلة على اليسار في a أي : $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)}$

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي :
$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+3} & ;x>1 \\ f(x)=x+1 & ;x\leqslant 1 \end{cases}$$

1 أدرس اتصال f على اليمين وعلى اليسار في 1

2 هل الدالة f متصلة في 1 ؟

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & ;x>2 \\ f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & ;x\leqslant 2 \end{cases}$$

1 أحسب $f(2)$

2 أدرس اتصال f في 2

3.1 الاتصال على مجال

تعريف

...

- تكون الدالة f متصلة على المجال المفتوح $]a,b[$ إذا كانت متصلة في كل نقطة من المجال $]a,b[$
- تكون الدالة f متصلة على المجال المغلق $[a,b]$ إذا كانت متصلة على $]a,b[$ ومتصلة في a^+ و b^-

ملاحظات

...

- نعرف بالمثل الاتصال على المجالات $[a,b[$ و $]a,b]$ و $[a,+\infty[$ و $]-\infty,b]$ ...
- التمثيل المبياني لدالة متصلة على $[a,b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتان $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$

مثال

دالة الجزء الصحيح

← دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي نرمز لها ب E و التي تحقق : $E(x)=n$ إذا كان $n\leqslant x<n+1$ (حيث $n\in\mathbb{Z}$)

← مثلا :

- $E(3,5)=3$ لأن $3\leqslant 3,5<3+1$
- $E(5)=5$ لأن $5\leqslant 5<5+1$
- $E(-2,4)=-3$ لأن $-3\leqslant -2,4<-3+1$
- $E(\sqrt{5})=2$ لأن $4\leqslant 5<9\Rightarrow \sqrt{4}\leqslant\sqrt{5}<\sqrt{9}\Rightarrow 2\leqslant\sqrt{5}<3$

1 مثل مبيانيا الدالة E على المجال $[0,4[$

2 أدرس اتصال الدالة E على المجالات $[0,1[$ ، $[0,2[$ ، $]1,2[$ ، $]1,3[$ و $[3,3.5]$

خاصية

...

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالتين $x\mapsto cos(x)$ و $x\mapsto sin(x)$ متصلتين على $\mathbb{R}$
- الدالة $x\mapsto tan(x)$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

أمثلة

...

- الدالة $f(x)=x^3-4x^2+5x+7$ متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)
- الدالة $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ متصلة على $\mathbb{R}-\{1\}$ (لأنها دالة جذرية)
- الدالة $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ متصلة بالخصوص على المجالين $]-\infty,1[$ و $[3,+\infty[$ (لأنها $]-\infty,1[\subset\mathbb{R}-\{1\}$ و $[3,+\infty[\subset\mathbb{R}-\{1\}$)

4.1 قصور دالة عددية

تعريف

إذا كانت f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J ضمن I بحيث $\forall x\in I\ f(x)=g(x)$ ، فإننا نقول إن الدالة g قصور الدالة f على المجال J .

نتيجة

إذا كانت الدالة f متصلة على I و g قصور الدالة f على المجال J فإن g متصلة على I

2 العمليات على الدوال المتصلة

خاصية

خاصية مقبولة

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عددا حقيقيا .

الدوال $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ و (kf) و $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ $(\forall x \in I \; g(x) \neq 0)$ متصلة على I .

مثال

...

1 الدالة $x \mapsto x^2+\sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$ (لأنها مجموع الدالتين $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto x^2$ المتصلتين على $\mathbb{R}^+$)

2 الدالة $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ متصلة على $]0,+\infty[$ (لأنها مقلوب الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ المتصلة على $]0,+\infty[$ و لا تنعدم على $]0,+\infty[$)

3 الدالة $x \mapsto \frac{x+2}{\sqrt{x}+x^2}$ متصلة على $]0,+\infty[$ (لأنهاخارج الدالة $x \mapsto x+2$ المتصلة على $]0,+\infty[$ و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}+x^2$ المتصلة على $]0,+\infty[$ و لا تنعدم على $]0,+\infty[$)

تمرين تطبيقي

بين أن الدالة f متصلة على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1 $f(x)=2x+\sqrt{x}$ و $I=[0,+\infty[$

2 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2}$ و $I=\mathbb{R}$

3 $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$ و $I=]0,+\infty[$

4 $f(x)=sin(x)+\sqrt{x}$ و $I=[0,+\infty[$

5 $f(x)=\frac{cos(x)}{x^2+1}$ و $I=\mathbb{R}$

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي : $\begin{cases} f(x)=x+a & ;x<1 \\ f(x)=2x-3 & ;1\leqslant x\leqslant 3 \\ f(x)=bx+1 & ;x>3 \end{cases}$ حدد العددين الحقيقيين a و b لكي تكون f دالة متصلة على $\mathbb{R}$

نشاط

نعتبر f و g الدالتين العدديتين المعرفتين ب : $f(x)=x^2+x+1$ و $g(x)=\sqrt{x}$

1. دد الدالة $g\circ f$
2. ادرس اتصال f في 0 و اتصال g في $f(0)$
3. ادرس اتصال الدالة $g\circ f$ في 0

خاصية

اتصال مركب دالتين

لتكن f دالة متصلة على I و g دالة متصلة على J و $f(I)\subset J$
الدالة : $g\circ f$ متصلة على I .

مثال

لندرس اتصال الدالة f المعرفة ب : $f(x)=sin\left(\frac{3}{x}\right)$ على D_f

- لدينا $D_f=\mathbb{R}^*$
- نضع : $f(x)=h(g(x))$ بحيث $g(x)=\frac{3}{x}$ و $h(x)=sin(x)$

لدينا g دالة جذرية إذن فهي متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}^*$ ؛ و h دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على $\mathbb{R}^*$ وبالتالي فإن f متصلة على $\mathbb{R}^*$ (لأنها مركب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}^*$)

تمرين تطبيقي

...

1. باستعمال مركب دالتين ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x)=sin(x^3-3x+2)$ على $\mathbb{R}$
2. باستعمال مركب دالتين ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ على $[-1,1]$

نتائج

...

1 إذا كانت f دالة موجبة و متصلة على مجال I (أي $\forall x \in I : f(x) \geqslant 0$) فإن الدالة : $x \mapsto \sqrt{f}$ متصلة على المجال I

2 إذا كانت الدالة f متصلة على مجال I فإن الدالة : $x \mapsto cos(f(x))$ متصلة على المجال I

3 إذا كانت الدالة f متصلة على مجال I فإن الدالة : $x \mapsto sin(f(x))$ متصلة على المجال I

تمرين تطبيقي

...

1 ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-1}{x-1}}$ على المجال $]1, +\infty[$

2 ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x) = cos\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$ على $\mathbb{R}$

3 صورة مجال بدالة متصلة

1.3 صورة قطعة - صورة مجال

خاصية

خاصية مقبولة

...

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

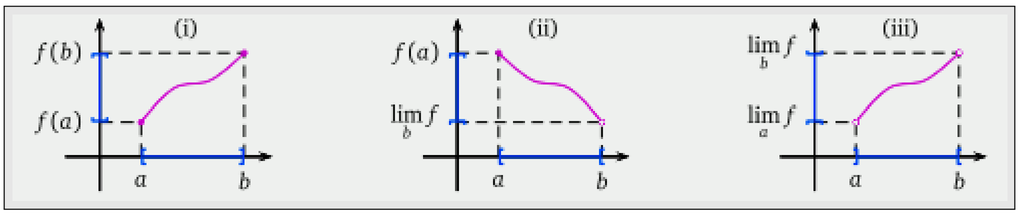
ملاحظة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ فإن $f([a, b]) = [m, M]$ حيث : m هي القيمة الدنيا ل f على $[a, b]$ ، و M هي القيمة القصوى للدالة f على $[a, b]$

2.3 صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعا

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I لدينا النتائج التالية :

رتابة الدالة f	المجال I	المجال $f(I)$
f تزايدية قطعا على I	$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$
	$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$
	$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$
	$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$
f تناقصية قطعا على I	$[a,b]$	$[f(b),f(a)]$
	$[a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$
	$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
	$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$



4 مبرهنة القيم الوسطية

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a,b]$

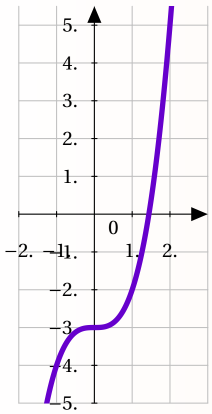
بما أن $f([a,b])=[m,M]$ فإن $f(a)$ و $f(b)$ ينتميان إلى القطعة $[m,M]$ و لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ لدينا $k\in[m,M]$. إذن : يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=k$

مبرهنة مبرهنة القيم الوسطية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من المجال I .

لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ بحيث : $f(c)=k$

نشاط



نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=x^3-3$ و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

(أنظر الشكل جانبه).

1 بين أن f تزايدية و متصلة على $[0,2]$

2 أحسب $f(0)$ و $f(2)$ ثم استنتج $f([0,2])$

3 بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0,2]$

ملاحظة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ بحيث $f(a)<0$ و $f(b)>0$ (أو $f(a)>0$ و $f(b)<0$) فإن 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ و حسب مبرهنة القيم الوسطية فإنه يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ بحيث : $f(c)=0$.

العدد c هو حل المعادلة $f(x)=0$

نتيجة

...

- إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على اللأقل حل في $]a,b[$
- إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على اللأقل حل في $]a,b[$

تمرين تطبيقي

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي : $f(x)=x^4+x^2+4x-1$

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على اللأقل حل في $[-1,1]$

تمرين تطبيقي

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي : $f(x)=x^3+x^2+4x-1$

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

5 طريقة التفرع الثنائي

نشاط

نعتبر الدالة العددية : $f(x)=x^3+x+1$

1. بين أن f متصلة على $[0,1]$
2. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 0 و 1
3. أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ وتحقق أن $\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right]$
4. أحسب $f\left(\frac{3}{4}\right)$ وتحقق أن $\alpha\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$
5. أحسب $f\left(\frac{5}{8}\right)$ وتحقق أن $\alpha\in\left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right]$
6. أحسب $f\left(\frac{11}{16}\right)$ واستنتج تأطيرا للعدد α
7. أحسب $f(0,682)$ و $f(0,683)$ واستنتج تأطيرا للعدد α سعته 10^{-3}

هناك بعض المعادلات من نوع $f(x)=0$ لا يمكن حلها جبريا ؛ لكن يمكن تحديد قيمة مقربة لحل هذه المعادلة وذلك باستعمال طريقة التفرع الثنائي .

طريقة

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)f(b)<0$ إذن يوجد عدد وحيد α حل للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$

- إذا كان $f(a)f(\frac{a+b}{2})>0$ فإن $\frac{a+b}{2}<\alpha<b$ وهذا تأطير ل α سعته $\frac{b-a}{2}$
نعيد هذه العملية بتعويض a ب $\frac{a+b}{2}$ فنحصل على تاطير سعته $\frac{b-a}{4}$ ...
- إذا كان $f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$ فإن $a<\alpha<\frac{a+b}{2}$ وهذا تأطير ل α سعته $\frac{b-a}{2}$
نعيد هذه العملية بتعويض b ب $\frac{a+b}{2}$ فنحصل على تاطير سعته $\frac{b-a}{4}$ ...

نعيد هذه العملية ككل إلى أن نحصل على التأطير المرغوب فيه

تمرين تطبيقي

بين أن المعادلة $x^3+x+1=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-1,-\frac{1}{2}\right[$ ؛ ثم حدد تأطيرا للعدد α سعته $\frac{1}{8}$

6 الدالة العكسية لدالة متصلة

1.6 الدالة العكسية

نشاط

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $f(x)=x^3+x^2+4x-1$

1. بين أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$
2. تحقق أن $f([0,+\infty[)\subset[-1,+\infty[$
3. بين أن كل عنصر y من $[-1,+\infty[$ يقبل سابق وحيد x من $[0,+\infty[$ و أن $x=\frac{1}{2}\sqrt{y+1}$

ملاحظة

...

- كل عنصر من $[0,+\infty[$ له صورة وحيدة في $[-1,+\infty[$ و كل عنصر من $[-1,+\infty[$ له سابق وحيد في $[0,+\infty[$
- نقول إن f تقابل من $[0,+\infty[$ نحو $[-1,+\infty[$
- توجد دالة وحيدة يرمز لها ب f^{-1} معرفة على $[-1,+\infty[$ ب $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x+1}$ وتسمى الدالة العكسية للدالة f

خاصية

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن لكل عنصر y من $J=f(I)$ المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في I
نعبر عن هذا بقولنا f تقابل من I نحو J

تعريف

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و J مجال حيث $J=f(I)$ ، الدالة التي تربط كل عنصر y بالعنصر الوحيد x من I بحيث $f(x)=y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f نرمز لها ب f^{-1}

نتائج

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية لدينا :

- $(\forall y\in J)\ (\exists! x\in I)\ : f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$
- $(\forall x\in I)\ : (f^{-1}\circ f)(x)=x$
- $(\forall y\in J)\ : (f\circ f^{-1})(y)=y$

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=\sqrt{x-1}$

1. بين أن f متصلة ورتيبة قطعا على $[1,+\infty[$
2. استنتج أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
3. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $f(x)=x^2$

1. بين أن f تقابل من $I=[0,+\infty[$ نحو $J=[0,+\infty[$
2. حدد f^{-1} الدالة العكسية للدالة f
3. أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم $(\Delta): y=x$ والمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$. ماذا تلاحظ ؟

2.6 خاصيات الدالة العكسية

نشاط

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية :

- الدالة f^{-1} معرفة ومتصلة على $J=f(I)$
- الدالة f^{-1} رتيبة قطعا على $J=f(I)$ و لها نفس منحى تغير الدالة f
- في المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ منحنى الدالة f^{-1} متماثل مع منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=x$

7 دالة الجذر من الرتبة n

خاصية

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[0,+\infty[$ ب : $f(x)=x^n$ $n\in\mathbb{N}^*$
بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} على مجال J يجب تحديده .

نعلم أن الدالة $f(x)=x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ متصلة وتزايدية قطعا على $I=[0,+\infty[$ إذن تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $J=f(I)=$ $[0,+\infty[$

خاصية و تعريف

...

- الدالة العكسية f^{-1} تسمى دالة الجذر من الرتبة n
- الدالة العكسية f^{-1} يرمز لها ب $f^{-1} = \sqrt[n]{}$
- نكتب $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ أو أيضا $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

ملاحظة

...

- حالة $n = 1$: $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{x} = x$
- حالة $n = 2$: $f^{-1}(x) = \sqrt[2]{2} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{3}}$ (الجذر مربع)
- حالة $n = 3$: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3} = x^{\frac{1}{3}}$ (الجذر مكعب)

خاصية

...

- $\sqrt[n]{0} = 0$ و $\sqrt[n]{1} = 1$
- $(\forall x \geqslant 0)\ \ \sqrt[n]{x^n} = x$ و $(\sqrt[n]{x})^n = x$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x})^n = +\infty$

- في معلم متعامد ممنظم $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ منحنى الدالة $f(x) = \sqrt[n]{x}$ مع $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f(x) = x^n$ بالنسبة للمنصف الأول (المستقيم $((\Delta) : y = x$)

نتائج

...

- $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\forall b \in \mathbb{R}^+)\ :\ \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$
- $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\forall b \in \mathbb{R}^+)\ :\ \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leqslant b$

مثال

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ ؛ $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

تمرين تطبيقي

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : $x^3 = 5$ ؛ $x^6 = -9$ ؛ $x^4 = 81$ ؛ $x^3 = -8$

خاصية

العمليات على الجذور من الرتبة n

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}^+$ و m و n عنصرين من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

- $\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$: $(y\neq 0)$
- $(\sqrt[n]{x})^m=\sqrt[n]{x^m}$
- $\sqrt[n]{x}=\sqrt[nm]{x^m}$ و $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[nm]{x}$

تمرين تطبيقي

أحسب وبسط العدد A حيث : $A=\dfrac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{9^5}}{\sqrt[3]{3}}$

1.7 القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب

تعريف

ليكن x عدد حقيقي موجب قطعا و r عددا جذريا غير منعدم حيث $r=\frac{p}{q}$ $(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$

القوة الجذرية للعدد الحقيقي x ذات الأساس r هي العدد الحقيقي x^r و المعرفة بمايلي : $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$

مثال

$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ ؛ $\sqrt{x^5}=x^{\frac{5}{2}}$ ؛ $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

خاصية

ليكن r و r' عددين جذريين و a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا لدينا :

- $(a^r)^{r'}=a^{rr'}$
- $\dfrac{a^r}{b^{r'}}=a^{r-r'}$
- $a^r a^{r'}=a^{r+r'}$
- $a^r b^r=(ab)^r$
- $\dfrac{1}{a^r}=a^{-r}$
- $\dfrac{a^r}{b^r}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^r$

تمرين تطبيقي

بسط العددين A و B حيث : $A=\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5\times\left(4^{-\frac{1}{2}}\right)\times\left(8^{\frac{2}{3}}\right)$ ؛ $B=\dfrac{\sqrt[3]{7}\times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}}$

المُتتاليات العدَدية

1. تذكير:

أ. المتتاليات الحسابية :

تعريف:

(u_n) **حسابية** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}-u_n=r$ **(** r أساس (u_n) **)**

كتابة (u_n) **بدلالة** n **:**

$$u_n=u_p+(n-p)r$$
$$u_n=u_p+(n-p)r$$
$$u_n=u_1+(n-1)r$$

حساب المجموع :

$$u_p+u_{p+1}+.......+u_m=(m-p+1).\left(\frac{u_p+u_m}{2}\right)$$

ب. المتتاليات الهندسية :

تعريف:

(v_n) **هندسية** $\Leftrightarrow$ $v_{n+1}=qv_n$ **(** q أساس (v_n) **)**

كتابة v_n **بدلالة** n **:**

$$v_n=v_p.q^{n-p}$$
$$v_n=v_0.q^n$$
$$v_n=v_1.q^{n-1}$$

حساب المجموع :

$$v_p + v_{p+1} + ... + v_m = v_p . \frac{1-q^{m-p+1}}{1-q}$$

ج. رتابة متتالية :

(u_n) تزايدية $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} - u_n \geq 0$

(u_n) تناقصية $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} - u_n \leq 0$

(u_n) ثابتة $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} = u_n$

د. متتالية مصغورة - مكبورة – محدودة

(u_n) مصغورة بالعدد m $\Leftrightarrow$ $m \leq u_n$

(u_n) مكبورة بالعدد M $\Leftrightarrow$ $u_n \leq M$

(u_n) محدودة $\Leftrightarrow$ $m \leq u_n \leq M$

2. نهاية متتالية :

أ. تعاريف:

نقول أن نهاية المتتالية (u_n) هي العدد الحقيقي l إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحتوي على جميع الحدود u_n ابتداءا من رتبة معينة و نكتب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$

ب. أمثلة اعتيادية :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^p = +\infty \quad (p \in \mathbb{N}^*)$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (p \in \mathbb{N}^*)$

خاصية :

إذا كانت (u_n) تقبل نهاية فإن هذه النهاية تكون وحيدة .

د. **تعاريف و مصطلحات :**

- نقول إن (u_n) متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية
- نقول إن (u_n) متباعدة إذا كانت تقبل نهاية لا منتهية أو لا تقبل نهاية

3. العمليات على النهايات :

خاصيات :

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان متقاربتان لدينا :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)+\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)\times\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)}\quad\left(\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\neq0\right)$
- ملاحظة : الخاصيات بالنسبة للعمليات على النهايات غير المنتهية هي نفسها على الدوال العددية

4. النهايات و الترتيب :

خاصيات

(1 $$\lim_{n\to+\infty}u_n=l\ \Leftarrow\ \begin{cases}v_n\le u_n\le w_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=l\end{cases}$$

(2 $$\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha\ \Leftarrow\ \begin{cases}|u_n-\alpha|\le v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0\end{cases}$$

(3 $$\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty\ \Leftarrow\ \begin{cases}u_n\le v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty\end{cases}$$

(4 $$\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty\ \Leftarrow\ \begin{cases}u_n\le v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty\end{cases}$$

. **نهاية المتتالية** (q^n) :

خاصية :

$q \leq -1$: (q^n) لا تقبل نهاية

$-1 < q < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

$q = 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$

$q > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

خاصية :

- كل متتالية تزايدية و مكبورة فهي متقاربة
- كل متتالية تناقصية و مصغورة فهي متقاربة

.6 نهاية المتتالية (n^r) $(r \in \mathbb{Q}^*)$

خاصية

إذا كان $r > 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} n^r = +\infty$

إذا كان $r < 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} n^r = 0$

.7 نهاية متتالية من نوع $v_n = f(u_n)$ **:**

خاصية:

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ و f متصلة في l $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = f(l)$

. **نهاية متتالية من نوع** $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$

خاصية :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \end{cases}$$

إذا كانت f **متصلة على** I **و** $f\left(I\right) \subset I$ **و** $\left(u_n\right)$ **متقاربة**

فإن نهاية $\left(u_n\right)$ **هي حل للمعادلة** $\left(\quad \right)$

ملاحظة:

- **إذا كانت** $\left(u_n\right)$ **تناقصية فإن** $u_n \leq u_0$
- **إذا كانت** $\left(u_n\right)$ **تزايدية فإن** $u_0 \leq u_n$

الاشتقاق و تطبيقاته – دراسة الدوال

I- الاشتقاق في نقطة -الدالة المشتقة

A) أنشطــــــة

نشاط1 باستعمال التعريف ادرس اشتقاق الدالة f في x_0 و حدد العدد المشتق في x_0 إن وجد ثم حدد معادلة المماس أو نصف المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الأفصول x_0 في الحالات التالية

أ- $f(x)=x^2-2x \quad x_0=1$ ب- $f(x)=x^2-4 \quad x_0=2$

ج- $\begin{cases} f(x)=\sin x & x\leq 0 \\ f(x)=x^3-2x & x\succ 0 \end{cases} \quad x_0=0$

نشاط2 حدد الدالة المشتقة f′ للدالة f بعد تحديد مجموعة تعريف كل من f و f′ في الحالات التالية

أ- $f(x)=-2x^4+3x^2-1$ ب - $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

ج – $f(x)=\sin 2x\cos x$ د – $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ ر- $f(x)=1+\tan^2 x$

نشاط3

حـدد $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+\cos\pi x}{x-1}$

B) تذكــير

1- الاشتقاق في نقطة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 اذا كانت للدالة $x\to\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l في x_0 ونرمز لها بـ $f'(x_0)$. العدد l يسمى العدد المشتق لـ f في x_0. نكتب $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ب- خاصية

كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0

2 – الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $x\to\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليمين في x_0 و نرمز لها بـ $f'_d(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليمين في x_0 نكتب $f'_d(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_x-\alpha;x_0]$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $x\to\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليسار في x_0 نرمز لها ب $f'_g(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليسار في x_0 نكتب $f'_g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ب – خاصية

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

3- الد الـــــة المشتقة

أ- تعريف

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .
الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرمز لها بـ f' .

ب- عمليات على الدوال المشتقة

-* لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in I \quad (f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$\forall x \in I$ بحيث g لا تنعدم على I

-* لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ $\quad \left(f^n\right)'(x) = n\left(f(x)\right)^{n-1} \times f'(x) \qquad \forall x \in I$

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{Z}_-^*$ و f لا تنعدم على I

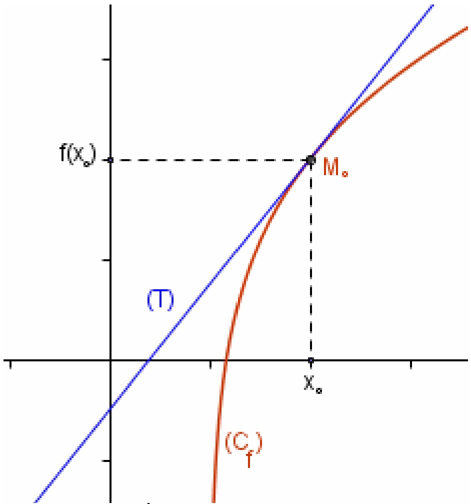
$$\forall x \in I \qquad \left(f^n\right)'(x) = n\left(f(x)\right)^{n-1} \times f'(x)$$

4- الكتابة التفاضلية.

اذا كانت $y=f(x)$ و f قابلة للاشتقاق على المجال I فاننا نكتب اصطلاحا $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ أو $dy = f'(x)dx$

هذه الكتابة تسمى: **الكتابة التفاضلية.**

5- التأويل الهندسي – معادلة المماس لمنحنى دالة

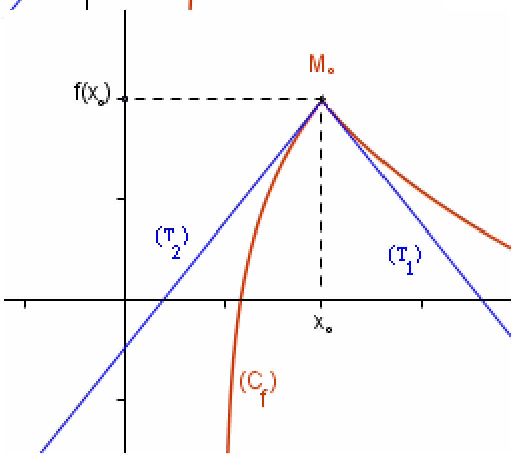


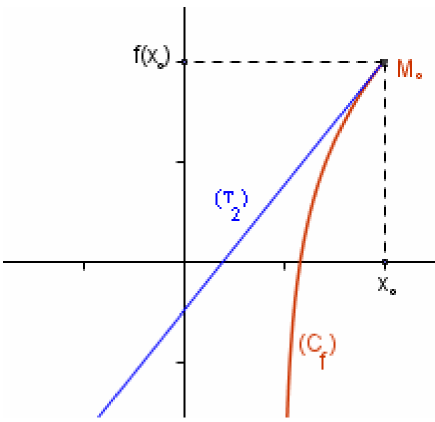
أ- المماس

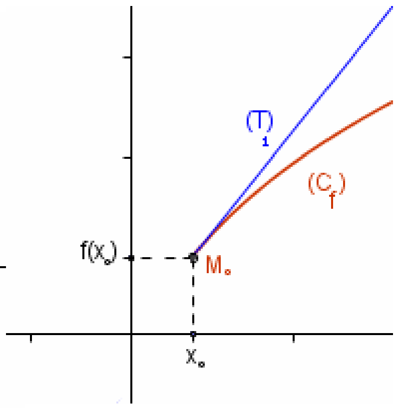
لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحناها
قابلية اشتقاق f في x_0 تؤول هندسيا بوجود مماس لـ C_f
عند النقطة ذات الأفصول x_0 معادلته $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ب- نصف المماس

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فان C_f يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الافصول x_0 معامله الموجه $f_d'(x_0)$ (أو $f_g'(x_0)$)







$$\begin{cases}(T_1): y = f_d'(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0\end{cases} \qquad \begin{cases}(T_2): y = f_g'(x-x_0)+f(x_0) \\ x \leq x_0\end{cases}$$

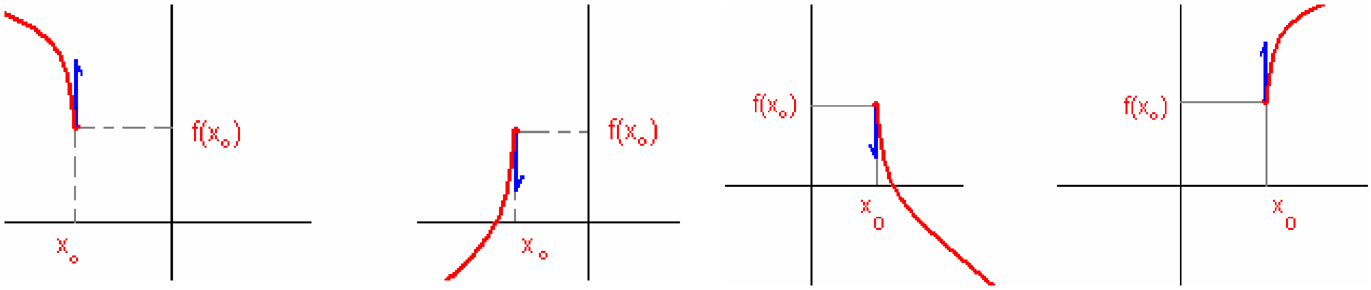
$$(T)_1 : y = f_d'(x-x_0)+f(x_0) \qquad x \geq x_0$$
$$(T_2): y = f_g'(x-x_0)+f(x_0) \qquad x \leq x_0$$

M_0 **نقطة مزواة**

ج- نصف مماس مواز لمحور الاراتيب

إذا كانت f متصلة في x_0 و كان $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ أو $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ فان

لـ C_f نصف مماس مواز لمحور الأراتيب.



II- مشتقة دالة مركبة – مشتقة الدالة العكسية

1- مشتقة دالة مركبة

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$

إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فان $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0.

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$

$$\forall x\in I \qquad (g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$$

نتيجة

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و موجبة قطعا على I و g دالة معرفة على I بـ $g(x)=\sqrt{f(x)}$

فان g قابلة للاشتقاق على I و $\forall x\in I \qquad g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

تمرين أحسب $f'(x)$ بعد تحديد مجموعة تعريف الدالة المشتقة f' في الحالتين التاليتين

$$f(x)=\cos(x^3-4x^2) \quad (a \quad ; \quad f(x)=\sqrt{x^2-x} \quad (b$$

2- مشتقة الدالة العكسية

خاصية

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I

إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)\neq 0$ فان الدالة f^{-1} للاشتقاق في $f(x_0)$ و $(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$

مثال : نعتبر $f(x)=\tan x$ $\quad \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ نحدد $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ثم $(f^{-1})'(1)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ لدينا $f'(x)=1+\tan^2 x \quad \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\neq 0$ و منه $(f^{-1})'\left(f(\frac{\pi}{4})\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ أي $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{2}$

خاصية

إذا f دالة رتيبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I و f' لا تنعدم على I فان الدالة f^{-1} قابلة

للاشتقاق في $f(I)$ و $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \quad \forall x\in f(I)$

3- تطبيقات

أ مشتقة دالة الجدر من الرتبة n

لدينا الدالة $f:x\to x^n$ تزايدية قطعا وقابلة الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لا تنعدم على $]0;+\infty[$

و $f\left(]0;+\infty[\right)=]0;+\infty[$ و $f'(x)=nx^{n-1}$

ومنه الدالة العكسية $f^{-1}:x\to\sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و $\forall x\in]0;+\infty[\quad \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\dfrac{1}{f'\left(\sqrt[n]{x}\right)}=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$

خاصية

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. الدالة $x\to\sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$

ملاحظة

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{x}\right)^{1-n}=\frac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left((x)^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

نتيجة

$$\left(x^r\right)'=\left(\sqrt[q]{x^p}\right)'=px^{p-1}\times\frac{1}{q}\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}-1}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}=rx^{r-1}$$

حيث $\dfrac{p}{q}$ $\quad (p;q)\in\mathbb{N}^{*2}$

نتيجة

ليكن r من $\mathbb{Q}^*$. الدالة $x\to x^r$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا $\left(x^r\right)'=rx^{r-1}$

تمرين

$f(x)=x^2+\sqrt[3]{x} \qquad g(x)=x^{\frac{2}{3}}$

أدرس اشتقاق f و g و حدد الدالتين المشتقتين لهما

خاصية

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعا على I و $n\in\mathbb{N}^*$ فان الدالة $x\to\sqrt[n]{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على I.

$\forall x\in I \quad \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{n\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{n-1}} \qquad \left(\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)'=\dfrac{1}{n}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot f'(x)$

نتيجة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعا على I و $r\in\mathbb{Q}$.

$\forall x\in I \quad \left(\left(f(x)\right)^r\right)'=r\left(f(x)\right)^{r-1}\cdot f'(x)$

تمرين أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد D_f و $D_{f'}$ في كل حالة من الحالات التالية

1- $f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x}$ مع إعطاء جدول التغيرات $\quad$ 2 $f(x)=\sqrt[3]{(2x-1)^2}$ $\quad$ 2- $f(x)=\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2$

3- $f(x)=\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{5}}$ $\quad$ 4- $f(x)=\left(\left(x^2-1\right)^2\right)^{\frac{1}{5}}$

ب- مشتقة الدالة arctan

الدالة arctan هي الدالة العكسية للدالة f المعرفة من $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\tan x$

بما أن f قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $\left(f'(x)=1+\tan^2 x\right)$ فان الدالة arctan قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\arctan' x=\frac{1}{f'(\arctan x)}=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}=\frac{1}{x^2+1}$

خاصية

* الدالة arctan قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\arctan' x=\frac{1}{x^2+1}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

خاصية

* إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I فان الدالة $\arctan\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و $\left(\arctan\circ u(x)\right)'=\frac{u'(x)}{1+\left(u(x)\right)^2}$ $\quad \forall x\in I$

تمرين 1- أحسب مشتقة f بعد تحديد حيز تعريفها في الحالتين

$f(x)=\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ $\qquad$ $f(x)=\arctan\sqrt[3]{x}$

2- حدد $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan\left(x^2+3x\right)}{x}$

جدول مشتقات بعض الدوال

$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$
a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
x^n $\quad n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
x^n $\quad n\in\mathbb{Z}^{*-}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\{x\in D_{u'}/u(x)\succ 0\}$
$x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ $\quad n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$	$]0;+\infty[$
$\sqrt[n]{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$	$\{x\in D_{u'}/u(x)\succ 0\}$
x^r $\quad r\in\mathbb{Q}$	rx^{r-1}	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$	$1+\tan^2 x$	$\tan x$
$\mathbb{R}$	$-a\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$a\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$D_{u'}$	$\frac{u'(x)}{(u(x))^2+1}$	$\arctan(u(x))$

III- الدوال الأصلية

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I. نقول إن دالة F هي دالة أصلية للدالة f على I اذا كانت F قابلة للاشتقاق على I وكان $\forall x\in I \quad F'(x)=f(x)$

أمثلة الدالة $F:x\to x^2+2x$ دالة أصلية للدالة $f:x\to 2x+2$ على $\mathbb{R}$

الدالة $F:x\to \cos x+3$ دالة أصلية للدالة $f:x\to -\sin x$ على $\mathbb{R}$

خاصية

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على مجال I

مجموعة الدوال الأصلية لـلدالة f على I هي المجموعة المكونة من الدوال $F+\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

أمثلة - الدالة $F:x\to x^2+2x$ دالة أصلية للدالة $f:x\to 2x+2$ على $\mathbb{R}$

إذن الدوال الأصلية لـ f هي الدوال F_λ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F_\lambda(x)=x^2+2x+\lambda$

خاصية

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I ليكن x_0 من I وy_0 من $\mathbb{R}$

توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على مجال I بحيث $G(x_0)=y_0$.

مثال نحدد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $f(x)=x^3-2x+3$ التي تأخذ القيمة 2 عند 1

خاصية

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على مجال I على التوالي وكان $\lambda\in\mathbb{R}$ فان

* $F+G$ دالة أصلية لـ $f+g$

* λF دالة أصلية لـ λf

خاصية

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I

مثال $\begin{cases} f(x)=x-3 & x\geq 2 \\ f(x)=x^2-5 & x\prec 2\end{cases}$ بين أن f تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$ و حدد الدوال الأصلية لـ f.

جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية

مجموعة التعريف I للدالة f و الدوال F	الدوال الأصلية F	الدالة f
$I=\mathbb{R}$	λ	0
$I=\mathbb{R}$	$ax+\lambda$	a
$I=\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$n\in\mathbb{N}^* \quad x^n$
$I=\mathbb{R}_-^* \quad ou \quad I=\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\} \quad x^n$

$I=\mathbb{R}_-^*$ ou $I=\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\}$ x^n
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+\lambda$	$r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\}$ x^r
$I=\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+\lambda$	$\cos(ax+b)$ $a\neq 0$
$I=\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+\lambda$	$\sin(ax+b)$ $a\neq 0$
$I=\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$; $k\in\mathbb{Z}$	$\tan x+\lambda$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$I=\mathbb{R}$	$arc\tan x+\lambda$	$\frac{1}{x^2+1}$
I هو المجال التي تكون فيه f^r معرفة و f قابلة للاشتقاق	$\frac{1}{r+1}f^{r+1}+\lambda$	$r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\}$ $f^r\cdot f'$
I هو المجال التي نكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق	$f+g+\lambda$	$f+g$
I هو المجال التي نكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق	$fg+\lambda$	$f'g+fg'$
I هو المجال التي نكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق و لا تنعدم فيه g	$\frac{f}{g}+\lambda$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$

تمارين

1- $f(x)=x(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ حدد دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$

(لاحظ أن $f(x)=\alpha u'(x)(u(x))^n$ حيث α و n معلومين)

2- $f(x)=\frac{3}{4x^2+4x+2}$ حدد دوال أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

(باستعمال الشكل القانوني نحصل على $f(x)=\alpha\frac{u'(x)}{(u(x))^2+1}$)

3- $f(x)=\cos^3 x$ حدد دوال أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

(يتم اخطاط $f(x)$ بوضع $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$)

IV- تطبيقات الاشتقاق – دراسة الدوال

A – الأنــشطة

تمرين1

1- حدد رتابة الدالة f و مطاريفها النسبية أو المطلقة إن وجدت في الحالتين التالين.

أ- $f(x)=x(x-3)^2$ ب- $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x}$

2- حدد عدد جذور المعادلة $x^3+2x^2-7x+1=0$

تمرين 2

أدرس تقعر C_f منحنى الدالة و حدد نقط انعطافه في الحالتين التاليتن(إن كان ممكنا) .

أ- $f(x)=x^4-2x^3-13x$ ب- $f(x)=\cos x-\sin x$

ج- $f(x)=x|x|$ (لاحظ أن f غير قابلة للاشتقاق مرتين في 0 و مع ذلك تقبل نقطة انعطاف في $O(0;0)$)

تمرين 3

- حدد المقاربات إن وجدت
- أعط الاتجاهات المقاربة في الحالات التالية

أ- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{-2x^2+x+3}$ ب- $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ ج- $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$ د - $f(x)=x+\sqrt{x}$

ر- $f(x)=x+\sin 2\pi x$

تمرين4

1- نعتبر $f(x)=x^3-3x^2+x+3$ بين ان $A(1;2)$ مركز تماثل للمنحنى C_f

2- نعتبر $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

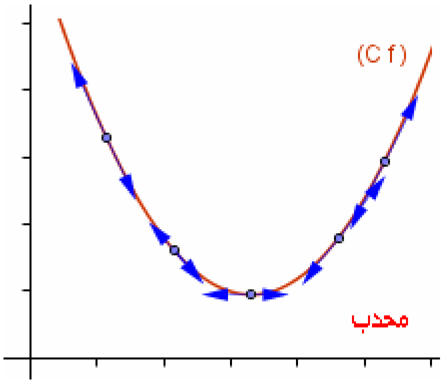
بين ان المستقيم الذي معادلته $x=\dfrac{5}{2}$ محور تماثل للمنحنى C_f

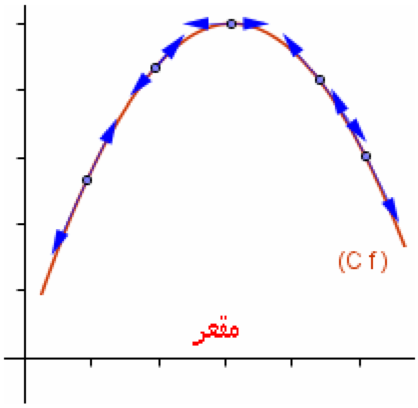
B- تذكير مع بعض الاضافات

1- تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

1-1 تعـريف

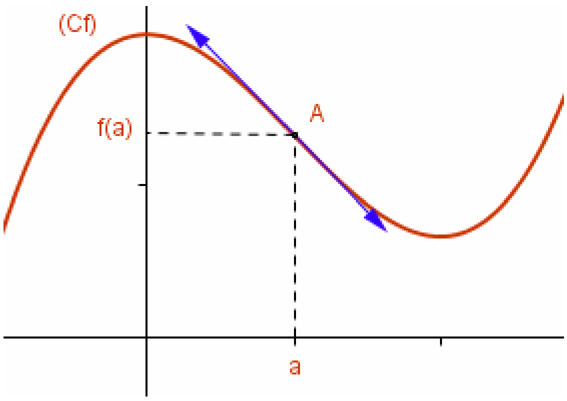
لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I
نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماساته
نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماساته





2-1 خـاصيات

f دالة قابلة الاشتقاق مرتين على مجال I
* إذا كانت f'' موجبة علىI فان (C_f) يكون محدبا علىI
* إذا كانت f'' سالبة علىI فان (C_f) يكون مقعرا علىI
* اذا كانت f'' تنعدم في x_0 من المجال I وكان يوجد $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ بحيث إشارة f'' على $[a;a+\alpha[$ مخالفة لإشارة f'' على $]a-\alpha,a]$ فان $A(a;f(a))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)



ملاحظة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

2 الفروع اللانهـــائية

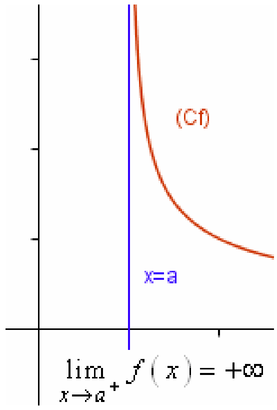
2-1 تعريف

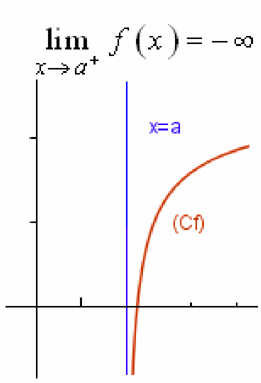
إذا آلت إحدى إحداثيتي نقطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهائيا.

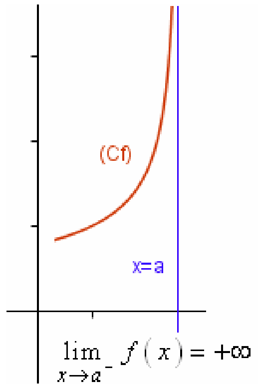
2-2 مستقيم مقارب لمنحنى

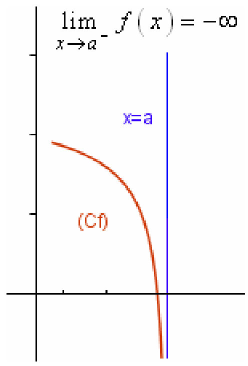
a- مقارب عمودي

إذا كان $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب ل (C_f)



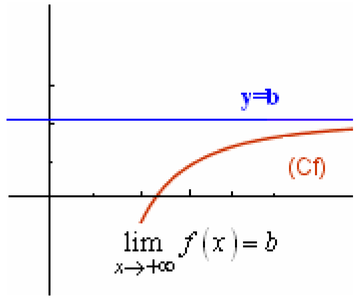


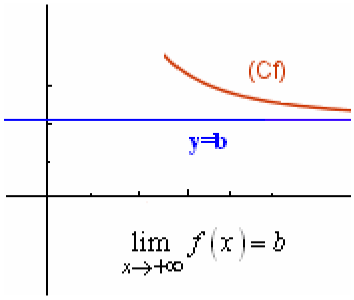


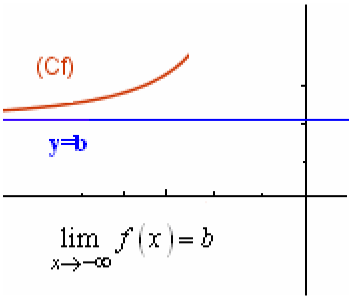


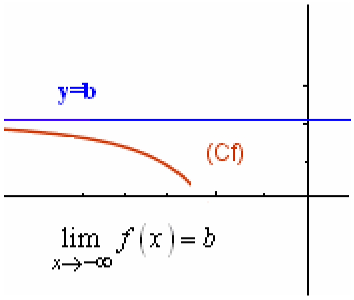
b- مقارب أفقي

إذا كان $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ فان المستقيم الذي معادلته $y = b$ مقارب ل (C_f)









c- مقارب عمودي

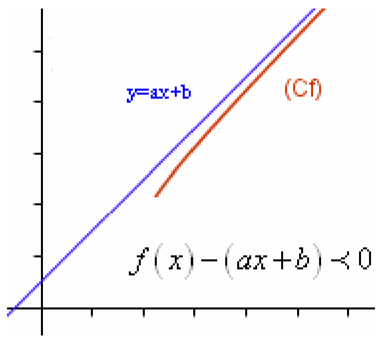
يكون المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

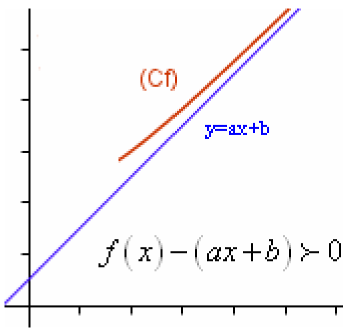
خا صية

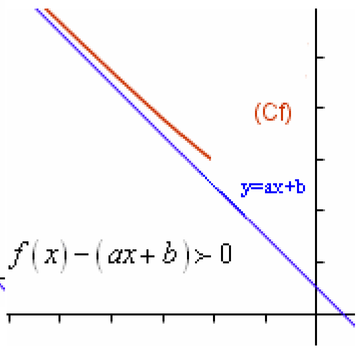
يكون المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان

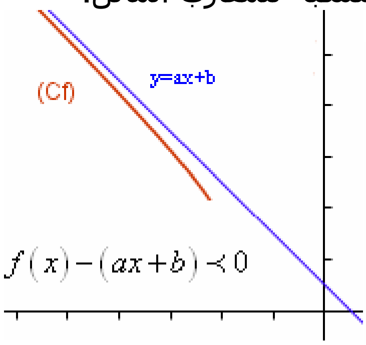
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ ; \ \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ ; \ \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b$

ملاحظة دراسة إشارة $f(x) - (ax + b)$ تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.









2- 3- الاتجاهات المقاربة

تعاريف

أ – إذا كان $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب.

ب - إذا كان $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ نقول إن (C_f) يقبل محور الافاصيل كاتجاه مقارب.

ج - إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $y=ax$ كاتجاه مقارب

3 - مركز تماثل – محور تماثل

3- 1 خاصية

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته $x=a$ محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان
$\forall x\in D_f \qquad f(2a-x)=f(x)$

2-3 خاصة

في معلم متعامد,تكون النقطة $E(a;b)$ مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان
$\forall x\in D_f \qquad f(2a-x)=2b-f(x)$

4- الدالة الدورية

1-4 تعريف

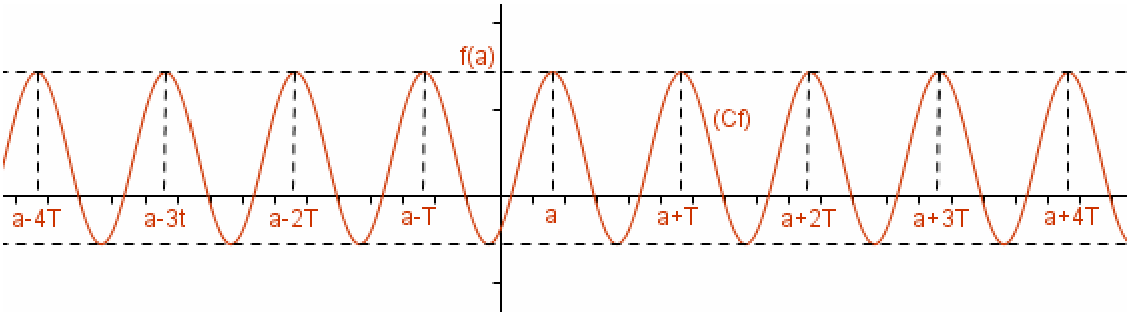
نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا ب
حيث $\forall x\in D_f \quad x+T\in D_f;\quad x-T\in D_f \quad f(x+T)=f(x)$
العدد T يسمى دور الدالة f .اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالة f

4- 2 خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فان $\forall x\in D_f,\forall n\in\mathbb{Z} \quad f(x+nT)=f(x)$

3-4 خاصية

إذا كانت f دالة دورية و T دورا لها فان منحنى الـدالة f على $D_f\cap[a+nT;a+(n+1)T[$ هـو صورة منحنى الدالة على $D_f\cap[a,a+T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT\cdot\vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسـبي.



C- دراسة الدوال

تصميم دراسة دالة

لدراسة دالة f في غالب الأحيان نتبع الخطوات التالية

- تحديد مجموعة التعريف ثم تحديد مجموعة الدراسة (خاصة إذا كانت f زوجية أو فردية أو دورية)
- دراسة الاتصال و الاشتقاق و تحديد الدالة الاشتقاق و دراسة إشارتها بالإضافة إلى التأويلات الهندسية
- وضع جدول التغيرات
- دراسة الفروع الانهائية و تحديد المقاربات
- دراسة التقعر ان كان ذلك ضروريا و تحديد نقط انعطاف إن وجدت
- إنشاء المنحنى

الإشتِقاق

) اشتقاق دالة في عدد : تعاريف و تأويلات هندسية

f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليمين	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f_d'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_d'(a)$ و معادلته : $y=f_d'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليسار	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f_g'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_g'(a)$ و معادلته : $y=f_g'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليمين ✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار ✓ $f_d'(a)=f_g'(a)=f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$

- **إذاكانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f_d'(a)\neq f_g'(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a,f(a))$ معاملاهما الموجهان $f_d'(a)$ و $f_g'(a)$ و النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة**
- **إذا كانت $f'(a)=0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a,f(a))$**

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

2) اشتقاق دالة على مجال

خاصيات

- ✓ إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق على I و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha.f$ و $f+g$ و $f \times g$ قابلة للاشتقاق على I
- ✓ بالإضافة إذا كانت $g \neq 0$ على I فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق على I
- ✓ إذاكانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I
- ✓ إذاكانت f قابلة للاشتقاق على I و $f \geq 0$ على I فإن $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على I
- ✓ إذاكانت f قابلة للاشتقاق على I فإن f^n $(n \in \mathbb{N})$ قابلة للاشتقاق على I

الدالة	الدالة المشتقة
$\alpha.f$	$\alpha.f'$
$f+g$	$f'+g'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
n	$' \quad n \; 1$
$\ln\lvert U \rvert$	$\frac{U'}{U}$
e^U	$U'e^U$

❖ مشتقات الدوال الاعتيادية

الدالة	الدالة المشتقة '	المجال I
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^{n} \quad n \in \mathbb{N}^{*}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^{n} \quad n \in \mathbb{Z}^{*} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$I =]0,+\infty[$ أو $I =]-\infty,0[$
$x \mapsto x^{r} \quad r \in \mathbb{Q}^{*} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$I =]0,+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0,+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \dfrac{-1}{x^{2}}$	$I =]0,+\infty[$ أو $I =]-\infty,0[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan^{2} x = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I =]0,+\infty[$
$x \mapsto e^{x}$	$x \mapsto e^{x}$	$\mathbb{R}$

خاصية : مشتقة الدالة العكسية :

لتكن f دالة معرفة على مجال I تقبل دالة عكسية f^{-1} و ليكن x_0 و y_0 عددان بحيث : $f^{-1}(x_0) = y_0$

إذا كانت $f'(y_0) \neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في x_0 و لدينا $\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \dfrac{1}{f'(y_0)}$

إذا كانت f' لا تنعدم على I فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $(\quad)$ و لدينا :

$$\left(\forall x \in f(I)\right) \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

خاصية

- ❖ الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا : $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x}^{\,n-1}}$ $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right)$
- ❖ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $\left(\forall x \in I\right) \quad f(x) > 0$ فإن الدالة $\sqrt[n]{f}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \dfrac{f'}{n\sqrt[n]{f}^{\,n-1}}$

رتابة دالة

- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ فإن f تزايدية على I
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ فإن f تناقصية على I
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$ فإن f تزايدية قطعا على I
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$ فإن f تناقصية قطعا على I

خاصية

- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تزايدية قطعا على I
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تناقصية قطعا على I

تقديم

$(Archimède)$ $(-278;-212)$ مقترحا في هذا الصدد.
وأسفرت أعمال جملة من الرياضيين و الفيزيائيين ،فيمابعد،خاصة نيوتن $(Newton)$ $(1642-1727$م) وليبنيتز $(Leibniz)$ ($1646-1716$م) في تحديد عام لمماسات منحنيات دوال ، وتحديد سرعة جسم متحرك . كما نتج عن تقدم الحساب التفاضلي تطور لمفهوم الإشتقاق .
ويرجع الفضل للعالم الرياضي والفلكي الفرنسي افطالي الأصل لاغرانج Louis, Joseph Lagrange de compte $(1736-1813$ م) في إدخال كلمة " المشتقة " وفي وضع الترميز $f'(x)$ الذي عرف كنهاية لمعدل التغير.

نبذة عن عالم

الحديث لمبدأ انحفاظ الطاقة.

$1646-1716$ فيلسوف ألماني، عالم طبيعة، عالم رياضيات، دبلوماسي، مكتبي، ومحامي.
يرتبط اسم لايبنتز بالتعبير " دالة رياضية " (1694)، التي كان يصف بها كل كمية مُتَعَلّقة ب منحنى، مثل ميل المنحنى أونقطة معينة على المنحنى.
يعتبر لايبنتز مع نيوتن أحد مؤسسي علم التفاضل و التكامل و بخاصة تطوير مفهوم التكامل و قاعدة الجداء ، كما طور المفهوم

حاول العلماء منذ العصور القديمة تحديد مماسات بعض المنحنيات لا يفقد قليلاً

بطاقة تقنية رقم : 02

ثانوية : الفتح التأهيلية السنة الدراسية : 2015 – 2016 الأستاذ : عادل بناجي	المستوى : الثانية باكلوريا علوم تجريبية درس : الاشتقاق التذبير الزمني : 5 ساعات

فقرات الدرس	• تذكير وإضافات • العمليات على الدوال المشتقة • الاشتقاق والاتصال • مشتقة مركب دالتين • مشتقة الدالة العكسية
المكتسبات القبلية	• النهايات و الاتصال • مفاهيم أساسية حول مفهوم الاشتقاق • تطبيقات الاشتقاق (رتابة دالة عددية - مطارف دالة عددية - المعادلة التفاضلية $y'+\omega^2 y=0$) • دراسة الدوال العددية
الكفاءات المستهدفة	• حساب مشتقات الدوال الاعتيادية ؛ • تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة مشتقتها ؛ • تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني ؛ • تحديد العدد المشتق في نقطة للدالة العكسية لدالة ؛ • تحديد رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال
التوجيهات التربوية	• يتم التذكير بمفهوم الاشتقاق و تطبيقاته من خلال أنشطة متنوعة تبرز الهمية التي يكتسيها في الدراسة الموضعية و الشاملة للدوال المقررة و خاصة في التقريب المحلي لدالة وفي دراسة منحى تغيرات دالة على مجال و تحديد المطاريف ودراسة إشارة دالة أو متفاوتة جبرية على مجال ... • تتم صيانة مكتسبات التلاميذ حول الاشتقاق و النهايات من خلال دراسة أمثلة لدوال حدودية و دوال جذرية و دوال لاجذرية و دوال مثلثية
الوسائل الديداكتيكية	سلسلة أنشطة - سلسلة تمارين - الكتاب المدرسي - ملخص المكتسبات السابقة ؛

1 أنشطة الدرس

نشاط 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي : $f(x)=x^2-4$

1. أحسب النهايتين $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ و $\lim_{h\to 0}\frac{f(h-1)-f(-1)}{h}$ ثم استنتج أن f قابلة للاشتقاق في 2 و -1
2. حدد $f'(2)$ و $f'(-1)$
3. اعط معادلة مماس منحنى الدالة f في النقطة 2

نشاط 2

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x)=2x+1 & ;x\geqslant 1 \\ f(x)=3x^2 & ;x<1 \end{cases}$

1. أدرس قابلية اشتقاق f على اليسار وعلى اليمين في 1 ؛ ثم اول النتيجتين المحصل عليهما مبيانيا
2. هل الدالة f قابلة للاشتقاق في 1 ؟
3. حدد تعبير معادلتي المماسين (T_d) و (T_g) حيث $(T_d):y=f'_d(1)(x-1)+f(1)$ و $(T_d):y=f'_g(1)(x-1)+f(1)$
4. أنشئ $(\mathscr{C}_f)$ و (T_d) و (T_g) و النقطة $M(1,f(1))$ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

نشاط 3

في كل حالة من الحالات التالية ادرس قابلية الدالة f على المجال I ، ثم حدد دالتها المشتقة f'

1. $f(x)=x+\sqrt{x}$ ؛ $I=]0,+\infty[$
2. $f(x)=(x+2)(x-1)$ ؛ $I=\mathbb{R}$
3. $f(x)=\frac{1}{x^3-8}$ ؛ $I=]2,+\infty[$
4. $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

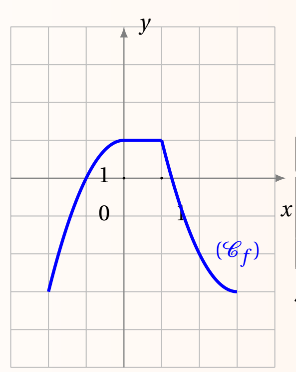
نشاط 4

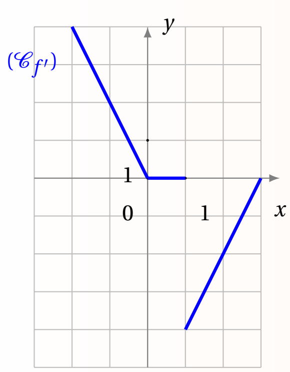
يمثل الشكلان $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_{f'})$ جانبه على التوالي منحنيي دالة f و دالتها المشتقة f'

1. أتمم ملء الجدول التالي :

المجال	إشارة الدالة المشتقة f'	تغيرات الدالة f
$I=]-2,0[$		
$J=]0,1[$		
$K=]1,3($		

2. ذكر بالخاصية التي تربط اشارة الدالة f' بتغيرات الدالة f

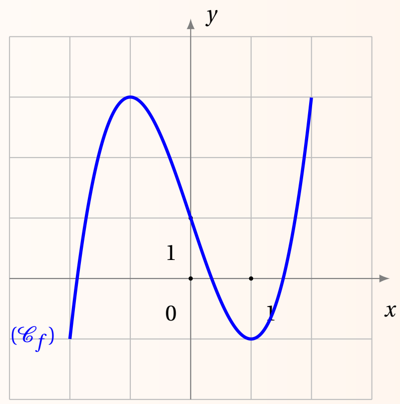




ذ. عادل بناجي

نشاط 5

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها المبياني أسفله .



1 ماذا تمثل النقطتان $A(1,f(1))$ و $B(-1,f(-1))$ بالنسبة للدالة f ؟

2 حدد $f(1)$ و $f(-1)$ و $f'(1)$ و $f'(-1)$

3 حدد معادلتي مماسي منحنى الدالة f وانشأهما في نفش الشكل . ماذا تلاحظ ؟

نشاط 6

نعتبر الدوال f و g وh المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بمايلي : $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ و $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$ و$h(x)=\sqrt{x}$

1 تحقق أن : $f=g\circ h$

2 أحسب مشتقات الدوال f و g وh

3 قارن $f'(x)$ و $g'[h(x)].h'(x)$ بالنسبة ل $x\in]0,+\infty[$

نشاط 7

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $f(x)=x^2-1$

1 بين أن f تقابل من $[0,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

2 تحقق أن : $(\forall x\in J)\ : f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$

3 بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ وأحسب $\left(f^{-1}\right)'(x)$

4 تحقق أن : $(\forall x\in]-1,+\infty[)$ $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$:

2 تذكير و إضافات

1.2 اشتقاق دالة في نقطة

تعاريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$

- نقول إن f قابلة للإشتقاق في a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ أو $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$.
العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a ونرمز له ب $f'(a)$ ونكتب : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ أو $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$ $f'(a)$
- إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق في a فإن الدالة : $x \mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة a (أو التقريب التآلفي للدالة f بجوار a)
- معادلة المماس للدالة f في النقطة a هي: $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

تمرين تطبيقي

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في x_0 في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x) = 3x^2 + x$ ؛ $x_0 = 1$
2. $f(x) = x^3 + 2x$ ؛ $x_0 = -1$
3. $f(x) = x + |x+1|$ ؛ $x_0 = 1$

تمرين تطبيقي

باستعمال مفهوم العدد المشتق أحسب النهايتين التاليتين :

1. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{cos(x) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{(1+x-x^2)^{2015} - 1}{x-1}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$
4. $\lim_{x\to a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^3 - a^3}$ $(a > 0)$

تمرين تطبيقي

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب : $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$

1. بين أن f قابلة للاشتقاق في النقطة 0
2. حدد التقريب التالفي للدالة f بجوار 0
3. اعط قيمة مقربة للعددين $\sqrt[3]{0.997}$ و $\sqrt[3]{1.0035}$

2.2 الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

تعريف

...

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a,a+\alpha[$ $(\alpha>0)$. نقول إن f قابلة للإشتقاق على اليمين في a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$.

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في a ونرمز له ب $f'_d(a)$ ونكتب : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)$ أو $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)$

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]a-\alpha,a]$ $(\alpha>0)$. نقول إن f قابلة للإشتقاق على اليسار في a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$.

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في a ونرمز له ب $f'_g(a)$ ونكتب : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)$ أو $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)$

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a\in I$.
نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وفقط اذا كانت قابلة للإشتقاق على اليمين و على اليسار في a و $f'_g(a)=f'_d(a)$

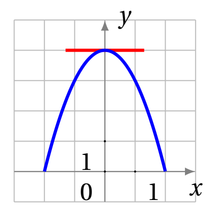
تمرين تطبيقي

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f (على اليمين أو السار) في x_0 في كل حالة من الحالات التالية :

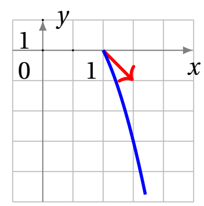
1. $f(x)=x\sqrt{x}$ ؛ على اليمين في $x_0=0$
2. $f(x)=x+\sqrt{x-2}$ ؛ على اليمين في $x_0=2$
3. $f(x)=|x^2-x|$ ؛ على اليسار في $x_0=1$

3.2 قابلية الاشتقاق و التأويل الهندسي

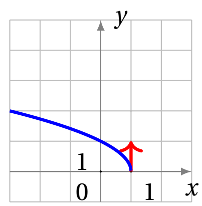
النهاية	استنتاج	التأويل الهندسي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$: يقبل ...
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a\neq 0$	f قابلة للاشتقاق في x_0	1 مماسا في النقطة $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$		2 مماسا أفقيا في النقطة $A\big(x_0,f(x_0)\big)$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a\neq 0$	f قابلة للاشتقاق على يمين x_0	3 نصف مماس على اليمين في النقطة $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$		4 نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $A\big(x_0,f(x_0)\big)$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	5 نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ موجه نحو الأسفل
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$		6 نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ موجه نحو الأعلى
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a\neq 0$	f قابلة للاشتقاق على يسار x_0	7 نصف مماس على اليسار في النقطة $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$		8 نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $A\big(x_0,f(x_0)\big)$
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	9 نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ موجه نحو الأعلى
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$		10 نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ موجه نحو الأسفل



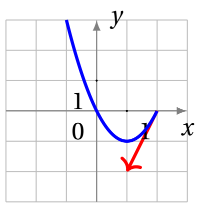
الشكل 1



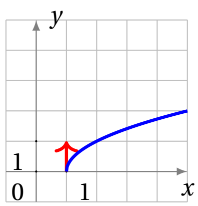
الشكل 3



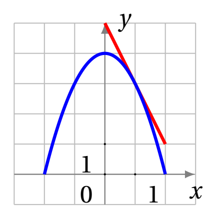
الشكل 5



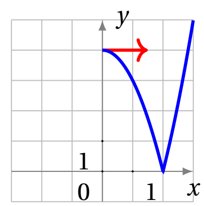
الشكل 7



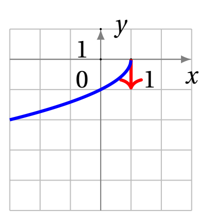
الشكل 9



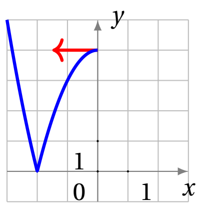
الشكل 2



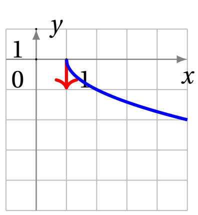
الشكل 4



الشكل 6



الشكل 8



الشكل 10

4.2 الاشتقاق على مجال - الدالة المشتقة

تعاريف

...

- نقول إن f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I
- نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المغلق $[a,b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال المفتوح $]a,b[$ وقابلة للاشتقاق على اليمين في a وقابلة للاشتقاق على اليسار في b .
- الدالة المعرفة ب $x \mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f ويرمز لها بالرمز f'
- إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بالرمز $f"$.

5.2 الدالة المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية - العمليات على الدوال المشتقة

الجدول التالي يلخص مشتقات بعض الدوال الإعتيادية :

الدالة f	مجموعة تعريف D_f f	الدالة المشتقة f'	مجموعة تعريف $D_{f'}$ f'
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n;(n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n;(n\in\mathbb{Z}^*-\{1\})$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$D_f=[0,+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'}=]0,+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=sin(x)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=cos(x)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=cos(x)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-sin(x)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=tan(x)$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;(k\in\mathbb{Z})$	$f'(x)=1+tan^2(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;(k\in\mathbb{Z})$
$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$x\in D_g/g(x)\geqslant 0$	$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$x\in D_{g'}/g(x)>0$
$f(x)=sin(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=acos(ax+b)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=cos(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-asin(ax+b)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=tan(ax+b)$	$ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;(k\in\mathbb{Z})$	$f'(x)=a\left(1+tan^2(ax+b)\right)$	$D_{f'}=ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;(k\in\mathbb{Z})$
$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$	$D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\};c\neq 0$	$f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\};c\neq 0$

خاصية

العمليات على الدوال المشتقة

...

- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للا شتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن : الدوال $f+g$ و fg و λf دوال قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $(f+g)' = f' + g'$ و $(fg)' = f'g + fg'$ و $(\lambda f)' = \lambda f'$
- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للا شتقاق على مجال I و g لاتنعدم على I فإن : الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ قابلتان للاشتقاق على I ولدينا : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ و $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

خواص

...

1. كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
2. كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
3. الدالتين $x \mapsto cos(x)$ و $x \mapsto sin(x)$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$
4. الدالة $x \mapsto tan(x)$ قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
5. الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

تمرين تطبيقي

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f ثم حدد دالتها المشتقة في الحالات التالية :

1. $f(x) = (-7x + x^2 + 3)^5$
2. $f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{x} + 3x$
3. $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$
4. $f(x) = x^2 + cos(x)$

6.2 رتابة دالة واشارة مشتقتها

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f' موجبة (قطعا) على I فإن الدالة f تزايدية (قطعا) على I
- إذا كانت f' سالبة (قطعا) على I فإن الدالة f سالبة (قطعا) على I
- إذا كانت f' منعدمة على I فإن الدالة f ثابتة على I

7.2 مطارف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I

- إذا كانت f' قابلة للاشتقاق في x_0 وتقبل مطراف في النقطة x_0 فإن $f'(x_0)=0$
- إذا كانت f' تنعدم في x_0 و تغير اشارتها فإن $f(x_0)$ مطراف للدالة f

تطبيقي تمرين

أدرس رتابة الدالة f ومطارفها إذا وجدت في الحالات التالية :

1. $f(x)=x^2+2x-1$
2. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$
3. $f(x)=(2x-3)\sqrt{x}$
4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$
5. $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-1}$
6. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$

8.2 الاتصال و الاشتقاق

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a\in I$ ؛ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في a فإن f متصلة في a .

ملاحظة

عكس هذه الخاصية غير صحصيح
مثال مضاد : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=|x|$
لدينا f متصلة في 0 لكن f غير قابلة للاشتقاق في 0 لأن $f'_d(0)\neq f'_g(0)$

نتيجة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f متصلة على I

3 مشتقة مركب دالتين

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I)\subset J$

- إذا كان a عنصرا من المجال I بحيث f قابلة للاشتقاق في a و g قابلة للاشتقاق في $f(a)$ فإن الدالة $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في a و لدينا : $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن الدالة $g\circ f$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $(\forall x\in I)\ \ (g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$:

نتيجة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- $(\sqrt{f(x)})'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\ \ \big(f\geqslant 0$ على $I\big)$
- $(f^n(x))'=nf'(x)f^{n-1}(x)\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$

مثال

لنحسب f' و g' مشتقتي الدالتين : $f(x)=sin(x^2-4x+1$ و $g(x)=tan(\sqrt{x})$

لدينا :

$$\begin{aligned}f'(x)&=(sin(x^2-4x+1))'\\&=(x^2-4x+1)'\times sin'(x^2-4x+1)\\&=(2x-4)\times cos(x^2-4x+1)\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=(2x-4)\times cos(x^2-4x+1)}$$

$$\begin{aligned}g'(x)&=(tan(\sqrt{x}))'\\&=(\sqrt{x})'\times tan'(\sqrt{x})\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(1+tan^2(\sqrt{x}))\end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(1+tan^2(\sqrt{x}))}$$

4 مشتقة الدالة العكسية

خاصية

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I .

- إذا كان a عنصرا من المجال I بحيث f قابلة للاشتقاق في a و $f'(a) \neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(a)$ ولدينا : $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث دالتها المشتقة لا تنعدم في $f'(I)$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$ ولدينا : $(\forall x \in f(I))\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[1,+\infty[$ ب : $f(x) = x^2 - 2x + 3$

1 بين أن f تقبل دالة عكسية عاى مجال J يجب تحديده نحو $[1,+\infty[$

2 حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

3 أحسب $f(2)$ و استنتج $(f^{-1})'(3)$

نتائج

لتكن f دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق عل مجال I و $n \in \mathbb{N}^*$ و $r \in \mathbb{Q}^*$ حسب الخاصية السابقة نستنتج مايلي :

الدالة	مجال قابلية الاشتقاق	الدالة المشتقة
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$	$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
$f(x) = x^r$	f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$	$f'(x) = (x^r)' = r x^{r-1}$
$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$	g قابلة للاشتقاق على I	$g'(x) = \frac{1}{n} \times f'(x) \times \left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}$
$g(x) = \left(f(x)\right)^r$	g قابلة للاشتقاق على I	$g'(x) = \left(\left(f(x)\right)^r\right)' = r \times f'(x) \times \left(f(x)\right)^{r-1}$

أَهَمُّ مَا نَحْتَاجُهُ فِي دِرَاسَةِ الدَّوَالِ

النهايات و الفروع اللانهائية

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow$ C_f يقبل مقارب عمودي معادلته $x=a$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b \Leftrightarrow$ C_f يقبل مقارب أفقي معادلته $y=b$ بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$

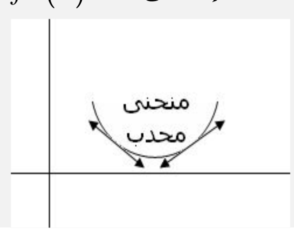
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0 \Leftrightarrow$ C_f يقبل مقارب مائل معلدلته $y=ax+b$ بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

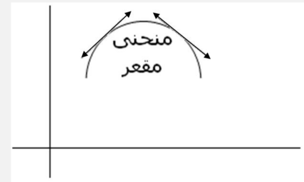
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=b$ ← C_f يقبل مقارب مائل معادلته $y=ax+b$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ ← C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ ← C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ← C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل

ب. تقعر منحنى و نقط الانعطاف

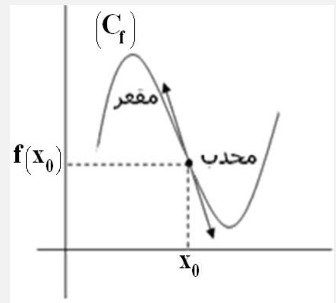
- إذا كان $f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in I$ فإن $\left(C_f\right)$ محدب



- إذا كان $\forall x\in I \quad f''(x)\leq 0$ فإن (C_f) مقعر



- إذا كانت f'' تنعدم و تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف
- إذا كانت f' تنعدم و لا تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف



ج. مركز و محور تماثل (C_f)

- المستقيم ذي المعادلة $x=a$ محور تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in D_f : & 2a-x\in D_f\\ \forall x\in D_f : & f(2a-x)=f(x)\end{cases}$

- النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in D_f : & 2a-x\in D_f\\ \forall x\in D_f : & f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$

د. اتصال دالة عددية

- f متصلة في a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
- f متصلة في a على اليمين $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a)$
- f متصلة في a على اليسار $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=f(a)$
- f متصلة في a $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=f(a)$

ه. مبرهنة القيم الوسيطية

- مبرهنة القيم الوسيطية (وجودية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a,b[$

- مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال

$]a,b[$

- مبرهنة (وجودية ووحدانية الحل على مجال I)

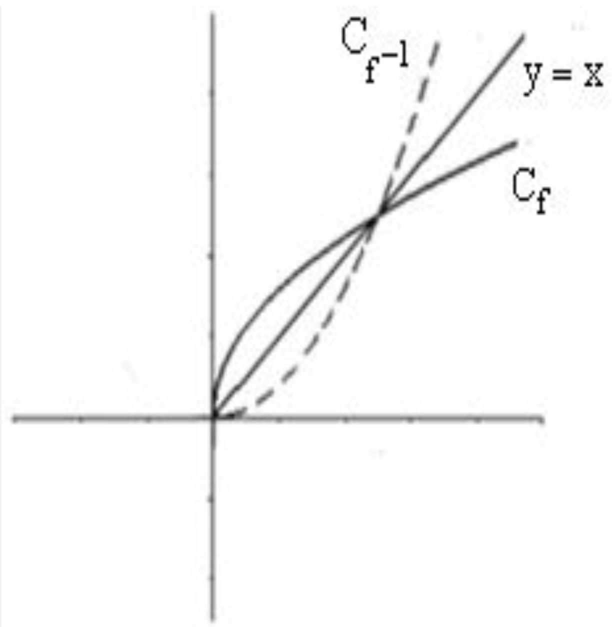
إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على I و $0\in f(I)$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

و. اتصال مركب دالتين

خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g متصلة على مجال بحيث $f(I)\subset J$ فإن $g\circ f$ متصلة على I.

ز. الدالة العكسية



خاصية : إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن المعادلة $f(x)=y$ حيث $y\in f(I)$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

الدالة التي تربط كل عدد y بالحل تسمى الدالة العكسية للدالة f و نرمز لها ب : f^{-1}

نتائج:

$$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J\end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f^{-1}\circ f(x)=x & ;x\in I \\ f\circ f^{-1}(x)=x & ;x\in J\end{cases} \quad (2)$$

خاصيات: لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على المجال J لدينا :

- f^{-1} متصلة على المجال J
- f و f^{-1} لهما نفس الرتابة
- منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$ (المنصف الأول للمعلم)

ح. الإشتقاق

f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليمين		$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f_d'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_d'(a)$ و معادلته : $y=f_d'(a).(x-a)+f(a)$

J

f قابلة للاشتقاق في a على اليسار	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f_g'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_g'(a)$ و معادلته : $y=f_g'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a		✓ قابلة للاشتقاق في a على اليمين ✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار ✓ $f_d'(a)=f_g'(a)=f'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$

- إذاكانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f_d'(a)\neq f_g'(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a,f(a))$ معاملاهما الموجهان $f_d'(a)$ و $f_g'(a)$ و النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة
- إذا كانت $f'(a)=0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

المجال I	**الدالة المشتقة** f'	**الدالة** f
$\mathbb{R}$	$x\mapsto 0$	$x\mapsto k$
$\mathbb{R}$	$x\mapsto nx^{n-1}$	$x\mapsto x^n \quad n\in\mathbb{N}^*$

f

$I=]-\infty,0[$ أو $I=]0,+\infty[$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n\in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$
$I=]0,+\infty[$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$x \mapsto x^r \quad r\in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$
$I=]0,+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$I=]-\infty,0[$ أو $I=]0,+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi / k\in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$

الدالة المشتقة	الدالة
$\alpha . f'$	$\alpha . f$
$f'+g'$	$f+g$
$f'\times g+f\times g'$	$f\times g$
$-\dfrac{g'}{g^2}$	$\dfrac{1}{g}$
$\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$	$\dfrac{f}{g}$
$f'\times g'\circ f$	$g\circ f$
$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f}$
$' \quad n \quad 1$	n

- ليكن $n\in \mathbb{N}^*$

$$(\forall x>0) \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

- إذا كانت f دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$(\forall x\in I) \quad \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{\left(f(x)\right)^{n-1}}}$$

- لتكن f دالة معرفة على مجال I تقبل دالة عكسية f^{-1} و ليكن x_0 و y_0 عددان بحيث : $f^{-1}(x_0)=y_0$

إذا كانت $f'(y_0)\neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في x_0 و لدينا $\left(f^{-1}\right)'(x_0)=\dfrac{1}{f'(y_0)}$

- إذا كانت f' لا تنعدم على I فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$ و لدينا :

$$(\forall x\in f(I)) \quad \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}$$

رتابة دالة

- إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ فإن f تزايدية على I
- إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ فإن f تناقصية على I
- إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$ فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$ فإن f تناقصية قطعا على I

خاصية

- إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تناقصية قطعا على I

ط. دالة اللوغاريتم النبيري

1. تعريف :

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز : $\ln$

2. استنتاجات و خاصيات :

- $D_{\ln} =]0,+\infty[\quad \left(\ln\left(\boxed{>0}\right)\right)$
- $\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$ إذن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x \leq \ln y \Leftrightarrow x \leq y$
- $\ln(1) = 0$
- يوجد عدد حقيقي وحيد من $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ نرمز له ب : e بحيث $e \simeq 2,718$ و يحقق : $\ln(e) = 1$
- $\forall x > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$
- إشارة $\ln x$:
  - إذا كان : $0 < x < 1$ فإن $\ln x < 0$
  - إذا كان : $x \geq 1$ فإن $\ln x \geq 0$

3. العمليات على الدالة $\ln$

ليكن x و y من $]0,+\infty[$ و $r \in \mathbb{Q}$ لدينا :

- $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^-$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

خاصية :

إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $\forall x \in I \quad U(x) \neq 0$

فإن الدالة $x \mapsto \ln|U(x)|$ قابلة للاشتقاق على I و

لدينا : $\left(\ln|U(x)|\right)' = \frac{U'(x)}{U(x)} \quad \forall x \in I$

ملاحظة : إذا كانت U موجبة قطعا :

$$\left(\ln(U(x))\right)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

نتيجة : مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$

- $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$
- $\ln(x^r)=r\ln(x)$

هي الدوال : $x \mapsto \ln|U(x)|+\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

ي. الدالة الأسية

أ. ______

الدالة العكسية للدالة $\ln$ تسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها ب : $\exp$

ملاحظة: $\forall x\in\mathbb{R} \quad \exp(x)=e^x$

نتائج :

$$\begin{cases} e^x=y \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln(y) \\ (y>0)\end{cases}$$

$$\exp:\mathbb{R}\mapsto\ 0,+\infty$$
$$x\mapsto\exp(x)$$

$\forall x\in\mathbb{R}:\ e^x>0$ و $D\ =\mathbb{R}$

x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$e\ \ =e\ \Leftrightarrow x=y$

$e\ \ <e\ \Leftrightarrow x<y$

$e\ \ \geq e\ \Leftrightarrow x\geq y$

$\forall x\in\mathbb{R}:\ln\ e^x\ =x$

$\forall x>0: e\ \ ^x=x$

❖ $e^1=e$ و $e^0=1$

ج. العمليات :

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

1) $e^x\times e^y=e^{x+y}$

2) $\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$

3) $\frac{1}{e^x}=e^{-x}$

4) $\left(e^x\right)^r=e^{rx} \qquad (r\in\mathbb{Q})$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0^-$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x=\begin{cases}0^+ & n\ \text{زوجي}\\ 0^- & n\ \text{فردي}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

1) الدالة $\exp$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$(\forall x\in\mathbb{R})\quad (e^x)'=e^x$

2) إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x\mapsto e^{U(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$(\forall x\in I)\quad \left(e^{U(x)}\right)'=U'(x)e^{U(x)}$

3) $(\forall x\in I)\quad \left(e^{rx}\right)'=re^{rx}$

4)

الدالة	الأصلية
e^x	e^x
e^{rx}	$\frac{1}{r}e^{rx}$
$U'(x)e^{U(x)}$	$e^{U(x)}$

الدوال الأصلية

f دالة معرفة على المجال I بما يلي : $f(x)=.......$	الدوال الأصلية ل f على I معرفة بما يلي: $F(x)=......$	المجال I
k (k عدد حقيقي ثابت)	$kx+c$	
x^n $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
x^n $\left(n\neq -1; n\in\mathbb{Z}^*\right)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$
x^r $\left(r\in \quad -\{-1\}\right)$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$]0,+\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,(k\in\mathbb{Z})$
$(a\neq 0),\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$(a\neq 0),\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}+c$	$]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$]0,+\infty[$
e^x	$e \quad +c$	

الدالة f	الدوال الأصلية ل f على I	شروط على u
$u'u^n$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$u'u^n$ $\left(n\neq -1; n\in\mathbb{Z}^*\right)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	لكل x من I , $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	لكل x من I , $u(x)>0$
$u'u^r$ $\left(r\in \quad -\{-1\}\right)$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+c$	لكل x من I , $u(x)>0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)+c$	لكل x من I , $u(x)\neq 0$
$u'e^u$	e^u+c	لكل x من I

حساب التكامل

1. تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و F دالة أصلية لها على $[a,b]$.

تكامل f من a إلى b هو العدد الحقيقي : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2. ________

- نكتب $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$
- يمكن تغيير x بأي متغير آخر مثلا : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$

3. ________

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. ________

خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$.لدينا :

- $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

1. خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$.لدينا :

- إذا كانت $f \geq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- إذا كانت $f \leq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- إذا كانت $f \leq g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

2. ________

تعريف و خاصية :

- لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$. العدد $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل f على $[a,b]$

يوجد على الأقل عدد c من $[a,b]$ بحيث : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

خاصية :

لتكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' متصلتان على I و a و b عنصرين من I لدينا :

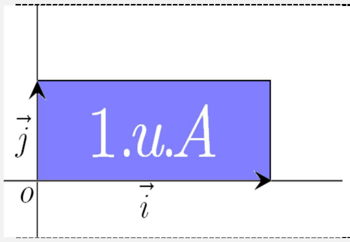
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

I. حساب المساحات :

ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد (O,i,j)

وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة O و المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$1u.A=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$



<u>خاصية 1:</u> لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$

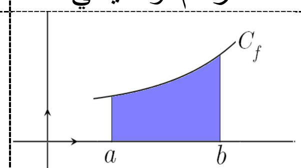
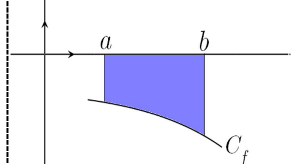
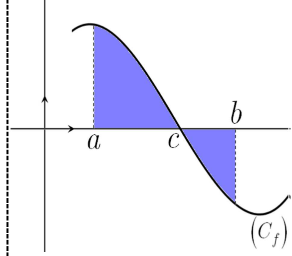
مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

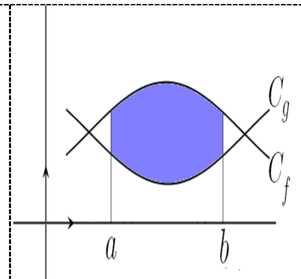
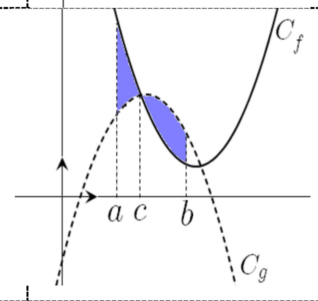
$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u.A$$

<u>خاصية 2:</u> لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$

مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)u.A$$

رسم توضيحي	ملاحظات	مساحة الحيز الملون في الرسم هي:
	f موجبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$
	f سالبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$
	• f موجبة على المجال $[a,c]$ و • f سالبة على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right)u.A$

	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right)u.A$
	• (C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,c]$ و • (C_f) يوجد تحت (C_g) على المجال $[c,b]$	(( )− ( )) + (( )− ( ))). .

I. <u>حساب الحجوم :</u>

<u>خاصية 1:</u>

ليكن (Σ) مجسما محصورا بين المستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتاهما على التوالي : $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$

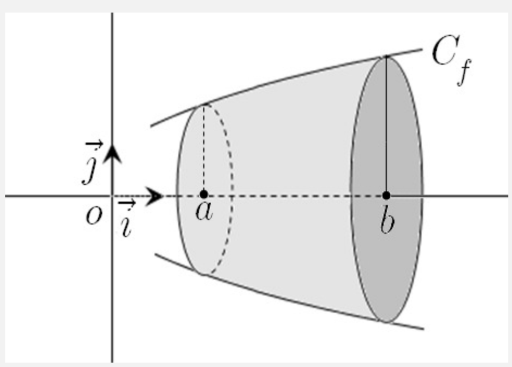
و لتكن $S(t)$ مساحة تقاطع المجسم (Σ) مع المستوى الذي معادلته $z=t$ حيث $a \le t \le b$

إذا كانت الدالة : $t \mapsto S(t)$ متصلة على المجال $[a,b]$ فإن V حجم المجسم (Σ) هو $V=\int_a^b S(t)dt$ بوحدة قياس الحجم

<u>خاصية 2:</u>

حجم المجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a,b]$ هو :

$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right]u.v$ حيث : $u.v$: وحدة الحجوم



つづく

f x g x dx g x f x dx u A

دراسة الدوال

A– الانــشطة

تمرين1

1- حدد رتابة الدالة f و مطاريفها النسبية أو المطلقة إن وجدت في الحالات التالية .

أ- $f(x)=x(x-3)^2$ ب- $f(x)=x-\arctan x$ ج- $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x}$

2- حدد عدد جذور المعادلة $x^3+2x^2-7x+1=0$

تمرين 2

أدرس تقعر C_f منحنى الدالة و حدد نقط انعطافه في الحالتين التاليتن(إن كان ممكنا) .

أ- $f(x)=x^4-2x^3-13x$

ب- $f(x)=x|x|$ (لاحظ أن f غير قابلة للاشتقاق مرتين في 0 و مع ذلك تقبل نقطة انعطاف في O(0 ; 0))

ج- $f(x)=\cos x-\sin x$

تمرين 3

حدد المقاربات إن وجدت - أعط الاتجاهات المقاربة في الحالات التالية

أ- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{-2x^2+x+3}$ ب- $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ ج- $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$

د - $f(x)=x+\sqrt{x}$ ر- $f(x)=x+\sin 2\pi x$

تمرين4

1- نعتبر $f(x)=x^3-3x^2+x+3$ بين ان A (1 ;2) مركز تماثل للمنحنى C_f

2- نعتبر $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

بين ان المستقيم الذي معادلته x = $\dfrac{5}{2}$ محور تماثل للمنحنى C_f

B- تذكير مع بعض الاضافات

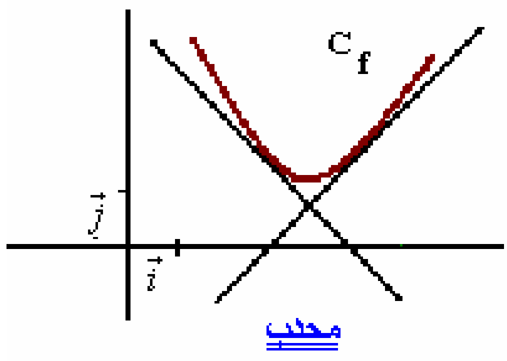
1- تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

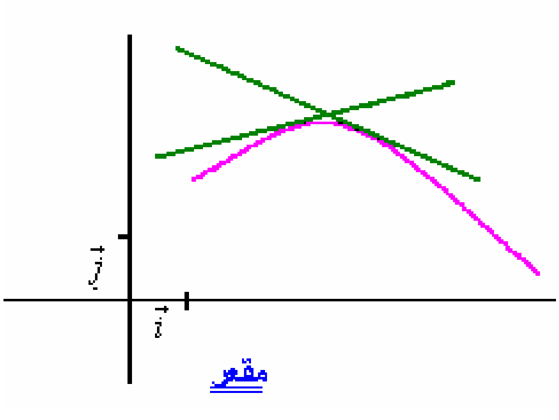
1-1تعــريف

لتكن f قابلة للاشتـــــقاق على مجال I

نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماسـاته

نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماسـاته

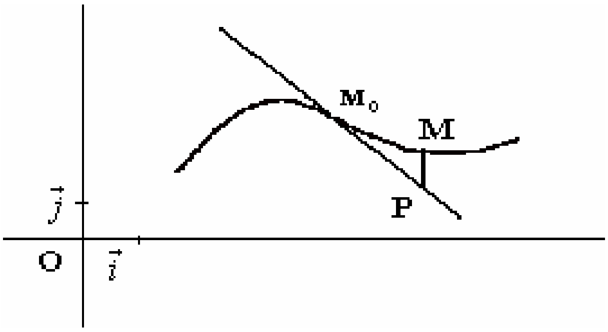




2-1 تعــريف

لتكن f قابلة للاشتــقاق على مجال I و (T) مماسـا للمنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;f(x_0))$.

لتكن M و P نقطتين لهـــما نفس الافصول وينتميان على التوالي إلى (C_f) و (T) إذا انعدم $\overline{PM}$ في x_0 و تغيرت إشارته في مجال مفتوح مركزه x_0 فان النقـــــطة M_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)



3-1 خـــاصيات

f دالة قابلة الاشتـــــــقاق مرتين على مجال I

* إذا كانت" f موجبة علىI فان (C_f) يكون محدبا على I

* إذا كانت" f سالبة علىI فان (C_f) يكون مقعرا على I

* اذا كانت " f تـنعدم في x_0 من الـمجال I وكان يـوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث إشارة " f على $[x_0, x_0+\alpha[$ مخالـفة لإشارة " f على$]x_0-\alpha, x_0]$ فان $M_0(x_0; f(x_0))$ نقـطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ملاحظـــــــة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشـتقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

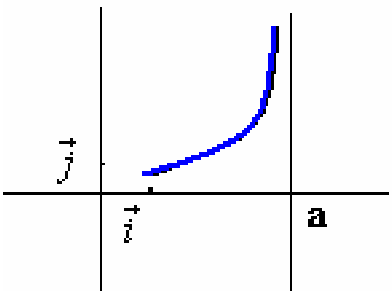
- الفروع اللانهــــائية

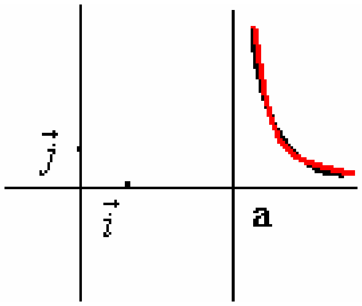
1-2 تعريف

إذا آلت إحدى إحداثـــيتي نقـطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهائيا.

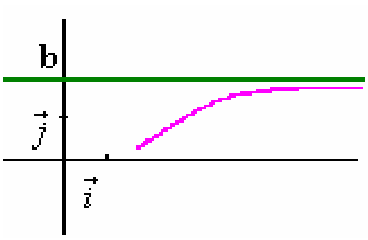
2-2 مستقيم مقارب لمنحنى

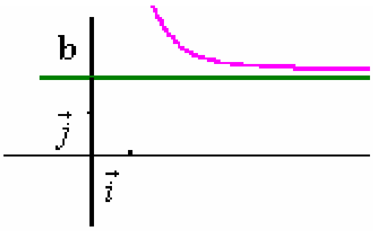
* اذا كان $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب ل C_f





* إذا كان $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ فان المستقيم ذا المعادلة y =b مقارب ل C_f.





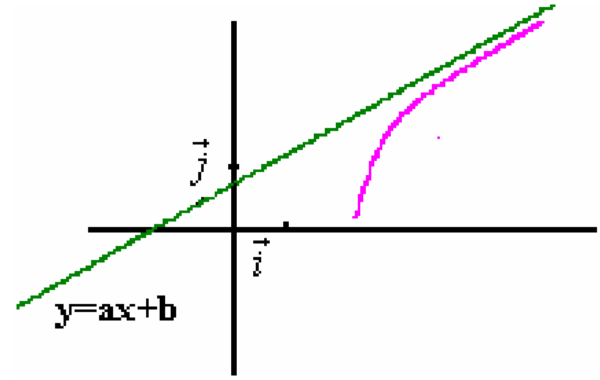
** يكون المستقيم الذي معادلته y =ax + b مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

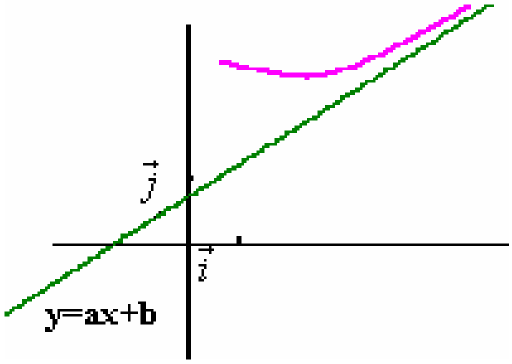
$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

خا صة

يكون المستقيم ذو المعادلة y = ax + b مقارب لمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

$$\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b \right) \quad \text{أو} \quad \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b \right)$$





ملاحظة دراسة إشارة (f (x) – (ax + b)) تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.

2- 3- الاتجاهات المقاربة

تعاريف

أ – إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب.

ب - إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ نقول إن (C_f) يقبل محور الافاصيل كاتجاه مقارب.

ج - إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب

بصفة عامة

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب.

3 - مركز تماثل – محور تماثل

3- 1 خاصية

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته x = a محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان
$f(2a-x)=f(x) \qquad \forall x\in D_f$

3-2 خاصية

في معلم ما,تكون النقطة E (a ;b) مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان $f(2a-x)=2b-f(x) \qquad \forall x\in D_f$

4- الدالة الدورية

4-1 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث
$f(x+T)=f(x) \qquad x-T\in D_f \; ; \quad x+T\in D_f \qquad \forall x\in D_f$
العدد T يسمى دور الدالة f .اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالة f

4- 2 خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فان $f(x+nT)=f(x) \qquad \forall x\in D_f ,\forall n\in\mathbb{Z}$

4-3 خاصية

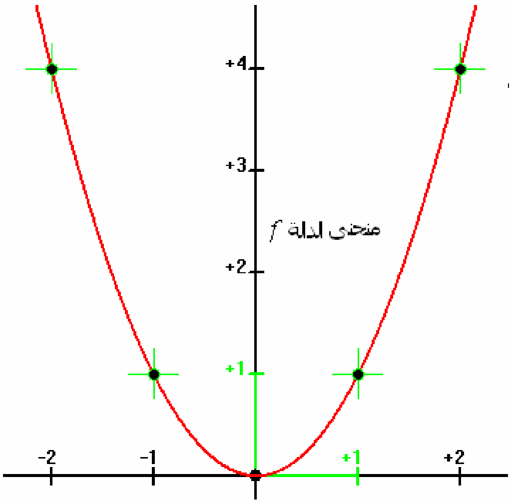
إذا كانت f دالة دورية و T دورا لها فان منحنى الـدالة f على $D_f\cap[x_0+nT;x_0+(n+1)T[$ هـو صورة منحنى الدالة على $D_f\cap[x_0,x_0+T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT\cdot\vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسـبي.

الدوال العكسية

I- صورة مجال بدالة متصلة :

1 – مثال : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2$

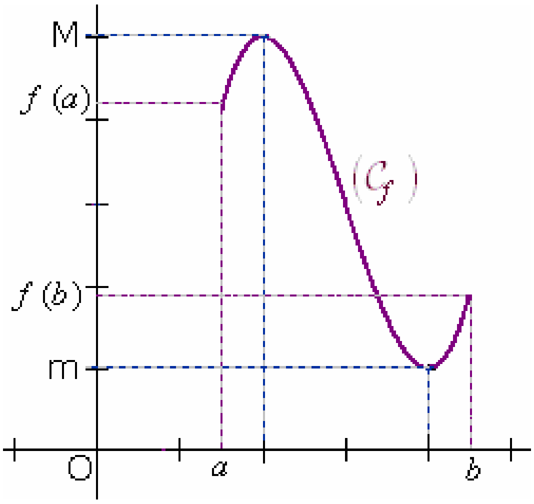
حدد مبيانيا ما يلي :



✓ $f([1,2])$

✓ $f([-1,1])$

✓ $f([-2,0])$



2 - خاصيات :

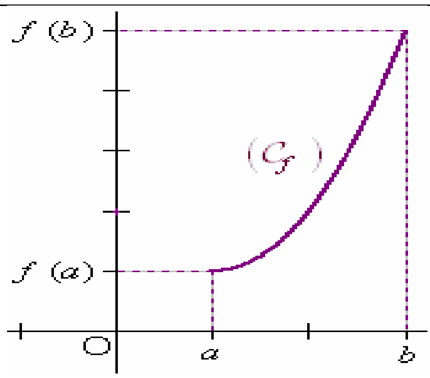
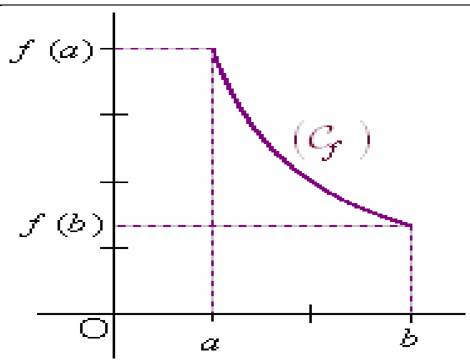
✓ صورة قطعة بدالة متصلة هي أيضا قطعة . (C_f)

✓ صورة مجال من $\mathbb{R}$ بدالة متصلة هي أيضا مجال من $\mathbb{R}$.

✓ $f([a,b])=[m,M]$.

$M=\underset{x\in[a,b]}{Max} f(x)$ و $m=\underset{x\in[a,b]}{Min} f(x)$

ملاحظة : يمكن تحديد صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال من $\mathbb{R}$ كما يلي :

المجال $f(I)$	المجال I	رتابة الدالة f	الشكل
$[f(a),f(b)]$	$[a,b]$	f تزايدية قطعا على المجال I	
$\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$[a,b[$		
$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),f(b)\right]$	$]a,b]$		
$\left[f(a),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$[a,+\infty[$		
$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$]a,+\infty[$		
$[f(b),f(a)]$	$[a,b]$	f تناقصة قطعا على المجال I	
$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)\right]$	$[a,b[$		
$\left[f(b),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$	$]a,b]$		
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(a)\right]$	$[a,+\infty[$		
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$	$]a,+\infty[$		

مثال : نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$.

1. بين أن f تزايدية قطعا على كل من المجالين التاليين : $]2,+\infty[$ و $]-\infty,2[$.
2. استنتج صور كل من المجالات التالية بالدالة f : $]2,+\infty[$ و $[3,+\infty[$ و $[3,4]$.

II- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال من $\mathbb{R}$:

1. تعريف التقابل :

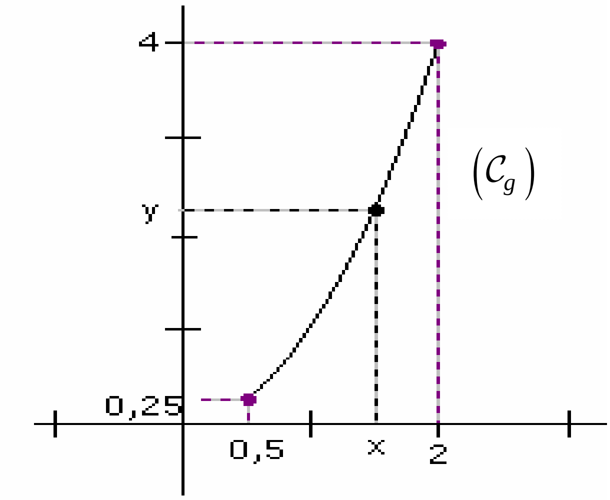
مثال 1:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0,5;2]$ بما يلي : $g(x)=x^2$.

1 – حدد مبيانيا $g([0,5;2])$.

2 – أتمم الجدول التالي :

y	0,25	1	2	3	4
سوابق y					



ملحوظة: نسمي سوابق y ، بالدالة g ، كل عنصر x من المجال $[0,5;2]$ بحيث : $y=g(x)$.

استنتاج : من خلال المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ ؛ نلاحظ أن كل عنصر y من المجال $[0,25;4]$ ؛ يقبل سابقا وحيدا x ، بالدالة g ، في المجال $[0,5;2]$. لهذا نقول إن g **تقابل** من المجال $[0,5;2]$ نحو المجال $[0,25;4]$.

مثال 2 : نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $[-1,2]$ بما يلي : $h(x)=x^2$.

1- حدد $h([-1,2])$.

2- املأ الجدول التالي :

3- ما ذا تستنتج ؟

y	0	0,25	1	3	4
سوابق y					

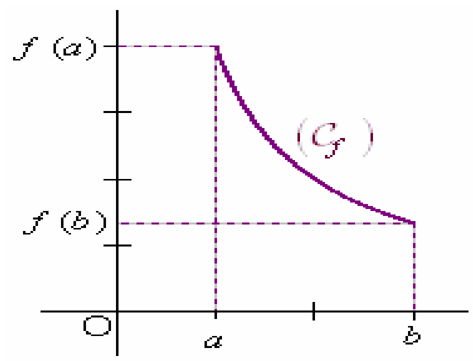
تعريف : لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين ؛ ولتكن f دالة معرفة من A نحو B .
نقول إن f تقابل من A نحو B ؛ إذا كان لكل عنصر y من B ؛ سابق وحيد x في A بالدالة f

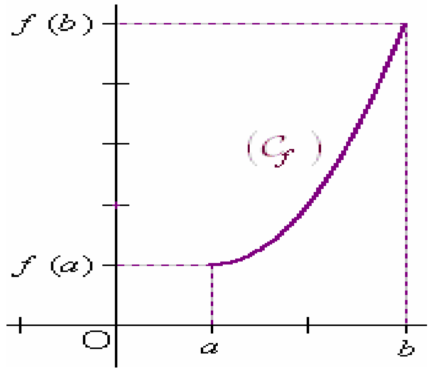
أي : $\boxed{\forall y\in B;\quad \exists! x\in A \quad / \quad y=f(x)}$

2. خاصة : $(a<b)$

لتكن f دالة عددية وليكن I و J مجالين غير فارغين من $\mathbb{R}$ بحيث : $I\subset D_f$.

إذا كانت f **متصلة** و**رتيبة قطعا** على المجال I ؛ فإنها تكون تقابلا من I نحو المجال J بحيث: $J=f(I)$.





مثال : الدالة الواردة في المثال1، من II-1 $\left(f(x)=x^2\right)$، تقابل من المجال $[0,5;2]$ نحو المجال $[0,25;4]$.

3. التقابل العكسي :

مثال 1 : لتكن f دالة معرفة على المجال $I=[1,2]$ بما يلي : $f(x)=x^2-2x+3$

1- بين أن f تقابل من المجال I نحو مجال J ينبغي تحديده .

2- ليكن $y\in J$ وليكن $x\in I$ السابق الوحيد ل y بالدالة f . أكتب x بدلالة y ؟

الجواب : 1- ليكن $x\in I$. لدينا : $f'(x)=\left(x^2-2x+3\right)'=2x-2=2(x-1)$. ومنه فإن :

$x\in]1,2]\Rightarrow 1<x\le 2\Rightarrow x-1>0\Rightarrow f'(x)>0$.

إذن $f'>0$ على المجال I باستثناء العدد 1 حيث $f'(1)=0$. ومنه نستنتج أن f دالة تزايدية قطعا على المجال I . وبما أن f متصلة على المجال I ، فإن :

f تقابل من المجال I نحو المجال $J=f(I)=f([1,2])=[f(1),f(2)]=[2,3]$.

2- ليكن $y\in J$ وليكن $x\in I$ السابق الوحيد ل y بالدالة f لدينا :

$$\begin{aligned}
y=f(x) &\Leftrightarrow y=x^2-2x+3\\
&\Leftrightarrow y=(x-1)^2+2\\
&\Leftrightarrow (x-1)^2=y-2\\
&\Leftrightarrow x-1=\sqrt{y-2} \quad \text{أو} \quad x-1=-\sqrt{y-2}\\
&\Leftrightarrow x-1=\sqrt{y-2} \quad (\text{لأن : } x\ge 1\Rightarrow x-1\ge 0)\\
&\Leftrightarrow \boxed{x=1+\sqrt{y-2}}
\end{aligned}$$

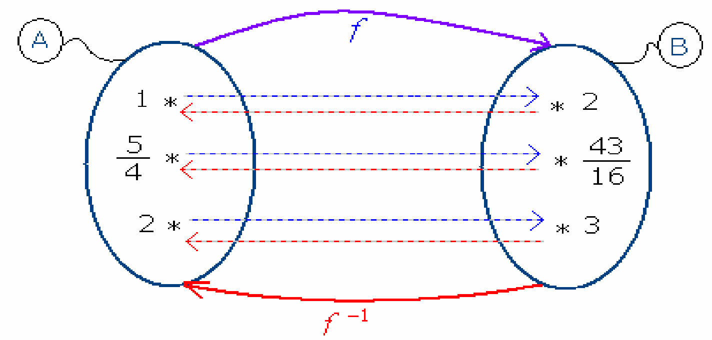
الدالة المعرفة من المجال $J=[2,3]$ نحو المجال $I=[1,2]$ والتي تربط كل عنصر t من المجال J بالعدد الحقيقي $1+\sqrt{t-2}$ ، تسمى التقابل العكسي للدالة f ؛ ونرمز له بالرمز f^{-1} ؛ ونكتب :

$$\begin{aligned}
f^{-1}\ :\ J=[2,3] &\to I=[1,2]\\
x &\mapsto f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-2}
\end{aligned}$$

مثال : املأ الجدولين التاليين :

x	1	$\frac{5}{4}$	2
$f(x)$			

x	2	$\frac{43}{16}$	3
$f^{-1}(x)$			



تعريف : لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال غير فارغ I ؛ ضمن D_f ؛ نعلم أن f تقابل من المجال I نحو المجال $J=f(I)$.
الدالة المعرفة من المجال J نحو المجال I والتي تربط كل عنصر x من J بالعنصر y من I بحيث : $x=f(y)$ ؛ تسمى التقابل العكسي للدالة f ؛ ويرمز لها بالرمز f^{-1} .

قاعدة التحويل :
ليكن f تقابلا من مجال I نحو مجال J ؛ وليكن x عنصرا من J و y عنصرا من I . لدينا :

$$\boxed{y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(y)}$$

استنتاج : ليكن f تقابلا من مجال I نحو $J=f(I)$. لدينا :

✓ لكل عنصر x من I : $f^{-1}(f(x))=x$.

✓ لكل عنصر x من J : $f(f^{-1}(x))=x$.

مثال 2 : لتكن g الدالة المعرفة على المجال $I=[3,4]$ بما يلي : $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$

1- بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J ينبغي تحديده .
2- حدد التقابل العكسي g^{-1} .
3- أنشئ $(\mathcal{C}_g)$ و $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ في نفس المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

طريقة 1 : إعادة للطريقة المستعملة في المثال 1 .
طريقة 2 : استعمال قاعدة التحويل . ليكن $x\in J=[2,3]$ و $y\in I=[3,4]$ بحيث : $y=g^{-1}(x)$.
لدينا :

$$\begin{aligned} y=g^{-1}(x) &\Leftrightarrow x=g(y) \\ &\Leftrightarrow x=\frac{y}{y-2} \\ &\Leftrightarrow x(y-2)=y \\ &\Leftrightarrow xy-2x=y \\ &\Leftrightarrow y(x-1)=2x \\ &\Leftrightarrow \boxed{y=\frac{2x}{x-1}} \end{aligned}$$

(لأن : $x\in[2,3]\Rightarrow x\neq 1$)

وبالتالي فإن :

$$g^{-1} : J=[2,3] \to I=[3,4]$$
$$x \mapsto g^{-1}(x)=\frac{2x}{x-1}$$

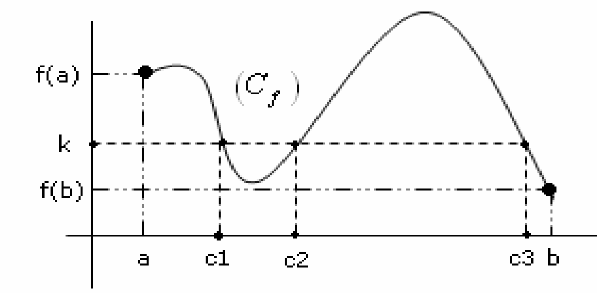
خاصية : إذا كانت f **متصلة ورتيبة قطعا** على مجال غير فارغ I $(I\subset D_f)$ ؛ فإن :

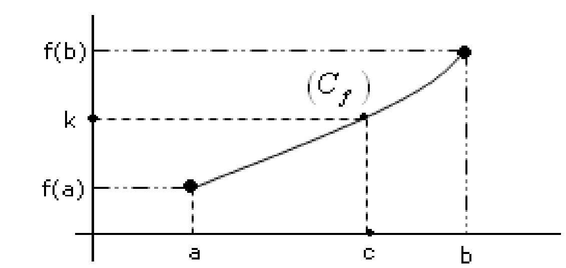
✓ f تقابل من المجال I نحو المجال $J=f(I)$.

✓ f^{-1} متصلة على المجال $J=f(I)$ ؛ ولها نفس رتابة الدالة f .

✓ (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

III- مبرهنة القيم الوسطية :





1 – مبرهنة :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ ؛ فإن لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a,b]$ بحيث: $f(c)=k$.

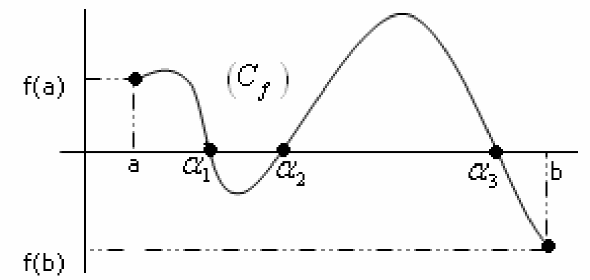
مثال :

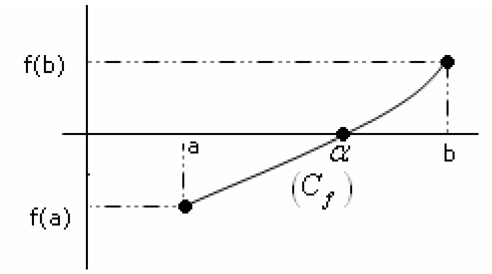
نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

-1 أحسب $f(2)$ و $f(3)$.

-2 استنتج أن المعادلة : $f(x)=1+\sqrt{2}$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[2,3]$.

2- استنتاج :





إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ فإن 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. ومنه حسب مبرهنة القيم الوسطية، يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]a,b[$ بحيث : $f(\alpha)=0$.

نتيجة :

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ ؛ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a,b[$.

مثال 2 : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-2.\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$.

ملاحظة هامة :

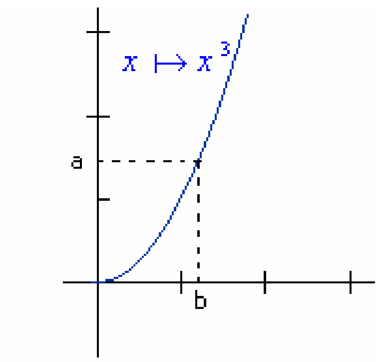
إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ ؛ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل **حلا وحيدا** في المجال $]a,b[$.

مثال 3 : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^3-2$.

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1,2]$.

IV- تطبيقات :

A- دالة الجذر من الرتبة n . $(n\geq 1)$:



مثال تمهيدي : ليكن a من $\mathbb{R}^+$.

نلاحظ أن لكل a من $\mathbb{R}^+$ ؛ يوجد عنصر وحيد b من $\mathbb{R}^+$ بحيث : $b^3=a$.

العدد الحقيقي الموجب b يسمى الجذر من الرتبة 3 للعدد a ويرمز له بالرمز ونكتب $b=\sqrt[3]{a}$. أي : $\boxed{\forall a\in\mathbb{R}^+,\quad \forall b\in\mathbb{R}^+,\quad b^3=a\Leftrightarrow b=\sqrt[3]{a}}$

سؤال : حدد الجذور التالية : $\sqrt[3]{8}$ و $\sqrt[3]{27}$ و $\sqrt[3]{64}$ و $\sqrt[3]{125}$.

✓ الدالة $x\mapsto x^3$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$. إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$. تقابلها العكسي هو الدالة المعرفة بما يلي :

$$\sqrt[3]{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

1.الحالة العامة : ليكن $n \geq 1$.

✓ ليكن $a \in \mathbb{R}^+$. يوجد عنصر وحيد b من $\mathbb{R}^+$ بحيث : $b^n = a$. العدد الحقيقي الموجب b ، يسمى الجذر من الرتبة n للعدد a ويرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$ ونكتب : $b = \sqrt[n]{a}$. ولدينا :

✓ **قاعدة التحويل :** $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad \forall b \in \mathbb{R}^+, \quad b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}}$

✓ الدالة $x \mapsto x^n$ متصلة ورتيبة قطعا على المجال $\mathbb{R}^+$ ؛ إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

تقابلها العكسي هو الدالة :
$$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

مثال : بسط الجذور التالية : $\sqrt[4]{16}$ و $\sqrt[6]{64}$ و $\sqrt[3]{512}$.

2. خاصيات أولية :

i - لكل a من $\mathbb{R}^+$ ؛ لدينا : $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

ii - لكل a من $\mathbb{R}^+$ ؛ لدينا : $\sqrt[n]{a^n} = a$.

iii - الدالة $\sqrt[n]{\ }$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

iv - $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty}$.

3. نتائج :

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. لدينا :

✓ لكل a من $\mathbb{R}^+$ ولكل b من $\mathbb{R}^+$ ؛ لدينا : $\boxed{\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b}$.

✓ لكل a من $\mathbb{R}^+$ ولكل b من $\mathbb{R}^+$ ؛ لدينا : $\boxed{\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b}$.

تمرين تطبيقي : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$i:$ $x^5 = 32$. $iii:$ $x^6 = 2$

$ii:$ $x^3 = -125$. $iv:$ $x^8 = -1$

4. العمليات على الجذور من الرتبة n :

ليكن n و p من $\mathbb{N}^*$ ؛ وليكن a و b من $\mathbb{R}^+$. لدينا :

$i:$ $\sqrt[np]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}$. $iv:$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$

$ii:$ $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$. $v:$ $(b \neq 0): \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$iii:$ $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

تمرين تطبيقي : ليكن a من $\mathbb{R}^+$ ؛ وليكن m و n من $\mathbb{N}^*$. بين أن : $\boxed{\sqrt[m]{a}.\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}}$

مثال : بسط العدد التالي : $A = \dfrac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{8}\left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$.

5. إتصال ونهاية دالة مركبة f ودالة الجذر من الرتبة n :

خاصيات :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح (غير فارغ) I؛ وليكن x_0 عنصرا من I ؛ وليكن $n \in \mathbb{N}^*$.

✓ إذا كانت f متصلة وموجبة على I , فإن $\sqrt[n]{f}$ تكون متصلة على I .

✓ إذا كانت f موجبة على I , وكان $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $(l \in \mathbb{R})$؛ فإن : $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.

✓ إذا كانت f موجبة على I ,وكان $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ؛ فإن : $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

مثال 1 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كالآتي : $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 4}$.

a. حدد D_f ، حيز تعريف الدالة f .

b. بين أن f متصلة في كل نقطة من حيز تعريفها .
c. أحسب نهايتي f عند $+\infty$ و $-\infty$.

مثال 2 : أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$ و $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2}}{x-2}$.

6. القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا :

i. **تعريف :** ليكن $\boxed{a>0}$ ، وليكن r من $\mathbb{Q}^*$: $\left(r=\frac{p}{q}\quad /\quad p\in\mathbb{Z};\quad q\in\mathbb{N}^*\right)$.

✓ نرمز بالرمز a^r للعدد الحقيقي $\sqrt[q]{a^p}$ ، a^r يسمى **القوة الجذرية** ذات الأساس r للعدد الحقيقي a .
✓ إذا كان $r=0$ ، فإن : $a^r=1$.

ملاحظات :

✓ 0^0 لا معنى له . $0^{\frac{5}{3}}$ لا معنى له .
✓ ليكن p من $\mathbb{Z}$ و $q\in\mathbb{N}^*$. العدد الحقيقي الموجب قطعا $\sqrt[q]{a^p}$ ، يكتب على الشكل $a^{\frac{p}{q}}$ ؛ $\boxed{\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}}$.
✓ ليكن r من $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$. (مثلا : $r=\frac{1}{7}$).

- يكون العدد $f^r(x)$ معرفا إذا وفقط إذا كان $f(x)\in\mathbb{R}$ و $f(x)>0$.
- <u>مثلا :</u> يكون العدد $f^{\frac{1}{7}}(x)$ معرفا إذا وفقط إذا كان $f(x)\in\mathbb{R}$ و $f(x)>0$.

ii. **خاصيات :** ليكن a و b من $\mathbb{R}^{+*}$ وليكن r و r' من $\mathbb{Q}$. لدينا :

$i:$	$a^r.a^{r'}=a^{r+r'}$.	$iv:$	$\left(a^r\right)^{r'}=a^{rr'}$
$ii:$	$\frac{1}{a^r}=a^{-r}$.	$v:$	$a^r.b^r=(a.b)^r$
$iii:$	$\frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$.	$vi:$	$\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r$

مثال : أحسب باستعمال هذه الخاصيات العدد : $A=\frac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{8}\left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$.

تمرين تطبيقي : حدد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

$a:\ f(x)=\sqrt[3]{(x-5)^2}$. $b:\ f(x)=\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2$. $c:\ f(x)=(x-5)^{\frac{2}{3}}$

سؤال : بسط العدد التالي : $B=\sqrt[4]{\left(\sqrt{7}-5\right)^4}$.

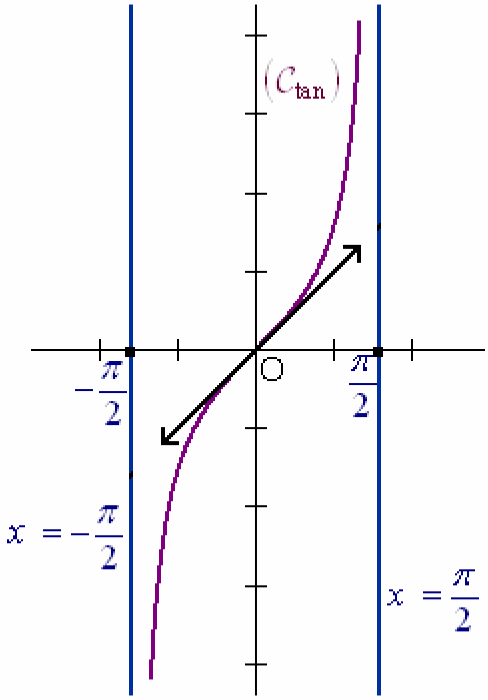
B- دالة قوس الظل Arctan :

لتكن الدالة :
$$\begin{array}{cccc} f & : & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$$

f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. إذن : f تقابل من I نحو المجال $f(I)=\mathbb{R}$.

$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)=+\infty}$; $\boxed{\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(x)=-\infty}$

1. خاصية وتعريف :



لدالة $x \mapsto \tan(x)$ تقابل من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$.

تقابلها العكسي ، يسمى **دالة قوس الظل** ويرمز له بالرمز $Arc\tan$. ولدينا :

$$Arc\tan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto Arc\tan(x)$$

2. قاعدة التحويل :

لكل x من $\mathbb{R}$ ، ولكل y من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، لدينا :

$$y = Arc\tan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$$

مثال 1 : أحسب ما يلي : $Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $Arc\tan(\sqrt{3})$

مثال 2 : أحسب $\tan\left(\frac{17\pi}{4}\right)$ ؛ ثم استنتج $Arc\tan(1)$.

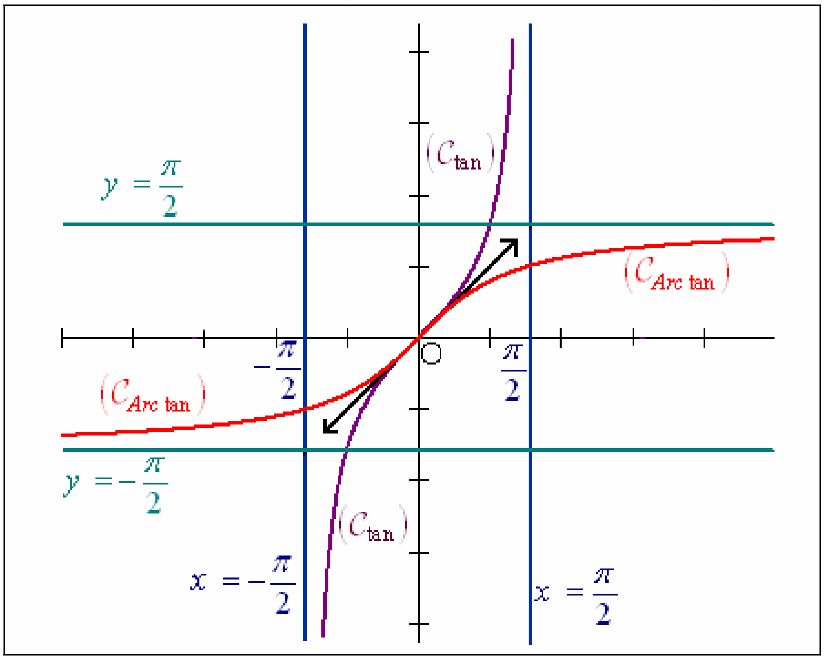
3. نتائج :

a. لكل x من $\mathbb{R}$ ؛ لدينا : $\boxed{\tan(Arc\tan(x)) = x}$.

b. لكل x من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، لدينا : $\boxed{Arc\tan(\tan(x)) = x}$.

c. الدالة $Arc\tan$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

d. $\boxed{\lim_{x\to+\infty} Arc\tan(x) = \frac{\pi}{2}}$; $\boxed{\lim_{x\to-\infty} Arc\tan(x) = -\frac{\pi}{2}}$.



مثال : أحسب ما يلي : $Arc\tan\left(\tan\left(\frac{2006\pi}{3}\right)\right)$; $A = Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

4. خاصية : الدالة $Arc\tan$ دالة فردية :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad Arc\tan(-x) = -Arc\tan(x)}$$

الأعداد العقدية - الجزء الاول-

1- المجموعة $\mathbb{C}$

أ/ مبرهنة

توجد مجموعة $\mathbb{C}$ تتضمن $\mathbb{R}$ و تحقق:

i) يحتوي $\mathbb{C}$ على عنصر غير حقيقي i و يحقق $i^2=-1$

ii) كل عنصر من $\mathbb{C}$ يكتب بكيفية و حيدة على الشكل: $a+ib$ بحيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

iii) المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ و لهما نفس الخاصيات

ملاحظة: * $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{ID}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

ب/ تساوي عددين عقديين

خاصية ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ $\quad a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow a=a'$ و $b=b'$

برهان

* $a=a'$ و $b=b' \Rightarrow a+ib=a'+ib'$ استلزام صحيح

* نعتبر $a+ib=a'+ib'$ و منه $i(b-b')=a'-a$

لنفترض أن $b\neq b'$ ومنه $i=\dfrac{a'-a}{b-b'}$

و حيث أن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ فان $\dfrac{a'-a}{b-b'}\in\mathbb{R}$

و بالتالي $i\in\mathbb{R}$ و هذا غير صحيح لان i عدد غير حقيقي

إذن افتراضنا خاطئ و منه $b=b'$ و بالتالي $a'-a=0$ إذن $a'=a$

ج/ اصطلاحات و تعاريف

* ليكن عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

العدد a يسمى الجزء الحقيقي نكتب $Re(z)=a$.

العدد b يسمى الجزء التخيلي نكتب $Im(z)=b$

الكتابة $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z

- نقول إن عددا عقديا عدد تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان جزئه الحقيقي منعدما و جزئه تخيلي غير منعدم
- نقول إن عددا عقديا عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان جزئه التخيلي منعدما

أمثلة

حدد الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد العقدي z في الحالات التالية

أ/ $z=\sqrt{2}-3i$ ب/ $z=5i-3$ ج/ $z=2\sqrt{3}i$ د/ $z=17$

د/ العمليات

ليكن عددين عقديين $z=a+ib$ و $z=a'+ib'$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$

* الجمع $z+z'=(a+a')+(b+b')i$

* الضرب $z\cdot z'=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$

* $(a+ib)^2=(a^2-b^2)+2abi$ $\quad (a-ib)^2=(a^2-b^2)-2abi$ $\quad (a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

* مقلوب عدد عقدي غير منعدم $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{bi}{a^2+b^2}$

* خارج عددين عقديين $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{a-bi}{a'+b'i}=\dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2}$ حيث $z'\neq 0$

*** خاصيات العدد العقدي i**

ليكن $n\in\mathbb{Z}$

$i^n=1$ إذا كان $n=4k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ $i^n=i$ إذا كان $n=4k+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

$i^n=-1$ إذا كان $n=4k+2$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ $i^n=-i$ إذا كان $n=4k+3$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تمرين

1- نحدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية $\frac{1}{2-3i}$; $\frac{3-2i}{2+i}$; $\frac{2i}{3-i}+\frac{(1-2i)^2}{i}$

$$\frac{1}{2-3i}=\frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

$$\frac{3-2i}{2+i}=\frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6-2-3i-4i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i$$

$$\frac{2i}{3-i}+\frac{(1-2i)^2}{i}=\frac{2i(3+i)}{10}-i(1-4-4i)=\frac{3}{5}i-\frac{1}{5}+3i-4=-\frac{21}{5}+\frac{18}{5}i$$

2- نحسب $(1+i)^2$ و نستنتج $(1+i)^{230}$

$$(1+i)^2=2i$$

$$(1+i)^{230}=(2i)^{115}=2^{115}i^{4\times 28+3}=-2^{115}i$$

3- نحل المعادلة $2iz-3i+2=z+i$ $\quad z\in\mathbb{C}$

$$2iz-3i+2=z+i\Leftrightarrow(1+2i)z=-2+4i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2+4i}{1+2i}=\frac{-2(1-2i)(1-2i)}{5}=\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i$$

إذن $S=\left\{\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\right\}$

2- التمثيل الهندسي لعدد عقدي- لحق متجهة

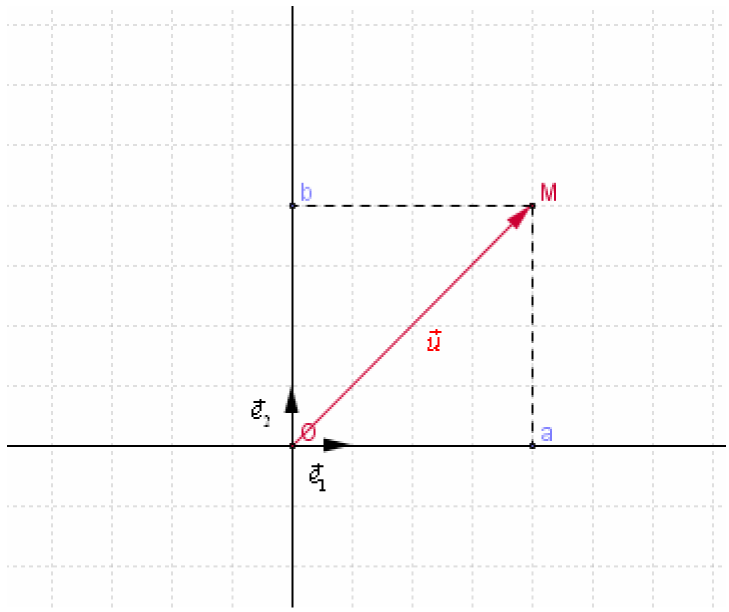
المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

كل نقطة $M(a;b)$ من المستوى (P) هي صورة عدد عقدي وحيد $z=a+ib$. نكتب $M(z)$

و $z=a+ib$ يسمى لحق $M(a;b)$. نكتب $z=aff(M)$

كل متجهة $\vec{u}(a;b)$ من المستوى هي صورة عدد عقدي وحيد $z=a+ib$. نكتب $\vec{u}(z)$

العدد العقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}(a;b)$ نكتب $z=aff(\vec{u})$



ملاحظة و مصطلحات

* الأعداد الحقيقية هي ألحاق نقط محور الافاصيل الذي يسمى المحور الحقيقي
* الاعداد التخيلية الصرفة هي ألحاق نقط محور الأراتيب الذي يسمى المحور التخيلي

*- لحق $\overrightarrow{AB}$

ليكن A و B لحقيهما $z_A = a + ib$ و $z_B = a' + ib'$ على التوالي

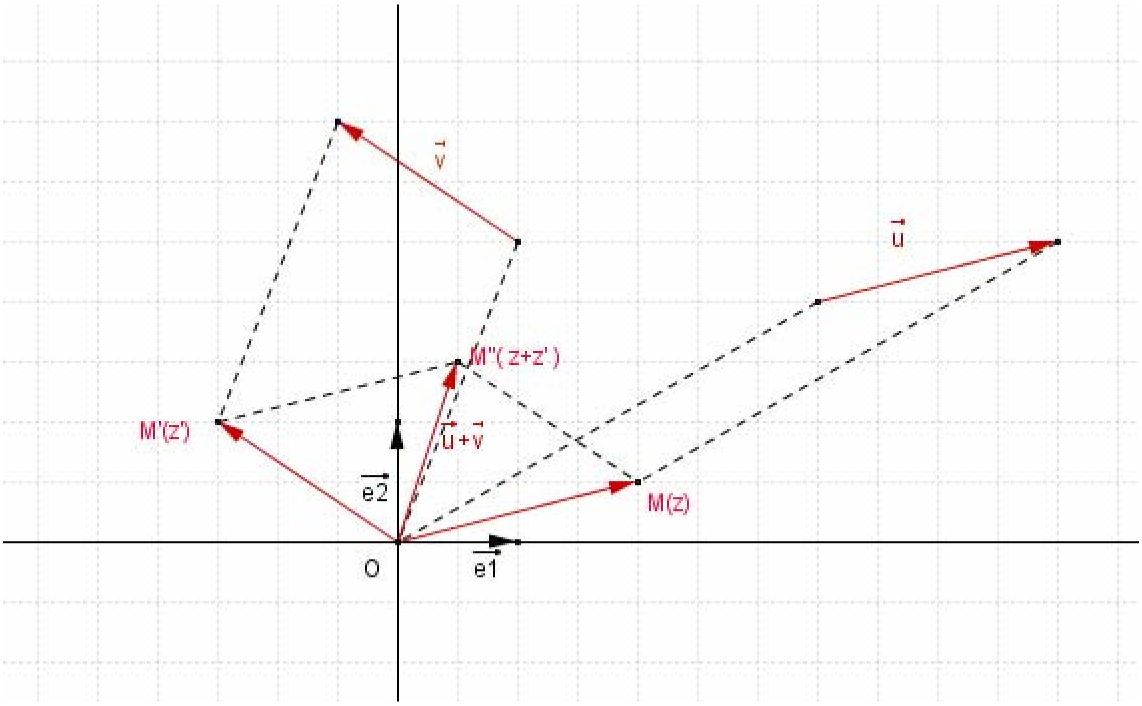
ومنه $A(a;b)$ و $B(a';b')$ و بالتالي $\overrightarrow{AB}(a'-a;b'-b)$ أي

$$aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = (a'-a) + i(b'-b) = (a'+ib') - (a+ib) = z_B - z_A$$

لحق $\overrightarrow{AB}$ هو $z_B - z_A$ حيث $A(z_A)$ و $B(z_B)$

*- لحق $\vec{u}+\vec{v}$ و $\alpha\vec{u}$

نعلم أن اذا كان $\vec{u}(a;b)$ و $\vec{v}(a';b')$ فان $\vec{u}+\vec{v}(a+a';b+b')$ ومنه $aff(\vec{u}+\vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$



لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى و لكل عدد حقيقي α $\quad aff(\vec{u}+\vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$ $aff(\alpha\vec{u}) = \alpha aff(\vec{u})$

تمرين

في المستوى العقدي أنشئ النقط A و B و C ألحاقها على التوالي $z_A = 2$ و $z_B = -1+4i$ و $z_C = -3i$ و المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $-1+3i$

*- استقامية النقط

النقط المختلفة $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ مستقيمية $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} \quad / \quad \exists\lambda\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = aff\left(\lambda\overrightarrow{AC}\right) \quad / \quad \exists\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z_B - z_A = \lambda(z_C - z_A) \quad / \quad \exists\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \lambda \quad / \quad \exists\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in\mathbb{R}$$

تكون النقط المختلفة $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C \quad z_A} \in\mathbb{R}$

*- المرجح

لتكن $A(\ _A)$ و $B(\ _B)$ و $G(z_G)$ نقط من المستوى العقدي و α و β عددين حقيقين حيث $\alpha+\beta\neq 0$ G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان $(\alpha+\beta)z_G = \alpha z_A + \beta z_B$

ملاحظة

بنفس الطريقة نعرف مرجح ثلاث نقط أو أكثر

*- منتصف قطعة

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $I(z_I)$ نقط من المستوى العقدي

I منتصف $[A;B]$ إذا و فقط إذا كان $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$

تمرين

بين أن النقط $A(1+i)$ و $B(1+3i)$ و $C\left(\dfrac{-1}{2}-2i\right)$ مستقيمية

الجواب

لدينا $$\frac{\left(-\frac{1}{2}-2i\right)-(1+i)}{(2+3i)-(1+i)}=\frac{\frac{-3-6i}{2}}{1+2i}=\frac{(-3-6i)(1-2i)}{2(1+2i)(1-2i)}=\frac{-3+6i-6i-12}{10}=-\frac{3}{2}\in\mathbb{R}$$

إذن A و B و C مستقيمية

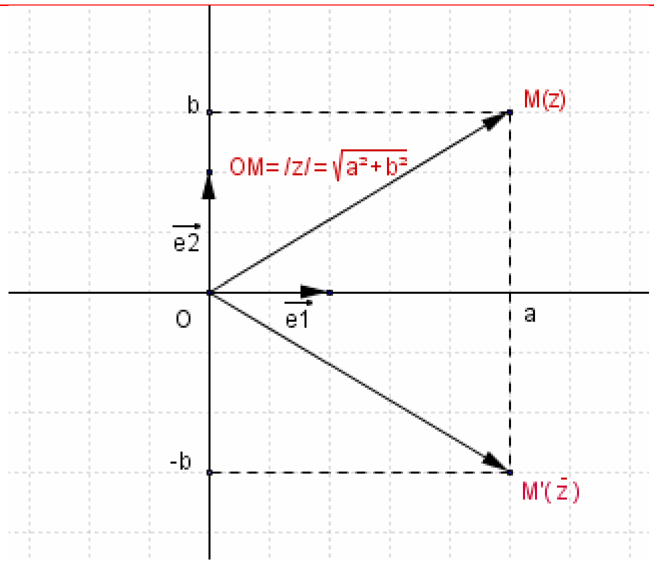
3- المرافق و المعيار

أ/ تعريف

ليكن عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

* العدد العقدي $z=a-ib$ يسمى مرافق العدد العقدي $z=a+ib$ ونرمز له بـ $\bar{z}=a-ib$.

* العدد الحقيقي $\sqrt{z\bar{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z=a+ib$. نرمز له بـ $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$



ملاحظة

* النقطتان $M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلتان بالنسبة لمحو الافاصيل

* إذا كان $z=a+ib$ فان $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$

ب/ خاصيات

ليكن عددين عقديين $z=a+ib$ و $z=a'+ib'$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$

$$\overline{z+z'}=\overline{(a+a')+(b+b')i}=a+a'-(b+b')i=a-ib+a'-ib'=\bar{z}+\bar{z}'$$

$$\overline{z\cdot z'}=\overline{(aa'-bb')+(ab'+a'b)i}=aa'-bb'-ab'i-a'bi=a(a'-b'i)-bi(a'-b'i)=(a-bi)(a'-b'i)=\bar{z}\cdot\bar{z}'$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\overline{\left(\frac{1}{a+bi}\right)}=\overline{\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{bi}{a^2+b^2}\right)}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a-ib}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$$

ومنه $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}}$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\overline{\left(z\times\frac{1}{z'}\right)}=\bar{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\bar{z}\times\frac{1}{\bar{z}'}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

خاصيات

لتكن $(z;z')\in\mathbb{C}^2$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{Z}^*$

* $\bar{\bar{z}}=z$
* $z-\bar{z}=2\operatorname{Im}(z)i \quad ; \quad z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$
* $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=z$
* $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=-z$
* $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$ $\quad \overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z}'$ $\quad \overline{z^n}=\left(\bar{z}\right)^n$ $\quad \overline{\alpha z}=\alpha.\bar{z}$ $\quad z'\neq 0$ $\quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

خاصيات

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ نقطتين من المستوى العقدي منسوب إلى المعلم $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

$\|\overrightarrow{AB}\|=AB=|z_B-z_A|$ $\qquad OA=|z_A|$

لتكن $(z;z')\in\mathbb{C}^2$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{Z}^*$

* $|z|=0\Leftrightarrow z=0$
* $|z|=|-z|=|\bar{z}|$
* $|z.z'|=|z||z'|$ $\quad |z^n|=|z|^n$ $\quad \left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ $\quad z'\neq 0$
* $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

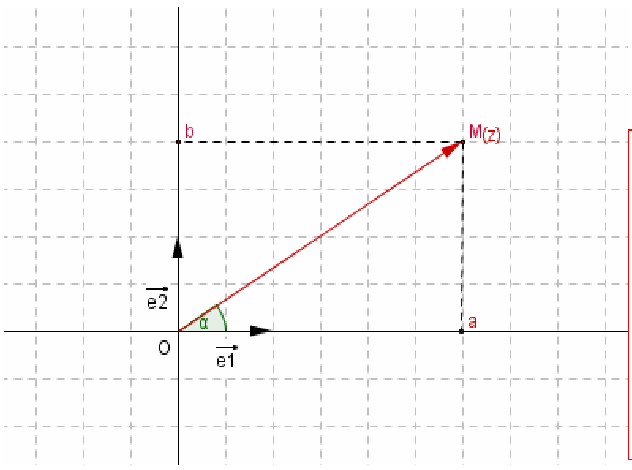
تمرين

في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط *M(z)* في كـــل حالة من الحالتين التاليتين

-1 $|z-1+i|=|2-i\sqrt{5}|$ $\qquad$ **-2** $|z-2|=|z+2i|$

-4 الشكل المثلثي لعدد عقدي و العمدة

أ/ العمدة لعدد عقدي



المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

ليكن $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و

النقطة M صورته , وليكن α قياسا للزاوية $(\widehat{\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}})$.

العدد α يسمى عمدة للعدد العقدي z

نكتب $\arg z\equiv\alpha \quad [2\pi]$.

ملاحظة

* $\forall a\in\mathbb{R}^{+*} \quad \arg a\equiv 0 \quad [2\pi]$ $\qquad$ $\forall a\in\mathbb{R}^{-*} \quad \arg a\equiv\pi \quad [2\pi]$
* $\forall b\in i\mathbb{R}^{+*} \quad \arg b\equiv\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ $\qquad$ $\forall b\in i\mathbb{R}^{-*} \quad \arg b\equiv-\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

ب/ الكتابة المثلثية لعدد عقدي

-* ليكن $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و r عددا حقيقيا موجبا قطعا و α عددا حقيقيا نضع $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$

و منه $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ حيث $\sin\alpha=\frac{b}{r} \quad ; \quad \cos\alpha=\frac{a}{r}$

إذن $\arg z\equiv\alpha \quad [2\pi]$

الكتابة $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z و نكتب $z=[r,\alpha]$

أمثلة

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$$

$$15=[15;0] \qquad -2i=\left[2;-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$-\sqrt{3}-i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\left[2;\frac{5\pi}{6}\right]$$

ج/ خاصيات

ليكن $z=[r,\alpha]$ و $z'=[r',\alpha']$ عددين عقديين غير منعدمين

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha'+i\sin\alpha')=(\cos\alpha\cos\alpha'-\sin\alpha\sin\alpha')+i(\sin\alpha\cos\alpha'+\cos\alpha\sin\alpha')$$

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha'+i\sin\alpha')=\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha')$$

$$z\times z'=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')=rr'(\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha'))=[rr';\alpha+\alpha']$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\cos\alpha+i\sin\alpha}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\right)=\frac{1}{r}(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))=\left[\frac{1}{r};-\alpha\right]$$

$$\frac{z}{z'}==z\times\frac{1}{z'}=[r;\alpha]\times\left[\frac{1}{r'};-\alpha'\right]=\left[\frac{r}{r'};\alpha-\alpha'\right]$$

$$\bar{z}=\overline{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=r(\cos\alpha-i\sin\alpha)=r(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))=[r,-\alpha]$$

$$-z=r(-\cos\alpha-i\sin\alpha)r(\cos(\alpha+\pi)+i\sin(\alpha+\pi))=[r,\alpha+\pi]$$

نبين أن $z^n=[r^n;n\alpha]$ $\quad \forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}$

ليكن $z=[r;\alpha]$ عدد عقدي غير منعدم

لنبين أولا $z^n=[r^n;n\alpha]$ $\quad \forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا $z^0=1$ و $1=[1;0]=[1;0\times\alpha]$ اذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$

لنفترض أن $z^n=[r^n;n\alpha]$ و نبين أن $z^{n+1}=[r^{n+1};(n+1)\alpha]$

$$z^{n+1}=z\times z^n=[r;\alpha]\times[r^n;n\alpha]=[r\times r^n;\alpha+n\alpha]=[r^{n+1};(n+1)\alpha]$$

إذن $z^n=[r^n;n\alpha]$ $\quad \forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{N}$

ليكن $n\in\mathbb{Z}^-$ ومنه $-n\in\mathbb{N}$

$$z^n \quad \frac{1}{z^{-n}} \quad \frac{1}{r^{-n};\ \ n\alpha} \quad \left\lceil\frac{1}{r^{-n}};\ (\ \ n\alpha)\right\rceil \quad \lceil r^n;n\alpha$$

إذن $z^n=[r^n;n\alpha]$ $\quad \forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}$

خاصيات

ليكن $z=[r,\alpha]$ و $z'=[r',\alpha']$ عددين عقديين غير منعدمين

* $z=z' \quad r \quad r' \quad et \quad \alpha \quad \alpha'$

* $\arg(zz')\equiv\arg z+\arg z'\quad[2\pi]$ و $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg z\quad[2\pi]$ و $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg z-\arg z'\quad[2\pi]$

$zz'=[rr',\alpha+\alpha']$ و $\frac{1}{z}=\left\lceil\frac{1}{r};\ \ \alpha\right\rceil$ و $\frac{z}{z'}\quad\left\lceil\frac{r}{r'},\alpha\quad\alpha'\right.$

* $\arg(\bar{z})\equiv-\arg z\quad[2\pi]$ و $\arg(-z)\equiv\pi+\arg z\quad[2\pi]$ $\qquad \bar{z}=[r,-\alpha]$ و $-z=[r,\alpha+\pi]$

* $\forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}\qquad \arg\left(z^n\right.\ \equiv n\arg z\quad 2\pi$

$\forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}\qquad z^n=[r^n;n\alpha]$

تمرين

نعتبر العددين العقديين $v=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$ و $u=2-2i$

1- احسب معيار وعمدة كل من u و v

2- حدد الكتابة الجبرية والكتابة المثلثية لـ $\frac{u}{v}$ ثم استنتج $\sin\frac{7\pi}{12}$; $\cos\frac{7\pi}{12}$

خاصية

ليكن $A(z_A)\neq B(z_B)$ و $D(z_D)\neq C(z_C)$

-* توجد نقطة وحيدة M حيث $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ ومنه $M(z_B-z_A)$

و بالتالي $\arg(z_B-z_A)=\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{OM})}\quad[2\pi]$ إذن $\arg(z_B-z_A)=\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB})}\quad[2\pi]$

-* $\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})}\equiv\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{CD})}-\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB})}\equiv\arg(z_D-z_C)-\arg(z_B-z_A)\equiv\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\quad[2\pi]$

خاصية

إذا كان $A(z_A)\neq B(z_B)$ و $D(z_D)\neq C(z_C)$ فان $\arg(z_B-z_A)=\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB})}\quad[2\pi]$

و $\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})}\equiv\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\quad[2\pi]$

نتيجة

إذا كان $A(z_A)\neq B(z_B)$ و $A\neq C(z_C)$ فان $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}\quad[2\pi]$

د/ تطبيقات

* **الاستقامية:** لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ نقط مختلفة

A و B و C مستقيمية $\Leftrightarrow \frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv 0\quad[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\pi\quad[2\pi]$

* **التعامد:** لتكن $A(z_A)\neq B(z_B)$ و $D(z_D)\neq C(z_C)$

$(AB)\perp(CD)\Leftrightarrow\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\quad ou\quad\arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

تمرين

في المستوى العقدي المنسوب لمعلم.م.م.م $(o;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

1).نعتبر النقط $A(6+2i)$ و $B(-1+3i)$ و $C\left(\frac{7}{2}-3i\right)$ حدد قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{BA};\overline{BC}}\right)$

2). نعتبر النقط $E(2+3i)$ و $F(1+2i)$ و $G(-1)$ حدد قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{FE};\overline{FG}}\right)$

تمرين: نضع $i\quad 1\quad u_1$; $u_2=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

1- حدد عمدة و معيار u_1 و u_2

2- حدد عمدة و معيار $\frac{u_1}{u_2}$ و استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

3- بين أن 1 $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24}$

الحل

1- نحدد عمدة و معيار u_1 و u_2

$u_1\quad 1\quad i\quad \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\quad i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad \left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{4}\right]$

$$u_2=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{6}\right]$$

3- نحدد عمدة و معيار $\frac{u_1}{u_2}$ و نستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{\left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{6}\right]}=\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right]=\left[1;\frac{-\pi}{12}\right]$$

لدينا $$\frac{u_1}{u_2}=\frac{1-i}{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}=\frac{(2-2i)\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)i$$

ومنه $$\left[1;\frac{-\pi}{12}\right]=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)i$$

$$\begin{cases}\cos\frac{-\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{-\pi}{12}=-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\end{cases}$$ إذن $$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

3- نبين أن $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24}=1$

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24}=\left[1;\frac{\pi}{12}\right]^{24}=\left[1;\frac{24\pi}{12}\right]=\left[1;2\pi\right]=1$$

تمرين

ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ ، حدد معيار وعمدة الأعداد العقدية :

$a=-\cos\theta+i\sin\theta$; $b=\cos\theta-i\sin\theta$; $c=-\cos\theta-i\sin\theta$

$a'=\sin\theta+i\cos\theta$; $b'=\sin\theta-i\cos\theta$; $c'=-\sin\theta-i\cos\theta$; $d=-\sin\theta+i\cos\theta$

الجواب

ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ ،

$$a=-\cos\theta+i\sin\theta=\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)=[1;\pi-\theta]$$

$$b=\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=[1;-\theta]$$

$$c=-\cos\theta-i\sin\theta=\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)=[1;\pi+\theta]$$

$$d=-\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\left[1;\frac{\pi}{2}+\theta\right]$$

$$a'=\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\left[1;\frac{\pi}{2}-\theta\right]$$

$$b'=\sin\theta-i\cos\theta=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\left[1;-\frac{\pi}{2}+\theta\right]$$

$$c'=-\sin\theta-i\cos\theta=\sin(\pi+\theta)+i\cos(\pi+\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\pi+\theta)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\pi+\theta)\right)$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\left[1;-\frac{\pi}{2}-\theta\right]$$

تمرين

نعتبر $a=-4$ و $z_1=2i$ و $z_1=2-2i$

1 – حدد الشكل المثلثي لـ a و z_1 و z_2

2– تحقق أن $a+z_1^2+z_2^4=-72$

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر $A(a)$ و $B(z_1)$ و $C(z_2)$

3- 1.3) بين أن BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

2.3) حدد المجموعة (F) حيث $(F)=\{M(z)/|z+1+i|=\sqrt{10}\}$

3.3) تحقق أن A و B و C تنتمي إلى (F) ثم أنشئ BAC و (F)

الحل

2 – نحدد الشكل المثلثي لـ a و z_1 و z_2

$$a=-4=[4;\pi] \quad \text{و} \quad z_1=2i=\left[2;\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{و} \quad z_2=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[2\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$$

4.2 – نتحقق أن $a+z_1^2+z_2^4=-72$

$$a+z_1^2+z_2^4=[4;\pi]+\left[2;\frac{\pi}{2}\right]^2+\left[2\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]^4=[4;\pi]+[2;\pi]^2+\left[\left(2\sqrt{2}\right)^4;-\pi\right]=-4-4-\left(2\sqrt{2}\right)^4=-4-4-64=-72$$

3- 1.3) نبين أن BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

لدينا $A(-4)$ و $B(2i)$ و $C(2-2i)$

$$(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})\equiv\arg\left(\frac{2-2i-2i}{-4-2i}\right)\equiv\arg\left(\frac{2-4i}{-4-2i}\right)$$

$$\equiv\arg\left(\frac{i(-2i-4)}{-4-2i}\right)\equiv\arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$

$$BA=|-4-2i|=\sqrt{20}\qquad BC=|2-4i|=\sqrt{20}$$

إذن المثلث BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

2.3) نحدد المجموعة (F)

$$M(z)\in(F)\Leftrightarrow|z+1+i|=\sqrt{10}$$

$$M(z)\in(F)\Leftrightarrow \Omega M=\sqrt{10}\qquad/\Omega(1+i)$$

$$M(z)\in(F)\Leftrightarrow M\in C\left(\Omega;\sqrt{10}\right)\qquad/\Omega(-1;-1)$$

$$(F)=C\left(\Omega;\sqrt{10}\right)\qquad/\Omega(-1;-1)$$

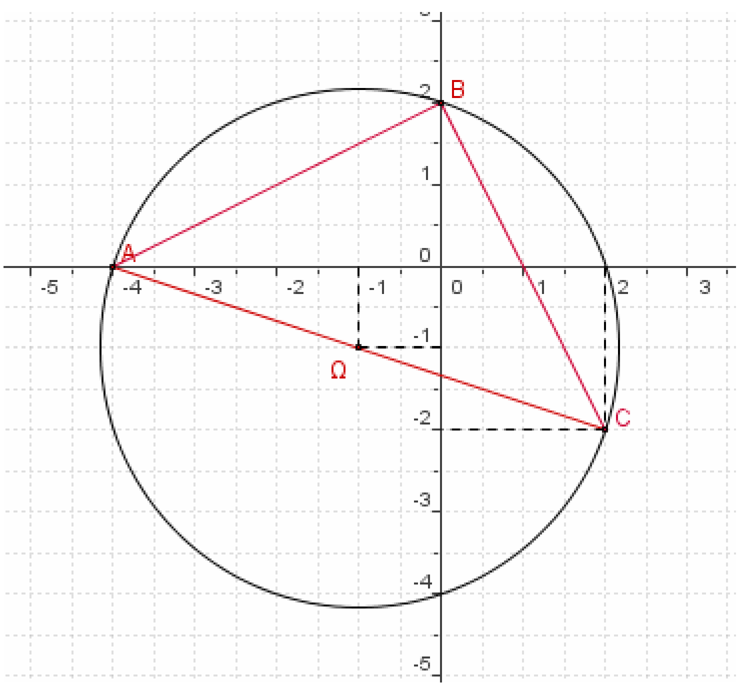
3.4) نتحقق أن $A(-4)$ و $B(2i)$ و $C(2-2i)$ تنتمي إلى (F) و ننشئ BAC و (F)

$$\Omega A=|-4+1+i|=|-3+i|=\sqrt{10}$$

$$\Omega B=|2i+1+i|=|1+3i|=\sqrt{10}$$

$$\Omega A=|2-2i+1+i|=|3-i|=\sqrt{10}$$

إذن A و B و C تنتمي إلى (F)



تمرين

في المستوى العقدي نعتبر النقط : $A(1+i)$ و B بحيث : $OA = OB$ و $[2\pi]$ $\qquad \overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv \frac{\pi}{3}$

1) اعط الشكل الجبري ل z_B .

2) احسب المسافة AB .

3) حدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة : $\widehat{(\vec{e_1},\overrightarrow{AB})}$

الجواب

1) نعطي الشكل الجبري ل z_B .

$$|z_B| = OB = OA = |1+i| = \sqrt{2}$$

$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$ و منه $[2\pi]$ $\quad \arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}$

$$\arg(z_B) \equiv \left(\overline{\vec{e}_1;\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\overline{\vec{e}_1;\overrightarrow{OA}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \arg(1+i) + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \quad [2\pi]$$

ومنه $\quad z_B = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

إذن $\quad z_B = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) نحسب المسافة AB .

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2} == \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

3) نحدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة : $\widehat{(\vec{e_1},\overrightarrow{AB})}$

$$\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A) \equiv \arg\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1 - i\right) \equiv \arg\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \quad [2\pi]$$

$$\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg\left(\sqrt{2}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\right]\right) \equiv \arg\left(\sqrt{2}\left[-\sin\frac{7\pi}{12} - i\cos\frac{7\pi}{12}\right]\right) \quad [2\pi]$$

$$\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg\left(\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12}\right]\right) \equiv \arg\left(\left[\sqrt{2};-\frac{13\pi}{12}\right]\right) \equiv -\frac{13\pi}{12} \equiv \frac{11\pi}{12} \quad [2\pi]$$

إذن القياس الرئيسي لـ $\widehat{(\vec{e_1},\overrightarrow{AB})}$ هو $\frac{11\pi}{12}$

تمرين

نعتبر المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

وليكن f المعرف على $\mathbb{C}^*$ بـ $f(z) = \frac{\overline{z}+i}{z}$

-1 حدد مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $|f(z)| = 1$

-2 نضع $z = \cos\theta + i\sin\theta$ حيث $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

-أ مثل النقط $A(i)$ و $B(z)$ و $C(\overline{z})$ و $D(\overline{z}+i)$

ب- تحقق أن $OCDA$ معين و استنتج عمدة $\overline{z}+i$ بدلالة θ ثم عمدة $f\left(z\right)$ بدلالة θ

ج- حدد معيار $f\left(z\right)$ بدلالة θ

الحل

1- نحدد مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $\left|f\left(z\right)\right|=1$.

ليكن $z\in\mathbb{C}^*$ نضع $z=x+iy$ حيث $\left(x;y\right)\in\mathbb{R}^2$ و $\left(x;y\right)\neq\left(0;0\right)$

$$\overline{z}+i=x+-iy+i=x+i\left(1-y\right)$$

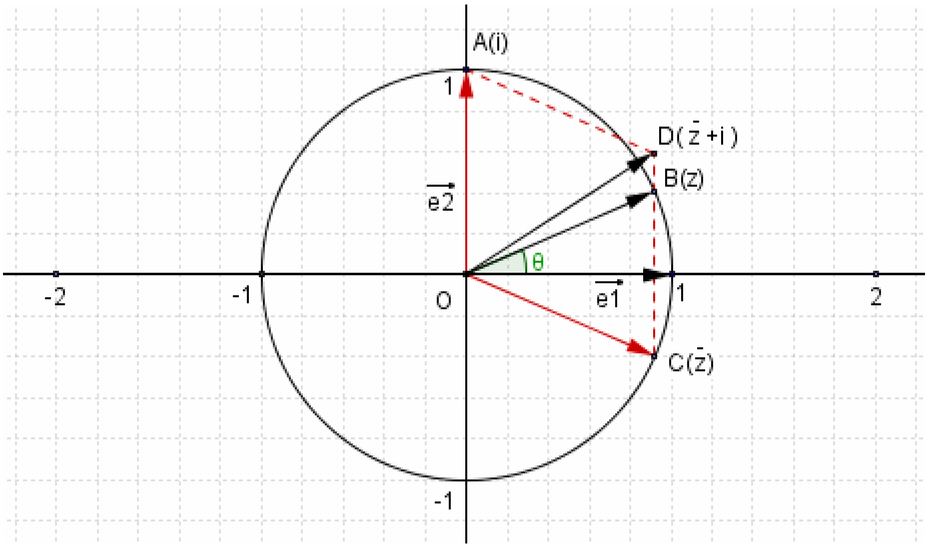
$$\left|f\left(z\right)\right|=1\Leftrightarrow\left|\frac{\overline{z}+i}{z}\right|=1\Leftrightarrow\left|\overline{z}+i\right|=\left|z\right|\Leftrightarrow x^2+\left(1-y\right)^2=x^2+y^2\Leftrightarrow 2y-1=0$$

إذن مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $\left|f\left(z\right)\right|=1$ هي المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}$

2- نضع $z=\cos\theta+i\sin\theta$ حيث $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

أ- نمثل النقط $A\left(i\right)$ و $B\left(z\right)$ و $C\left(\overline{z}\right)$ و $D\left(\overline{z}+i\right)$

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ و $B\left(z\right)$ و $C\left(\overline{z}\right)$ مثماثلان بالنسبة لمحور الافاصيل



ب- نتحقق أن $OCDA$ معين و نستنتج عمدة $\overline{z}+i$ بدلالة θ ثم عمدة $f\left(z\right)$ بدلالة θ

$AD=\left|\overline{z}\right|=1\quad;\quad CD=\left|i\right|=1\quad;\quad OA=\left|i\right|=1\quad;\quad OC=\left|\overline{z}\right|=1$ ومنه $OCDA$ معين

$\left(OD\right)$ منصف $\left[\widehat{COA}\right]$ و منه: $\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}\right)\quad\left[2\pi\right]$

$$\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\arg\left(\overline{z}\right)-\arg\left(i\right)\right)\equiv\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\quad\left[2\pi\right]$$

$$\arg\left(\overline{z}+i\right)\equiv\left(\overline{\vec{e}_1;\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\left(\overline{\vec{e}_1;\overrightarrow{OA}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}}\right)\quad\left[2\pi\right]$$

$$\arg\left(\overline{z}+i\right)\equiv\arg\left(i\right)+\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\quad\left[2\pi\right]$$

$$\arg\left(\overline{z}+i\right)\equiv-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\quad\left[2\pi\right]$$

لدينا $\arg\left(f\left(z\right)\right)=\arg\left(\frac{\overline{z}+i}{z}\right)$ و منه $\arg\left(f\left(z\right)\right)\equiv\arg\left(\overline{z}+i\right)-\arg\left(z\right)\quad\left[2\pi\right]$

$$\arg\left(f\left(z\right)\right)\quad\frac{\theta}{2}\quad\frac{\pi}{4}\quad\theta\quad\frac{3\theta}{2}\quad\frac{\pi}{4}\quad\left[2\quad\right]$$

ج- نحدد معيار $f\left(z\right)$ بدلالة θ

لدينا $z=\cos\theta+i\sin\theta$ ومنه $|z|=1$

و بالتالي $|f(z)|=\left|\frac{\overline{z}+i}{z}\right|=|\overline{z}+i|=\sqrt{\left(\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2\right)}=\sqrt{2-2\sin\theta}$

4 - الإزاحة و التحاكي و الاعداد العقدية

أ/ الازاحة

نعتبر t إزاحة متجهتها $\vec{u}$ حيث $aff(\vec{u})=a$ لتكن $M(z)$ و $M'(z')$

$$t(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u} \Leftrightarrow aff\left(\overrightarrow{MM'}\right)=aff(\vec{u}) \Leftrightarrow z'-z=a \Leftrightarrow z'=z+a$$

خاصية

التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z+a)$ من المستوى (P) هو الازاحة التي متجهتها $\vec{u}$ حيث $aff(\vec{u})=a$

تمرين

1- نعتبر الازاحة $t_{\vec{u}}$ حيث $\vec{u}(1;2)$

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوى العقدي بحيث $t_{\vec{u}}(M)=M'$

أ/ حدد z' بدلالة z

ب/ في المستوى العقدي نربط كل $M(z)$ بنقطة $M'(z')$ حيث $z'=z+1-i$

بين ان M' صورة M بإزاحة و حدد متجهتها

ب/ التحاكي

نشاط

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و k عددا حقيقيا غير منعدم

نربط النقطة $M(z)$ من المستوى بالنقطة $M'(z')$ بالتحويل h حيث $z'-\omega=k(z-\omega)$

1/ حدد النقط الصامدة بـ h

2/ حدد علاقة متجهية بين النقطتين M و M' ثم حدد طبيعة h

خاصية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و (ω) نقط من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و k عددا حقيقيا غير منعدم

التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z')$ من المستوى (P) حيث $z'-\omega=k(z-\omega)$ هو التحاكي الذي مركزه (ω) و نسبته k

تمرين

في المستوى العقدي نربط كل $M(z)$ بنقطة $M'(z')$ حيث $z'=\frac{1}{2}z+-2i$

1/ حدد ω لحق النقطة Ω حيث $\omega=\frac{1}{2}\omega+-2i$

2/ بين ان M' صورة M بتحاك h محددا عناصره المميزة

دالة اللوغاريتم

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

I- دالة اللوغاريتم النبييري

1- تذكير - نعلم أن كل دالة متصلة على مجال I تقبل دوال أصلية على I

- نعلم أن لكل r من $\mathbb{Q}-\{-1\}$ الدالة $x \to x^r$ تقبل دوال أصلية على $]0;+\infty[$ هي $x \to \frac{x^{r+1}}{r+1}+k$

حيث k عدد حقيقي ثابت

*- في الحالة التي تكون r=-1 نحصل على الدالة $x \to \frac{1}{x}$ المتصلة على $]0;+\infty[$ ومنه تقبل دوال أصلية

وبالتالي الدالة $x \to \frac{1}{x}$ تقبل دالة أصلية وحيدة تنعدم في 1.

2- تعريف

الدالة الأصلية لدالة $x \to \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في النقطة 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبييري

و يرمز لها بالرمز ln أو Log

$$\begin{cases} x \succ 0 \\ f'(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x)=\ln(x) \\ f(1)=0 \end{cases}$$

3- خاصيات

أ- خاصيات

*- مجموعة تعريف الدالة ln هي $]0;+\infty[$ ln(1)=0

*- الدالة ln متصلة على $]0;+\infty[$

*- الدالة ln قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ $\forall x \in]0;+\infty[$

*- الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

نتائج

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا x و y

$$\ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$$

$$\ln x \succ \ln y \Leftrightarrow x \succ y$$

ملاحظة

$$\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$\ln x \succ 0 \Leftrightarrow x \succ 1$$

$$\ln x \prec 0 \Leftrightarrow 0 \prec x \prec 1$$

تمرين 1- حدد مجموعة تعريف الدالتين $f:x \to \ln(x-1)+\ln(4-x)$ $g:x \to \ln(x^2-3x)$

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين $\ln(x^2+2x)=0$ $\ln(x^2-3)=\ln(2x)$

3- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين $\ln(x^2-x-2)\prec 0$ $\ln(x^2-2x)\le \ln(x)$

ب- خاصية أساسية

نشاط ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا و F دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $F(x)=\ln(ax)$

1- بين أن $F'(x)=\frac{1}{x}$ $\forall x \in]0;+\infty[$ و استنتج ان F دالة أصلية لدالة $x \to \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$

2- بين أن $F(x)=\ln(ax)=\ln a+\ln x$ $\forall x \in]0;+\infty[$ ثم استنتج $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

الجواب

1- لدينا $F(x)=\ln\circ u(x)$ حيث $u(x)=ax$

$$F'(x)=u'(x)\times(\ln)'(u(x))=a\cdot\frac{1}{ax}=\frac{1}{x} \qquad \forall x\in]0;+\infty[$$

و منه F دالة أصلية لدالة $x\to\frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$

2- لدينا F و $x\to\ln x$ دالتان أصليتان لدالة $x\to\frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$

اذن $F(x)=k+\ln x \qquad \forall x\in]0;+\infty[$

لدينا $F(1)=\ln(a)$ و $F(1)=k$ و منه $k=\ln a$

إذن $F(x)=\ln(ax)=\ln a+\ln x \qquad \forall x\in]0;+\infty[$

بوضع $x=b$ نحصل على $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

خاصية أساسية

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b \qquad \forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2$$

ج- خاصيات

$$\ln\frac{1}{x}=-\ln x \qquad \forall x\in]0;+\infty[$$

$$\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y \qquad \forall(x;y)\in]0;+\infty[^2$$

$$\ln(x_1\times x_2\times.........\times x_n)=\ln x_1+\ln x_2+....+\ln x_n \qquad \forall(x_1;x_2;....;x_n)\in]0;+\infty[^n$$

$$\ln x^r=r\ln x \qquad \forall r\in\mathbb{Q}^* \quad \forall x\in]0;+\infty[$$

البرهان

❖ $\ln\left(x\times\frac{1}{x}\right)=\ln 1\Leftrightarrow \ln x+\ln\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow \ln\frac{1}{x}=-\ln x$

❖ إذا كان $r\in\mathbb{N}^*$ فان $\ln x^r=\ln(\underbrace{x\times x\times.......\times x}_{r\quad facteurs})=\underbrace{\ln x+\ln x+.......+\ln x}_{r\quad termes}=r\ln x$

إذا كان $r\in\mathbb{Z}_-^*$ فإننا نضع $r=-n$ ومنه $\ln x^r=\ln x^{-n}=\ln\frac{1}{x^n}=-\ln x^n=-n\ln x=r\ln x$

إذا كان $\frac{p}{q}=r$ / $p\in\mathbb{Z}^*$ $q\in\mathbb{N}^*$ نعلم أن $y=x^{\frac{p}{q}}\Leftrightarrow x^p=y^q$

و منه $\ln x^p=\ln y^q$ و بالتالي $p\ln x=q\ln y$ أي $\ln y=\frac{p}{q}\ln x$ اذن $\ln x^{\frac{p}{q}}=\frac{p}{q}\ln x$

أي $\ln x^r=r\ln x$

حالة خاصة $\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x \qquad \forall x\in]0;+\infty[$

تمرين هل الدالتان f و g متساويتين في الحالتين التاليتين

a) $g(x)=2\ln|x-1| \qquad f(x)=\ln(x-1)^2$

b) $g(x)=\ln x+\ln(x-1) \qquad f(x)=\ln x(x-1)$

تمرين (1 أحسب $\ln\sqrt{\sqrt{2}+1}+\ln\sqrt{\sqrt{2}-1}$

(2 أحسب قيمة مقربة لـ $\ln\sqrt{6}$ و $\ln\frac{2}{9}$ اذا علمت أن $\ln 3\simeq 1,1$ $\qquad \ln 2\simeq 0,7$

4- دراسة دالة ln

a) دالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

b) مبرهنة1 (نقبل) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

مبرهنة2 $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

البرهان نضع $x = \frac{1}{t}$ $\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{t\to+\infty} \ln\frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty} -\ln t = -\infty$

c) العدد e

لدينا الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$ ومتصلة و $\ln(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$ و منه المعادلة $\ln x = 1$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$ ويرمز له بالحرف e اذا $\ln e = 1$

نقبل أن e ليس عددا جذريا و قيمته المقربة هي $e \simeq 2,71828$

d) جدول تغيرات الدالة ln

x	0	1	e	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	0	1	$+\infty$

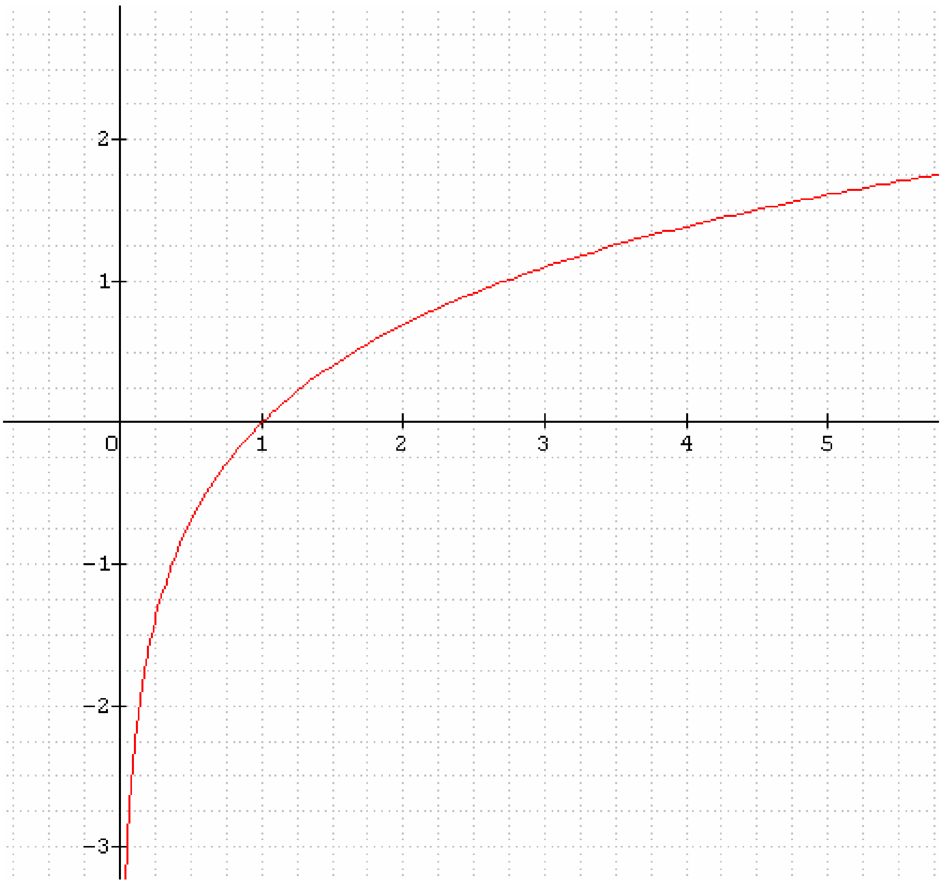
e) الفروع اللانهائية بما أن $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ فان محور الاراتيب مقارب للمنحنى الممثل الدالة ln

مبرهنة $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

اذن المنحنى الممثل لدالة ln يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

f) دراسة التقعر $(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in]0;+\infty[$ اذن منحنى الدالة ln مقعر

g) التمثيل المبياني



منحنى الدالة ln

h) نهايات هامة أخرى

خاصية

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln x=0$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$

تمرين حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0^-} x\ln\left(x^2-x\right)$

5 – مشتقة الدالة اللوغاريتمية

أ- مبرهنة

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على هذا المجال I

$$\forall x\in I\qquad \left(\ln\left|u(x)\right|\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

البرهان u لا تنعدم علىI و منه u إما موجبة قطعا على I أو سالبة قطعا على I

اذا كانت u موجبة قطعا على I فان $f(x)=\ln u(x)$ ومنه $\forall x\in I\quad f'(x)=u'(x)\ln' u(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

اذا كانت u سالبة قطعا على I فان $f(x)=\ln(-u(x))$ ومنه

$$\forall x\in I\qquad f'(x)=-u'(x)\ln'(-u(x))=\frac{-u'(x)}{-u(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

تمرين حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب مشتقتها في الحالتين التاليتين

(a $f(x)=\ln\left|x^2-4\right|$ (b $f(x)=\ln\left(x^2+2x\right)$

ب- تعريف

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على المجال I

الدالة $\dfrac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I

ج- نتيجة

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على المجال I

الدوال الأصلية لدالة $x\to\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على I هي الدوال $x\to\ln\left|u(x)\right|+c$ حيث c عدد ثابت

تمرين1 أوجد دالة أصلية لدالة f على المجال I في الحالات التالية

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x}\\ I=\left]2;+\infty\right[\end{cases}\qquad \begin{cases} f(x)=\tan(x)\\ I=\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}\qquad \begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}\\ I=\left]-1;+\infty\right[\end{cases}$$

تمرين2 أحسب الدالة المشتقة لدالة f على $\left]-1;+\infty\right[$ حيث $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{(x+2)^2}$

II- دالة اللوغاريتم للأساس a

1- تعريف

a عدد حقيقي موجب قطعا و مخالف للعدد 1

الدالة $x\to\dfrac{\ln x}{\ln a}$ المعرفة على $\left]0;+\infty\right[$ تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ونرمز لها بالرمز Log_a

$$\forall x\in\left]0;+\infty\right[\qquad Log_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}$$

ملاحظات

-* دالة اللوغاريتم النيبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e $\quad Log_e(x)=\dfrac{\ln x}{\ln e}=\ln x\quad \forall x\in\left]0;+\infty\right[$

-* $Log_a\left(a^r\right)=r\qquad Log_a(a)=1\qquad \forall r\in\mathbb{Q}\qquad \forall a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}$

2- خاصيات

بما أن لكل x من $]0;+\infty[$ $\quad Log_a(x) = k\ln x$ حيث k عدد حقيقي ثابت فان الدالة Log_a تحقق جميع الخاصيات التي تحققها الدالة $\ln$

$$\forall(x;y)\in\left(]0;+\infty[\right)^2 \qquad \forall r\in\mathbb{Q} \qquad Log_a(xy) = Log_a(x) + Log_a(y)$$

$$Log_a\left(\frac{x}{y}\right) = Log_a(x) - Log_a(y) \quad ; \quad Log_a\left(x^r\right) = rLog_a(x)$$

3- دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a

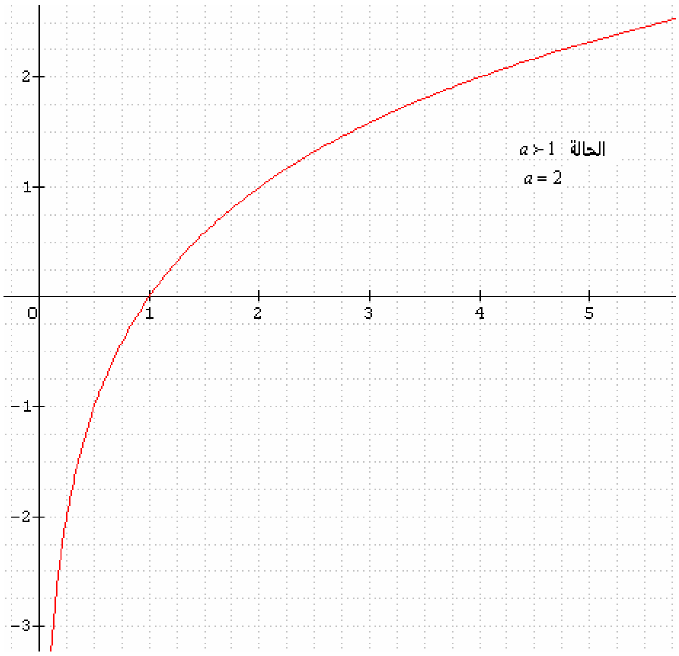
$$\forall x\in]0;+\infty[\qquad Log_a'(x) = \frac{1}{x\ln a}$$

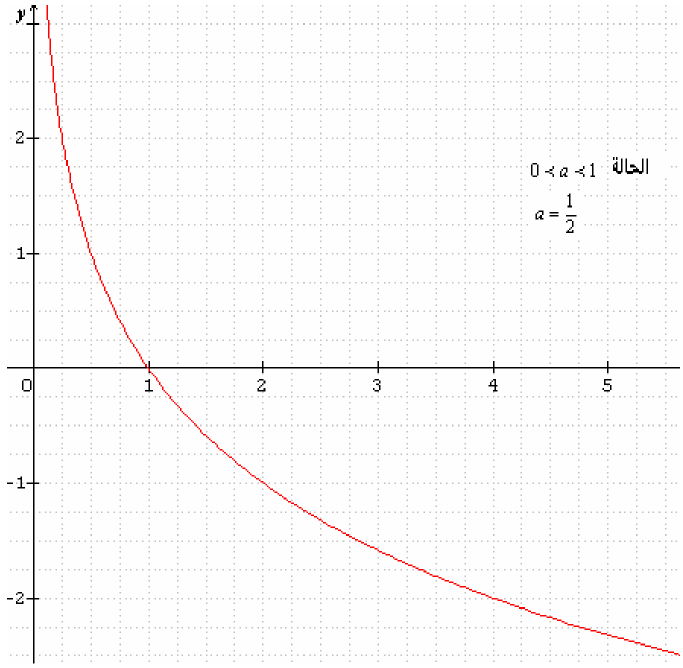
*- اذا كان $0 \prec a \prec 1$ فان $\ln a \prec 0$ و منه $Log_a' \prec 0$ $\quad \forall x \in]0;+\infty[$ اذن Log_a تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} Log_a x = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} Log_a x = +\infty$$

*- اذا كان $a \succ 1$ فان $\ln a \succ 0$ و منه $Log_a' \succ 0$ $\quad \forall x \in]0;+\infty[$ اذن Log_a تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} Log_a x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} Log_a x = -\infty$$





4- حالة خاصة اللوغاريتم العشري

تعريف

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها بـ $\log$

$$\forall x\in]0;+\infty[\qquad \log x = Log_{10}x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظات

*- اذا وضعنا $M = \dfrac{1}{\ln 10}$ فاننا نحصل على $\log x = M\ln x$ $\qquad \forall x\in]0;+\infty[\qquad (M \simeq 0,434)$

*- $\log 10^m = m \qquad \forall m\in\mathbb{Z}$

تمرين 1- أحسب $\log 10000$ $\quad \log 0,01$

2- حل في $\mathbb{R}$ $\quad \log(x-1) + \log(x+3) = 2$

3- حل في $\mathbb{R}^2$ $\quad \begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

الدّوال اللوغَاريثمية

1. تعريف :

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز : $\ln$

2. استنتاجات و خاصيات :

- $D_{\ln} =]0,+\infty[$ $\left(\ln\left(\boxed{>0}\right)\right)$
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right)$ إذن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x \leq \ln y \Leftrightarrow x \leq y$
- $\ln(1) = 0$
- يوجد عدد حقيقي وحيد من $\mathbb{R}$ نرمز له ب : e بحيث $e \simeq 2,718$ و يحقق : $\ln(e) = 1$
- $\forall x > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$
- **إشارة** $\ln x$ **:**
  - إذا كان : $0 < x < 1$ فإن $\ln x < 0$
  - إذا كان : $x \geq 1$ فإن $\ln x \geq 0$

3. العمليات على الدالة $\ln$

ليكن x و y من $]0,+\infty[$ و $r \in \mathbb{Q}$ لدينا :

- ✓ $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$
- ✓ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- ✓ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- ✓ $\ln(x^r) = r\ln(x)$

4. نهايات هامة :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0^+$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0^+$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0^-$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^n\ln x=0^-$
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$	

5. المشتقة اللوغاريتمية :

خاصية :

إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $\forall x\in I \quad U(x)\neq0$

فإن الدالة $x\mapsto\ln|U(x)|$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $\forall x\in I \quad \left(\ln|U(x)|\right)'=\dfrac{U'(x)}{U(x)}$

ملاحظة : إذا كانت U موجبة قطعا : $\left(\ln(U(x))\right)'=\dfrac{U'(x)}{U(x)}$

نتيجة :

مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{U'(x)}{U(x)}$ هي الدوال : $x\mapsto\ln|U(x)|+\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

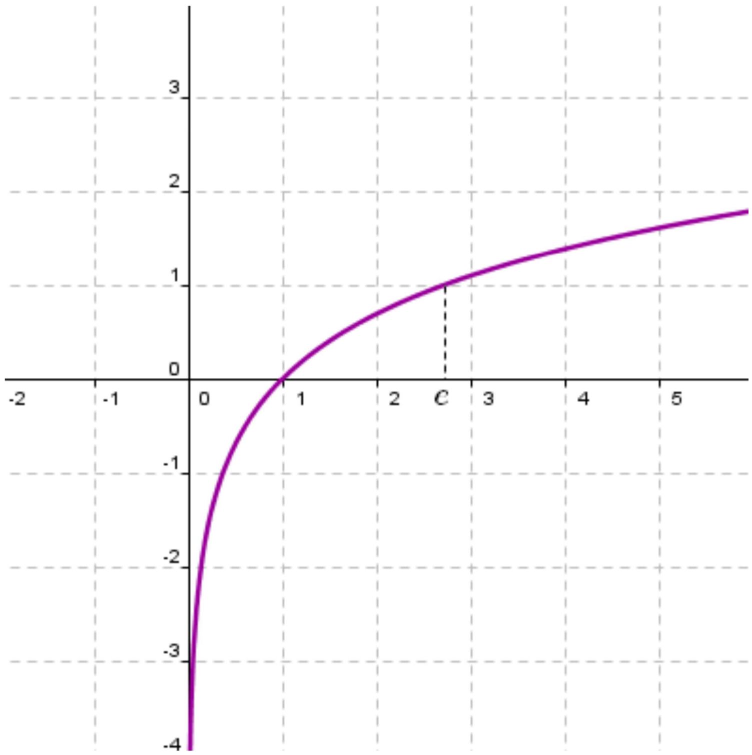
6. دراسة الدالة $\ln$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$ إذن $(C_{\ln})$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ إذن $(C_{\ln})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ و لدينا : $\ln(1)=0$ و $\ln(e)=1$

التمثيل المبياني للدالة $\ln$:



7. دالة اللوغاريتم للأساس a

أ. تعريف :

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و يخالف 1

دالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $\log_a(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a} \quad (\forall x>0)$

أمثلة : $\log_e(x)=\ln x$

$\log_a(1)=0$

$\log_a(a)=1$

ب. العمليات :

ليكن x و y من $]0,+\infty[$

1) $\log_a(x.y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$

3) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$

4) $\log_a(x^r)=r\log_a(x)$

ملاحظة : $\log_{\frac{1}{a}}(x)=-\log_a(x)$

ج. حالة خاصة :

تعريف:

دالة اللوغاريتم العشري هي دالة اللوغاريتم للأساس 10 و نرمز لها ب : $\log_{10}$ أو فقط $\log$

أمثلة : $\log(10^x)=x$

$\log(0,1)=\log(10^{-1})=-1$

د. تغيرات الدالة $\log_a$

$\log_a$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا : $\log'_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}\quad(\forall x>0)$

الحالة 1:

إذا كان $0<a<1$: الدالة $\log_a$ تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+}\log_a(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\log_a(x)=-\infty$

الحالة 2:

إذا كان $a>1$: الدالة $\log_a$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+}\log_a(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\log_a(x)=+\infty$

الدالة الأسية

I- الدالة الأسية النبيرية

1- تعاريف و خاصيات أولية

نعلم أن دالة $\ln$ تقابل من $]0;+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ و بالتالي تقبل دالة عكسية من $\mathbb{R}$ نحو $]0;+\infty[$

أ- تعريف

الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبيري تسمى الدالة الأسية النبيرية نرمز لها (مؤقتا) بالرمز $\exp$

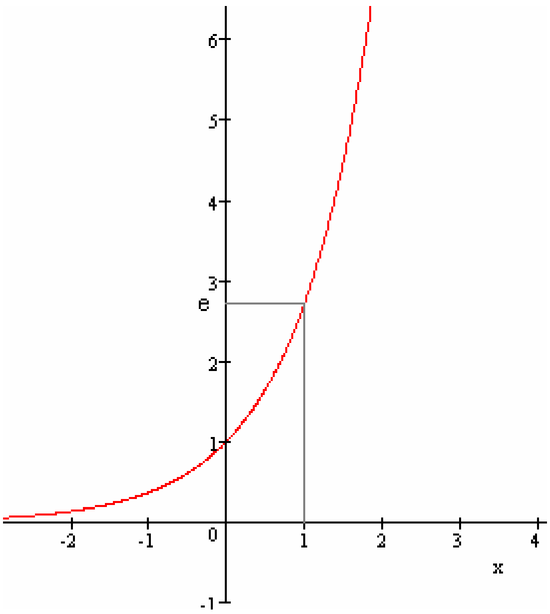
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall y \in]0;+\infty[\qquad \exp(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = x$$

ب- خاصيات أولية

* $\exp(0) = 1 \qquad \exp(1) = e$
* $\exp(x) \succ 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
* $\ln(\exp(x)) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
* $\exp(\ln(x)) = x \qquad \forall x \in]0;+\infty[$
* الدالة $\exp$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$
* $\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b \qquad \forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$
* $\exp(a) \succ \exp(b) \Leftrightarrow a \succ b \qquad \forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$

2- التمثيل المبياني لدالة exp

في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة $\ln$ و منحنى الدالة $\exp$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول



3- خاصية أساسية

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2 \qquad \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

البرهان

$$\ln(\exp(a) \times \exp(b)) = \ln \exp(a) + \ln \exp(b) = a + b$$

$$\ln \exp(a+b) = a + b$$

$$\ln(\exp(a) \times \exp(b)) = \ln \exp(a+b)$$

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

نـــــتائج

$$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2 \qquad \forall r\in\mathbb{Q} \qquad \exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}$$

$$\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(ra)=\left[\exp(a)\right]^r$$

4- كتابة جديدة لدالة exp نعلم أن $\exp(1)=e$ و بالتالي $\forall r\in\mathbb{Q} \quad \exp(r)=\left[\exp(1)\right]^r=e^r$

نمدد هده الكتابة إلى $\mathbb{R}$ أي $\forall x\in\mathbb{R} \quad \exp(x)=e^x$

الخاصيات السابقة تصبح

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \forall y\in\left]0;+\infty\right[\qquad e^x=y\Leftrightarrow x=\ln y$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \ln e^x=x \qquad \forall x\in\left]0;+\infty\right[\quad e^{\ln x}=x$$

$$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad \forall r\in\mathbb{Q} \quad e^{a+b}=e^a.e^b \qquad e^{-a}=\frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b} \qquad e^{rb}=\left(e^a\right)^r$$

$$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad e^a=e^b\Leftrightarrow a=b$$

$$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad e^a=e^b\Leftrightarrow \quad a\succ b$$

تمرين

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين $e^{x-2}=2 \quad ; \quad e^{2x}-3e^x+2=0$

2- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين $e^{x^2-x}\succ 1 \quad ; \quad e^{3x+1}-3e^{2x+1}+e^{x+1}\prec 0$

1/ نحل $\mathbb{R}$ المعادلة $e^{x-2}=2$

$e^{x-2}=2\Leftrightarrow x-2=\ln 2\Leftrightarrow x=2+\ln 2$ اذن $S=\{2+\ln 2\}$

نحل $\mathbb{R}$ المعادلة $e^{2x}-3e^x+2=0$

نضع $e^x=t$ المعادلة تصبح $t^2-3t+2=0$ $\quad t\in\mathbb{R}^{+*}$

لدينا $\Delta=1$ ومنه $t=2$ أو $t=1$

و بالتالي $e^x=2$ أو $e^x=1$

و منه $x=\ln 2$ أو $x=0$

$S=\{0;\ln 2\}$

2/ نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{x^2-x}\succ 1$

$e^{x^2-x}\succ 1\Leftrightarrow x^2-x\succ 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	0	-	0	+	

اذن $S=\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{3x+1}-3e^{2x+1}+e^{x+1}\prec 0$

$$e^{3x+1}-3e^{2x+1}+e^{x+1}\prec 0\Leftrightarrow e^{x+1}\left(e^{2x}-3e^x+1\right)\prec 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-3e^x+1\prec 0$$

نضع $e^x=t$

المتراجحة تصبح $t^2-3t+2\prec 0$ $\quad t\in\mathbb{R}^{+*}$

t	0		1		2		$+\infty$
t^2-3t+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه $t^2-3t+2 \prec 0 \Leftrightarrow 1 \prec t \prec 2$ $\quad t \in \mathbb{R}^{+*}$

و بالتالي $1 \prec e^x \prec 2$ ومنه $0 \prec x \prec \ln 2$

إذن $S =]0;\ln 2[$

5- مشتقة الدالة الأسية النيبيرية

أ- بما أن دالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و مشتقتها لا تنعدم على $]0;+\infty[$ فان الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$\left(e^x\right)' = \frac{1}{\ln'\left(e^x\right)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

خاصية

الدالة $x \to e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\left(e^x\right)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ب- خاصية

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدالة $x \to e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I $\left[e^{u(x)}\right]' = u'(x)e^{u(x)} \quad \forall x \in I$

أمثلة حدد الدالة المشتقة للدالة f في الحالتين التاليتين

a) $f(x) = e^{3x^2-x}$

$$f'(x) = \left(3x^2-x\right)'e^{3x^2-x} = (6x-1)e^{3x^2-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $f(x) = e^{x-x\ln x}$

$$f'(x) = (x-x\ln x)'e^{x-x\ln x} = (1-\ln x-1)e^{x-x\ln x} = (-\ln x)e^{x-x\ln x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

6- نهايات هامة

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

نبين $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

نضع $t = e^x$ ومنه $x = \ln t$

وحيث أن $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0^+$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{\ln t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln t}{t}} = +\infty$

<u>تمرين</u> حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

الجواب

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{e^x} = 0 \times 0 = 0$$

نضع $t = \frac{1}{x}$ ومنه $x = \frac{1}{t}$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^t-1}{t} = 1$

تمرين أدرس و مثل مبيانيا الدالتين f و g حيث $f(x)=\frac{e^x}{x}$ $\quad g(x)=\frac{e^x-1}{e^x}$

II- الدالة الأسية للأساس a

1- تعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و مخالفا للعدد1

الدالة العكسية للدالة Log_a تسمى الدالة الأسية للأساس a و يرمز لها بالرمز $\exp_a$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \forall y\in]0;+\infty[\qquad \exp_a(x)=y\Leftrightarrow Log_a(y)=x$$

ملاحظة

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \forall y\in]0;+\infty[\qquad \exp_a(x)=y\Leftrightarrow Log_a(y)=x\Leftrightarrow x=\frac{\ln y}{\ln a}\Leftrightarrow \ln y=x\ln a\Leftrightarrow y=e^{x\ln a}$$

اذن $\exp_a(x)=e^{x\ln a}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$

(هذا يعني أن دالة $\exp_a$ هي تركيب الدالة الخطية $x\to x\ln a$ و الدالة الأسية النيبيرية)

2- خاصيات

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad \forall r\in\mathbb{Q}\quad \exp_a(x+y)=\exp_a(x)\times\exp_a(y)\qquad \exp_a(-x)=\frac{1}{\exp_a(x)}$$

$$\exp_a(x-y)=\frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}\qquad \exp_a(rx)=(\exp_a(x))^r$$

3- كتابة أخرى للعدد $\exp_a$

$$\forall a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}\quad \exp_a(1)=a\qquad (Log_a(a)=1)$$

$$\forall r\in\mathbb{R}\quad \forall a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}\qquad \exp_a(r)=[\exp_a(1)]^r=a^r$$

نمدد هذه الكتابة الى $\mathbb{R}$ فنكتب $\exp_a(x)=a^x$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \forall y\in]0;+\infty[\qquad a^x=y\Leftrightarrow x=Log_a(y)$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \forall a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}\qquad a^x=e^{x\ln a}$$

دراسة الدالة $x\to a^x$

ليكن $a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}$

* الدالة $x\to a^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $(a^x)'=a^x\ln a$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$

الحالة1 اذا كان $a\succ1$ فان $\ln a\succ0$ ومنه الدالة $x\to a^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

و $\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty}a^x=0$

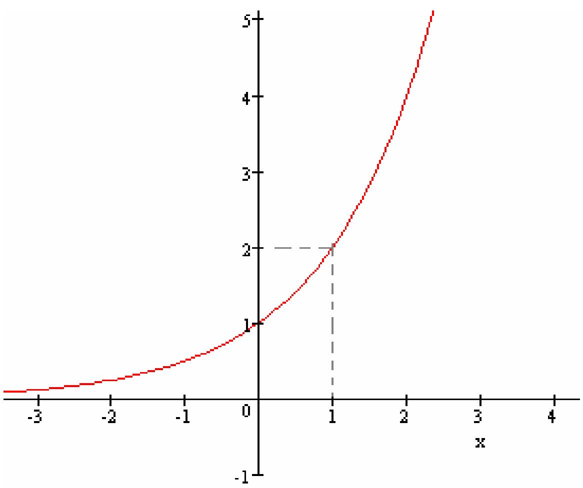
الحالة2 اذا كان $0\prec a\prec1$ فان $\ln a\prec0$

ومنه الدالة $x\to a^x$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

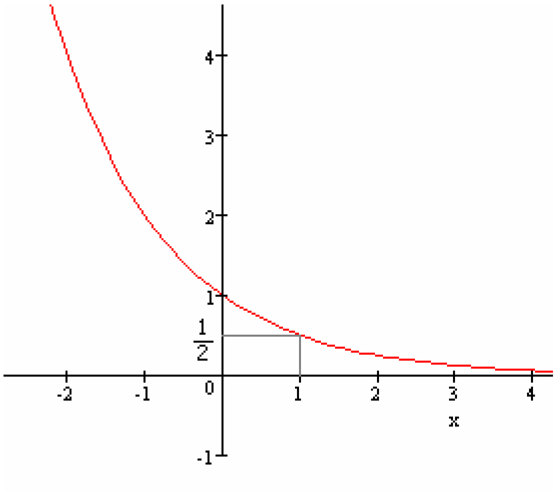
و $\lim_{x\to+\infty}a^x=0$ $\quad \lim_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

التمثيل المبياني

$a\succ1$ $\quad (a=2)$



$0 \prec a \prec 1 \qquad \left(a = \dfrac{1}{2}\right)$



<u>ملاحظة</u> نلاحظ $1^x = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ و بالتالي نكتب $a^x = e^{x \ln a}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$

الدّوَال الأسّية

1. الدالة الأسية النبيرية:

أ. تعريف:

الدالة العكسية للدالة $\ln$ تسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها ب : $\exp$

ملاحظة: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x$

ب. نتائج :

- $\begin{cases} x = \ln(y) \\ (y > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = y \\ (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$
- $\exp : \mathbb{R} \mapsto]0,+\infty[$
 $x \mapsto \exp(x)$
- $D_{\exp} = \mathbb{R}$ و $\forall x \in \mathbb{R} : \quad e^x > 0$
- ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :
  - $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
  - $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$
  - $e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$
- $\forall x > 0 : e^{\ln x} = x$
- $e^0 = 1$ و $e^1 = e$

ج. العمليات :

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

1) $e^x \times e^y = e^{x+y}$

2) $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

3) $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$

4) $(e^x)^r = e^{rx} \qquad (r \in \mathbb{Q})$

د. النهايات:

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$ $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ & n: pair \\ 0^- & n: impair \end{cases}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	

ه. الاشتقاق و الأصلية:

1) الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (e^x)' = e^x$

2) إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{U(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

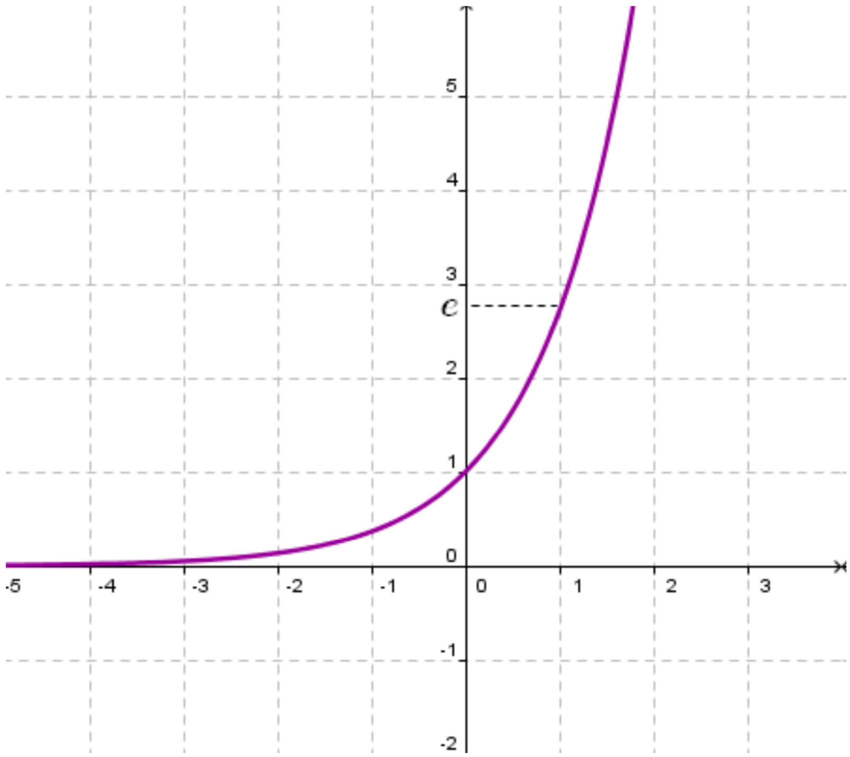
$$(\forall x \in I) \quad \left(e^{U(x)}\right)' = U'(x)e^{U(x)}$$

3) $(\forall x \in I) \quad (e^{rx})' = re^{rx}$

4)

الدالة	الأصلية
e^x	e^x
e^{rx}	$\frac{1}{r}e^{rx}$
$U'(x)e^{U(x)}$	$e^{U(x)}$

و. التمثيل المبياني للدالة exp



2. الدالة الأسية للأساس a حيث $a>0$ و $a\neq 1$:

أ. تعريف :

الدالة الأسية للأساس a هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\forall x\in\mathbb{R}\quad \exp_a(x)=a^x$

ب. نتائج :

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\quad \exp_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\quad \ln\left(a^x\right)=x\ln a$

❖ $\begin{cases} \exp_a(x)=y \\ (x\in\mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\log_a(y) \\ (y>0) \end{cases}$

❖ $a^x=a^y \quad\Leftrightarrow\quad x=y$

ج. العمليات :

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

❖ $a^x \times a^y = a^{x+y}$	❖ $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$
❖ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	❖ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

د. الإشتقاق و التغيرات :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(a^x\right)' = \ln a \times a^x$$

نتيجة :

- إذا كان : $a > 1$
  فإن $\exp_a$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$
  و لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = 0$

- إذا كان : $0 < a < 1$
  فإن $\exp_a$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$
  و لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = +\infty$

R

الـدالة الأسيــة للأســـاس a

تـمـهيــد :

لتكن $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

نعلم أن الدالة $(x \mapsto \log_a x)$ متصلة ورتيبة قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

إذن : هي تقابـل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

ومنه فهي تقبل دالة عكسية معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+^*$.

تعريــف :

الدالة العكسية للدالة $(x \mapsto \log_a x)$ تسمى الدالة الأسية للأساس a ، ونرمز لها بـ $(x \mapsto \exp_a(x))$.

استنتــاج :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp_a(y)$$

ملاحظـة :

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \exp_a(x) = a^x$

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^x = e^{x \ln a}$

3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad 1^x = 1$

4) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^x \succ 0$

دراسـة الـدالــة $f(x \mapsto a^x)$

1- مجموعـة التعريــف :

$$D = \mathbb{R} =]-\infty \, , \, +\infty[$$

2- النهـايــات :

• الحـالـة **1** : $a \succ 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = 0$$

• الحـالـة **2** : $0 \prec a \prec 1$

$$\lim_{+\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{-\infty} a^x = +\infty$$

3- التغيــرات :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^x = e^{x \ln a}$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x$

ومنه إشارة $(a^x)'$ هـي إشارة $\ln a$.

ملاحظة :

لدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \quad (a^x)'' = (\ln a \cdot a^x)' = \ln^2 a \cdot a^x \succ 0$$

- **الحالـة 1 :** $a \succ 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- **الحالـة 2 :** $0 \prec a \prec 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$(a^x)'$		$-$	
a^x	$+\infty$	$\searrow$	0

تطبيقـات :

أحسب النهايات التاليــة :

(1

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

نضع : $X = \dfrac{1}{x}$

$$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to 0)$$

إذن : $\displaystyle \lim_{X\to 0} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} = e^1 = e$

(2

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$= e^1 = e$$

(3

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

حدد مشتقـة الدالة f في الحـالات التاليـة :

(1 $f(x) = 4^x$

إذن :

$$f(x) = e^{x \ln 4}$$
$$f'(x) = (\ln 4) \cdot e^{x \ln 4}$$
$$= (\ln 4) \cdot 4^x$$

(2 $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$

إذن :

$$f(x) = \frac{e^{x \ln 2}}{x}$$
$$f'(x) = \frac{(\ln 2) \times 2^x \times x - 2^x}{x^2}$$
$$= \frac{(x \ln 2 - 1)\, 2^x}{x^2}$$

(3 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

إذن :

$$f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$$
$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \cdot e^{\frac{\ln x}{x}}$$
$$= \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot e^{\frac{\ln x}{x}}$$

(4 $f(x) = 3^{1-x}$

لدينا :

$$f(x) = e^{(1-x)\ln 3}$$

إذن :

$$f'(x) = \big((1-x) \cdot \ln 3\big)' \cdot 3^{1-x}$$
$$= -\ln 3 \cdot 3^{1-x}$$

(5 $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

لدينا :

$$f(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

إذن :

$$f'(x) = \left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)' \cdot e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$
$$= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x}{x}}\right) \cdot e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$
$$f'(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1 + x}\right) \cdot e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

R

المعادلات التفاضلية

I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها

المجهول دالة وتحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.

يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز y (وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل u , z , f ....)

حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هده المعادلة , و مجموعة هده الدوال تسمى الحل العام للمعادلة ، كل عنصر من هده المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة , كل حل يسمى كذلك تكاملا.

2- أمثلة

أ) $y'=0$ هي معادلة تفاضلية

الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $y(x)=1$ حل خاص للمعادلة

مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$ هي الحل العام للمعادلة $y'=0$.

ب) $y'=x^2-1$ هي معادلة تفاضلية ذات المجهول y (يمكن أن نكتب $y'(x)=x^2-1$)

حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة $x \to x^2-1$ على $\mathbb{R}$.

أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x \to \frac{1}{3}x^2-x+k$

حيث k عدد حقيقي اعتباطي .

II – حل المعادلة التفاضلية y´=ay+b

1/ المعادلة التفاضلية y´=ay

* اذا كان $a=0$ فان $y'=0$ أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$

* اذا كان $a\neq 0$

نعلم أن $\left(e^{ax}\right)'=ae^{ax}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ادن $x\to e^{ax}$ حل خاص للمعادلة $y'+ay=0$

ليكن y حلا اعتباطيا للمعادلة $y'+ay=0$ نضع $y(x)=z(x)e^{ax}$

ومنه $y'(x)=z'(x)e^{ax}+az(x)e^{ax}$

أي $y'(x)=z'(x)e^{ax}+ay(x)$ و بالتالي $y'(x)-ay(x)=z'(x)e^{ax}=0$

و منه $z'(x)=0$ و بالتالي $z(x)=\lambda$ $\forall x\in\mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن $y(x)=\lambda e^{ax}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

نلاحظ أن الحالة $a=0$ هي ضمن الحالة العامة .

خاصية

المعادلة التفاضلية $y'=ay$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x\to\lambda e^{ax}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y'=ay$ يحقق الشرط $y(x_0)=y_0$ و هي الدالة $x\to y_0e^{a(x-x_0)}$

الشرط $y(x_0)=y_0$ يسمى الشرط البدئي

أمثلة

1- نحل المعادلة التفاضلية $y'=2y$

حلول المعادلة التفاضلية $y'=2y$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to\lambda e^{2x}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

R

2- نحل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{3}y$; $y(1)=2$

حل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{3}y$; $y(1)=2$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to 2e^{\frac{1}{3}(x-1)}$

2/ حل المعادلة التفاضلية y´=ay+b

اذا كان $a=0$ فان $y'=b$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال f حيث $f(x)=bx+c$

اذا كان $a\neq 0$ فان $y'=ay+b \Leftrightarrow y'=a\left(y+\frac{b}{a}\right)$

نضع $z=y+\frac{b}{a}$ و منه $z'=y'$

$$y'=ay+b \Leftrightarrow z'=az$$

$$\Leftrightarrow z(x)=\lambda e^{ax} \quad /\lambda\in\mathbb{R}$$

وبالتالي $$\Leftrightarrow y(x)+\frac{b}{a}=\lambda e^{ax} \quad /\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(x)=\lambda e^{ax}-\frac{b}{a} \quad /\lambda\in\mathbb{R}$$

خاصية

ليكن a و b عددين حقيقين حيث $a\neq 0$

المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x\to\lambda e^{ax}-\frac{b}{a}$

حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y'=ay+b$ يحقق الشرط $y(x_0)=y_0$ و هي الدالة $x\to\left(y_0+\frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)}-\frac{b}{a}$

الشرط $y(x_0)=y_0$ يسمى الشرط البدئي

مثال

نحل المعادلة التفاضلية $y'=-3y+2$

حلول المعادلة التفاضلية $y'=-3y+2$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to\lambda e^{-3x}+\frac{2}{3}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

III- حل المعادلات التفاضلية y"+ay'+by=0

1- المعادلات التفاضلية y"+ay'+by=0 حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

2- بعض الحالات الخاصة

*- اذا كان $a=b=0$ فان $y''=0$

$$y''=0 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R} \quad y'(x)=k \Leftrightarrow \exists(k;k')\in\mathbb{R}^2 \quad y(x)=kx+k'$$

الحل العام للمعادلة $y''=0$ هي مجموعة الدوال $x\to kx+k'$ بحيث $(k;k')\in\mathbb{R}^2$

*- اذا كان $b=0$ فان $y''+ay'=0$

$y''+ay'=0 \Leftrightarrow (y')'+ay'=0$ ومنه y' حل للمعادلة $z'+az=0$

و بالتالي $y'(x)=\lambda e^{-ax}$ بحيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن الحل العام للمعادلة $y''+ay'=0$ هي الدوال الأصلية $x\to\lambda e^{-ax}$

أي الدوال $x\to\frac{-\lambda}{a}e^{-ax}+\mu \qquad (\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$

3 – حل المعادلة التفاضلية $E: y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b)\neq(0;0)$

a)- تذكير لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجال I

تكون f و g متناسبتين اذا و فقط اذا كان $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad g(x) = kf(x)$

b) ليكن y_1 و y_2 حلين للمعادلة E و ليكن $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ بين أن $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E

خاصية

اذا كان y_1 و y_2 حلين للمعادلة $E: \quad y''+ay'+by=0$ و كان $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ فان $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E.

خاصية

كل حل للمعادلة التفاضلية $E: \quad y''+ay'+by=0$ هو تأليفة خطية لحلين غير متناسبين للمعادلة E.

ملاحظة لايجاد حل العام للمعادلة التفاضلية $E: \quad y''+ay'+by=0$ يكفي أن نجد حلين خاصين غير متناسبين

d)– حل المعادلة التفاضلية $E: y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$

لنبحث عن حلول من نوع $y: x \to e^{rx} \quad ; r \in \mathbb{R}$

y حل للمعادلة $E \Leftrightarrow r^2e^x + are^x + be^x = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$

اذن اذا كان r حل للمعادلة $r^2 + ar + b = 0$ فان الدالة $x \to e^{rx}$ حل للمعادلة E

خاصية

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $E: y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$

مميز هذه المعادلة هو $a^2 - 4b$

الحالة 1 اذا كان $a^2 - 4b \succ 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل حلين مختلفين r_1 و r_2 .

الدالتان $x \to e^{r_1x} \quad ; \quad x \to e^{r_2x}$ حلان خاصان للمعادلة التفاضلية E

نلاحظ أن $x \to e^{r_1x} \quad ; \quad x \to e^{r_2x}$ غير متناسبين

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \to \alpha e^{r_1x} + \beta e^{r_2x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

الحالة 2 اذا كان $a^2 - 4b = 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل حل مزدوج r .

الدالة $x \to e^{rx}$ حل للمعادلة E . نبين أن $x \to xe^{rx}$ حل للمعادلة E .

الدالتان $x \to e^{rx}$ و $x \to xe^{rx}$ غير متناسبتين لأن $x \to x\dfrac{e^{rx}}{e^{rx}}$ غير ثابتة.

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \to (\alpha + \beta x)e^{rx}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

الحالة 3 اذا كان $a^2 - 4b \prec 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq \quad (q \neq 0)$

$$e^{r_1x} = e^{px}(\cos qx + i\sin qx) = e^{px}\cos qx + ie^{px}\sin qx$$

نبين أن الدالتين $x \to e^{px}\sin x \quad ; \quad x \to e^{px}\cos x$ حلين للمعادلة E.

لاحظ $\left(q = \dfrac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \quad ; \quad p = -\dfrac{a}{2} \right)$

و بما أن الدالتين $x \to e^{px}\sin x \quad ; \quad x \to e^{px}\cos x$ غير متناسبتين فان حلول المعادلة التفاضلية

E هي الدوال $x \to e^{px}(\alpha\cos qx + \beta sixqx)$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

خاصية

لتكن المعادلة التفاضلية E: $E: y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$ و لتكن $r^2 + ar + b = 0$

المعادلة المميزة

*- اذا كان $a^2 - 4b \succ 0$ فان المعادلة المميزة لها جدرين مختلفين $r_1 \quad ; \quad r_2$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \to \alpha e^{r_1x} + \beta e^{r_2x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b = 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r .

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \to (\alpha + \beta x)e^{rx}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b \prec 0$ فان المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$

R

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \to e^{px}(\alpha \cos qx + \beta sixqx)$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

الحل الذي يحقق $y(x_0) = y_0 \quad ; \quad y'(x_0) = y'_0$

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين $y(x_0) = y_0 \quad ; \quad y'(x_0) = y'_0$

الشرطان $y(x_0) = y_0 \quad ; \quad y'(x_0) = y'_0$ يسميان الشرطين البدئيين .

يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

ملاحظة

لدينا $\alpha \cos qx + \beta \sin qx = k\left(\frac{\alpha}{k}\cos qx + \frac{\beta}{k}\sin qx\right) = k(\cos\varphi \cos qx + \sin\varphi \sin qx) = k\cos(qx - \varphi)$

بوضع $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad ; \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{k} \quad ; \quad \cos\varphi = \frac{\alpha}{k}$

تستنتج اذا كان $a^2 - 4b \prec 0$ فان $x \to ke^{px}\cos(qx - \varphi)$ حيث k و φ اعتباطيان

تمرين 1- حل المعادلة $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$ و حدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 1 \quad ; \quad y_1'(0) = -1$

2- حل المعادلة $y'' + 4y' + 4y = 0$

3- حل المعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$

الجواب

1- ليكن Δ مميز $r^2 + 2r - \frac{5}{4} = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$

$\Delta = 4 + 5 = 9$ ومنه $r_1 = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$ و $r_2 = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2}$

ومنه حلول المعادلة هي الدوال $x \to \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{5}{2}x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

لنحدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 1 \quad ; \quad y_1'(0) = -1$

لدينا $y_1(x) = \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{5}{2}x}$ ومنه $y'_1(x) = \frac{\alpha}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5\beta}{2}e^{-\frac{5}{2}x}$

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{5\beta}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - 5\beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

اذن $y_1(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{5}{2}x}\right)$

2- مميز $r^2 + 4r + 4 = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y'' + 4y' + 4y = 0$ منعدم ومنه $r = -2$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \to (\alpha + \beta x)e^{-2x}$ حيث حيث α و β عددان اعتباطيان

3- مميز $r^2 + 2r + 5 = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$ هو $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$

ومنه $r_1 = -1 - 2i$ و $r_2 = -1 + 2i$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \to e^{-x}(\alpha \cos 2x + \beta six2x)$ حيث حيث α و β عددان اعتباطيان

حالات خاصة

-* اذا كان $a \succ 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x \to \alpha \cos\sqrt{a}x + \beta \sin\sqrt{a}x$ حيث $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

-* اذا كان $a \prec 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x \to \alpha e^{\sqrt{-a}x} + \beta e^{-\sqrt{-a}x}$ حيث $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

مثال حل المعادلتين $y''+2y=0$; $y''-4y=0$

حلول المعادلة $y''+2y=0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \to \alpha\cos\sqrt{2}x+\beta\sin\sqrt{2}x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

حلول المعادلة $y''-4y=0$ $y''+2y=0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \to \alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

المعادلات التفاضلية

I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة وتحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.
هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.
يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز y (وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل u , z , f ....)
حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة , و مجموعة هده الدوال تسمى الحل العام للمعادلة ، كل عنصر من هده المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة , كل حل يسمى كذلك تكاملا.

2- أمثلة

أ) $y'=0$ هي معادلة تفاضلية

الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $y(x)=1$ حل خاص للمعادلة

مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$ هي الحل العام للمعادلة $y'=0$.

ب) $y'=x^2-1$ هي معادلة تفاضلية ذات المجهول y (يمكن أن نكتب $y'(x)=x^2-1$)

حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة $x\to x^2-1$ على $\mathbb{R}$.

أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x\to \frac{1}{3}x^2-x+k$

حيث k عدد حقيقي اعتباطي .

II – حل المعادلة التفاضلية y´=ay+b

1/ المعادلة التفاضلية y´=ay

* اذا كان $a=0$ فان $y'=0$ أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$

* اذا كان $a\neq 0$

نعلم أن $\left(e^{ax}\right)'=ae^{ax}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ادن $x\to e^{ax}$ حل خاص للمعادلة $y'-ay=0$

ليكن y حلا اعتباطيا للمعادلة $y'-ay=0$ نضع $y(x)=z(x)e^{ax}$

ومنه $y'(x)=z'(x)e^{ax}+az(x)e^{ax}$

أي $y'(x)=z'(x)e^{ax}+ay(x)$ و بالتالي $y'(x)-ay(x)=z'(x)e^{ax}=0$

و منه $z'(x)=0$ و بالتالي $z(x)=\lambda$ $\forall x\in\mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن $y(x)=\lambda e^{ax}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

نلاحظ أن الحالة $a=0$ هي ضمن الحالة العامة .

خاصية

المعادلة التفاضلية $y'=ay$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x\to\lambda e^{ax}$
حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y'=ay$ يحقق الشرط $y(x_0)=y_0$ و هي الدالة $x\to y_0e^{a(x-x_0)}$
الشرط $y(x_0)=y_0$ يسمى الشرط البدئي

أمثلة

1- نحل المعادلة التفاضلية $y'=2y$

حلول المعادلة التفاضلية $y'=2y$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to\lambda e^{2x}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

2- نحل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{3}y$; $y(1)=2$

حل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{3}y$; $y(1)=2$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to 2e^{\frac{1}{3}(x-1)}$

2/ حل المعادلة التفاضلية y´=ay+b

اذا كان $a=0$ فان $y'=b$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال f حيث $f(x)=bx+c$

اذا كان $a \neq 0$ فان $y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$

نضع $z = y + \frac{b}{a}$ و منه $z' = y'$

وبالتالي $y' = ay + b \Leftrightarrow z' = az \Leftrightarrow z(x) = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \quad / \lambda \in \mathbb{R}$

خاصية

ليكن a و b عددين حقيقين حيث $a \neq 0$

المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \to \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$

حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' = ay + b$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ و هي الدالة $x \to \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

مثال

نحل المعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x \to \lambda e^{-3x} + \frac{2}{3}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

III- حل المعادلات التفاضلية y"+ay'+by=0

1- المعادلات التفاضلية y"+ay'+by=0 حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

2- بعض الحالات الخاصة

*- اذا كان $a = b = 0$ فان $y'' = 0$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad y'(x) = k \Leftrightarrow \exists (k;k') \in \mathbb{R}^2 \quad y(x) = kx + k'$$

الحل العام للمعادلة $y'' = 0$ هي مجموعة الدوال $x \to kx + k'$ بحيث $(k;k') \in \mathbb{R}^2$

*- اذا كان $b = 0$ فان $y'' + ay' = 0$

$y'' + ay' = 0 \Leftrightarrow (y')' + ay' = 0$ ومنه y' حل للمعادلة $z' + az = 0$

و بالتالي $y'(x) = \lambda e^{-ax}$ بحيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن الحل العام للمعادلة $y'' + ay' = 0$ هي الدوال الأصلية $x \to \lambda e^{-ax}$

أي الدوال $x \to \frac{-\lambda}{a}e^{-ax} + \mu \qquad (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$

3 – حل المعادلة التفاضلية $E : y'' + ay' + by = 0 \quad ; \quad (a;b) \neq (0;0)$

لنبحث عن حلول من نوع $y : x \to e^{rx} \quad ; \quad r \in \mathbb{R}$

y حل للمعادلة $E \Leftrightarrow r^2 e^x + are^x + be^x = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$

اذن اذا كان r حل للمعادلة $r^2 + ar + b = 0$ فان الدالة $x \to e^{rx}$ حل للمعادلة E

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $E : y'' + ay' + by = 0 \quad ; \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$

مميز هذه المعادلة هو $a^2 - 4b$

نشاط

1- أ/ حل المميزة للمعادلة $y'' + 3y' - 4y = 0 \quad :(E_1)$ و استنتج حلين للمعادلة (E_1)

ب/ بين ان الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \to \alpha e^{x} + \beta e^{-4x}$ حل للمعادلة التفاضلية (E_1) حيث $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

2- أ/ حل المميزة للمعادلة $y'' - 6y' + 9y = 0 \quad :(E_2)$

ب/ بين ان الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \to (\alpha + \beta x)e^{3x}$ حل للمعادلة التفاضلية (E_1) حيث $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

3- أ/ حل المميزة للمعادلة $y''+4y'+13y=0 \quad (E_3):$

ب/ بين ان الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f:x\to e^{-2x}\cos 3x$ و $g:x\to e^{-2x}\sin 3x$ حلين للمعادلة التفاضلية (E_3)

ج/ بين ان الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x\to \alpha f+\beta g$ حل للمعادلة التفاضلية (E_1) حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

خاصة

لتكن المعادلة التفاضلية E: $E:y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b)\in\mathbb{R}^2$ و لتكن $r^2+ar+b=0$ المعادلة المميزة

-* اذا كان $a^2-4b\succ 0$ فان المعادلة المميزة لها جدرين مختلفين $r_1 \quad ; \quad r_2$

و حلول المعادلة التفاضليةE هي الدوال $x \to \alpha e^{r_1 x}+\beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

-* اذا كان $a^2-4b=0$ فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r .

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x\to(\alpha+\beta x)e^{rx}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

-* اذا كان $a^2-4b\prec 0$ فان المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين $r_1=p+iq$ و $r_2=p-iq$

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x\to e^{px}(\alpha\cos qx+\beta sixqx)$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

الحل الذي يحقق $y(x_0)=y_0 \quad ; \quad y'(x_0)=y'_0$

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين $y(x_0)=y_0 \quad ; \quad y'(x_0)=y'_0$

الشرطان $y(x_0)=y_0 \quad ; \quad y'(x_0)=y'_0$ يسميان الشرطين البدئيين .

يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

ملاحظة

لدينا $\alpha\cos qx+\beta\sin qx=k\left(\frac{\alpha}{k}\cos qx+\frac{\beta}{k}\sin qx\right)=k(\cos\varphi\cos qx+\sin\varphi\sin qx)=k\cos(qx-\varphi)$

بوضع $k=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad ; \quad \sin\varphi=\frac{\beta}{k} \quad ; \quad \cos\varphi=\frac{\alpha}{k}$

تستنتج اذا كان $a^2-4b\prec 0$ فان $x\to ke^{px}\cos(qx-\varphi)$ حيث k و φ اعتباطيان

تمرين 1- حل المعادلة $y''+2y'-\frac{5}{4}y=0$ و حدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0)=1 \quad ; \quad y_1'(0)=-1$

2- حل المعادلة $y''+4y'+4y=0$

3- حل المعادلة $y''+2y'+5y=0$

حالات خاصة

-* اذا كان $a\succ 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y''+ay=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x\to\alpha\cos\sqrt{a}x+\beta\sin\sqrt{a}x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

-* اذا كان $a\prec 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y''+ay=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x\to\alpha e^{\sqrt{-ax}}+\beta e^{-\sqrt{-ax}}$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

مثال حل المعادلتين $y''+2y=0 \quad ; \quad y''-4y=0$

لحلول المعادلة $y''+2y=0$ هي الدوال المعرفة بـ $x\to\alpha\cos\sqrt{2}x+\beta\sin\sqrt{2}x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

لحلول المعادلة $y''-4y=0$ $y''+2y=0$ هي الدوال المعرفة بـ $x\to\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

R

التكامـــل

I- تكامل دالة متصلة على مجال

1- تعريف و ترميز

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I .

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فان F(b)-F(a)=G(b)-G(a).

أي أن العدد الحقيقي F(b)-F(a) غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية F.

تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I.

العدد الحقيقيF(b)-F(a) حيث F دالة أصلية للدالة f علىI , يسمى تكامل الدالة f من a إلى b

ويكتب $\int_a^b f(x)dx$ ويقرأ مجموع $f(x)dx$ من a إلى b أو تكامل من a إلى b لـ $f(x)dx$.

a وb يسميا محدا التكامل $\int_a^b f(x)dx$

في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض x بأي حرف آخر ، بمعنى أن

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots\dots$$

من أجل تبسيط الكتابة F(b)-F(a) نكتبها على الشكل $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

أمثلة

* نحسب $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

الدالة $x \to \frac{1}{x}$ متصلة على $[1;2]$ و دالة أصلية لها هي $x \to \ln x$

اذن $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$

* أحسب $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x dx$; $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$

2- خاصيات

أ- خاصيات

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb وc عناصر منI

* $\int_a^a f(x)dx = 0$ * $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (علاقة شال)

أمثلة

أحسب $I = \int_{-1}^{1} |x|dx$

$$\int_{-1}^{1} |x|dx = \int_{-1}^{1} |x|dx = \int_{-1}^{0} -xdx + \int_0^1 xdx = \left[\frac{-1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1$$

ب)- لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I

R

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$
$$x \to \int_a^x f(t)dt$$

لدينا $\varphi(x) = F(x) - F(a) \quad \forall x \in I$ حيث F دالة أصلية لـ f على I.

اذن φ قابلة للاشتقاق على I و $\varphi' = f$ $\quad \varphi(a) = 0$ أي أن φ دالة الأصلية للدالة f على I التي تنعدم في a

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I.

الدالة المعرفة على I بما يلي $x \to \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية لـ f على I التي تنعدم في a

مثال نعلم أن الدالة $x \to \ln x$ هي الدالة الأصلية لـ $x \to \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في1 .

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

تمرين حدد الدالة الأصلية لـ f على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في 2 حيث $\quad f(x) = \frac{1}{x}\ln x \quad \forall x \in]0;+\infty[$

ج)- خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ و λ عدد حقيقي ثابت

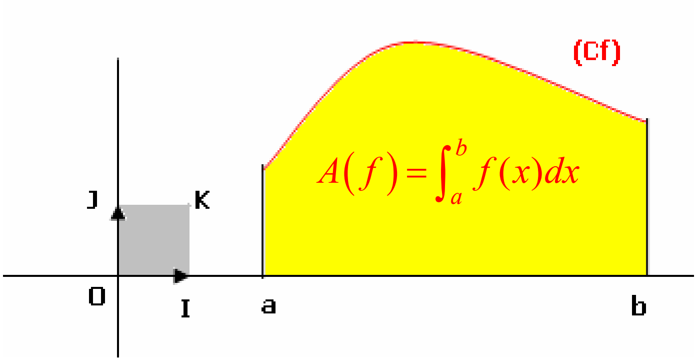
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

تمرين حدد $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1)dx \quad ; \quad \int_0^\pi \cos^4 x dx$ (يمكن اخطاط $\cos^4 x$)

تمرين نعتبر $\quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$

أحسب $I + J \quad I - J$ و استنتج $I \quad ; \quad J$

د التأويل الهندسي للعدد $\int_a^b f(x)dx$



خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على $[a;b]$ ($a \prec b$) فان مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ هي

$A(f) = \int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

ملاحظة إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامدين فان وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع OIJK

تمرين

نعتبر $f(x) = \frac{1}{x^2}$

R

أنشئ C_f $\left(\|\vec{i}\|=1cm \quad \|\vec{j}\|=2cm\right)$

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1 \quad ; \quad x=3$.

II- تقنيات حساب التكاملات

1- الاستعمال المباشر لدوال الأصلية

أمثلة

* أحسب $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ نلاحظ أن $\frac{(\ln x)^2}{x}$ على شكل $u'u^2$ حيث $u(x)=\ln x$

و نعلم أن الدالة الأصلية لـ $u'u^2$ هي $\frac{1}{3}u^3$ إذن $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\left[\frac{1}{3}u^3(x)\right]_1^e=\left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e=\frac{1}{3}$

* أحسب $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx$ لدينا $\frac{2}{e^x+1}=2\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ بهذا التحويل نلاحظ أن $\frac{2}{1+e^x}$ يكتب على شكل

$-2\frac{u'}{u}$ حيث $u(x)=1+e^{-x}$ إذن $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx=\left[-2\ln|u(x)|\right]_0^1=\left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1$

تمرين 1- حدد $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 x dx$

2- أ- أوجد a وb وc حيث $\frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x}=ax+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2+1} \qquad \forall x\neq 0$

ب- استنتج قيمة $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x}dx$

3- بين أن التعبير $\frac{1}{x^2-2x+5}$ يكتب على شكل $\frac{1}{2}\frac{u'}{u^2+1}$ حيث u دالة يجيب تحديدها .

استنتج قيمة $\int_1^{1+2\sqrt{3}}\frac{1}{x^2-2x+5}dx$

4- أحسب $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx \quad ; \quad \int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$ $\left(\frac{1}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)$

2- المكاملة بالأجزاء

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a;b]$ بحيث f' و g' متصلتين على $[a;b]$

نعلم أن

$$\forall x\in[a;b] \qquad (fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\forall x\in[a;b] \qquad f'(x)g(x)=(fg)'(x)-f(x)g'(x)$$

خاصية

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)dx=\left[(fg)(x)\right]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx}$$

مثال أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx$ نضع $u'(x)=\cos x \quad ; \quad v(x)=x$

ومنه $u(x)=\sin x \quad ; \quad v'(x)=1$

R

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$ إذن

تمرين

أحسب $I = \int_1^e \ln x dx$; $J = \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$; $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

الحل

$$K = \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \dots\dots\dots$$

تمرين 1- أحسب $\int_1^2 x^2 \ln x dx$ $\int_0^3 (x-1)e^{2x} dx$ $\int_0^1 x\sqrt{x+3}dx$ $\int_0^1 \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right| dx$

2- باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ f على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$

3- أحسب $I = \int_0^x e^t \cos^2 t dt$ (يمكن اعتبار $J = \int_0^x e^t \sin^2 t dt$)

III- التكامل و الترتيب

1- مقارنة تكاملين

a) لتكن f دالة متصلة على [a;b] و F دالة أصلية لـ f على [a;b]

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \forall x \in [a;b] \quad F'(x) = f(x)$$

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان F تزايدية على $[a;b]$

وحيث أن $a \le b$ فان $F(a) \le F(b)$ ادن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

خاصية

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a \le b)$

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

b) خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ $(a \le b)$

إذا كانت $f \le g$ على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

مثال

نؤ طر $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

لدينا $1 \le 1+x \le 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \le \frac{x^2}{1+x} \le x^2$ $\forall x \in [0;1]$ ومنه $\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx \le I \le \int_0^1 x^2 dx$

إذن $\frac{1}{6} \le I \le \frac{1}{3}$

c) خاصيات

أ- لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a \le b)$

إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \le 0$

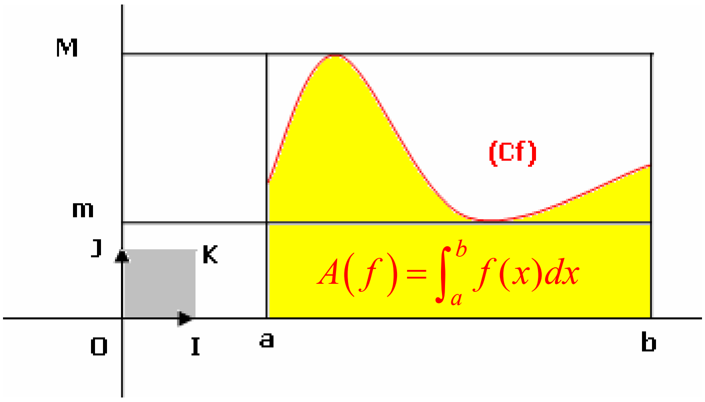
ب- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

ج- لتكن M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان المساحة $A(f)=\int_a^b f(x)dx$ في معلم م.م محصورة بين مساحتي المستطيل الذي بعديه M و $(b-a)$ و المستطيل الذي بعديه m و $(b-a)$.



مثال

نعتبر $I=\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$ نبين أن $0 \le I \le \sqrt{2}$

الدالة $x \to \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ موجبة و تناقصية على $]0;+\infty[$ ومنه $\sup_{x\in[1;3]} f(x)=f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

اذن $0 \le I \le (3-1)\frac{\sqrt{2}}{2}$

2- القيمة المتوسطة لدالة متصلة في قطعة

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a \prec b)$ و M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

إذن $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل c في $[a;b]$

حيث $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

خاصية و تعريف

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a \ne b)$

العدد الحقيقي $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a;b]$.

يوجد على الأقل c في $[a;b]$ حيث $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان المساحة $A(f)=\int_a^b f(x)dx$ في معلم م.م هي مساحة المستطيل

الذي بعداه $(b-a)$ و $f(c)$.

R

تمرين 1- أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على I في الحالتين التاليتين

(a $f(x)=(x-1)e^{x}$ $I=[-1;0]$; (b $f(x)=\dfrac{x^3+5x^2+x+3}{x+1}$ $I=[0;1]$

2- أطر الدالة f على $[0;1]$ حيث $f(x)=\arctan x$

الجواب عن السؤال2 لدينا f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\forall x\in[0;1]$ و منه

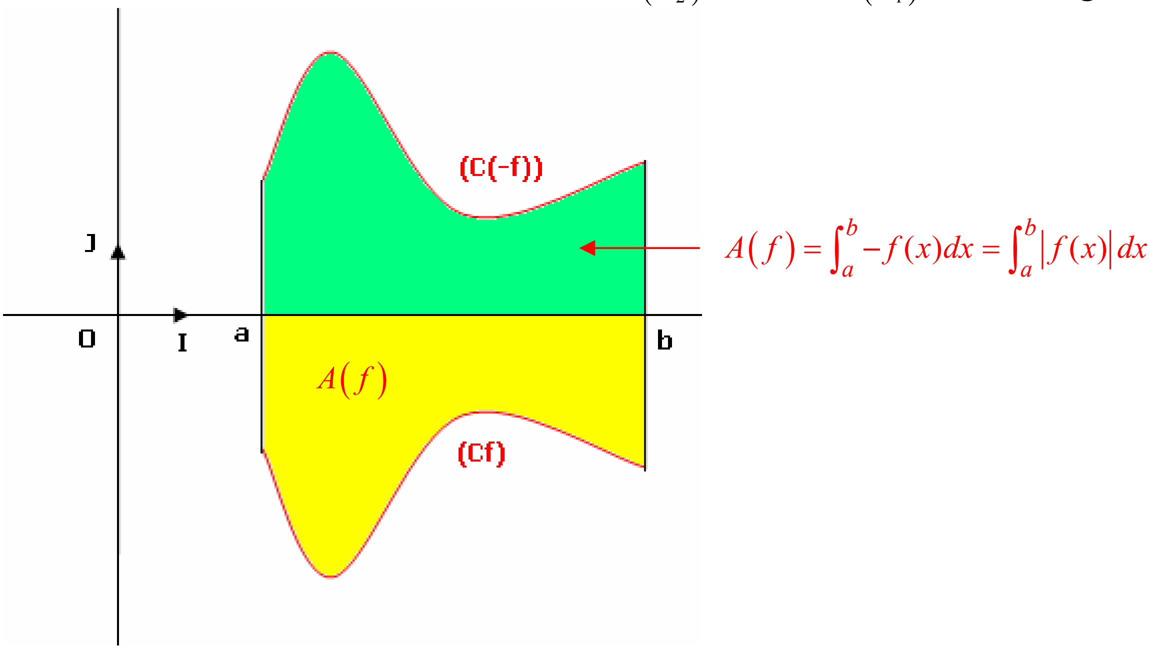
$\dfrac{1}{2}\leq f'(x)\leq 1$ $\forall x\in[0;1]$ اذن $\int_0^x \dfrac{1}{2}dt\leq\int_0^x f'(t)dt\leq\int_0^x dt$ $\forall x\in[0;1]$ $\dfrac{x}{2}\leq f(x)\leq x$

IV- حساب المساحات

1- حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $(\Delta_1):x=a$ $(\Delta_2):x=b$



*إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان مساحة $\Delta(f)$ هي $\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

*إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ مساحة هي مساحة $\Delta(-f)$

$$A(f)=\int_a^b -f(x)dx=\int_a^b|f(x)|dx$$

* إذا كانت f تغير إشارتها على $[a;b]$ مثلا يوجد c من $[a;b]$ حيث f موجبة على $[a;c]$ و سالبة على $[c;b]$

الحيز $\Delta(f)$ على $[a;b]$ هو اتحاد $\Delta(f)$ على $[a;c]$ و $\Delta(f)$ على $[c;b]$

$$A(f)=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx=\int_a^c|f(x)|dx+\int_c^b|f(x)|dx=\int_a^b|f(x)|dx$$

خاصية

المستوى منسوب الى م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل

و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $(\Delta_2): x=b$

مساحة الحيز $\Delta(f)$ هو $\int_a^b |f(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة

اصطلاحات

العدد الموجب $\int_a^b |f(x)|dx$ يسمى المساحة الهندسية للحيز $\Delta(f)$.

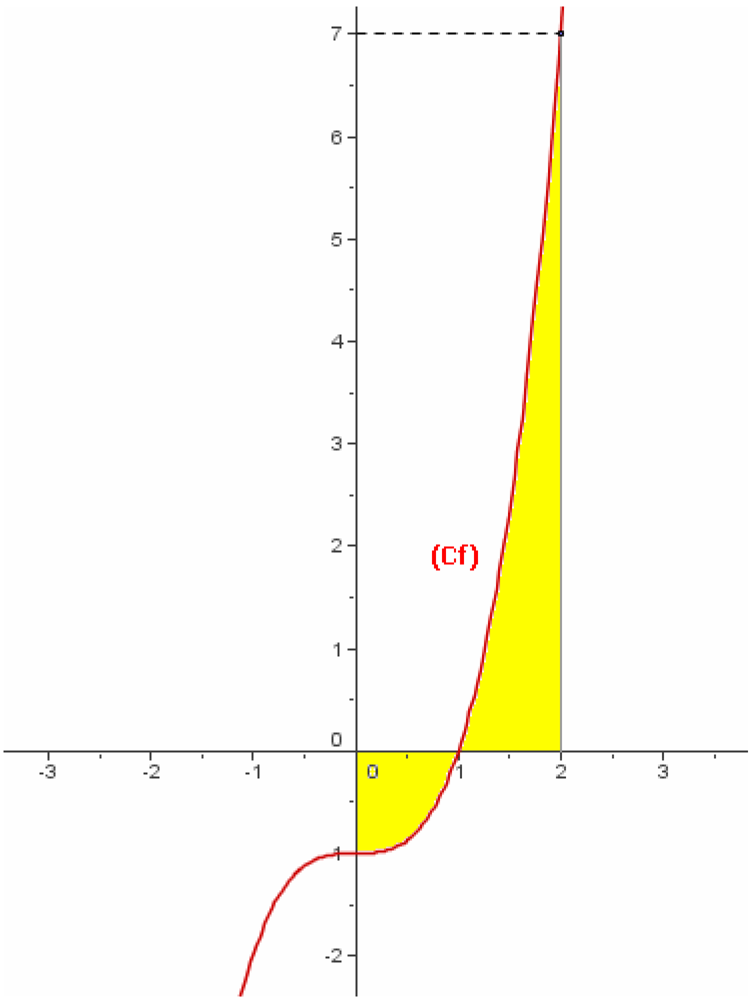
العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$ يسمى المساحة الجبرية للحيز $\Delta(f)$.

مثال

نعتبر $f(x)=x^3-1$

حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين ذا المعادلتين

$x=0$; $x=2$



$$A=\int_0^2 |f(x)|dx$$

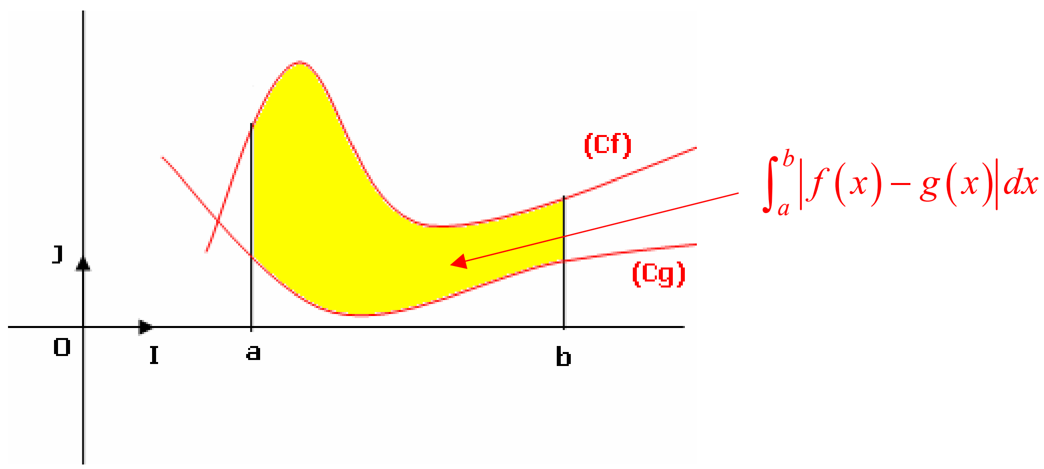
$$A=\int_0^1 (1-x^3)dx+\int_1^2 (x^3-1)dx$$

$$A=\frac{7}{2}u \qquad (u=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|)$$

2- مساحة حيز محصور بين منحنيين

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$

و Δ هو الحيز المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $(\Delta_2): x=b$ في م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$



إذا كان $f \geq g \geq 0$ فان $A(\Delta) = A(f) - A(g)$

$$A(\Delta) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

إذا كانت $f \leq g$ و كيفما كانت إشارتي f و g و بإتباع نفس الطريقة نحصل على أن

$$A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

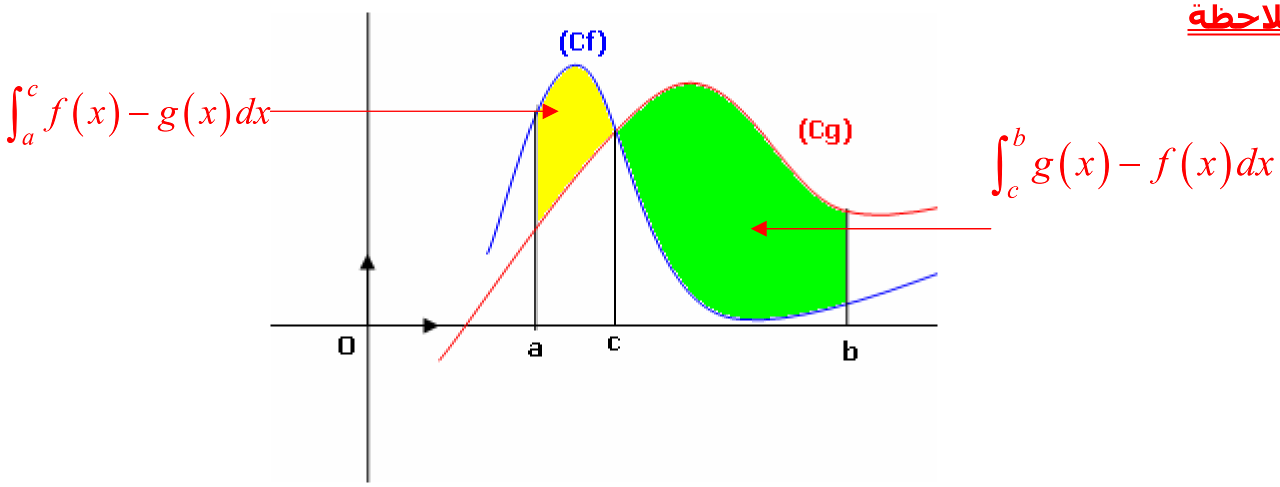
خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$

مساحة الحيز Δ المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$

هي $A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ وحدة قياس المساحات

ملاحظة



$$A(\Delta) = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

V- حساب الحجوم في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نفترض أن وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب الذي طول حرفه $\|\vec{i}\|$

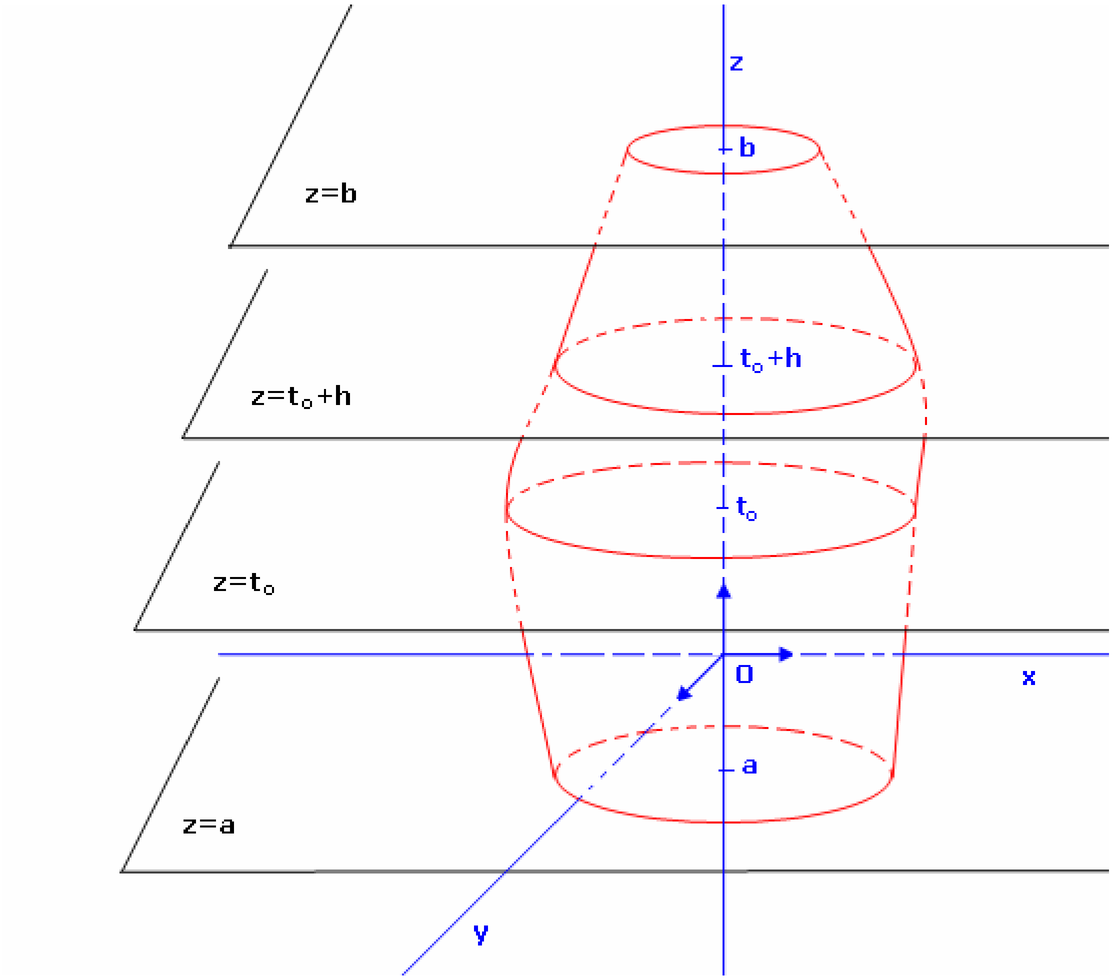
1- حجم مجسم في الفضاء

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z = a$ و $z = b$

نرمز بـ$S(t)$ إلى مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S حيث $z = t$ و بالرمز $V(t)$ إلى حجم مجموعة النقط من S المحصور بين المستويين $z = a$; $z = t$

ليكن t_0 من $[a;b]$ و h عددا موجبا حيث $t_0 + h \in [a;b]$

R



حجم مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S المحصورة بين $z=t_0$ و $z=t_0+h$ هو $V(t_0+h)-V(t_0)$

ومن جهة ثانية هذا الحجم محصور بين حجمي الأسطوانتين التي ارتفاعهما h و مساحتا قاعدتيهما على التوالي $S(t_0)$ و $S(t_0+h)$

إذا افترضنا أن $S(t_0)\le S(t_0+h)$ فان $h\cdot S(t_0)\le V(t_0+h)-V(t_0)\le h\cdot S(t_0+h)$

و منه $S(t_0)\le \dfrac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}\le S(t_0+h)$

و إذا افترضنا أن التطبيق $t\to S(t)$ متصل على $[a;b]$ فان $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}=S(t_0)$

إذن الدالة $t\to V(t)$ قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ و $V'(t)=S(t)\quad \forall t\in[a;b]$

أي أن الدالة $t\to V(t)$ دالة أصلية للدالة $t\to S(t)$ على $[a;b]$

و بما أن $V(a)=0$ فان $V(t)=\int_a^t S(x)dx\quad \forall t\in[a;b]$

إذن حجم المجسم S هو $V=V(b)=\int_a^b S(x)dx$ وحدة قياس الحجم .

<u>خاصية</u>

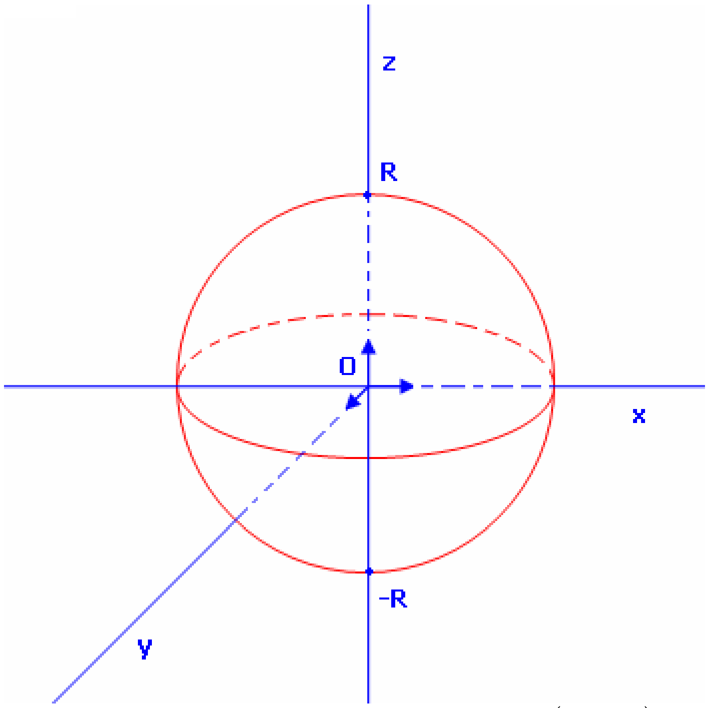
الفضاء منسوب إلى معلم م.م

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z=a$ و $z=b$

نرمز بـ$S(t)$ الى مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S حيث $z=t$

إذا كان أن التطبيق $t\to S(t)$ متصلا على $[a;b]$ فان حجم المجسم S هــو $V=\int_a^b S(z)dz$ وحدة قياس الحجم.

R



<u>تمرين</u>

أحسب حجم الفلكة التي مركزها O و شعاعها R

الحل : نفترض أن الفضاء منسوب م.م.م أصله O.

الفلكة محصورة بين المستويين المعرفين على التوالي بالمعادلتين $z = R$; $z = -R$

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفلكة حيث $z = t$

$-R \leq t \leq R$ هي قرص شعاعه $\sqrt{R^2 - t^2}$

و مساحته $S(t) = \pi\left(R^2 - t^2\right)$

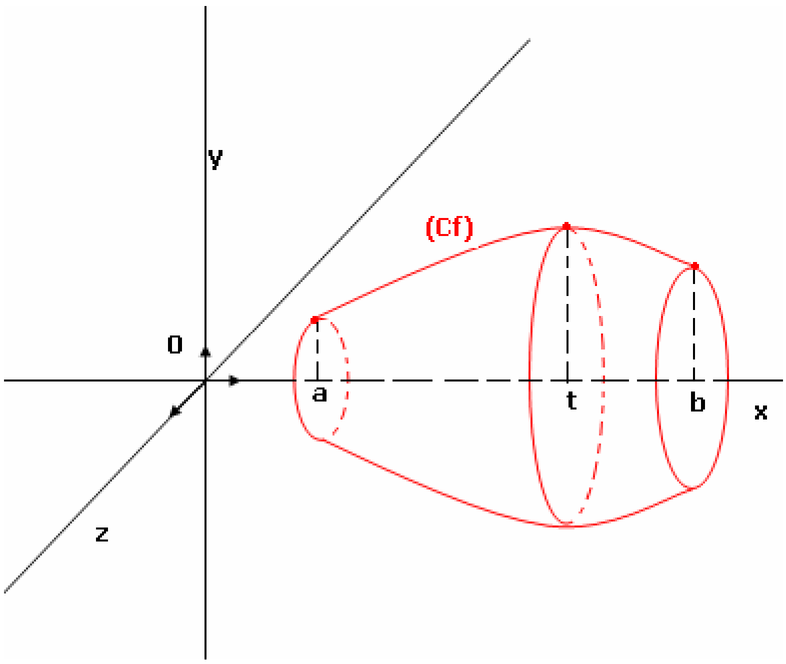
بما أن التطبيق $t \to \pi\left(R^2 - t^2\right)$ متصلة على $[-R;R]$

فان $V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - t^2\right)dt = \frac{4}{3}\pi R^3$

2- حجم مجسم الدوران

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

إذا دار C_f حول المحور $(O;\vec{i})$ دورة كاملة فانه يولد مجسما يسمى مجسم الدوران



في هذه الحالة لدينا مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الجسم بحيث $x = t$ هي قرص مساحته

$S(t) = \pi f^2(t)$

التطبيق $t \to \pi f^2(t)$ متصلة على $[a;b]$

إذن حجم المجسم الدوراني هو $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$

<u>**خاصية**</u>

الفضاء منسوب إلى م.م.م أصله o , و f دالة متصلة على $[a;b]$

حجم مجسم الدوران المولد عن دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) هو $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$

بوحدة قياس الحجم .

R

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{1}{2}x\ln x$

أنشئ C_f و حدد حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) في المجال $[1;e]$

الحسَاب التكامُلي

I. تكامل دالة متصلة على مجال:

1. تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال $\left[a,b\right]$ و F دالة أصلية لها على $\left[a,b\right]$.
تكامل f من a إلى b هو العدد الحقيقي : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2. ملاحظات :

- نكتب $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$
- يمكن تغيير x بأي متغير آخر مثلا : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$

3. خاصيات :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. خطانية التكامل :

خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $\left[a,b\right]$.لدينا :

- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$ $\quad(\alpha \in \mathbb{R})$

II. التكامل و الترتيب :

1. خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$. لدينا :

- ❖ إذا كانت $f \geq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- ❖ إذا كانت $f \leq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- ❖ إذا كانت $f \leq g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

2. القيمة المتوسطة :

تعريف و خاصية :

- لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$. العدد $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل f على $[a,b]$
- يوجد على الأقل عدد c من $[a,b]$ بحيث : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

III. تقنيات حساب التكامل :

أ. باستعمال دالة أصلية : **سبق الحديث عنها في بداية الدرس**

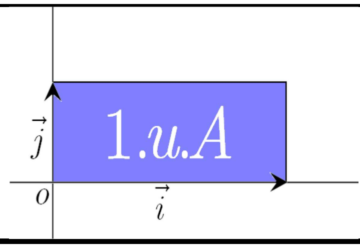
ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

خاصية :

لتكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' متصلتان على I و a و b عنصرين من I لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

IV. حساب المساحات :

ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $\left(O, i, j\right)$ **وحدة المساحة** $u.A$ **هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة** O **و المتجهتين** $\vec{i}$ **و** j $1u.A = \left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\|$	

خاصية 1:

لتكن f **دالة متصلة على مجال** a,b
مساحة الحيز المحصور بين $\left(C_f\right)$ **و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما** $x = a$ **و** $x = b$ **هي :**

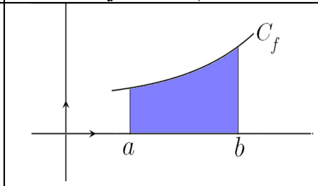
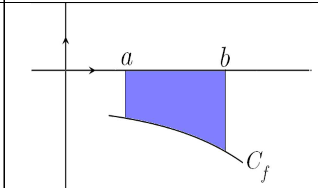
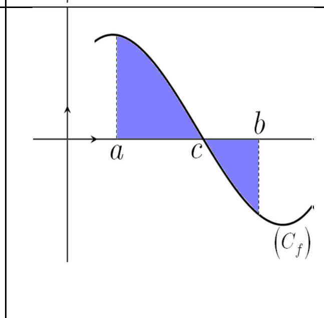
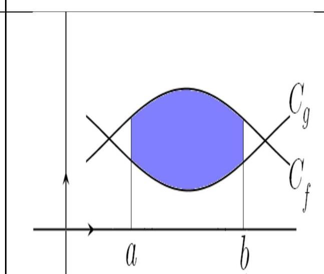
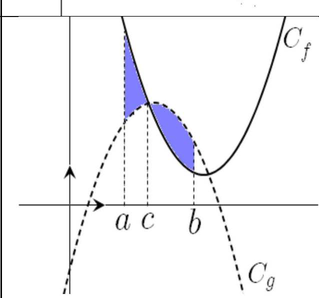
$$\left(\int_a^b \left|f(x)\right| dx\right) u.A$$

خاصية 2:

لتكن f **و** g **دالتان متصلتان على المجال** $\left[a,b\right]$
مساحة الحيز المحصور بين $\left(C_f\right)$ **و** $\left(C_g\right)$ **و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما** $x = a$ **و** $x = b$ **هي :**

$$\left(\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx\right) u.A$$

حالات خاصة :

رسم توضيحي		
	f موجبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$
	f سالبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$
	• f موجبة على المجال $[a,c]$ و • f سالبة على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right)u.A$
	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال a,b	$\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right)u.A$
	(C_f) يوجد فوق على (C_g) المجال $[a,c]$ و • (C_f) يوجد تحت على (C_g) المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx\right)u.A$

مساحة الحيز الملون

٧. حساب الحجوم :

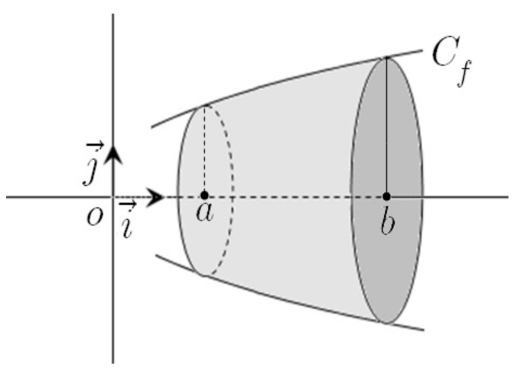
خاصية 1:

ليكن (Σ) مجسما محصورا بين المستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتاهما على التوالي : $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$
و لتكن $S(t)$ مساحة تقاطع المجسم (Σ) مع المستوى الذي معادلته $z=t$ حيث $a\leq t\leq b$
إذا كانت الدالة : $t\mapsto S(t)$ متصلة على المجال $[a,b]$ فإن V حجم المجسم (Σ) هو $V=\int_a^b S(t)dt$ بوحدة قياس الحجم.

خاصية 2:

حجم المجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a,b]$ هو :

$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right]u.v$ حيث : $u.v$: وحدة الحجوم



R

الأعداد العقدية (تتمّة)

I- المعـادلات من الدرجـة الثانية فـي $\mathbb{C}$

1- الجذران المربعان لعدد حقيقي غير منعـدم :

a- تعريـف :

نقول أن العدد العقدي z جذرا مربعا للعدد الحقيقي Z إذا وفقط إذا كان : $z^2 = Z$.

b- تحديد الجدرين المربعين لعدد حقيقي غيـر منعـدم :

- حالـة 1 : $Z \in \mathbb{R}_+^*$

الجذران المربعان للعدد Z همـا $\sqrt{Z}$ و $-\sqrt{Z}$.

- حالـة 2 : $Z \in \mathbb{R}_-^*$

لدينا :
$$\begin{aligned} Z &= -(-Z) \\ &= i^2\,(-Z) \\ &= \left(\sqrt{-Z}\; i\right)^2 \end{aligned}$$

إذن : الجذران المربعان للعدد Z همـا $-\sqrt{-Z}\; i$ و $\sqrt{-Z}\; i$

مثـال :

$$\begin{aligned} Z &= -3 \\ &= 3\, i^2 \end{aligned}$$

إذن الجذران المربعان للعدد -3 همـا $\sqrt{3}\, i$ و $-\sqrt{3}\, i$.

خاصيـة :

لكل عدد حقيقي غيـر منعـدم جذران مربعـان مختلفـان ومتقابـلان .

2- المعـادلات من الدرجـة الثانيـة فـي $\mathbb{C}$

- **تعريـف :**

المعادلة التي تكتب على شكـل $a\,z^2 + b\,z + c = 0$
حيث : a ، b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$ و z عدد عقدي مجهول ،
تسمـى معادلـة من الدرجـة الثانيـة فـي $\mathbb{C}$.

- **حـل المعادلات من الدرجة الثانيـة $\mathbb{C}$:**

لتكن a ، b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

لدينا :

$$(E)\ :\ a\,z^2 + b\,z + c = 0 \iff z^2 + \frac{b}{a}\,z + \frac{c}{a} = 0$$

$$\iff z^2 + 2\,\frac{b}{2\,a}\,z + \frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{b^2}{4\,a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\iff \left(z + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = \frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{4\,a\,b^2}{4\,a^2}$$

$$\iff \left(z + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}$$

R

نضع : $\Delta = b^2 - 4ac$

وليكن δ أحد الجذرين المربعين للمميز Δ.

إذن : $(E) : \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{\delta^2}{4a^2}$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \quad \text{أو} \quad z + \frac{b}{2a} = \frac{-\delta}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-b - \delta}{2a}$$

ومنه : حل المعادلة $(E) : az^2 + bz + c = 0$

هـــو : $S = \left\{\frac{-b + \delta}{2a} ; \frac{-b - \delta}{2a}\right\}$

خاصيـــة :

حلي المعادلـــة $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ همـــا :

$$z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

تطبيقـــات :

حـــل فـــي $\mathbb{C}$ المعـادلات التـاليـة :

(1 $z^2 + z + 1 = 0$

لدينا : $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 - 4$

$= -3$

$= 3i^2$

$= \left(\sqrt{3}\, i\right)^2$

إذن : $S = \sqrt{3}\, i$

ومنه حلي المعادلة همـا :

$$z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2}$$

ومنه : $S = \left\{\frac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2} ; \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2}\right\}$

(2 $z^2 + 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$

حيث : $0 \prec \theta \prec \frac{\pi}{2}$

$$z^2 + 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$$

$$\Delta = 4 - \frac{4}{\cos^2 \theta}$$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{\cos^2 \theta}\right)$$

$$= 4\left(\frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta}\right)$$

$$= 4\left(\frac{-\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right)$$

$$= -4\tan^2 \theta$$

$$= (2\,i \tan\theta)^2$$

إذن : $\delta = 2\,i \tan\theta$

ومنه : الحليـن همـا :

$$z_1 = \frac{2 - 2i\tan\theta}{2} = 1 - i\tan\theta$$

$$z_2 = \frac{+2 + 2i\tan\theta}{2} = +1 + i\tan\theta$$

إذن : $S = \{1 - i\tan\theta \; ; \; 1 + i\tan\theta\}$

طريقـة 2 :

لدينا : $z^2 - 2z + \frac{1}{\cos\theta} = 0$

أي : $z^2 - 2z + 1 + \tan^2\theta = 0$

إذن : $(z-1)^2 = -\tan^2\theta$

$$(z-1)^2 = (i\tan\theta)^2$$

إذن : $z - 1 = -i\tan\theta$ أو $z - 1 = i\tan\theta$

$z = 1 - i\tan\theta$ أو $z = 1 + i\tan\theta$

إذن : $S = \{1 - i\tan\theta \; ; \; 1 + i\tan\theta\}$

أكتب الحليـن علـى الشكـل المثلثـي.

لدينا : $z_1 = 1 - i\tan\theta$

$$= 1 - i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

R

$$= \frac{1}{\cos\theta}\left(\cos(-\theta) + i\,\sin(-\theta)\right)$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta}\ ,\ -\theta\right] \qquad \text{لأن}\quad 0 \prec \cos\theta$$

ولدينا : $z_2 = 1 + i\,\tan\theta$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\left(\cos\theta + i\,\sin\theta\right)$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta}\ ,\ \theta\right]$$

ملاحظـــة :

إذا كانت : $\frac{\pi}{2} \prec \theta \prec \pi$

فإن : $\cos\ \theta \prec 0$

إذن : $z_1 = \frac{1}{\cos\theta}\left(\cos\theta + i\,\sin\theta\right)$

$$= \frac{-1}{\cos\theta}\,(-1)\,\left(\cos\theta + i\,\sin\theta\right)$$

$$= \frac{-1}{\cos\theta}\,[1\,,\,\pi]\,[1\,,\,\theta]$$

$$= \frac{-1}{\cos\theta}\,[1\ ,\ \pi+\theta]$$

$$= \left[\frac{-1}{\cos\theta}\ ,\ \pi+\theta\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} R\cdot[r\ ,\ \theta] &= R\left(r\ (\cos\theta + i\,\sin\theta)\right) \\ &= R\cdot r\ (\cos\theta + i\,\sin\theta) \\ &= [R\,r\ ,\ \theta] \end{aligned}}$$

II- صيغــة موافـر وصيغتـا أوليــر :

1. صيغـــة Moivre

ليكن $u = [r\ ,\ \theta]$

نعلم أن $|u^n| = |u|^n = 1$

$$\arg\, u^n = n\ \theta\ [2\,\pi]$$

يعني أن : $\boxed{[1\,,\,\theta]^m = [1\,,\,m\ \theta]}$

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos\ n\ \theta + i\ \sin\ n\ \theta}$$

R

تسمى هذه المتساويـة بصيغـة موافـر.

تطبيقـات صيغة موافر.

1- أنشر : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$

لدينا : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta \cdot \sin\theta + 2\, i\, \cos\theta\, \sin\theta$

وبما أن : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos\, 2\theta + i\, \sin 2\, \theta$

فإن :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\, 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin\, 2\theta &= 2\, \cos\theta\, \sin\theta \end{aligned}}$$

2- أنشر : $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta \cdot i\, \sin\theta - 3\cos\theta \cdot \sin^2\theta - i\, \sin^3\theta$$

$$= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\, \sin^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\, \sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

وبما أن : $(\cos\theta + i\, \sin\theta)^3 = \cos 3\theta + \sin\, 3\theta$

إذن :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\, 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\, \sin^2\theta \\ \sin\, 3\theta &= 3\cos^2\theta\, \sin\theta - \sin^3\theta \end{aligned}}$$

تعميـــم :

لدينا : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos\, n\, \theta + i\, \sin\, n\, \theta$

إذن :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\, n\, \theta &= \Re e\left((\cos\theta + i\, \sin\theta)^n\right) \\ \sin\, n\, \theta &= \operatorname{Im}\left((\cos\theta + i\, \sin\theta)^n\right) \end{aligned}}$$

2. صيغتــا أوليـر :

1-2 : الترميـز الأســي لعـدد عقـدي غير منعـدم :

نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$ للعدد العقدي الذي معياره 1 وعمدته θ.

أي :

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\, \sin\theta = [1\, ,\, \theta]}$$

أمثلـة :

-1 $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\, \sin\frac{\pi}{2} = i$

-2 $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\, \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

R

ملاحظــة :

1- إذا كان : $z = [R\ ,\ \theta]$

فإن : $z = R \cdot e^{i\theta}$

2- إذا كان : $\arg z_2 \equiv \alpha\ [2\pi] \quad ; \quad \arg z_1 \equiv \theta\ [2\pi]$

فإن : $\arg \dfrac{z_1}{z_2} \equiv \theta - \alpha \quad ; \quad \arg z_1 \times z_2 \equiv \theta + \alpha\ [2\pi]$

$$\boxed{\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)}} \; ; \; \boxed{e^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}}$$

3- $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\arg z^n = n \arg z\ [2\pi]$$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{i\pi} = -1$$

2-2 : صيغتــا أولـيــر :

لدينا :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

إذن :

$$\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$$

$$\boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

نسمي هاتين المتساويتين بصيغتــي أولـيــر.

ملاحظــة :

$$\boxed{\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}}$$

$$\boxed{\sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}}$$

تطبيقــات صيغتــا أولـيــر :

الاخطــاط **La linéarisation**

مثـــال :

1- أخطـط $\cos^2\theta$

R

لدينا :
$$\cos\ \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos^2\ \theta = \frac{\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^2}{4}$$

إذن :
$$= \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(2\ \cos\ 2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \cos\ 2\theta$$

-2 أخطط $\sin^2\theta$

لدينا :
$$\sin\ \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2\,i}$$

إذن :
$$\sin^2\ \theta = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2}{-4}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ \cos\ 2\theta + \frac{1}{2}$$

-3 أخطط $\cos^3\theta$

$$\cos\ \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos^3\ \theta = \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + 3\,e^{2i\theta}\cdot e^{-i\theta} + 3\,e^{i\theta}\cdot e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\ \cos\ 3\theta + 6\ \cos\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ \cos\ 3\theta + \frac{3}{4}\ \cos\theta$$

إذن :

$$\boxed{\cos^3\theta = \frac{1}{4}\ \cos\ 3\theta + \frac{3}{4}\ \cos\theta}$$

تعريـــف :

الإخطاط هو كتابة $\cos^n x$ و $\sin^n x$ بدلالـة $\cos\ k\,x$ و $\sin\ k\,x$.

الإخطـاط باستعمـال صيغـة M o i v r e

نضع : $z = \cos\theta + i\ \sin\theta$

$$\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$z\,\overline{z} = 1$$

$$2\cos\theta = z + \overline{z} \quad \text{و} \quad 2\,i\sin\theta = z - \overline{z}$$

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\overline{z}^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$z^n \cdot \overline{z}^n = 1$$

$$2\cos n\theta = z^n + \overline{z}^n \quad \text{و} \quad 2\,i\sin n\theta = z^n - \overline{z}^n$$

أخطط $\cos^3\theta$

لدينا :

$$2\cos\theta = z + \overline{z}$$

$$8\cos^3\theta = \left(z + \overline{z}\right)^3$$

$$= z^3 + 3z^2\overline{z} + 3z\overline{z}^2 + \overline{z}^3$$

$$= z^3 + \overline{z}^3 + 3\left(z + \overline{z}\right)$$

$$= 2\cos 3\theta + 3\times 2\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

التمثيل العقدي للدوران

المستوى العقدي منسوب الى معلم م م ج

نعتبر الدوران r الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ

لدينا $r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

اذن $\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

ومنه $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

خاصية

التمثيل العقدي للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ

هو $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

الأعداد العقدية - الجزء الثاني-

1- المعادلات من الدرجة الثانية

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad ; \quad \left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^{-*} \quad \left(i\sqrt{-a}\right)^2 = i^2 \times -a = a \quad ; \quad \left(-i\sqrt{-a}\right)^2 = \left(-i\right)^2 \times -a = a$$

أ/ الجدر المربع لعدد حقيقي

ليكن a عدد حقيقي غير منعدم
اذا كان a موجبا فان للعدد a جدرين مربعين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
اذا كان a سالبا فان للعدد a جدرين مربعين هما $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$
لكل عدد حقيقي جدرين مربعي متقابلين

الجدر مربع صفر هو صفر

أمثلة

الجدران المربعان للعدد 3 هو $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$
الجدران المربعان للعدد -1 هو i و $-i$
الجدران المربعان للعدد -25 هو $5i$ و $-5i$
الجدران المربعان للعدد -3 هو $i\sqrt{3}$ و $-i\sqrt{3}$

ب/ المعادلات من الدرجة الثانية

لتكن a و b و c أعدادا حقيقية بحيث a غير منعدم .

نحل $az^2 + bz + c = 0 \qquad z \in \mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{حيث} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

إذا كان $\Delta \geq 0$ فان
$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

ومنه $z = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $z = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

اذا كان $\Delta \prec 0$ فان $-\Delta \succ 0$

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + i^2\frac{-\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + i^2\frac{\sqrt{-\Delta}^2}{4a^2} = 0$$

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0$$

منه $z = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ أو $z = \dfrac{-b + -\sqrt{-\Delta}}{2a}$

في كلتا الحالتين يمكن كتابة $z = \dfrac{-b + d}{2a} \quad ; \quad z = \dfrac{-b - d}{2a}$ حيث d جدر مربع للعدد Δ

لتكن a و b و c أعدادا **حقيقية** بحيث a غير منعدم .
العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة $az^2 + bz + c = 0$
ليكن d جدر مربع للعدد Δ
إذا كان $\Delta \neq 0$ فان للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$ تقبل حلين مختلفين هما $z = \dfrac{-b + d}{2a} \quad ; \quad z = \dfrac{-b - d}{2a}$
إذا كان $\Delta = 0$ فان للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حل وحيد هو $z = \dfrac{-b}{2a}$

أمثلة

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية

$$2z^2-\left(2+2\sqrt{2}\right)z+\frac{3}{2}+\sqrt{2}=0 \qquad -2z^2-3z+2=0 \qquad -2z^2+2z+3=0$$

الحل

ليكن Δ مميز المعادلة $2z^2-\left(2+2\sqrt{2}\right)z+\frac{3}{2}+\sqrt{2}=0$

$$\Delta=\left(-\left(2+2\sqrt{2}\right)\right)^2-8\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)=4+8\sqrt{2}+8-12-8\sqrt{2}=0$$

إذن $z=\frac{2+2\sqrt{2}}{4}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ومنه $S=\left\{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}$

ليكن Δ مميز المعادلة $-2z^2-3z+2=0$

$$\Delta=9+16=25$$

$z=\frac{3+5}{-4}=-2$ أو $z=\frac{3-5}{-4}=\frac{1}{2}$ ومنه $S=\left\{-2;\frac{1}{2}\right\}$

ليكن Δ مميز المعادلة $-2z^2+2z+3=0$

$$\Delta=4-12=-8=\left(i2\sqrt{2}\right)^2$$

$z=\frac{-2+i2\sqrt{2}}{-4}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ؟أو $z=\frac{-2-i2\sqrt{2}}{-4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن $S=\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

تمرين

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين

$$z^2-6z+12=0 \qquad z^2+2\sqrt{3}z+12=0$$

2- أكتب العددين $z_1=3+i\sqrt{3}$ و $z_1=-\sqrt{3}+3i$ في شكلهما المثلثي

3- في المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$، أنشئ $A(z_1)$ و $B(z_2)$ و $E(z_1+z_2)$ ثم حدد طبيعة الرباعي $OAEB$ معللا جوابك

2/ صيغة موافر و تطبيقاتها

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=([1;\alpha])^n=\left[1^n;n\alpha\right]=[1;n\alpha]=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)$$

أ/خاصية

$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ $\quad\forall n\in\mathbb{Z}^*\quad\forall\alpha\in\mathbb{R}$ هذه الصيغة تسمى هذه ب صيغة موافر

ب/ حساب $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin n\theta$

أنشطة

أنشر $(\cos\theta+i\sin\theta)^3$

و استنتج أن $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ $\qquad$ $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

الجواب

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3i\left(\cos^2\theta\right)\sin\theta-3(\cos\theta)\left(\sin^2\theta\right)-i\sin^3\theta$$

$$=\cos^3\theta-3(\cos\theta)\left(\sin^2\theta\right)+i\left(3\left(\cos^2\theta\right)\sin\theta-\sin^3\theta\right)$$

لدينا $(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+\sin 3\theta$

ومنه $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3(\cos\theta)\left(\sin^2\theta\right)=\cos^3\theta-3\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

و $\sin 3\theta=3\left(\cos^2\theta\right)\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right)-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

تمرين

أحسب $\cos x$ على شكل حدودية بـ $\cos x$ درجتها 5

* لتكن $A(z_A) \neq B(z_B)$ و $D(z_D) \neq C(z_C)$ من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

3- الترميز الاسية و تطبيقاته مثلثة

أ/ الكتابة $e^{i\theta}$

نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$، لكل عدد عقدي معياره 1 و عمدته θ أي

$$e^{i\theta} = [1;\theta] = \cos\theta + i\sin\theta$$

أمثلة

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $\qquad$ $e^{0} = 1$ $\qquad$ $e^{i\pi} = -1$ $\qquad$ $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب/خاصية أساسية

لكل عددين عقديين θ و θ' $\qquad$ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

ج/ الكتابة الاسية لعدد عقدي غير منعدم

لكل عدد عقدي غير منعدم z معياره r و عمدته: θ $\qquad$ $z = [r,\alpha] = re^{i\alpha}$

الحساب باستعمال الترميز الاسي

ليكن z و z' عددين عقديين بحيث $z = re^{i\theta}$ و $z = r'e^{i\theta'}$ حيث $r \succ 0$ و $r' \succ 0$

$z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ $\qquad$ $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ $\qquad$ $z = r^n e^{in\theta}$

أمثلة

باستعمال الترميز الاسي حدد معيار و عمدة كل من الاعداد العقدية التالية.

$z_2 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^4$ $\qquad$ $z_1 = \frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$

* لدينا $3+3i\sqrt{3} = 6\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad$ $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\qquad$ $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_1 = \frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{6e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

* لدينا $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_2 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16e^{-i\frac{4\pi}{3}}$

د/ صيغتا اولير و تطبيقاته

لكل عدد عقدي θ

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $\qquad$ $e^{i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

و منه $2i\sin\alpha = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ $\qquad$ $2\cos\alpha = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

لكل عدد عقدي θ

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\alpha = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

و نسمي الصيغتين بصيغتي أولير

تطبيق: اخطاط حدودية مثلثة

اخطاط حدودية مثلثة هو تحويل الجداءات التي على شكل $\cos^n\theta$ أو $\sin^n\theta$ أو $\cos^n\theta \times \sin^m\theta$ الى مجموع حدود من شكل $a\cos\alpha\theta + b\sin\alpha\theta$

مثال نخطط $\cos^4\theta$

$$\cos^4 \qquad \frac{e^{i\theta} \quad e^{\ i\theta}}{2}^{4} \qquad \frac{1}{16}\left(e^{i4\theta} \quad 4e^{i3} \quad e^{\ i} \quad 6e^{i2} \quad e^{\ i2} \quad 4e^{i} \quad e^{\ i3} \quad e^{\ i4}\ \right)$$

$$\cos^4\theta = \frac{1}{16}\left(e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}+4\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)+6\right)=\frac{1}{8}\times\frac{e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}+\frac{3}{8}$$

$$\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

تمرين أخطط $\sin^4\theta\times\cos^3\theta$

-الدوران و الاعداد العقدية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و α عددا حقيقيا $\quad [1;\alpha]=(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

نربط النقطة $M(z)$ من المستوى بالنقطة $M'(z')$ بالتحويل r حيث $z'-\omega=[1;\alpha](z-\omega)$

نحدد علاقة متجهية بين النقطتين M و M' ثم نحدد طبيعة r

نلاحظ أن $r(\Omega)=\Omega$

لتكن $M(z)=\Omega(\omega)$ و $M'(z')$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow z'-\omega=[1;\alpha](z-\omega) \Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega}=[1;\alpha] \Leftrightarrow \begin{cases}\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}=1\\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi]\end{cases}$$

إذن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α

خاصية

> لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و α عددا حقيقيا غير منعدم
>
> التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z')$ من المستوى (P)
>
> حيث $z'-\omega=[1;\alpha](z-\omega)$ هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α
>
> $[1;\alpha]=(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

الدوران باستعمال الكتابة الاسية

> لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و α عددا حقيقيا غير منعدم
>
> التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z')$ من المستوى (P)
>
> حيث $z' \quad \omega \quad e^{i\alpha}(z \quad)$ هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α

تمرين

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقيهما على التوالي هما : $z_A = i \quad ; \quad z_B = 2$

.I

1) حدد لحق النقطة B_1 صورة النقطة B' بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{2}$.

2) حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

3) مثل النقط A و B و B' .

.II

نعتبر التحويل f الذي يحول كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z+1$.

1) حدد لحق النقطة Ω الصامدة $\quad f$

حدد طبيعة التحويل f و عناصره

الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

I-الجداء السلمي

1- تعريف

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين من الفضاء، و A و B و C نقط من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

يوجد على الاقل مستوى (P) ضمن الفضاء يمر من النقط A و B و C.

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{v}$ و $\vec{u}$ في الفضاء هو الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ في المستوى (P) نرمز له بـ $\vec{u}\cdot\vec{v}$

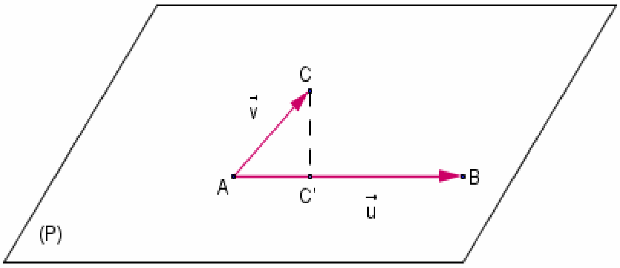
ملحوظة

جميع خاصيات الجداء السلمي في المستوى تمدد إلى الفضاء

2- نتائج

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين من الفضاء، و A و B و C نقط من الفضاء

حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.



* إذا كان $\vec{v}\neq\vec{0}$ و $\vec{u}\neq\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

* إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

* إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$

حيث C' المسقط العمودي لـ C على (AB)

* $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

3- منظم متجهة

لتكن $\vec{u}$ متجهة وA و B نقطتين من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ يسمى المربع السلمي لـ $\vec{u}$ و يكتب $\vec{u}^2=AB^2$

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ نكتب $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$

ملاحظة و كتابة

* $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^2$

* إذا كان $\vec{v}\neq\vec{0}$ و $\vec{u}\neq\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

4- خاصيات

$\forall\alpha\in\mathbb{R}\qquad\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in V_3^3$	متطابقات هامة $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
* $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$	$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$
* $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$	$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$
* $(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}$	
* $\vec{u}\cdot\alpha\vec{v}=\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}=\alpha\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$	

5- تعامد متجهتين :

تعريف

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين من الفضاء V_3.

تكون $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ نكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$

ملاحظة المتجهة $\vec{0}$ عمودية على أية متجهة من الفضاء V_3

تمرين

المكعب ABCDEFGH الذي طول حرفه a

أحسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EB}$

II- صيـــــغ تحليليـــــــة

1- الأساس و المعلم المتعامدان الممنظمان

تعريف

لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير مستوائـــية من الفضاء V_3 و O نقطة من الفضاء.

$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أسا س للفضاء V_3

يكون الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامد (أو المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامد) إذا وفقط إذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى.

يكون الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامد و ممنظم (أو المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ تعامد وممنظم) إذا وفقط إذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$

2- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

أ- خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم.م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

إذا كانت $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

ملاحظة إذا كانت $\vec{u}(x;y;z)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ فان

$\vec{u}\cdot\vec{i}=x \quad ; \quad \vec{u}\cdot\vec{j}=y \quad ; \quad \vec{u}\cdot\vec{k}=z$

ب-الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة بين نقطتين

*- إذا كانت $\vec{u}(x;y;z)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ فان $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

*- اذا كانت $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ فان $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

تمرين

نعتبر $A(1;1;\sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$ و $C(-1;-1;-\sqrt{2})$

بين أن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية

3- تحديد تحليلي لمجموعة النقط M من الفضا ء بحيث $\vec{u}.\overrightarrow{MA}=k$

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من الفضاء

نعتبر $M(x;y;z)$

$$\vec{u}.\overrightarrow{MA}=k \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$$

خاصية

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء

مجموعة النقط M من الفضا ء بحيث $\vec{u}.\overrightarrow{MA}=k$ هي مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ حيث d عدد حقيقي

مثال نعتبر $\vec{u}(2;-1;1)$ متجهة و $A(1;-1;2)$ نقطة من الفضاء

حدد مجموعة النقط M من الفضا ء بحيث $\vec{u}.\overrightarrow{MA}=-1$

III- تطبقات الجداء السلمي في الفضاء

1- تعامد المستقيمات و المستويات في الفضاء

أ- تعامد مستقيمين

ليكن (D_1) و (D_2) مستقيمــين من الفضاء موجهين بالمتجهتين $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ على التوالي

$(D_1)\perp(D_2)\Leftrightarrow \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0$

ب- تعامد مستقيم و مستوى

خاصية

ليكن (P) مستوى موجه بالمتجهتين $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ و (D) مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{u}_3$

$(D)\perp(P)\Leftrightarrow \vec{u}_1\perp\vec{u}_3$ و $\vec{u}_2\perp\vec{u}_3$

ج- ملاحظات واصطلاحات

* المتجهة $\vec{u}$ الموجهة لمستقيم (D) العمودي على مستوى (P) تسمى متجهة منظمية للمستوى (P).
* اذا كانت $\vec{u}$ منظمية لمستوى (P) فان كل متجهة $\vec{v}$ مستقيمية مع $\vec{u}$ تكون منظمية للمستوى (P)
* اذا كانت $\vec{u}$ منظمية لمستوى (P) و $\vec{v}$ منظمية لمسـتوى (P') وكانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان (P) و(P') متوازيان
* إذا كان $(A;B)\in(P)^2$ و $\vec{u}$ منظمية لمستوى (P) فان $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$

تمرين في الفضاء المنسوب إلى معلم .م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

حدد تمثيل بارامتري للمستقيم (D) المار من(0 2 ;1-)A و العمودي على المستوى (P) الموجه بـالمتجهتين $\vec{u}(1;-1;1)$ و $\vec{v}(2;1;1)$

تمرين

في الفضاء المنسوب إلى معلم .م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المستوى

(P) الذي معادلته ax-2y+z-2=0 و المستقيم (D) تمثيله بارامتري $\begin{cases} x=2t \\ y=1+3t \qquad t\in IR \\ z=-2+bt \end{cases}$

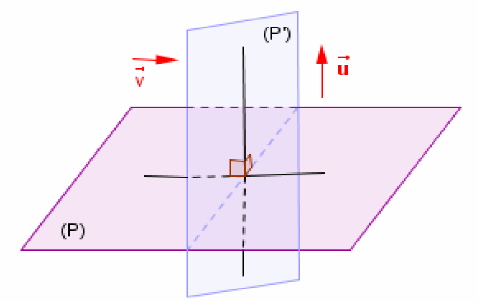
1- حدد متجهتين موجهتين للمستوى (P)
2- حدد b و a لكي يكون $(D)\perp(P)$

د- تعامد مستويين

تذكير يكون مستويان متعامدين اذا و فقط اذا اشتمل أحدهما على مستقيم عمودي على المستوى الآخر.

خاصية

ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتـين منظميتين لهما على التوالي
$(P')\perp(P)$ اذا وفقط اذا كان $\vec{u}\perp\vec{v}$



2- معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية عليه

a. مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية عليه

مبرهنة

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء
* المستوى المار منA و المتجهة $\vec{u}$ منظمية له هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$
* مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$ المستوى المار منA و المتجهة $\vec{u}$ منظمية له

b.معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية عليه

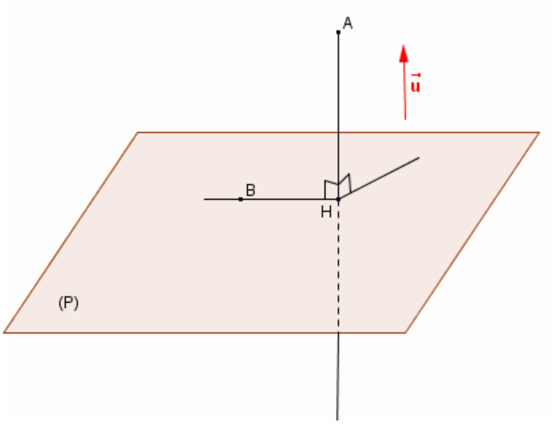
خاصية

* كل مستوى (P) في الفضاء و$\vec{u}(a;b;c)$ منظمية عليه يقبل معادلة ديكارتية من نوع $ax+by+cz+d=0$
* كل معادلة ديكارتية من نوع $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ هي معادلة مستوى (P) في الفضاء بحيث $\vec{u}(a;b;c)$ منظمية عليه

تمرين

نعتبر (P) : 2x-y+3z+1=0 $(D):\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$

1- حدد متجهة $\vec{u}$ منظمية على (P) ونقطة منه.
2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من(2;0;3) A و$\vec{n}(1,2,1)$ منظمية عليه.
3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من(2;0;3) 'A والعمودي على (D)
4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من(2;0;3) A و الموازي لـ (P)



3- مسافة نقطة عن مستوى

1- تعريف و خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم.م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

مسافة نقطة A عن مستوى (P) هي المسافة AH

حيث H المسقط العمودي لـ A على(P) نكتب

$$d\left(A;(P)\right) = AH = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}\right|}{\|\vec{u}\|}$$

حيث (P) ∋ B و $\vec{u}$ منظمية على(P)

2- خاصية

ليكن (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ نقطة من الفضاء

$$d\left(A;(P)\right) = \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال

ليكن (P) مستوى مار من $B\left(2;1;3\right)$ و $\vec{u}\left(1;-1;\sqrt{2}\right)$ منظمية عليه لتكن A (1;2;0)

حدد $d\left(A;(P)\right)$

تمرين1

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

نعتبر A(1;-1;1) و B(3;1;-1) و (P) المستوى ذا المعادلة 2x-3y+2z=0 و (D) المستقيم الممثل بارا متريا بـ

$$\begin{cases} x = 3t \\ x = -2-3t \quad t\in\mathbb{R} \\ z = 2+4t \end{cases}$$

1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A والعمودي على المستقيم (D)

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´) المار من A و B والعمودي على المستوى (P)

2- أحسب d(A;(P)) و d(A;(D))

3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´´) المار من B و الموازي للمستوى (P)

تمرين2

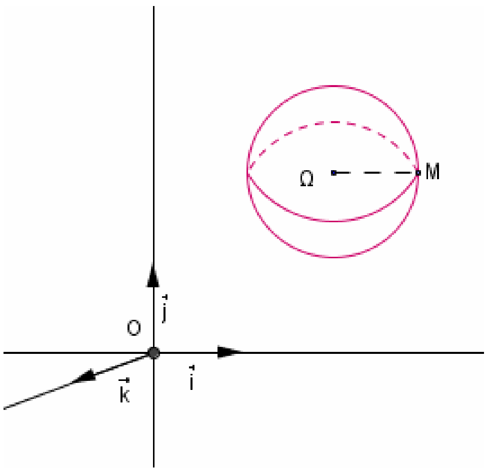
في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

نعتبر المستوى(P) ذا المعادلة 3x+2y-z-5=0 و (D) المستقيم المعرف بـ

$$\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$$

1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P´) الذي يتضمن (D) و العمودي على (P)



IV- معادلة فلكة

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

1- معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها

لتكن Ω(a;b;c) نقطة من الفضاء (E) و $r\in\mathbb{R}^{*+}$ و S(Ω;r) الفلكة التي مركزها Ω و شعاعها r

ليكن M(x;y;z) من الفضاء (E)

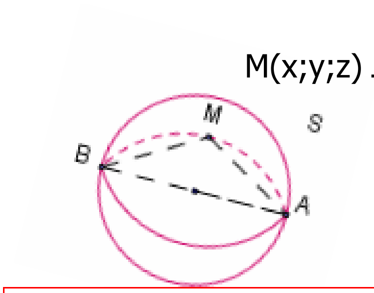
M∈ S(Ω;r) ⇔ ΩM=r ⇔ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

مبرهنة

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega;r)$ التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها r
هي $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

ملاحظات و اصطلاحات

* إذا كان A و B نقطتين من الفلكة $S(\Omega;r)$ حيث Ω منتصف [A;B] فان [A;B] قطرا للفلكة
* توجد فلكة وحيدة أحد أقطارها [A;B] مركزها Ω منتصف [A;B] و شعاعها $r=\frac{1}{2}AB$
* للفلكة $S(\Omega;r)$ معادلة ديكارتية من شكل $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ حيث α و β و γ وδ أعداد حقيقية.
* الفلكة $S(O;r)$ حيث O أصل المعلم معادلتها $x^2+y^2+z^2=r^2$
* الكرة لتكن $S(\Omega;r)$ فلكة التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها r
الكرة $B(\Omega;r)$ التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و شعاعها r هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leq r^2$



2- معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها

S فلكة أحد اقطارها [A;B]

$M\in S \Leftrightarrow$ [AMB] زاوية قائمة أو M=A أو M=B $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

مبرهنة

A و B نقطتان مختلفان في الفضاء
في الفضاء مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ هي فلكة التي أحد اقطارها [A;B]

خاصية

اذا كانت $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين مختلفتين فان معادلة الفلكة التي أحد اقطارها [A;B]
هي $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

تمرين

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر $\Omega(1;2;-1)$ و $A(2;1;2)$ و $B(4;1;2)$

1- حدد معادلة ديكارتية للفلكة S التي مركزها Ω و المار من A
2- حدد معادلة ديكارتية للفلكة S´ التي قطرها [A;B]

3- دراسة المعادلة (1): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

لتكن E مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق المعادلة (1)
$M\in E \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d$
لتكن $\Omega(a;b;c)$
-* إذا كان $a^2+b^2+c^2-d<0$ فان $E=\emptyset$
-* اذا كان $a^2+b^2+c^2-d=0$ فان $E=\{\Omega\}$. فلكة مركزها Ω و شعاعها منعدم
-* اذا كان $a^2+b^2+c^2-d>0$ فان $E=S(\Omega;r)$ حيث $a^2+b^2+c^2-d=r^2$

مبرهنة

a و b و c و d أعداد حقيقية
تكون مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق المعادلة $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ فلكة
إذا وفقط إذا كان $a^2+b^2+c^2-d\geq 0$

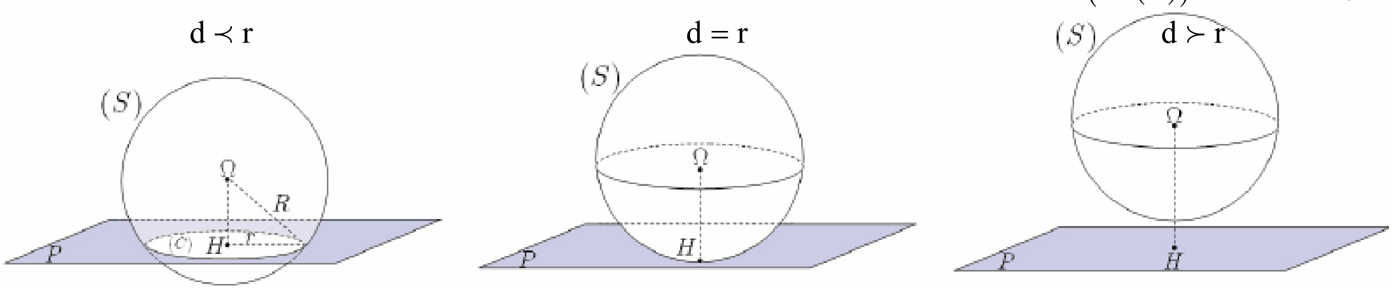
تمرين نعتبر E مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق المعادلة $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+5=0$
بين إن E فلكة محددا عناصرها المميزة

تمرين حدد مجموعة النقط M التي تحقق $2MA^2+3MB^2=16$ حيث $A(2;0;-1)$ و $B(-1;1;-1)$

II – تقاطع مستوى و فلكة

1- تقاطع للفلكة $S(\Omega;r)$ و المستوى (P)

في الفضاءE نعتبر الفلكة $S(\Omega;r)$ و المستوى (P) و النقطة H المسقط العمودي لـ Ω على المستوى (P)
نضع $d(\Omega;(P))=H\Omega=d$



خاصية

ليكن (P) مستوى في الفضاء و S فلكة مركزها Ω و شعاعها r و H المسقط العمودي لـ Ω على المستوى(P)
يكون تقاطع (P) و S :

* دائرة مركزها H و شعاعها $\sqrt{r^2 - d^2(\Omega;(P))}$ اذا كان d(Ω;(P))< r
* نقطة اذا كان d(Ω;(P))= r في هذه الحالة نقول (P) مماس للفلكة S عند النقطة H
* المجموعة الفارغة اذا كان d(Ω;(P))>r

2- مستوى مماس لفلكة في أحد نقطها

تعريف

لتكن A نقطة من الفلكة S(Ω;r)
نقول إن المستوى (P) مماس للفلكة S عند النقطة A اذا كان (P) عمودي على (ΩA) في A

خاصية

لتكن A نقطة من الفلكة S(Ω;r)
(P) مماس على S(Ω;r) في A $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ $\forall M\in(P)$

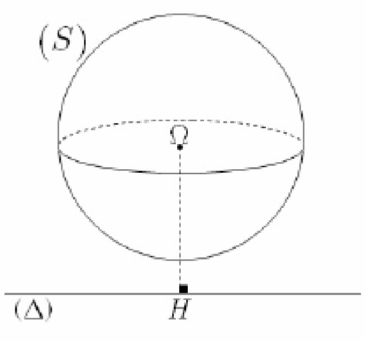
تمرين في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر S_1 الفلكة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ و S_2 الفلكة التي مركزها Ω_2 و شعاعها 2 , و (P) المستوى الذي معادلته $x-2y+z+1=0$ و (P´) المستوى الذي معادلته $2x-y-2z-1=0$.

1- تأكد أن (P) و S_1 يتقاطعان وفق دائرة محددا عناصرها المميزة.
2- أدرس تقاطع (P´) و S_2 .
3- حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S_1 عند النقطة A(1;1; 3)

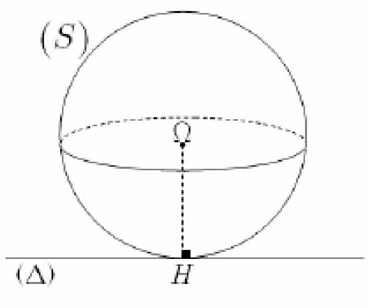
3-- تقاطع مستقيم و فلكة

في الفضاء E نعتبر الفلكة S(Ω;r) و المستقيم (Δ) و النقطة H المسقط العمودي لـ Ω على المستقيم (Δ)
نضع $d(\Omega;(\Delta)) = H\Omega = d$

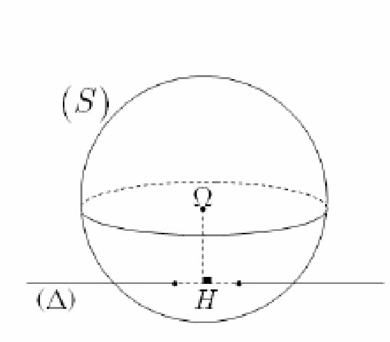
$d \succ r$ | $d \succ r$ | $d \prec r$



تقاطع المستقيم (Δ) الفلكة S
هو المجموعة الفارغة



المستقيم (Δ) الفلكة S
يتقاطعان في النقطة H



المستقيم (Δ) يخترق الفلكة S
في نقطتين مختلفتين

تمرين

نعتبر S : $x^2+y^2+z^2-2y+4z+4=0$

$$(D_1):\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=-3+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad (D_2):\begin{cases} x=3t \\ y=2 \\ z=-2+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad (D_3):\begin{cases} x=\dfrac{-1}{2}+2t \\ y=\dfrac{1}{3}+3t \\ z=-2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

حدد تقاطع S مع كل من (D_1) و (D_2) و (D_3)

تمارين

تمرين1

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر A(1;0;1) و B(0;0;1) و C(0;-1;1) و المستقيم (D) المار من C والموجه بـ $\vec{u}(-1;2;1)$

1- بين أن مجموعة النقط M حيث MA=MB=MC مستقيم وحدد تمثيلا بارا متريا له

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) العمودي على (D) في C

3- استنتج معادلة ديكارتية للفلكة S المارة من Aو B و المماسة لـ (D) في C

تمرين2

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر A(0;3;-5) و B(0;7;-3) و C(1;5;-3)

1- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A حيث $\vec{u}(-1;2;1)$ منظمية عليه

3- ليكن (P) المستوى المحدد بالمعادلة x+y+z=0

أ- تأكد أن (P)و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (D)

ب- حدد تمثيلا بارا متريا لـ (D)

4- نعتبر في الفضاء الدائرة (C) التي المحددة بـ $\begin{cases} x^2+z^2+10z+9=0 \\ y=0 \end{cases}$

أ- حدد معادلة للفكة S التي تتضمن الدائرة (C) و ينتمي مركزها إلى (ABC)

ب حدد تقاطع S و (AC)

تمرين3

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر A(1;-1;1) و B(3;1;-1) و (P) المستوى ذا

المعادلة 2x-3y+2z=0 (D) المستقيم الممثل بارا متريا بـ $\begin{cases} x=3t \\ x=-2-3t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=2+4t \end{cases}$

1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A و B والعمودي على المستقيم (D)

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´) المار من A و B والعمودي على المستوى (P)

3- أحسب d(A;(P)) و d(A;(D))

4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q´´) المار من B و الموازي للمستوى (P)

تمرين4

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة 3x+2y-z-5=0

و (D) المستقيم المعرف بـ $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$

1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P´) الذي يتضمن (D) و العمودي على (P).

تمرين5

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة x+y+z+1=0

و المستوى (Q) ذا المعادلة 2x-2y-5=0

و (S) مجموعة النقط M(x;y;z) التي تحقق $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+11=0$

1- بين أن (S) فلكة محددا مركزها و شعاعها

2- تأكد أن (P) مماس للفلكة و حدد تقاطعهما

3- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من A(0;1;2) و العمودي على (P)

4- تحقق أن $(P)\perp(Q)$ و أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D´)تقاطع (P) و(Q)

تمرين6

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقطة A(-2;3;4)

المستوى (P) ذا المعادلة x+2y-2z+15=0 (S) مجموعة النقط M(x;y;z) التيتحقق

$x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z-26=0$ و (C) الدائرة التي معادلتها $\begin{cases} x^2+y^2-2x-8=0 \\ z=0 \end{cases}$

1- بين أن (S) فلكة محددا عناصرها المميزة

2- بين أن (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة كبرى (C') و حددها

3- حدد معادلتي المستوين المماسين للفلكة (S) و الموازيين لـ (P)

4- أكتب معادلة الفلكة (S') المار من A المتضمن للدائرة (C)

الجداء المتجهي

I- توجيه الفضاء

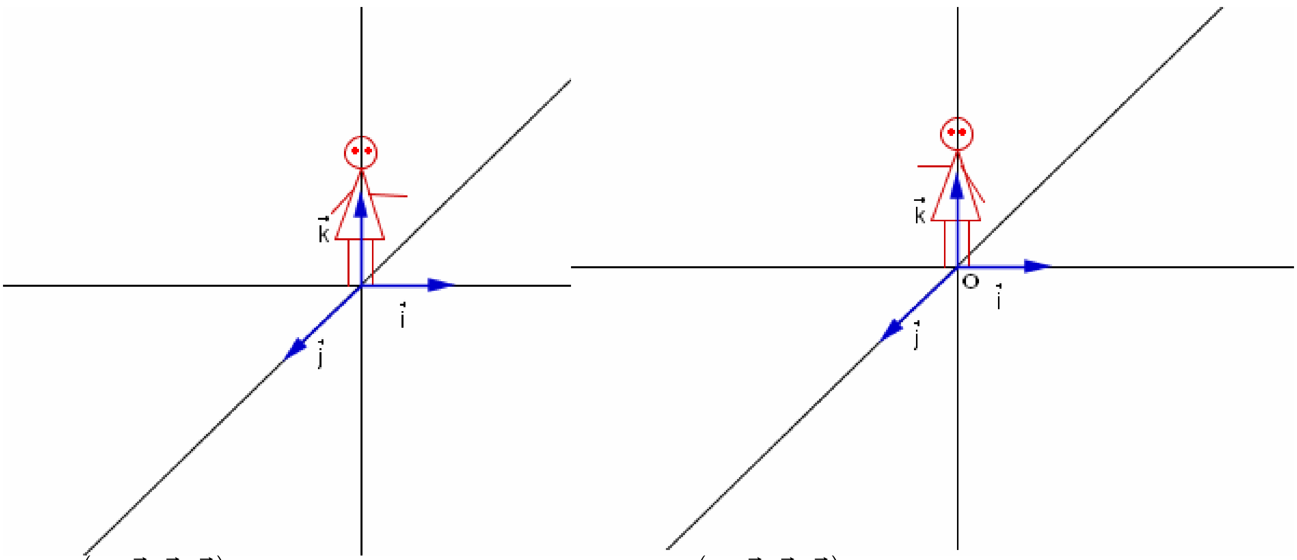
1- معلم موجه في الفضاء

ننسب الفضاء E إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

لتكن I وJ وK ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

« رجل أمبير » للمعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ هو رجل خيالي رأسه في النقطة K قدماه على النقطة O و ينظر إلى I

النقطة J إما توجد على يمين« رجل أمبير » أو على يساره .



معلم غير مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

تعريف :

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. لتكن I وJ وK ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

نقول إن : * $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم مباشر إذا وجدت J على يسار « رجل أمبير »

* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم غير مباشر إذا وجدت J على يمين « رجل أمبير »

أمثلة * نعتبر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم مباشر

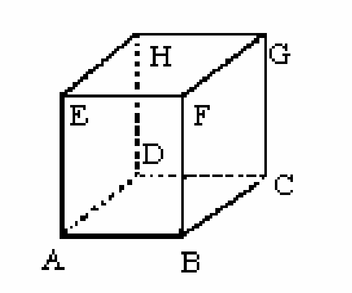
$\left(O;\vec{j};\vec{i};\vec{k}\right)$ معلم غير مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};-\vec{k}\right)$ معلم غير مباشر

$\left(O;\vec{j};\vec{k};\vec{i}\right)$ معلم مباشر

** ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1

$\left(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF}\right)$; $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ معلمان مباشران

$\left(E;\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EH}\right)$, $\left(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right)$ معلمان غير مباشرين



2- الأسرة المباشرة

يمكننا توجيه الفضاء V_3 , اذا وجهنا جميع أساساته

تعريف

نقول إن الأساس المتعامد الممنظم $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ مباشر اذا كان $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ م.م.م. مباشر مهما كانت النقطة O من الفضاء

3- توجيه المستوى

ليكن (P) مستوى في الفضاء و $\vec{k}$ متجهة واحدية و منظمية على (P) , و O نقطة من المستوى (P) $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ م.م.م للمستوى (P)

لدينا $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ممنظم للفضاء E

يكون المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ في المستوى (P) معلما مباشرا اذا كان المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ مباشرا

* يتم توجيه مستوى (P) بتوجيه متجهة منظمية عليه.
* كل المستويات الموازية لـ(P) له نفس توجيه المستوى (P)

II – الجداء المتجهي

1- تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء V_3 وA و B نقطتين من الفضاء E بحيث $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$
الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هدا الترتيب ,هو المتجهة التي لها بـ $\vec{u}\wedge\vec{v}$ المعرفة كما يلي :

* إذا كانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{o}$.
* إذا كانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فان $\vec{u}\wedge\vec{v}$ هي المتجهة التي تحقق :
  - $\vec{u}\wedge\vec{v}$ عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$
  - $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس مباشر .
  - $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ حيث θ قياس الزاوية $[\widehat{AOB}]$

أمثلة * نعتبر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$$

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}\qquad \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}\qquad \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}\qquad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}\qquad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$$

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين واحديتين و متعامدتين فان $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس مباشر .

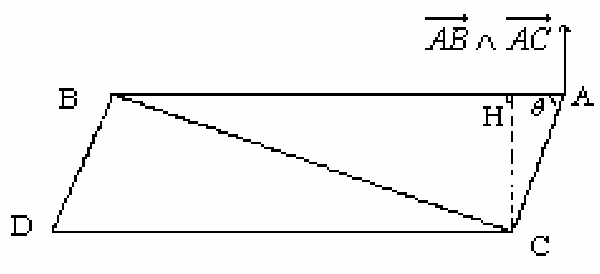
تمرين نحسب $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ علما أن $\theta\in]0;\pi[$ $(\overline{\vec{u};\vec{v}})=\theta$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-5$ $\|\vec{v}\|=2$ $\|\vec{u}\|=5$

2- خاصيات

أ- خاصية

إذا كانت A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء فان المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

لتكن A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء θ قياس الزاوية $[\widehat{CAB}]$, H المسقط العمودي لـ C على (AB)



$$\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=AB.AC.\sin\theta\qquad HC=AC\sin\theta$$

$$\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=AB\times HC$$

خاصية

مساحة المثلث ABC هو نصف $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

نتيجة

مساحة متوازي الأضلاع ABDC هي $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

د- خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء
يكون $\vec{u}\wedge\vec{v}$ منعدما إذا وفقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

البرهان * $\Rightarrow$ (بديهي – التعريف-)
* $\Leftarrow$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$
$$\Rightarrow\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow\|\vec{u}\|=0 \quad\vee\quad \|\vec{v}\|=0 \quad\vee\quad \sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0} \quad\vee\quad \vec{v}=\vec{0} \quad\vee\quad \vec{u}et\vec{v} \quad sont\ liés$$

ملاحظة A وB و C مستقيمية $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

ج- الحداء المتجهي والعمليات(نقبل)

$$\forall(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\in V_3^3 \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R} \qquad (\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$$
$$(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$$
$$\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$$

تمرين

$(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر .

أحسب $\vec{i}\wedge3\vec{j}$ $\qquad$ $(\vec{i}+2\vec{k})\wedge\vec{j}$ $\qquad$ $(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})\wedge\vec{k}$ $\qquad$ $(2\vec{i}-\vec{j})\wedge(3\vec{i}+4\vec{j})$

تمرين

لتكن $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{d}$; $\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{d}$

بين إن $\vec{a}-\vec{d}$ و $\vec{b}-\vec{c}$ مستقيميتان

3- الصيغة التحليلة للحداء المتجهي في م.م.م مباشر

$(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{u}(x;y;z) \qquad \vec{v}(x';y';z')$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$$
$$=(yz'-zy')\vec{i}+(zx'-xz')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$$

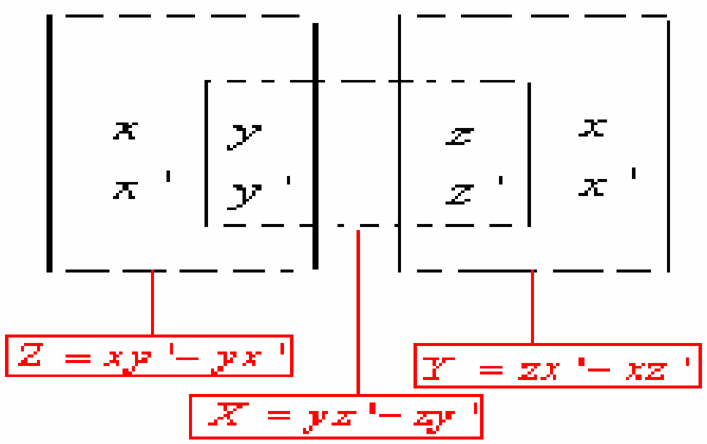
خاصية

الفضاء E منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x(;y';z')$ متجهتان من V_3

إحداثيات الحداء المتجهي $\vec{u}\wedge\vec{v}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ هو (X;Y;Z) حيث

$$X=yz'-zy' \qquad Y=zx'-xz' \qquad Z=xy'-yx'$$

ملاحظة يمكن استعمال الوضعية التالية



مثال نعتبر $\vec{v}(-2;-1;1)$ $\quad$ $\vec{u}(1;2;0)$ $\quad$ $A(1;2;1)$ $\quad$ $B(0;-3;2)$ $\quad$ $C(1;2;1)$

حدد $\vec{u}\wedge\vec{v}$ $\qquad$ أحسب مساحة المثلث (ABC)

III – تطبيقات الحداء المتجهي

1- معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمية

خاصية

لتكن A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AM}$$

مثال نعتبر (A(1;2;3 و (B(1;-1;1 و (C(2;1;2 حدد معادلة المستوى (ABC)

2- تقاطع مستويين

نعتبر في فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

(P) : ax+by+cz+d=0

(P´) : a´x+b´y+c´z+d´=0

لدينا $\vec{n}(a;b;c)$ منظمية لـ (P) و$\vec{n}'(a';b';c')$ منظمية لـ (P´)

* اذا كان (P) و(P´) متقاطعين فان المستقيم (D) تقاطع (P) و(P´) موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$
* اذا كان $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq 0$ فان (P) و(P´) متقاطعان وفق مستقيم موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

تمرين

حدد تقاطع (P): x+2y-2z+3=0 و (P´): 4x-4y+2z-5=0

3- مسافة نقطة عن مستقيم

في الفضاء (D) مستقيم مار من A وموجه بـ $\vec{u}$, M نقطة من الفضاء وH مسقطها العمودي على(D)

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} \qquad \overrightarrow{AH} et \vec{u} \quad liés$$

$$\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\| = HM.\|\vec{u}\|\sin\frac{\pi}{2} = HM.\|\vec{u}\|$$

$$HM = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

خاصية

في الفضاء (D) مستقيم مار من A وموجه بـ $\vec{u}$, M نقطة من الفضاء.

مسافة النقطة M عن المستقيم (D) هي $d(M;(D)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

تمرين

A(3;2;-1) $\quad (D): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad d(A;(D)) = ?$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر (A(1;2;1 و(B(-2;1;3 و (D) المستقيم الذي معادلته

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

1- حدد $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد d(A;(D))

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S)التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)

R

La sphère الفلكـــة

I- الفلكة المعرفة بمركزها وشعاعها.

تعريف :

لتكن A نقطة من الفضاء ξ و R عدد حقيقي.
الفلكة التي مركزها A وشعاعها R هي مجموعة النقط M حيث : $AM = R$.
ونرمز لها بـ : $S(A,R)$

$$S(A,R)=\{M\in\xi \,/\, AM=R\}$$

معادلة فلكة :

1) معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها :

الفضاء ξ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

لتكن : $S(\Omega,R)$ فلكة مركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ وشعاعها R حيث $R\succ 0$.

لدينا :
$$M(x,y,z)\in S(\Omega,R)\Leftrightarrow \Omega M=R$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$
$$\Leftrightarrow \boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega,R)$

أمثلـة :

1) $\Omega(3,0,1)$, $R=2$
$$S_1:(x-3)^2+(y)^2+(z-1)^2=4$$

2) $\Omega(1,2,-3)$, $R=1$
$$S_2:(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=1$$

3) $$\left(x+\sqrt{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=2$$

S_1 هي فلكة مركزها $\Omega\left(-\sqrt{2},1,\frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$.

4) $\Omega(0,0,0)$ و $R=1$
$$S_4:x^2+y^2+z^2=1$$

2) معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها.

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء ξ.
توجد فلكة وحيدة S أحد أقطارها $[AB]$.
لتكن S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

$$M\in S\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$$

لتكن : $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$

و : $M(x,y,z)$.

و S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

R

لدينا : $M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0}$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة S التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

ملاحظة :

إذا كان $[AB]$ قطر للفلكة S فإن منتصف $[AB]$ هو مركزها وشعاعها هو : $\frac{AB}{2}$.

3) دراسة المعادلة : $(E): x+y+z-2ax-2by-2cz+d=0$

لدينا : $(E) \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = a^2+b^2+c^2-d$

الحالة① : $a^2+b^2+c^2-d \prec 0$

$$S=\varnothing$$

الحالة② : $a^2+b^2+c^2-d=0$

$$S=\{\Omega(a,b,c)\}$$

الحالة③ : $a^2+b^2+c^2-d \succ 0$

نضع : $R^2=a^2+b^2+c^2-d$ حيث $R \succ 0$

$$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$$

$$S=S(\Omega(a,b,c),R)$$

مثال :

$$(E): x^2+y^2+z^2-2y+z-3=0$$

ط1 :

لدينا :

$a=0$

$b=1$

$c=-\frac{1}{2}$

$d=-3$

إذن : $a^2+b^2+c^2-d=1+\frac{1}{4}+3=\frac{17}{4} \succ 0$

إذن : S فلكة مركزها : $\Omega\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

ط2 :

لدينا : $(E): x^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=1+\frac{1}{4}+3$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$$

$$S=S\left(\Omega\left(0,1,\frac{-1}{2}\right),\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

R

II- تقاطع فلكة ومستوى :

الوضع النسبي لمستوى وفلكة :

ليكن P مستوى و S فلكة مركزها Ω وشعاعها R.

لدراسة الوضع النسبي للمستوى P والفلكة S،

نحسب المسافة d بين (P) و Ω. $d = d(\Omega,(P))$

الحالة① : $d(\Omega,(P)) \succ R$

$S \cap P = \varnothing$

الحالة② : $d(\Omega,(P)) = R$

$(S) \cap (P) = \{H\}$

بحيث H هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (P).

في هذه الحالة نقول ان المستوى (P) مماس للفلكة (S).

الحالة③ : $d(\Omega,(P)) \prec R$

في هذه الحالة تقاطع (S) و (P) هو دائرة ℓ مركزها H.

(حيث H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على (P)). وشعاعها r حيث : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

علما أن : $d = d(\Omega,(P)) = \Omega H$

مثـال :

$$(P): 2x - y + z + 1 = 0$$

و : $S\{\Omega, 2\}$

حيث : $\Omega(1,-1,1)$

لدينا :

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|2+1+1+1|}{\sqrt{4+1+1}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} \succ 2$$

إذن : $S \cap P = \varnothing$

معادلة المستوى المماس للفلكة في نقطة معينة.

لتكن A نقطة من الفلكة S ذات المركز Ω والشعاع R.

وليكن (P) المستوى المماس للفلكة S في A .

لدينا : $M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

ملاحظة :

$\overrightarrow{\Omega A}$ منظمية على (P).

مثـال :

(S) فلكة معادلتها : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

و : $A(1,1,0)$

حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S في A .

لدينا : $A \in S$

إذن : $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

وبمأن : $\Omega(1,-,1,0)$

$A(1,1,0)$

$M(x,y,z)$

R

فإن : $\overrightarrow{A\Omega}(0,-2,0)$

$\overrightarrow{AM}(x-1,y-1,z)$

إذن : $-2(y-1)=0$

ومنه : $y=1$ هي معادلة المستوى المماس للفلكة S في النقطة A .

III- تقاطع فلكة ومستقيم :

مثال 1 :

أدرس تقاطع الفلكة S والمستقيم (D).

حيث : $(S): x^2+y^2+z^2-3x+2y-4z-5=0$

و : $(D):\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=2 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

لدراسة تقاطع الفلكة (S) والمستقيم (D)،

نحل النظمة : $\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=2 \\ x^2+y^2+z^2-3x+2y-4z-5=0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

الجـواب :

$$t^2+(t+1)^2+4-3t+2(t+1)-8-5=0$$

$$2t^2+t-6=0$$

لنحل المعادلة : $\Delta=1-4(2)\times(-6)$

$$=49\succ 0$$

إذن : $t_1=\dfrac{-1-7}{4}=-2$

$$t_2=\dfrac{-1+7}{4}=\dfrac{3}{2}$$

ومنه تقاطع الفلكة S والمستقيم (D) هي النقطتين : $A(-2,-1,2)$

و : $B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},2\right)$.

مثال 2 :

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) والفلكة (S).

حيث : $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=-4$

$(D):\begin{cases} x=t+1 \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases} \quad / \quad (t\in\mathbb{R})$

الجـواب :

$$(1+t-1)^2+(-1+2t+1)^2+t^2=-4$$

$$t^2+4t^2+t^2=-4$$

$$6t^2=-4$$

$$6t^2+4=0$$

$$\Delta=-96\prec 0$$

ومنه : $(S)\cap(D)=\varnothing$

الجداء المتجهي

I- توجيه الفضاء

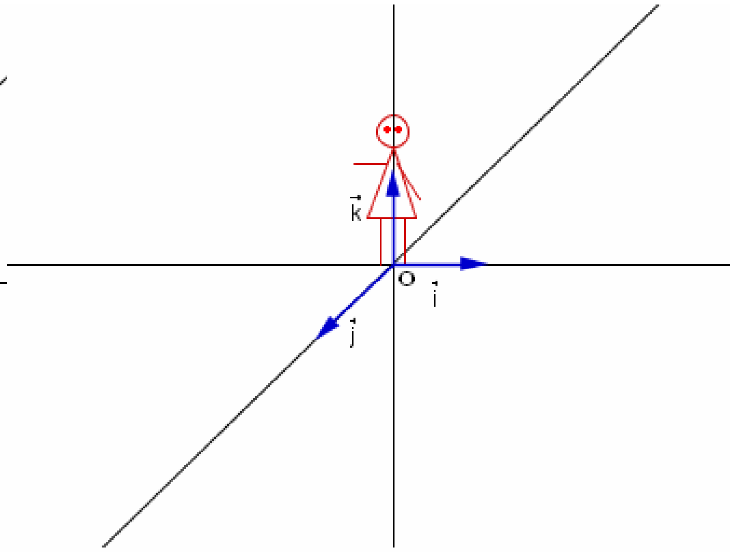
1- معلم موجه في الفضاء

ننسب الفضاء E إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

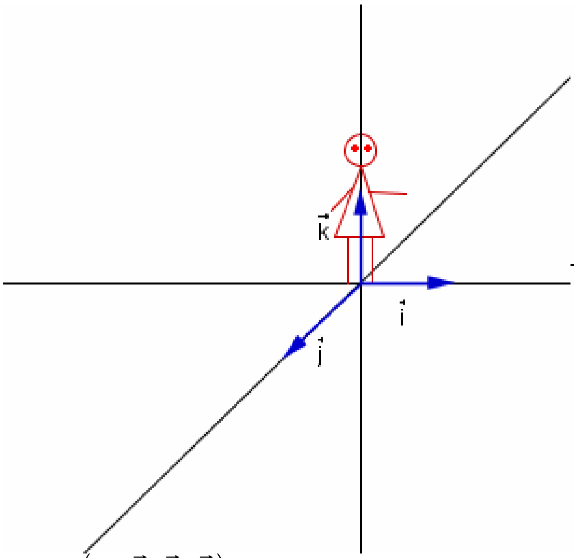
لتكن I وJ وK ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

« رجل أمبير » للمعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ هو رجل خيالي رأسه في النقطة K قدماه على النقطة O و ينظر إلى I

النقطة J إما توجد على يمين« رجل أمبير » أو على يساره .



معلم مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$



معلم غير مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

تعريف :

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. لتكن I وJ وK ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

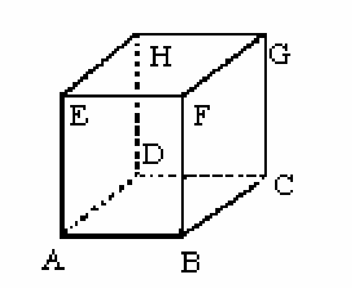
نقول إن : * $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم مباشر إذا وجدت J على يسار « رجل أمبير »

* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم غير مباشر إذا وجدت J على يمين « رجل أمبير »

أمثلة * نعتبر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم مباشر

$\left(O;\vec{j};\vec{i};\vec{k}\right)$ معلم غير مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};-\vec{k}\right)$ معلم غير مباشر

$\left(O;\vec{j};\vec{k};\vec{i}\right)$ معلم مباشر



** ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1

$\left(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF}\right)$; $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ معلمان مباشران

$\left(E;\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EH}\right)$, $\left(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right)$ معلمان غير مباشرين

2- الأسرة المباشرة

يمكننا توجيه الفضاء V_3 , اذا وجهنا جميع أساساته

تعريف

نقول إن الأساس المتعامد الممنظم $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ مباشر اذا كان $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ م.م.م. مباشر مهما كانت النقطة O من الفضاء

3- توجيه المستوى

ليكن (P) مستوى في الفضاء و $\vec{k}$ متجهة واحدية و منظمية على (P) , و O نقطة من المستوى (P) $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ م.م.م للمستوى (P)

لدينا $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ممنظم للفضاء E

يكون المعلم المتعامد الممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ في المستوى (P) معلما مباشرا اذا كان المعلم المتعامد الممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ مباشرا

* يتم توجيه مستوى (P) بتوجيه متجهة منظمية عليه.
* كل المستويات الموازية لـ(P) له نفس توجيه المستوى (P)

II – الجداء المتجهي

1- تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء V_3 وA و B نقطتين من الفضاء E بحيث $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$
الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هدا الترتيب ,هو المتجهة التي لها بـ $\vec{u}\wedge\vec{v}$ المعرفة كما يلي
:

* إذا كانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{o}$.
* إذا كانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فان $\vec{u}\wedge\vec{v}$ هي المتجهة التي تحقق :
  - $\vec{u}\wedge\vec{v}$ عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$
  - $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس مباشر .
  - $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ حيث θ قياس الزاوية $\left[\widehat{AOB}\right]$

أمثلة * نعتبر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$$

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}\qquad \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}\qquad \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}\qquad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}\qquad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$$

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين واحديتين و متعامدتين فان $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس مباشر .

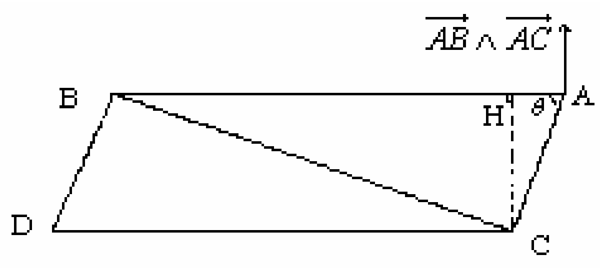
تمرين نحسب $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ علما أن $\theta\in\left]0;\pi\right[$ $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)=\theta$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-5$ $\|\vec{v}\|=2$ $\|\vec{u}\|=5$

2- خاصيات

أ- خاصية

إذا كانت A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء فان المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

لتكن A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء θ قياس الزاوية $\left[\widehat{CAB}\right]$, H المسقط العمودي لـ C على (AB)



$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=AB.AC.\sin\theta\qquad HC=AC\sin\theta$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=AB\times HC$$

خاصية

مساحة المثلث ABC هو نصف $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

نتيجة

مساحة متوازي الأضلاع ABDC هي $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

د- خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء
يكون $\vec{u}\wedge\vec{v}$ منعدما إذا وفقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

البرهان * $\Rightarrow$(بديهي – التعريف-)
* $\Leftarrow$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$
$$\Rightarrow\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow\|\vec{u}\|=0\quad\vee\quad\|\vec{v}\|=0\quad\vee\quad\sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}\quad\vee\quad\vec{v}=\vec{0}\quad\vee\quad\vec{u}et\vec{v}\quad sont\ liés$$

ملاحظة A وB و C مستقيمية $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

ج- الجداء المتجهي والعمليات(نقبل)

$\forall(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\in V_3^3 \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$

$$(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$$
$$(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$$
$$\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$$

تمرين

$(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر .

أحسب $\vec{i}\wedge 3\vec{j}$ $\qquad (\vec{i}+2\vec{k})\wedge\vec{j}$ $\qquad (\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})\wedge\vec{k}$ $\qquad (2\vec{i}-\vec{j})\wedge(3\vec{i}+4\vec{j})$

تمرين

لتكن $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{d}$; $\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{d}$

بين إن $\vec{a}-\vec{d}$ و $\vec{b}-\vec{c}$ مستقيميتان

3- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في م.م.م مباشر

$(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{u}(x;y;z)\qquad\vec{v}(x';y';z')$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$$
$$=(yz'-zy')\vec{i}+(zx'-xz')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$$

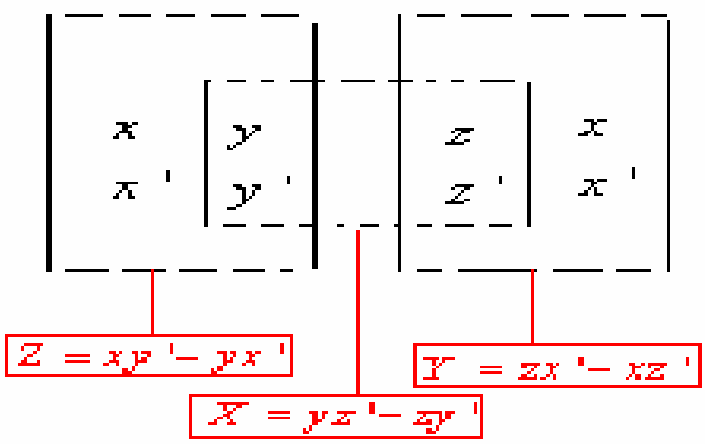
خاصية

الفضاء E منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x(;y';z')$ متجهتان من V_3

إحداثيات الجداء المتجهي $\vec{u}\wedge\vec{v}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ هو (X;Y;Z) حيث

$$X=yz'-zy'\qquad Y=zx'-xz'\qquad Z=xy'-yx'$$

ملاحظة يمكن استعمال الوضعية التالية



مثال نعتبر $\vec{v}(-2;-1;1)$ $\quad\vec{u}(1;2;0)$ $\quad A(1;2;1)$ $\quad B(0;-3;2)$ $\quad C(1;2;1)$

حدد $\vec{u}\wedge\vec{v}$ $\qquad$ أحسب مساحة المثلث (ABC)

III – تطبقات الجداء المتجهي

1- معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمية

خاصية

لتكن A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AM}$$

مثال نعتبر A(1;2;3) و B(1;-1;1) و C(2;1;2) حدد معادلة المستوى (ABC)

2- تقاطع مستويين

نعتبر في فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

(P) : ax+by+cz+d=0

(P´) : a´x+b´y+c´z+d´=0

لدينا $\vec{n}(a;b;c)$ منظمية لـ (P) و$\vec{n}'(a';b';c')$ منظمية لـ (P´)

* اذا كان (P) و(P´) متقاطعين فان المستقيم (D) تقاطع (P) و(P´) موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$
* اذا كان $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq 0$ فان (P) و(P´) متقاطعان وفق مستقيم موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

تمرين

حدد تقاطع (P): x+2y-2z+3=0 و (P´): 4x-4y+2z-5=0

3- مسافة نقطة عن مستقيم

في الفضاء (D) مستقيم مار من A وموجه بـ $\vec{u}$, M نقطة من الفضاء وH مسقطها العمودي على(D)

$$\overrightarrow{AH} et \vec{u} \quad liés \qquad \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$$

$$\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\| = HM.\|\vec{u}\|\sin\frac{\pi}{2} = HM.\|\vec{u}\|$$

$$HM = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

خاصية

في الفضاء (D) مستقيم مار من A وموجه بـ $\vec{u}$, M نقطة من الفضاء.

مسافة النقطة M عن المستقيم (D) هي $d(M;(D)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

تمرين

A(3;2;-1) $\quad t \in \mathbb{R} \quad (D): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad d(A;(D)) = ?$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر A(1;2;1) وB(-2;1;3) و (D) المستقيم الذي

معادلته $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$

1- حدد $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد d(A;(D))

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)

الهندسة الفضائية

1) تذكير :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O,i,j,k)

- لتكن $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$

إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$

المسافة AB : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

- لتكن $u(x,y,z)$ $v(x',y',z')$

منظم متجهة : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$

الجداء السلمي: $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

خاصية : $\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$

- تمثيل بارامتري لمستقيم:

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و موجه بالمتجهة $u(\ \ ,\ \ ,\ \ )$

$M(x,y,z)\in(D)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ $(t\in\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_A+t\alpha \\ y=y_A+t \\ z=z_A+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$$

النظمة الأخيرة تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

- معادلة ديكارتية لمستوى:

ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية للمستوى (P)

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ $\Leftrightarrow$ $M(x,y,z)\in(P)$

$\Leftrightarrow$ $ax+by+cz+d=0$

خاصية :

إذا كان (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ فإن $n(a,b,c)$ هي متجهة منظمية للمستوى (P).

❖ مسافة نقطة عن مستوى :

ليكن (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $\Omega(x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega)$ نقطة من الفضاء

$$d(\Omega,(P))=\frac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

2) الفلكة

أ. تعريف :

لتكن Ω نقطة و r عددا حقيقيا موجبا قطعا

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M=r$ تسمى الفلكة التي مركزها Ω و شعاعها r و نرمز لها بالرمز : $S(\Omega,r)$

ب. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركزها و شعاعها :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ و شعاعها r هي :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

ج . معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

لتكن (S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و M نقطة من ألفضاء

$$M\in(S)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$$

د . دراسة E مجموعة النقط التي تحقق: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ تكافئ $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

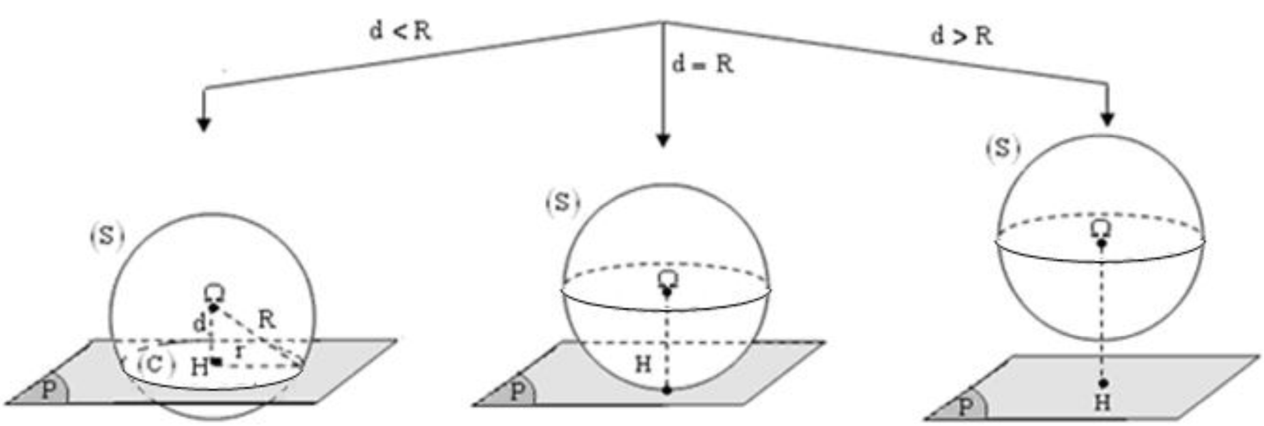
هناك ثلاث حالات :

- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}<0$: E مجموعة فارغة
- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}=0$: E هي النقطة الأحادية $\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)\right\}$
- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}>0$: E هي الفلكة التي مركزها $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$ وشعاعها $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$

3) الأوضاع النسبية لفلكة و مستوى

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d=d\left(\Omega,(P)\right)$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

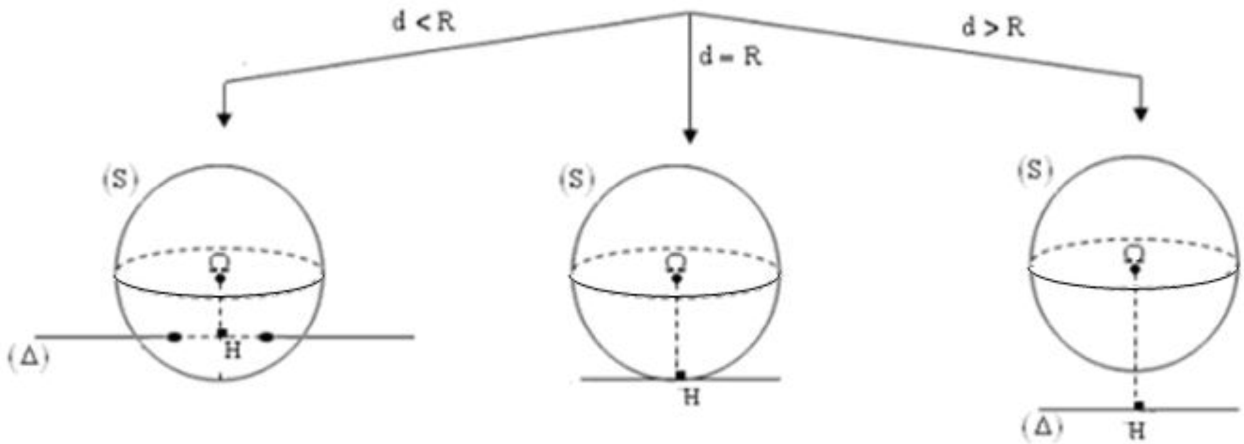


المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S)		المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H		المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) مركزها H و شعاعها $r=\sqrt{R^2-d^2}$

4) الأوضاع النسبية لفلكة و مستقيم :

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d=d(\Omega,(\Delta))$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (Δ)



المستقيم (Δ) يخترق الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين		المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة H		المستقيم (Δ) و الفلكة (S)

5) الجداء المتجهي :

أ. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي :

إذا كان $u=xi+yj+zk$ $\quad$ $v=x'i+y'j+z'k$

فإن $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\vec{k}$

ب. استقامية متجهتين :

$u\wedge v=0$ يكافئ u و v مستقيميتان

ج. استقامية ثلاث نقط :

A و B و C مستقيمية يكافئ $AB \wedge AC = 0$

د. معادلة ديكارتية لمستوى :

إذا كان $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ فإن النقط A و B و C غير مستقيمية وبالتالي فهي تحدد لنا مستوى (ABC)

و المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ هي متجهة منظمية للمستوى (ABC)

و لدينا : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$

و منه نستنتج معادلة المستوى (ABC)

ملاحظة : كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجها بالمتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

ه. مساحة مثلث - مساحة متوازي أضلاع:

مساحة مثلث ABC هي : $S_{ABC} = \dfrac{\|AB \wedge AC\|}{2}$

مساحة متوازي الأضلاع هي : $S_{ABCD} = \|AB \wedge AC\|$

و. مسافة نقطة عن مستقيم :

مسافة نقطة Ω عن مستقيم (D) مار من نقطة A و موجه بمتجهة $\vec{u}$ هي : $d\left(\Omega,(D)\right) = \dfrac{\|\Omega A \wedge u\|}{\|u\|}$

ز. توازي و تعامد مستويين :

نعتبر مستويين $(P): ax + by + cz + d = 0$ و $(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$n(a,b,c)$ $\quad n'(a',b',c')$ هما متجهتان منظميتان للمستويان (P) و (P')

$(P)//(P')$ يكافئ $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$

$(P) \perp (P')$ يكافئ $\vec{n}.\vec{n}' = \vec{0}$

تجريبية

تقاطع مستويين :

إذا كان (P) و (P') متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم موجه بالمتجهة $n \wedge n'$

Dénombrement التعداد

I- مبدأ الجداء

تمهيد :

1) رمي قطعة نقدية :

a) اذا رمينا قطعة نقدية فاننا نحصل اما على الوجه F أو على الظهر P . P=pile , F=Face

في هذه الحالة نقول أن لنا امكانيتين .

b) و اذا رمينا القطعة النقدية مرتين فما هو عدد المكانيات الممكن الحصول عليها :

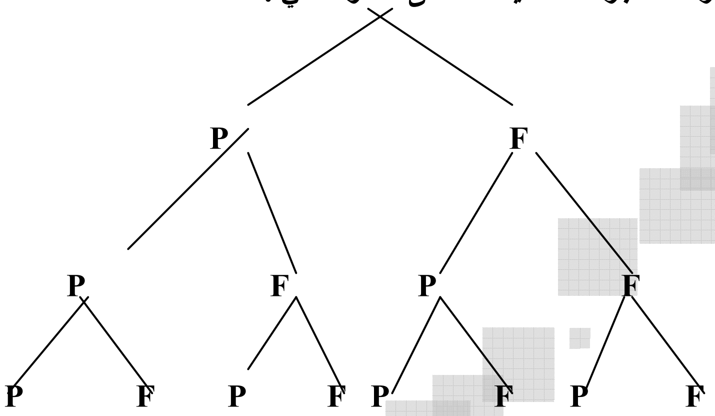
FF ; FP ; PF ; PP

c) و اذا رمينا القطعة النقدية ثلاث مرات فما هو عدد الامكانيات الممكن الحصول عليها:

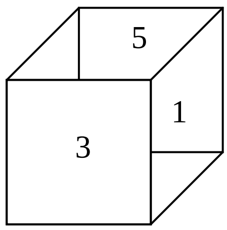
PPP ; PPF ; PFP ; FPP

FFP ; FPF ; PFF ; FFF

يمكن استعمال الشجرة " شجرة الامكانيات" على النحو التالي :



2) رمي النرد:



النرد هو مكعب عادة تكون وجوهه الستة مرقمة من 1 الى 6 .

a) إذا رمينا هذا النرد مرة واحدة و نسجل الرقم المحصل عليه بعد كل رمية فما هي النتائج الممكن المحصل عليها . الجواب : 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6.

لدينا إذا ستة إمكانيات .

b) اذا قمنا برمي النرد مرتين و كنا نسجل الرقم المحصل عليه بعد كل رمية فما هي مجموعة جميع الامكانيات المتوقعة ؟

الجواب : {(1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6).....}. يمكن إعطاء جدول للنتائج.

c) تظن عدد جميع الإمكانيات إذا قمنا برمي النرد ثلاث مرات متتالية .

3) تكوين أعداد

a) لدينا 6 بيدقات تحمل الأرقام : 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6

a_1) ما هو عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام و الممكن تكوينها بواسطة البيدقات .

a_2) ما هو عدد الأعداد المكونة من ستة أرقام و الممكن تكوينها بواسطة البيدقات .

b) ما هو عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام .

ملاحظة : لعدد oxy يعتبر عدد مكون من رقمين فقط .

R

خلاصة : مبدأ الجداء

نعتبر p اختبار

اذا كان : الاختبار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفة

الاختبار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفة

الاختبار p يتم ب n_p كيفية مختلفة

فإن عدد الكيفيات التي تم بها هذا الاختبار هو : $n_1 \times n_2 \times \dots\dots\dots \times n_p$

تطبيقات:

-1 صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء

a) نسحب من الصندوق 3 كرات واحدة تلو الأخرى و لا نعيد الكرة المسحوبة الى الصندوق

a_1) أعط عدد جميع السحبات الممكنة

a_2) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات بيضاء.

a_3) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات سوداء.

a_4) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات لها نفس اللون.

b) نفس الأسئلة علما أننا نعيد الكرة المسحوب إلى الصندوق قبل سحب الأخرى و هكذا.

-2 كيس يحتوي كلى 5 بيدقات تحمل الأرقام 0 – 1- 2 - 3- 4 . نسحب بيدقتين بالتتابع.

إذا كانت البيدقة الأولى تحمل رقما فرديا نعيدها إلى الكيس ثم نسحب الثانية

و إذا كانت البيدقة الأولى تحمل رقما زوجيا لا نعيدها إلى الكيس ثم نسحب الثانية

a) ما هو عدد جميع الإمكانيات

b) ما هو عدد إمكانيات الحصول على بيدقتين يحملن رقما فرديا

c) ما هو عدد إمكانيات الحصول على بيدقتين يحملن رقما زوجي

II- الترتيبات : Les arrangement

تمهيد :

-1 في قاعة انتظار إحدى العيادات يوجد 10 كراسي و 3 مرضى . بكم من طريقة يمكن للمرضى الثلاث أن يجلسوا.

-2 أربعة أطفال دخلوا إلى قاعة للمطالعة فوجدوا 5 طاولات. بكم من طريقة يمكن للأطفال أن يجلسوا (كل طاولة لا تسع إلا لطفل على الأكثر)

-3 قسم يحتوي على42 تلميذ . بكم من طريقة يمكن اختيار ثلاث تلاميذ واحد تلو الأخر من هذا القسم .

تعريف:

كل ترتيب ل p عنصر من بين n عنصر $(p \leq n)$ يسمى يسمى ترتيبه ل p عنصر من بين n

عدد الترتيبات :

تمهيد :

مجموعة تتكون من n عنصر .

نريد اختيار p عنصر من بين n بالتتابع

لاختيار العنصر الأول لدينا n طريقة

و لاختيار العنصر الثاني لدينا (n-1) طريقة

و لاختيار العنصر p^n لدينا (n-p+1) طريقة.

وحسب مبدأ الجداء لدينا : n(n-1).......(n-p+1) طريقة مختلفة لاختيار p عنصر من بين n.

مبرهنة :

عدد الترتيبات ل p عنصر من بين n $p \leq n$ هو n(n-1)..........(n-p+1) و نرمز له ب A_n^p

$$A_5^3 = n(n-1)......(n-p+1)$$

مثال : A_5^1 , A_6^2 , A_5^3

R

III - التبديلات : les permutations

تعريف :

كل ترتيبة ل n عنصر من بين n تسمى تبديلة ل n عنصر

عدد التبديلات :

عدد التبديلات ل n عنصر هو العدد A_n^n

$n(n-1)..............\times 2\times 1$

و نرمز له ب: $n!$ و نقرأ n عاملي أو n factoriel .

$n!=n(n-1)..............\times 2\times 1$

اصطلاح : $0!=1$

مثال : $3!=6$ $5!=120$

ملاحظة هامة :

$A_n^p=n(n-1).........(n-p+1)$

$=\frac{n(n-1)....(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}=\frac{n!}{(n-p)!}$

$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$

$A_n^p=n(n-1).........(n-p+1)$

$=\frac{n(n-1)....(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}=\frac{n!}{(n-p)!}$

$$\boxed{A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}}$$

VI- التأليفات : Les combinaisons

تمهيد :

1- نعتبر المجموعة : $E=\{a,b,c,d\}$

جدد جميع أجزاء E

2- نريد اختيار شخصين ثانيا من بين 5 أشخاص

ما هو عدد الطرق لإجراء هذا الاختبار.

تعريف :

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر

كل جزء من E مكون من P عنصر (p≤n) يسمى تأليفة ل p عنصر من بين n

عدد التأليفات :

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر و (p≤n)

إذا أردنا اختيار p عنصر بالتتابع و بدون إحلال من E فإن عدد جميع الإمكانيات هو A_n^p :

و ليكن N هو عدد التأليفات ل p عنصر من بين n

نلاحظ أنه بالنسبة للتأليفات الترتيب غير مهم

اذن لكل تأليفة ل p عنصر من بين n هناك ل p عنصر من بين n هناك $p!$ ترتيبة ل p عنصر من بين n و منه :

$A_n^p=p!N$ أي $N=\frac{A_n^p}{p!}$

R

عدد التاليفات ل p عنصر من بين n $(p\leq n)$ هو العدد $\frac{A_n^p}{p!}$ و الذي نرمز له ب : C_n^p

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}}$$

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

تطبيقات:

1- أحسب : C_4^2 , C_3^1 , C_n^1 , C_n^0

2- بين أن : C_n^p $C_n^{n-p} =$

3- بين أن : $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$, $1 \leq p \leq n$

4- مثلث باسكال

5- صيغة الجدائية : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$

أمثلة : 1) أحسب : $(n+1)^5$

2) بين أن : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

استنتج عدد أجزاء مجموعة تحتوي على n عنصر

خاصية : عدد أجزاء مجموعة تحتوي على n عنصر هو 2^n

$$\boxed{cardP(E) = 2^{cardE}}$$

حساب الاحتمالات

I- التجارب العشوائية

1- تقديم يوجد نوع من الأحداث تقع دائما بنفس الطريقة، فمثلا إذا أطلقنا شيئا ذا وزن من يدنا نعلم مسبقا أنه سوف يسقط على الأرض ، إن دراسة هدا النوع من الأحداث بعد إيجاد المعادلات و قوانينها و معطياتها الأولية المنظمة لها يمكن أن نتوقع نتيجتها النهائية .

لكن هناك نوع آخر من الأحداث التي تنتج عن نفس المعطيات ومع دلك لا يمكن أن نتوقع نتيجتها , فمثلا إذا رمينا نردا على طاولة مستوية لا يمكن إن نعلم مسبقا الرقم الذي سيعينه النرد عندما يستقر, رغم إن المعطيات لا تتغير في كل محاولة.

إن هذه التجارب تسمى تجارب عشوائية أو اختبارات عشوائية .

إن التفكير في تجربة عشوائية ما معناه جرد جميع الإمكانيات أي جميع النتائج المحتملة و ترتيبها حسب درجة احتمال وقوعها.

2- أمثلة * "رمي النرد في الهواء" تجربة عشوائية. هناك 6 نتائج ممكنة

* " سحب ثلاثة كرات من كيس يحتوي على 7كرات " تجربة عشوائية .

- هناك C_7^3 نتيجة ممكنة إذا كان السحب تأنيا .

- A_7^3 نتيجة ممكنة إذا كان السحب بالتتابع وبدون إحلال.

- 7^3 نتيجة ممكنة ادا كان السحب بالتتابع وبإحلال.

* " رمي قطعة نقود مرتين " تجربة عشوائية مكونة من اختبارين عشوائيين.

مجموعة النتائج الممكنة $\{FF;FP;PF;PP\}$

3- مصطلحات

a- الإمكانية – كون الإمكانيات

كل نتيجة من بين النتائج الممكنة لتجربة عشوائية تسمى إمكانية .
مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية تسمى كون الإمكانيات و نرمز له بـ Ω

أمثلة * $\Omega=\{F;P\}$ كون الإمكانيات المرتبط بالتجربة " رمي قطعة النقود مرة واحدة ".

* $\Omega=\{1,2;3;4;5;6\}$ كون الإمكانيات المرتبط بالتجربة " رمي النرد مرة واحدة ".

b- الحدث

كل جزء من المجموعة Ω كون الإمكانيات يسمى حدثا .

أمثلة * $A=\{PP;FF\}$ هو حدث من التجربة " رمي قطعة النقود مرتين متتاليتين "

* $\{1\}$ هو حدث من التجربة " رمي النرد مرة واحدة "

* نعتبر التجربة العشوائية " رمي النرد مرة واحدة "

B " الحصول على عدد زوجي " هو حدث في هده التجربة $B=\{2;4;6\}$

c- تحقيق أو وقوع حدث

إذا قمنا بتجربة و كانت النتيجة تنتمي إلى الحدث A فإننا نقول إن الحدث A قد تحقق.

فمثلا إذا رمينا نردا و حصلنا على أحد الأعداد 2 أو 4 أو 6 فان نقول إن الحدث B " الحصول على عدد زوجي " قد تحقق.

d- تحقيق الحدثين $A\cap B$ و $A\cup B$

إذا تحققا الحدث A و الحدث B في نفس الوقت فإننا نقول إن الحدث $A\cap B$ قد تحقق.
إذا تحققا الحدث A أو الحدث B أو هما معا فإننا نقول إن الحدث $A\cup B$ قد تحقق.

مثال

التجربة " رمي النرد مرة واحدة "

نعتبر الحدثين A " الحصول على عدد قابلة للقسمة على 3 " و B " الحصول على عدد زوجي "

إذا رمينا النرد و حصلنا على 6 فإننا نقول إن الحدث $A\cap B$ قد تحقق

إذا رمينا النرد و حصلنا مثلا على أحد الأعداد 2 , 3, 4 , 6 فإننا نقول إن الحدث $A\cup B$ قد تحقق

e- أحداث خاصة

ليكن Ω كون الإمكانيات

أ- الحدث الأكيد

$\Omega \subset \Omega$ و بما أن نتيجة التجربة تنتمي دائما إلى كون الإمكانيات Ω أي أن Ω حدث يتحقق دائما فان Ω يسمى الحدث الأكيد.

ب- الحدث المستحيل

$\varnothing \subset \Omega$ و بما أن $\varnothing$ لا يحتوي على أي نتيجة , أي $\varnothing$ لا يتحقق أبدا فان $\varnothing$ يســمى الحدث المستحيل.

ج- الحدث الابتدائي

الحدث الابتدائي هو حدث يحتوي على إمكانية واحدة.

$\{pp\}$ حدث ابتدائي في التجربة " رمي قطعة نقود مرتين "

f- انسجام حدثين

نقول إن الحدثين A و B غير منسجمين إذا و فقط A∩B=Ø

مثال

التجربة " رمي قطعة النقود ثلاث مرات متتالية "

نعتبر الأحداث $A=\{FFF;PPP\}$ $B=\{FPP;PFF;PPF\}$ $C=\{FPF;PFF;FFP\}$

A و B غير منسجمين لأن A∩B=Ø

$B\cap C=\{PFF\}$ ومنه B و C منسجمان

g- الحدث المضاد

ليكن Ω كون الإمكانيات

نقول إن الحدثين A و B متضادان إذا وفقط إذا كان A∩B=Ø و A∪B=Ω

نكتب $\overline{A}=B$ أو $\overline{B}=A$

أمثلة

* نعتبر التجربة " رمي النرد مرة واحدة " و نسجل رقم وجهه الأعلى.

كون الإمكانيات $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

نعتبر الأحداث $A=\{1;2;4;6\}$ $B=\{3;5\}$ و D " عدد مضاعف لـ 6 " و C " عدد فردي "

و E " عدد زوجي " و F " عدد أكبر قطعا من 6 "

لدينا A∩B=Ø و A∪B=Ω و منه $\overline{A}=B$ لدينا $\overline{C}=E$

$D=\{6\}$ حدث ابتدائي .

$A\cap C\neq\varnothing$ و منه A و C حدثان منسجمان.

$E\cap B=\varnothing$ و منه E و B غير منسجمين.

F حدث مستحيل .

** نعتبر كيس يحتوي على 2كرات بيضاء و 4 كرات حمراء . " نسحب من الصندوق تأنيا 3 كرات "

A " الحصول على كرة واحدة بيضاء فقط " B " الحصول على كرة واحدة حمراء فقط "

C " الحصول على 3كرات بيضاء " D " الحصول على كرتين حمراويتين على الأقل "

كون الإمكانيات Ω يضم جميع الإمكانيات و عددها C_6^3

عدد إمكانيات الحدث A هو $C_2^1C_4^2$ عدد إمكانيات الحدث B هو $C_4^1C_2^2$

C حدث مستحيل عدد إمكانيات الحدث D هو $C_4^3+C_2^1C_4^2$

A و B غير منسجمين لأن لا يمكن أن نحصل على كرة واحدة حمراء فقط و كرة واحدة بيضاء فقط في نفس الوقت (لا يمكن أن يتحققا معا في نفس الوقت $\overline{B}=D$)

II- الفضاءات الاحتمالية المنتهية

1- أنشطة

نعتبر نردا أوجهه تحمل الأرقام 1و2و3و4و5و6

نرمي النرد و نسجل الرقم المحصل عليه عندما يستقر .

نعتبر الأحداث A " الحصول على عدد زوجي " B " الحصول على مضاعف لـ 3 "

C " الحصول على مضاعف لـ 7 "

1- حدد A و B بتفصيل . ما هو الحدث الذي له أكبر حظ أن يتحقق ؟

2- ما هي نسبة احتمال الحصول على 1 أي تحقيق الحدث $\{1\}$ ؟

3- ما هي نسبة احتمال الحصول على A ثم على B ثم على C؟

2 – احتمال على مجموعة

a- تعريف

لتكن $\Omega=\{a_1;a_2;........a_n\}$ مجموعة منتهية

إذا ربطنا كل عنصر a_i من Ω بعدد p_i ينتمي إلى $[0;1]$ و كان مجموع جميع الأعداد هو 1 فإننا نقول إننا عرفنا احتمالا p على Ω.

نقول إن احتمال الحدث الابتدائي $\{a_i\}$ هو العدد p_i نكتب $p(\{a_i\})=p_i$.

الزوج $(\Omega;p)$ يسمى فضاءا احتماليا منتهيا

b – احتمال حدث

تعريف

احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي توجد ضمن A نرمز له ب $p(A)$

ملاحظة * كل احتمال على Ω هو تطبيق من مجموعة الأحداث $P(\Omega)$ نحو $[0;1]$

* $p(\varnothing)=0$ $\qquad$ $p(\Omega)=1$

مثال نرمي قطعة نقود مرتين متتاليتين

ما هو احتمال الحصول على الوجه مرتين

ما هو احتمال الحصول على الحدث A " ظهور الوجه على الأكثر مرة "

$\Omega=\{FF;FP;PF;PP\}$ $\qquad$ $p(\{FF\})=\dfrac{1}{4}$

$A=\{PP;PF;FP\}$ $\qquad$ $p(A)=p(\{PF\})+p(\{FP\})+p(\{PP\})=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

تمرين

نعتبر نردا مغشوشا بحيث احتمال ظهور العدد2 هو ثلاث مرات احتمال ظهور العدد1 , و أن الأعداد 1و3و4 و 5 و6 لها نفس احتمال الظهور . نرمي النرد مرة واحدة.

1- احسب احتمال كل حدث ابتدائي في هده التجربة .
2- أحسب احتمال الحدث A " الحصول على عدد زوجي "

تمرين

يحتوي صندوق على كرتين حمراويتين مرقمتين بـ 1و2 على التوالي و 3 كرات خضراء مرقمة ب 1و2 و 3 على التوالي . نسحب تأنيا كرتين من الصندوق

1- حدد كون الإمكانيات .
2- أحسب كل حدث ابتدائي .
3- أحسب احتمال الحصول على الحدث A "الحصول على كرة حمراء واحدة فقط "
4- أحسب احتمال الحصول على الحدث B "الحصول على كرتين مجموع رقميهما 4 "

3- احتمال اتحاد و تقاطع حدثين

a - احتمال اتحاد حدثين غير منسجمين

ليكن A و B حدثين غير منسجمين

$A=\{a_1;a_2;......;a_n\}$ $\qquad$ $B=\{b_1;b_2;.......;b_m\}$ $\qquad$ $A\cup B=\{a_1;a_2;......;a_n;b_1;b_2;.......;b_m\}$

$$p(A\cup B)=\sum_{i=1}^{n}p(\{a_i\})+\sum_{i=1}^{m}p(\{b_i\})=p(A)+p(B)$$

خاصية

لكل حدثين غير منسجمين A و B $\qquad$ $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

b- احتمال الحدث المضاد

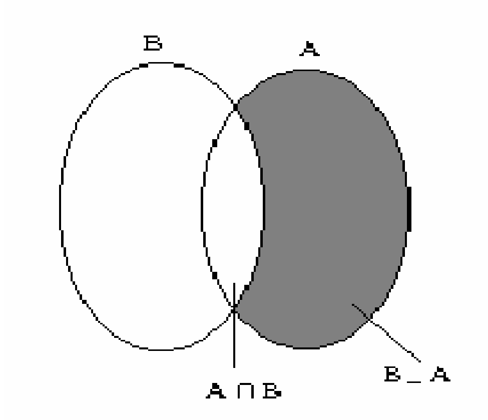
لدينا $A\cap\bar{A}=\varnothing$ $\qquad$ $A\cup\bar{A}=\Omega$

$$p(A\cup\bar{A})=p(A)+p(\bar{A})\Leftrightarrow p(\Omega)=p(A)+p(\bar{A})\Leftrightarrow 1=p(A)+p(\bar{A})$$

خاصية

لكل حدث A من Ω $\qquad$ $p(\bar{A})=1-p(A)$

c- احتمال اتحاد حدثين



ليكن A و B حدثين من Ω $B-A=\{x\in B / x\notin A\}$

لدينا $A\cup B = A\cup(B-A)$ $A\cap(B-A)=\varnothing$

ومنه $p(A\cup B)=p(A)+p(B-A)$

و لدينا $B=(A\cap B)\cup(B-A)$ $(A\cap B)\cap(B-A)=\varnothing$

و منه $p(B)=p(A\cap B)+p(B-A)$

أي $p(B-A)=p(B)-p(A\cap B)$

اذن $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

خاصية

لكل حدثين A وB من كون الإمكانيات من Ω $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

4- فرضية تساوي الاحتمالات

احتمال حدث تذكير الرمز $cardE$ يقرأ رئيسي E و هو عدد عناصر المجموعة E

خاصية

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال فان احتمال كل حدث A هو $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}$

حيث Ω كون الإمكانيات.

البرهان ليكن $\Omega=\{a_1;a_2;........;a_n\}$ $card\Omega=n$ A حدث حيث $cardA=k$

بما أن جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمالات فان $p(\{a_i\})=\dfrac{1}{n}$ $1\le i\le n$ $\forall i$

و بما أن $p(A)$ تساوي مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي ضمن A و عددها k فان

$$p(A)=k\times\frac{1}{n}=\frac{k}{n}=\frac{cardA}{card\Omega}$$

ملاحظة

إن فرضية تساوي احتمالات الأحداث الابتدائية يمكن أن تذكر صراحة في نص التمرين كما يمكن أن تفهم من خلال شروط التجربة .

تمرين

يحتوي صندوق على 4 كرات بيضاء و 5 حمراء و 6 صفراء . نسحب ثلاث كرات من الصندوق

نعتبر الأحداث A " الحصول على ثلاث كرات صفراء "

B " الحصول على ثلاث كرات لها نفس اللون "

C " الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون "

D " الحصول على الأقل على كرة صفراء "

1- أحسب احتمال كل حدث من الأحداث A و B و C و D إذا كان السحب تأنيا .

2- نفس السؤال إذا كان السحب بالتتابع و بدون إحلال.

3- نفس السؤال إذا كان السحب بالتتابع و بإحلال.

الحل

1- ليكن Ω كون الإمكانيات $card\Omega=C_{15}^3=455$

$cardA=C_6^3=20$ $p(A)=\dfrac{20}{455}=\dfrac{4}{99}$ $cardB=C_6^3+C_5^3+C_4^3=34$ $p(B)=\dfrac{34}{455}$

C هو الحدث المضاد ل B $p(C)=1-p(B)=1-\dfrac{34}{455}$

ليكن F " الحصول على ثلاث كرات لا تضم أي كرة صفراء "

$cardF=C_9^3=84$ $p(F)=\dfrac{84}{455}$

F حدث مضاد للحدث D $p(D)=1-p(F)=1-\dfrac{84}{455}$

تمرين

ليكن A و B حدثين من فضاء احتمالي حيث $p(A)=\frac{1}{3}$ $p(B)=\frac{1}{4}$ $p(A\cap B)=\frac{1}{6}$

1- بين أن $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

2- أحسب $p(A\cup B)$ $p(\overline{A}\cup\overline{B})$

تمرين

نعتبر نردا أوجهه الستة مرقمة من 1 الى6 , نرمي النرد ثلاث مرات متتالية فنحصل على عدد مكون من ثلاثة أرقام . أحسب احتمال الأحداث

A " الحصول على عدد رقم مئاته هو 2 "

B " الحصول على عدد مكون من أرقام مزدوجة "

C " الحصول على عدد مكون من أرقام مختلفة مثنى مثنى "

III- الاحتمال الشرطي

1- الاحتمال الشرطي

a- أنشطة تضم إحدى الثانويات 500 تلميذ موزعين حسب الجدول التالي :

الشعبة / الجنس	الأدب	ع تجريبية	المجموع
إناث	140	120	260
ذكور	60	180	240
المجموع	200	300	500

نختار عشوائيا تلميذا من بين 500 تلميذ

1- أحسب احتمال الأحداث التالية

G "اختيار ذكر " F " اختيار أنثى " E " اختيار فرد من ع تجريبية "

L " اختيار فرد من الأدب " $G\cap E$ " اختيار تلميذ ذكر من ع تجريبية "

2- إذا كان تلميذ ذكرا فما هو احتمال لكي يكون من شعبة ع تجريبية ؟

الحل

1- $card\Omega=500$ $p(G)=\frac{204}{500}$ $p(F)=\frac{260}{500}$ $p(E)=\frac{300}{500}$ $p(L)=\frac{200}{500}$ $p(G\cap E)=\frac{180}{500}$

2- إذا كان تلميذ ذكرا فاحتمال لكي يكون من شعبة ع تجريبية هو $\frac{180}{240}$

لأنه يوجد 180 تلميذ ذكر في ع تجريبية من بين 240 ذكر .

$\frac{180}{240}$ هو احتمال الحصول على تلميذ من ع تجريبية علما أنه ذكرا نرمز له بـ $p_G(E)$ أو $p(E/G)$

يقرأ احتمال الحدث E علما أن الحدث محققا نكتب $p_G(E)=\frac{180}{240}$

ملاحظة لدينا $\frac{p(G\cap E)}{p(G)}=\frac{\frac{card(G\cap E)}{card(\Omega)}}{\frac{card(G)}{card(\Omega)}}=\frac{card(G\cap E)}{card(G)}=p_G(E)$

b- تعريف

ليكن A و B حدثين من فضاء احتمالي منته حيث $p(A)\neq 0$

احتمال الحدث B علما أن الحدث A محققا هو $p_A(B)=p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

ملاحظة إذا كان لجميع الأحداث الابتدائية نفس الاحتمال فان $p_A(B)=\dfrac{card(A\cap B)}{card(A)}$

c- صيغة الاحتمالات المركبة

خاصية

إذا كان A و B حدثان احتمالهما غير منعدمين فان $p(A\cap B)=p(A)p_A(B)=p(B)p_B(A)$

تمرين

يحتوي كيس على 5 كرات سوداء مرقمة بـ 1 , 1 , 1 , 1 , 2 و ثلاث كرات بيضاء مرقمة ب 1 , 1 , 2 .
نسحب بالتتابع و بدون إحلال كرتين
أحسب احتمال الحدثين I " الحصول على كرتين سوداويتين مجموع رقميهما 2 "
J " الحصول على كرتين سوداويتين علما أن مجموع رقميهما 2 "

الحل

ليكن Ω كون الإمكانيات $card\Omega=A_8^2$

* لكي تكون الكرتين سوداويتين مجموعهما 2 يجيب أن تسحب من 4 كرات سوداء تحمل الرقم 1

$cardI=A_4^2$ $p(I)=\dfrac{A_4^2}{A_8^2}$

* نعتبر A " الحصول على كرتين سوداويتين " B " الحصول على كرتين مجموعهما 2 "

$cardA=A_5^2$ $cardB=A_6^2$ $p(J)=p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{p(I)}{p(B)}=\dfrac{\dfrac{A_4^2}{A_8^2}}{\dfrac{A_6^2}{A_8^2}}=\dfrac{A_4^2}{A_6^2}$

طريقة ثانية بما أن الأحداث الابتدائية لها نفس الاحتمالات فان $p(J)=\dfrac{card(A\cap B)}{cardB}=\dfrac{A_4^2}{A_6^2}$

2- الاحتمالات الكلية

a- تجزيء مجموعة

تعريف

نقول إن الأحداث $A_1;A_2;..........A_n$ تجزيئا للفضاء Ω اذا تحقق الشرطان التاليان :

$\forall(i;j)\quad i\neq j\quad 1\le i\le n\quad 1\le j\le n\quad A_i\cap A_j=\varnothing$

$A_1\cup A_2..........\cup A_n=\Omega$

b- خاصية الاحتمالات الكلية

خاصية

ليكن $A_1;A_2;..........A_n$ تجزيئا للفضاء Ω . نعتبر B حدثا من Ω

$$p(B)=p(A_1)p_{A_1}(B)+p(A_2)p_{A_2}(B)+..........+p(A_n)p_{A_n}(B)$$

البرهان

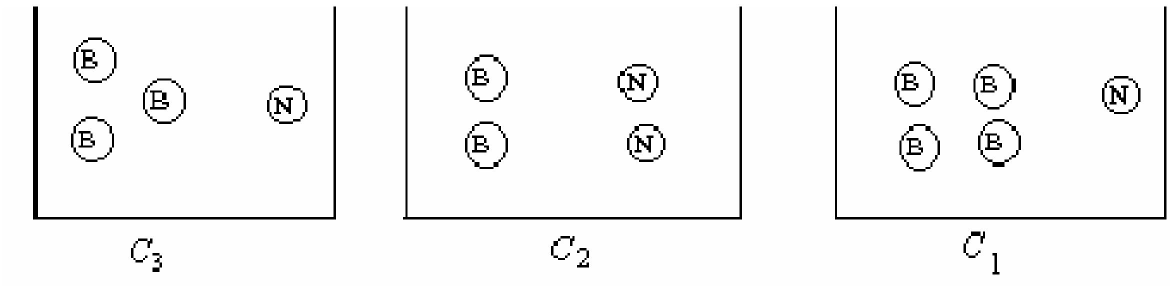
$$B=B\cap\Omega=B\cap(A_1\cup A_2.........\cup A_n)=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)............\cup(B\cap A_n)$$

بما أن $A_1;A_2;..........A_n$ غير منسجمة مثنى مثنى فان $(A_1\cap B);(A_2\cap B);..........(A_n\cap B)$ غير منسجمة مثنى مثنى. ومنه

$$p(B)=p(B\cap A_1)+p(B\cap A_2)...........................+p(B\cap A_n)$$

$$p(B)=p(A_1)p_{A_1}(B)+p(A_2)p_{A_2}(B)+..........+p(A_n)p_{A_n}(B)$$

تمرين نعتبر ثلاث صناديق . يحتوي الصندوق الأول على 4 كرات بيضاء وكرة سوداء و الصندوق الثاني على كرتين بيضاويتين و كرتين سوداويتين و الصندوق الثالث على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء .
نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاث ثم نسحب منه كرة واحدة .
لنحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء .



نعتبر الأحداث C_i " اختيار الصندوق i " $1 \le i \le 3$ B "سحب كرة بيضاء "

لدينا C_1 و C_2 و C_3 غير منسجمة مثنى مثنى . و اتحادهم هو Ω ومنه C_1 و C_2 و C_3 تكون تجزيئا لـ Ω

بما أن للصناديق نفس الاحتمال فان $p(C_1) = p(C_2) = p(C_3) = \frac{1}{3}$

احتمال الحصول على كرة بيضاء من صندوق C_1 هي $p_{C_1}(B) = \frac{4}{5}$

احتمال الحصول على كرة بيضاء من صندوق C_2 هي $p_{C_2}(B) = \frac{2}{4}$

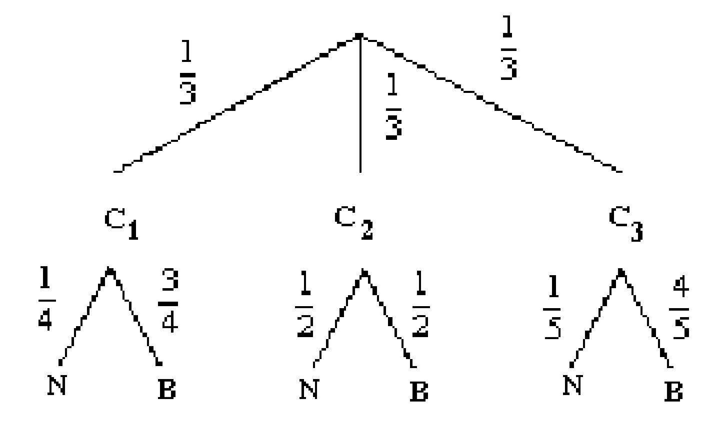
احتمال الحصول على كرة بيضاء من صندوق C_3 هي $p_{C_3}(B) = \frac{3}{4}$

بما أن C_1 و C_2 و C_3 تجزيئا كليا لـ Ω فان حسب خاصية الاحتمالات الكلية

$$p(B) = p(C_1)p_{C_1}(B) + p(C_2)p_{C_2}(C_2) + p(C_3)p_{C_3}(B)$$

$$p(B) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{41}{64}$$

ملاحظة يمكن تلخيص جميع نتائج تجربة في هده الشجرة



مثلا $p_{C_1}(B) = \frac{4}{5}$ $p_{C_3}(B) = \frac{1}{4}$

من خلا ل الشجرة نستنتج $p(N) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{19}{60}$

تمرين ينتج معمل مصابيح كهربائية بواسطة ثلاث آلات A و B و C بحيث

- ❖ الآلة A تضمن 20% من الإنتاج و 5 % من المصابيح المصنوعة غير صالحة
- ❖ الآلة B تضمن 30% الإنتاج و 4 % من المصابيح المصنوعة غير صالحة
- ❖ الآلة C تضمن 50% من الإنتاج و 1 % من المصابيح المصنوعة غير صالحة

نختار عشوائيا مصباحا كهربائيا .

1- مـــا هـــو احتمـــال

a- لكي يكون المصباح غير صالح و مصنوع بـ A
b- لكي يكون المصباح غير صالح و مصنوع بـ B
c- لكي يكون المصباح غير صالح و مصنوع بـ C

2- استنتج الاحتمال لكي يكون المصباح غير صالح

(لاحظ أن $\frac{20}{100}=20\%$ هو الاحتمال لكي يكون المصباح مصنوعا بـ A و 5% هو الاحتمال لكي يكون المصباح غير صالح علما أنه مصنوع بـ A)

3- أحسب احتمال لكي يكون المصباح مصنوعا بـ A علما أنه غير صالح .

الحل

1- a- A " مصنوع بـ A " I " غير صالح "

$$p(A\cap I)=p(A)p_A(I)=\frac{20}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{1}{10}$$

b- B " مصنوع بـ B "
$$p(B\cap I)=p(B)p_I(B)=\frac{30}{100}\times\frac{4}{100}=\frac{12}{1000}$$

c- C " مصنوع بـ C "
$$p(C\cap I)=p(C)p_I(C)=\frac{50}{100}\times\frac{1}{100}=\frac{5}{1000}$$

d- $$p(I)=p(A)p_A(I)+p(B)p_B(I)+p(C)p_C(I)=\ldots$$

2- $$p_I(A)=\frac{p(A\cap I)}{p(I)}$$

IV- الاستقلالية

1- الأحداث المستقلة

نشاط يحتوي كيس على 4كرات حمراء و كرتين خضراويتين . نسحب بالتتابع كرتين من الكيس
نعتبر الحدثين R_1 " الكرة الأولى حمراء " R_2 " الكرة الثانية حمراء "
أحسب $p(R_2)$ $p_{R_1}(R_2)$ ثم قارنهما في الحالتين التاليتين

1- السحب بإحلال
2- السحب بدون إحلال

1- $p(R_2) = p_{R_1}(R_2)$ أي $p(R_1\cap R_2)=p(R_1)\times p(R_2)$ نقول إن R_1 و R_2 مستقلان .

2- $p(R_2) \neq p_{R_1}(R_2)$ نقول إن R_1 و R_2 غير مستقلين.

تعريف

نقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا و فقط إذا كان $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

تمرين نرمي نردا مرتين متتاليتين . نعتبر الأحداث A " الحصول على العدد في الرمية الأولى"
B " الحصول على عددين مجموعهما 7 " C " الحصول على عددين زوجيين "
هل A و B مستقلان ؟ هل A و C مستقلان ؟

2- استقلالية الاختبارات العشوائية

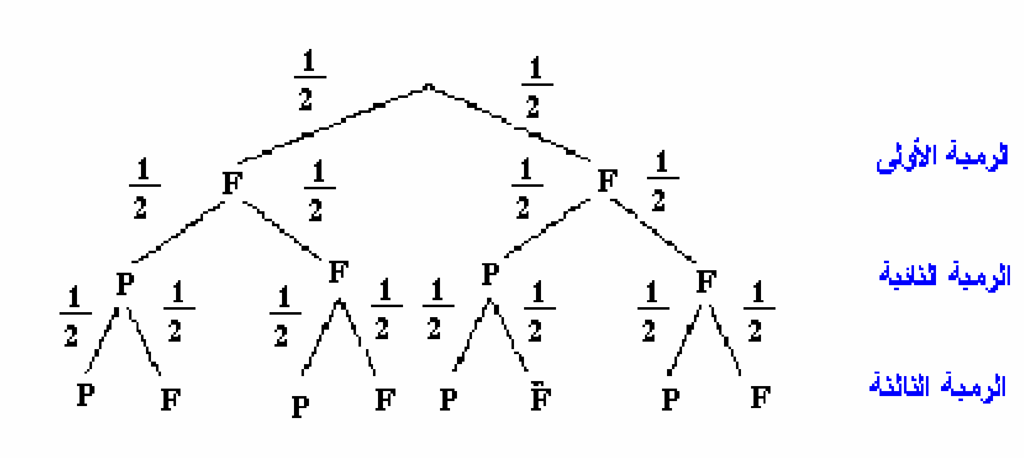
نعلم أن بعض التجارب العشوائية تتكون من اختبار واحد أو عدة اختبارات عشوائية فمثلا
أ- "رمي قطعة النقود n مرة متتالية " تجربة عشوائية تتكون من n اختبار "رمي قطعة النقود"
ب- "رمي النرد n مرة متتالية " تجربة عشوائية تتكون من n اختبار "رمي النرد "
ت- " سحب nكرة من بين m كرة بالتتابع وبإحلال " تجربة عشوائية تتكون من n اختبار "سحب كرة"
ث- " سحب nكرة من بين m كرة بالتتابع وبدون إحلال " تجربة عشوائية تتكون من n اختبار "سحب كرة"

نلاحظ أنه في بعض التجارب لا تؤثر نتائج اختبار على اختبار الموالي مثلا كتجارب الأمثلة أ- ب – ت
و أنه في بعض التجارب تؤثر نتائج اختبار على اختبار الموالي مثلا – ث.

إذا كانت نتائج اختبار ما لا تؤثر على الاختبار الموالي نقول إن التجربة تتكون من اختبارات عشوائية مستقلة

حـــــــالة خـــــــاصة (الاختبارات المتكررة)

مثال1 نرمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية . أحسب احتمال الحدث A " ظهور الوجه F مرتين بالضبط "



$$A=\{FFP;FPF;PFF\}$$
$$p(A)=p(FFP)+p(FPF)+p(PFF)$$
$$p(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=3\left(\frac{1}{2}\right)^3=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

مثال 2

نرمي نردا خمس مرات متتا لية . لنحسب احتمال الحصول على رقم قابل للقسمة على 3 ثلاث مرات بالضبط .

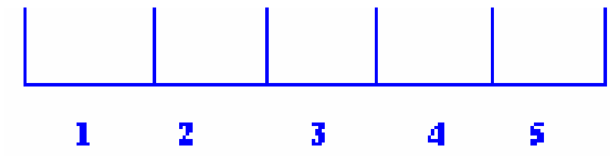
تتكون هده التجربة من تكرار الاختيار " رمي النرد" خمس مرات .

في هدا الاختبار نعتبر الحدث A " الحصول على رقم قابل للقسمة على 3"

$p(A)=\frac{1}{3}$ $\quad$ $A=\{3;6\}$

عندما نرمي النرد اما نحصل على الحدث A و اما على الحدث $\bar{A}$

و هكذا يمكن أن نمثل هده التجربة كما يلي :



حيث تشغل الخانات الخمس بـ A أو $\bar{A}$.

نعتبر B " الحصول على رقم قابل للقسمة على3 ثلاث مرات "

النتائج التي تنتمي الى B هي النتائج الدي يحتل فيها الحدث A ثلاث مرات من بين 5 أمكنة .

و منه عدد النتائج التي تنتمي الى B هي C_5^3 .

و بما أن احتمال كل نتيجة تنتمي الى B هو $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$ لأن $p(\bar{A})=\frac{2}{3}$

فان $p(B)=C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{5-2}$

خاصية

ليكن A حدثا احتماله p في اختبار عشوائي .

ادا أعيد هدا الاختبار n مرة فان احتمال وقوع الحدث A k مرة بالضبط $k\le n$ هو

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

تمرين الاحتمال لكي يصيب رام الهدف هو $\frac{2}{3}$, قام الرامي بعشر محاولات .

ما هو الاحتمال لكي يصيب الهدف 6 مرات بالضبط ؟

تمرين يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء و 12 كرة سوداء و 3 كرات حمراء

نسحب 8 كرات بالتتابع و باحلال .

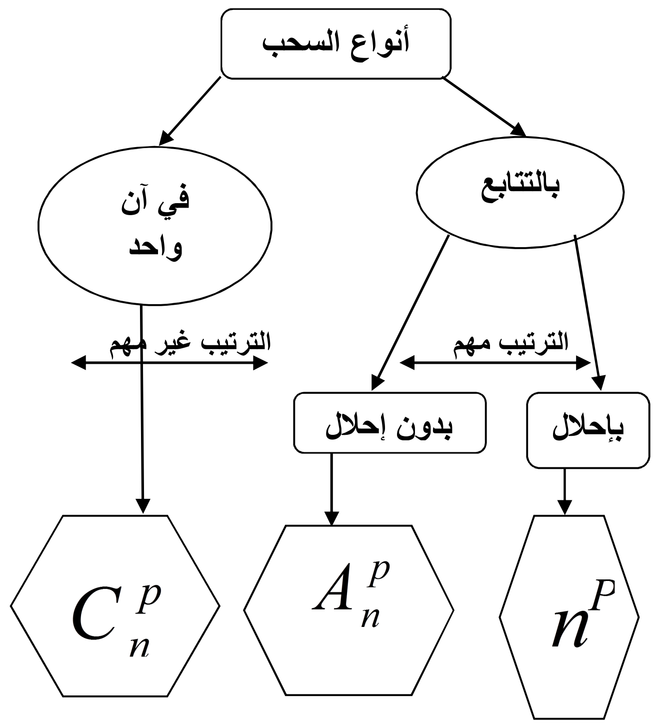
أحسب احتمال الحصول على 6 كرات بيضاء بالضبط .

الإحتمَالات

1) المبدأ الأساسي للتعداد

نعتبر وضعية تعدادية مكونة من p اختيار: C_1و C_2 و...و C_p
إذا كان الإختيار الأول C_1 يتم ب n_1 كيفية مختلفة ،والإختيار C_2 يتم ب n_2 كيفية مختلفة ، و ....، و الإختيار C_p يتم ب n_p
كيفية مختلفة ، فإن عدد الكيفيات التي تتم بها هذه الوضعية التعدادية هو : $n_1 \times n_2 \times .... \times n_p$

2) أنواع السحب



3) العدد $n!$

ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$n! = n \times (n-1) \times .... \times 2 \times 1 \quad (n \geq 2)$$

$$0! = 1 \qquad 1! = 1$$

4) العدد A_n^p

$$\left(p \le n\right) \quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

5) العدد C_n^p

$$\left(p \le n\right) \quad C_n^p = \frac{n!}{p!\times(n-p)!}$$

6) الإحتمالات

تعاريف و خاصيات:

p احتمال معرف على كون إمكانيات Ω

ليكن A و B حدثين

- $p(A) = \frac{cardA}{card\,\Omega}$ (فرضية تساوي الإحتمالات)
- $p(\Omega) = 1$ و $p(\varnothing) = 0$
- $0 \le p(A) \le 1$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- الإحتمال الشرطي
  - $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ بحيث $p(A) \ne 0$
  - A و B حدثان مستقلان إذا كان : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
  - $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$
    $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$
- خاصية : تكرار الإختبار

ليكن A حدثا احتماله p في اختبار عشوائي . n و k عددان صحيحان طبيعيان بحيث $k \le n$.
إذا أعيد الاختبار n مرة فإن احتمال وقوع الحدث A ، بالضبط k مرة هو : $C_n^k\,(p)^k\,(1-p)^{n-k}$

المتغير العشوائي

- ليكن X متغيرا عشوائيا بحيث : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

قانون احتمال X:

x_i	x_1	x_2	....	x_n
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	....	p_n

الأمل الرياضي : $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+......x_np_n$

المغايرة : $V(X)=\left(x_1-E(X)\right)^2p_1+\left(x_2-E(X)\right)^2p_2+......+\left(x_n-E(X)\right)^2p_n$

$$V(X)=(x_1)^2p_1+(x_2)^2p_2+......+(x_n)^2p_n-\left(E(X)\right)^2$$

الإنحراف الطرازي: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

- **ليكن** X **متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطاه** n **و** p

لكل $0\le k\le n$ **:** $p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

الأمل الرياضي : $E(X)=np$

المغايرة : $V(X)=np(1-p)$