I. النهايات (تذكير)

نشاط 1 :

1) ذكر بتعريف : $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$

2) ذكر بتعاريف التالية : أ - $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_g$ ب - $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\ell$ ج- $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

3) ذكر بالأشكال الغير المحددة .

4) ذكر ببعض خاصيات النهايات و الترتيب .

جواب :

1) نذكر بتعريف : $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$:

1. تعريف 1:

f دالة معرفة بجوار x_0 . (أي $]x_0-r,x_0+r[\setminus\{x_0\}\subset D_f$). مع $r>0$.

نقول إن $f(x)$ يؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى a لنعني أن : $f(x)-\ell$ يؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى a .

أو أيضا : $\forall\varepsilon>0 , \exists\alpha>0 , 0<|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

نرمز لذلك ب : $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

2) نذكر بالتعاريف التالية :

أ - تعريف ل : $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_g$.

2. تعريف 2 :

f دالة عددية معرفة على يسار x_0 . (أي $]x_0-r,x_0[\subset D_f$). مع $r>0$.

نقول إن $f(x)$ يؤول إلى العدد الحقيقي ℓ_g عندما يؤول x إلى a على اليسار لنعني أن

$\forall\varepsilon>0 , \exists\alpha>0 , 0<x_0-x<\alpha \Rightarrow |f(x)-\ell_g|<\varepsilon$.

نرمز لذلك ب : $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_g$ أو أيضا $\lim_{\substack{x\to x \\ x<x_0}} f(x)=\ell_g$.

ب - تعريف ل : $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\ell$

3. تعريف3: $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\ell$

f دالة معرفة بجوار $-\infty$. (أي $]-\infty,b]\subset D_f$).

نقول إن $f(x)$ يؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى $+\infty$ لنعني أن : $\forall\varepsilon>0 , \exists B>0 , \alpha<-B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

نرمز لذلك ب : $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\ell$

ج- تعريف ل : $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

4. تعريف4: $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

f دالة معرفة بجوار $+\infty$. (أي $]b,+\infty[\subset D_f$).

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ لنعني أن: $\forall A>0 , \exists B>0 , \alpha>B \Rightarrow f(x)>A$

نرمز لذلك ب : $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

3) الأشكال الغير المحددة هي :

1) $(-\infty)+(+\infty)$; $(+\infty)+(-\infty)$ 2) $0\times(\pm\infty)$ 3) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 4) $\frac{0}{0}$ 5) 0^0 .

4) نذكر بعض خاصيات النهايات و الترتيب .

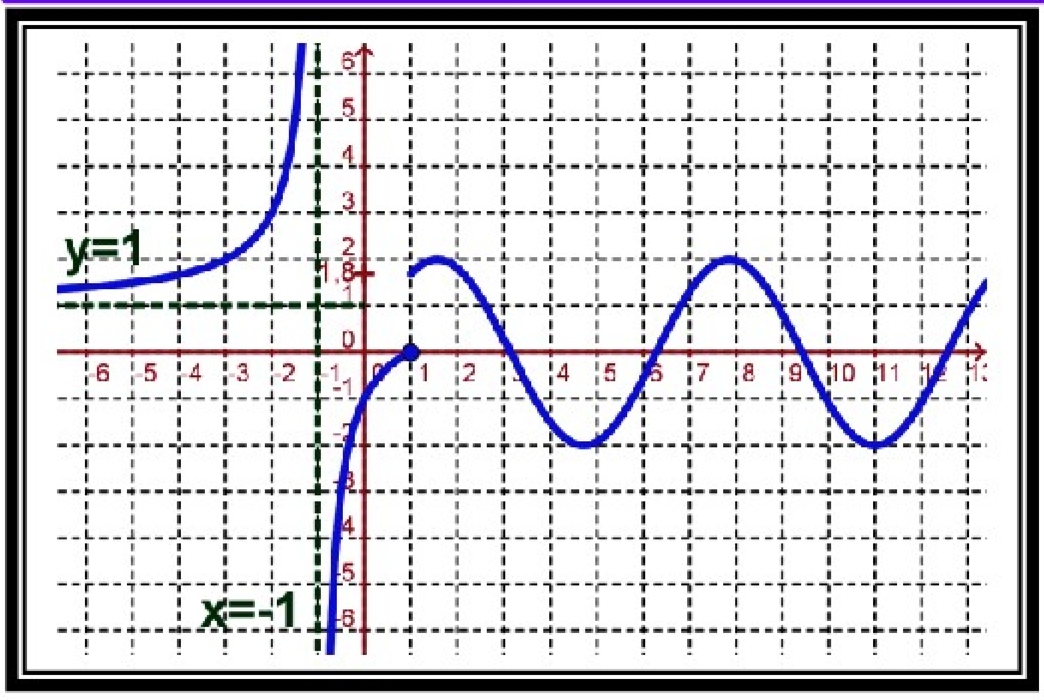
f و g و h دوال عددية حيث :

- إذا كان $f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ?} f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to ?} g(x)=+\infty$.
- إذا كان $f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ?} g(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to ?} f(x)=-\infty$.
- إذا كان $f(x)\le h(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ?} f(x)=\lim\limits_{x\to ?} g(x)=\ell$ فإن $\lim\limits_{x\to ?} h(x)=\ell$.

نشاط 2 :

1. تمرين 5 :

الرسم التالي يمثل منحنى دالة f .



أ- حدد مبيانيا D_f مجموعة تعريف الدالة f.

ب- استنتج مبيانيا نهايات f عند محدات D_f و كذلك في 1.

2. تمرين 1 :

أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^5+1\right)^3\left(3x+2\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x+|x+2|$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{|4-2x|}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{4x^2-8x}$.

3. تمرين 2 :

حدد a علما أن f لها نهاية في 3 حيث f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-3}{2-\sqrt{x+1}} & ; x>3 \\ f(x)=\dfrac{a}{x-1} & ; x\le 3 \end{cases}$$

4. تمرين 3 :

أحسب : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos x}{1+x^2}$.

5. تمرين 4 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-|x-1|}$.

أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

ب- أحسب نهايات f عند محدات D_f.

II. اتصال دالة عددية في نقطة x_0 :

01. نشاط 1 :

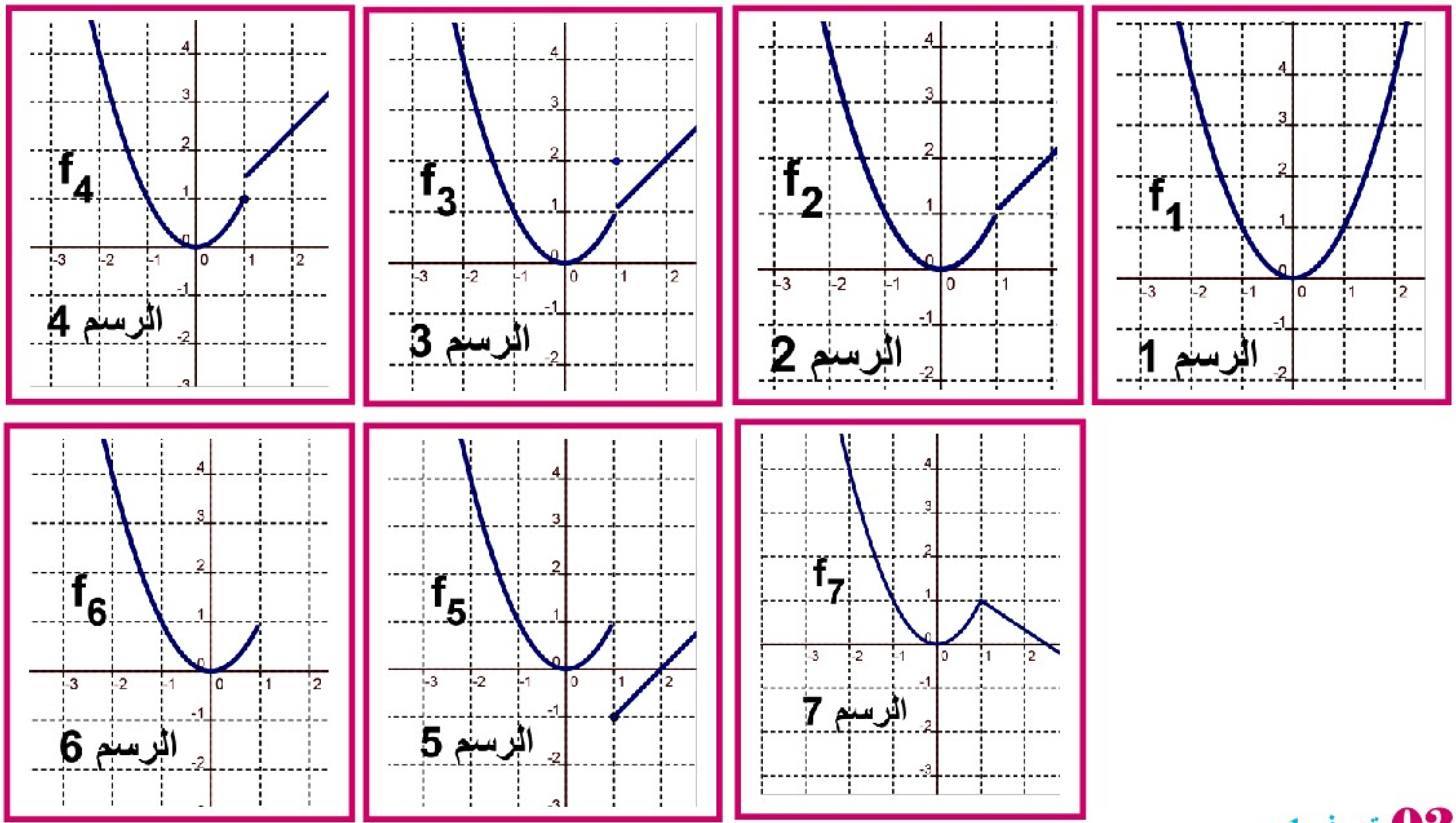
المنحنيات التالية تمثل الدوال f_i مع $i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$. نأخذ النقطة التي أفصولها 1 $x_0=1$.

1) نأخذ النقطة التي أفصولها $x_0 = 1$ ماذا تلاحظ ؟

2) استنتج مبيانيا $\lim_{x \to 1} f_i(x)$ مع $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$

3) الرسم 1 و 7 يمثلان دالتين متصلتين في النقطة $x_0 = 1$ و في الحالات الأخرى غير متصلة في النقطة $x_0 = 1$.

4) أعط تعريف لاتصال دالة في نقطة x_0 .



02. تعريف 1 :

f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $I_{x_0} =]x_0 - r, x_0 + r[$ $(r > 0)$ معرفة على **مجال مفتوح** I و x_0 من I.

f **متصلة في** x_0 يكافئ : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

03. تعريف 1 :

f دالة عددية معرفة على **مجال مفتوح** I و x_0 من I.

f **متصلة في** x_0 يكافئ : $\forall \varepsilon > 0 , \exists \alpha > 0 , |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

III. الاتصال على اليمين والاتصال على اليسار في نقطة x_0

01. تعريف 1 – 2:

- f دالة عددية معرفة على $I_d = [x_0, x_0 + r[$ حيث $r > 0$. f متصل على يمين في x_0 يكافئ : $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$
- f دالة عددية معرفة على $I_g =]x_0 - r, x_0]$ حيث $r > 0$. f متصل على يسار في x_0 يكافئ : $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$

02. أمثلة:

نأخذ النشاط السابق أدرس مبيانيا اتصال بعض من f_i على يمين و يسار النقطة $x_0 = 1$ مع $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

03. خاصية :

دالة f متصلة في x_0 يكافئ f متصل على يسار و على يمين x_0.

IV. التمديد بالاتصال في النقطة x_0 le prolongement par continuité

01. تذكير :

E و F و G ثلاث مجموعات f و g دالتان عدديتان حيث : $f : E \to G$ و $g : F \to G$.

إذا كان $F \subset E$ و $\forall x \in F : f(x) = g(x)$.

- f تسمى تمديد بالاتصال (prolongement) ل g.
- g تسمى قصور (restriction) f على F. نكتب : $g = f_{/F}$.

02. تعريف و خاصية :

f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $I^*_{x_0} =]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ مع $r > 0$. حيث :

- f غير معرفة في x_0
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

الدالة g المعرفة ب : $\begin{cases} g(x) = f(x) \; ; x \in D_f \; , x \neq x_0 \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$ هي متصلة في x_0.

الدالة g تسمى تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة x_0

03. مثال:

$f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1}$ لدينا : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x|(|x| - 1)}{|x| - 1} \lim\limits_{x \to 1} |x| = 1$.

- و بالتالي الدالة g المعرفة ب: $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1} \; ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \\ g(1) = 1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = 1$.
- كذلك الدالة h المعرفة ب: $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1} \; ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \\ h(-1) = 1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = -1$.

- كذلك الدالة k المعرفة ب: $\begin{cases} k(x)=\dfrac{x^2-|x|}{|x|-1} & ; x\in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \\ k(-1)=k(1)=1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0=-1$ و في $x_0=1$.

ملحوظة : يمكن كتابة الدالة k خلى الشكل التالي : $k(x)=|x|$

V. اتصال دالة على مجال

01. تعاريف:

- f دالة متصلة على مجال مفتوح I $\left(I=]a;b[\right)$ يكافئ f متصلة في كل نقطة x_0 من I.
- f دالة متصلة على مجال $I=[a,b]$ يكافئ : f متصلة على $]a,b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b.
- f دالة متصلة على مجال $[a,+\infty[$ يكافئ : f متصلة في كل نقطة x_0 من $]a,+\infty[$ و f متصلة على يمين في a.

02. مثال:

لنعتبر الدالة: $f(x)=x^2+3x$.

بين أن : f متصلة على المجال المفتوح $I=]1;5[$.

VI. اتصال الدوال الاعتيادية:

01. خاصية:

- كل دالة حدودية فهي متصلة على مجموعة تعريفها $D_f=\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية فهي متصلة على مجموعة تعريفها D_f .
- $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ متصلتين على $D_f=\mathbb{R}$.
- الدالة: $f(x)=\tan x$ متصلة على $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi ; k\in\mathbb{Z}\right\}$
- الدالة: $f(x)=\sqrt{x}$ متصلة على مجموعة تعريفها $D_f=\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$

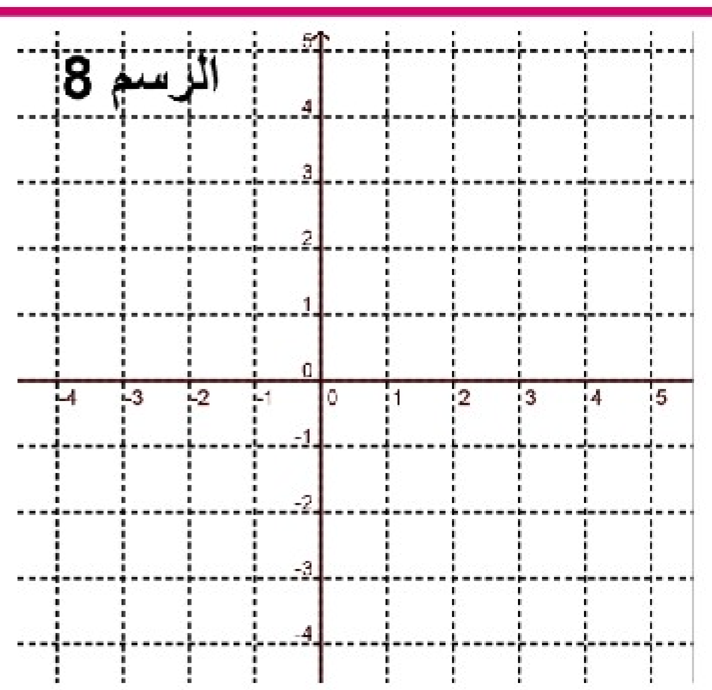
VII. دالة الجزء الصحيح :

01. تعريف: (تذكير)

الدالة f التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بالعدد الصحيح النسبي الوحيد p الذي يحقق $p\le x<p+1$. تسمى الدالة الجزء الصحيح ويرمز لها ب E أو أيضا $[\ ]$ نكتب $f(x)=[x]=p$ أو $f(x)=E(x)=p$

02. نشاط:

1) أنشئ منحنى الدالة $f(x)=E(x)$.
2) هل f متصلة على يمين في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 .
3) هل f متصلة على يسار في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 .
4) هل f متصلة في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 ....
5) هل f متصلة على $[0;1[$ و $[1;2[$ و $[2;3[$....
6) أعط الخاصية.



03. خاصية:

- دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في p وغير متصلة على اليسار في p (إذن هي غير متصلة في p).
- دالة الجزء الصحيح متصلة على كل المجالات التي هي على شكل: $[p,p+1[$ (مع $p\in\mathbb{Z}$)

VIII. صورة مجال بدالة متصلة :

01. نشاط:

نأخذ النشاط أول الدرس و الرسم رقم 1 الذي يمثل الدالة: $f(x)=x^2$

1) استنتج مبيانيا صور جميع الأعداد التي تنتمي إلى القطعة $[0,2]$

2) استنتج مبيانيا : $f([-1,0])$ و $f([-1,2])$. أعط الخاصية.

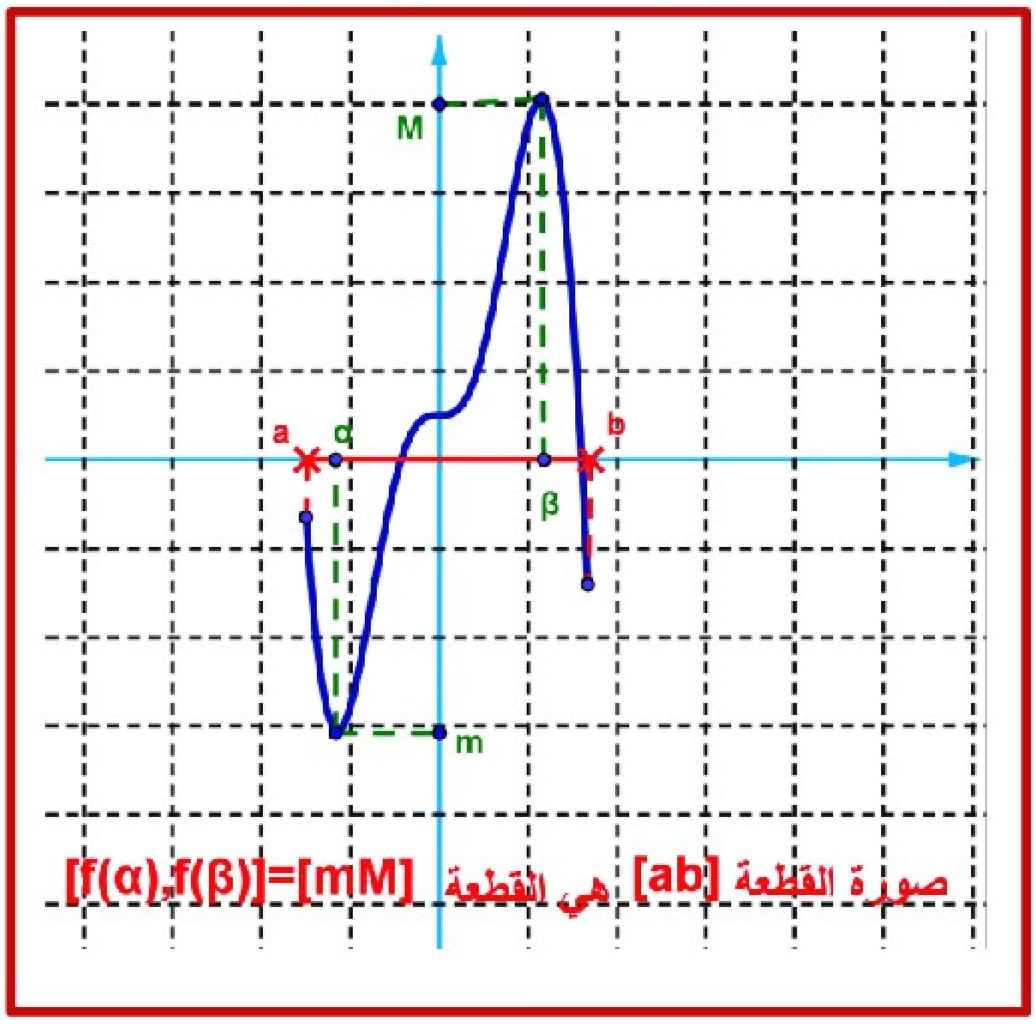
02. خاصية:

- صورة قطعة $[a,b]$ بدالة متصلة f هي قطعة (تكون على شكل $[m,M]$ مع m و M هي القيمة الدنيا والقيمة القصوى على التوالي ل f على المجال $[a,b]$).(أو أيضا : $m=\min\limits_{a\le x\le b} f(x)$ و $M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$)
- صورة مجال I بدالة متصلة f هي مجال $J=f(I)$.
- ملاحظة : $f([a,b])=[m,M]$.

03. مثال 1 :

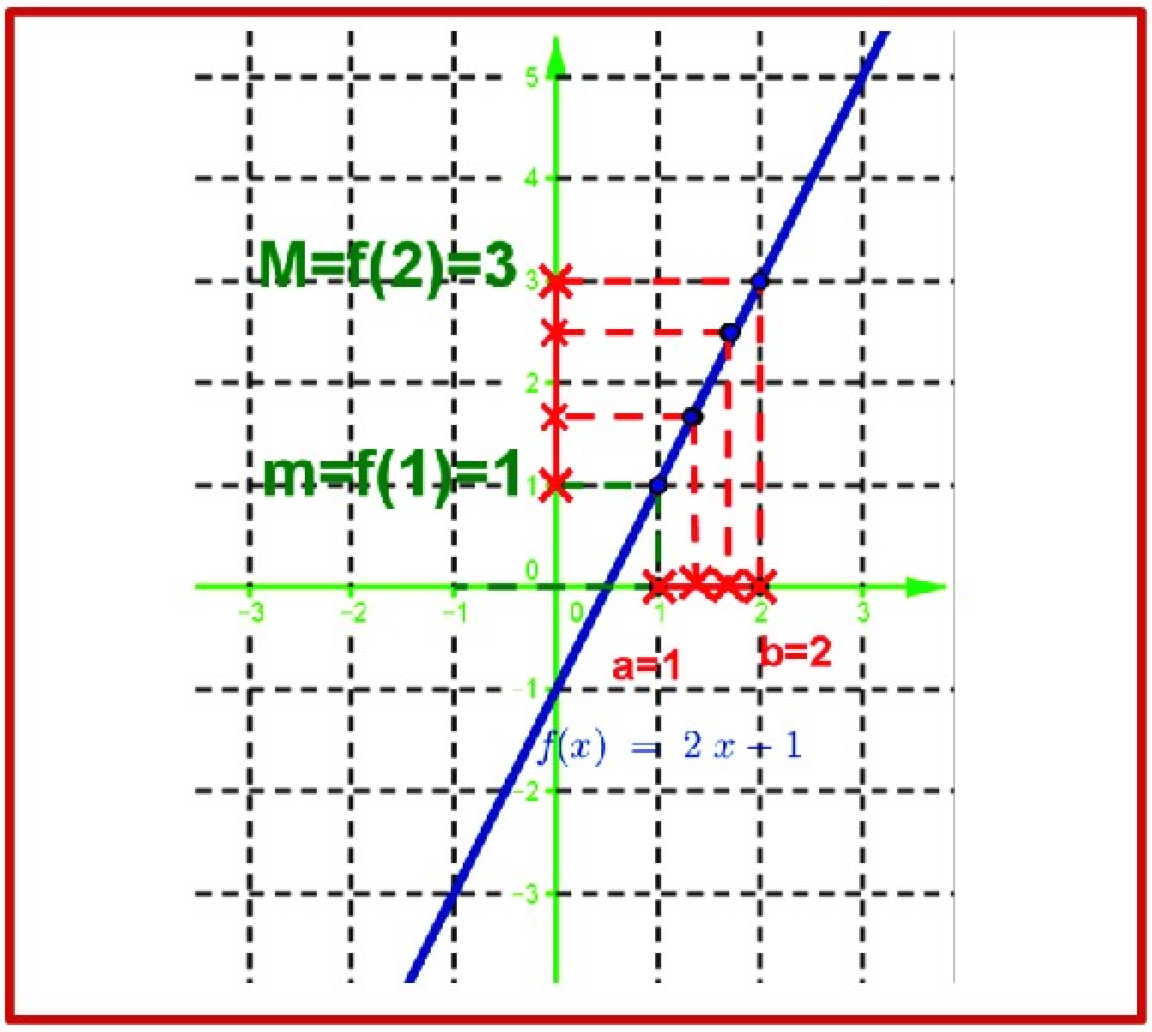
نضع : $m=\min\limits_{a\le x\le b} f(x)$ و $M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$.

$\exists(\alpha,\beta)\in I^2 / m=f(\alpha)$ و $M=f(\beta)$



مثال 2 : $f(x)=2x-1$ لدينا مبيانيا : $f([1,2])=[1,3]$

$f([1,2[)=[1,3[$



IX. مبرهنة القيم الوسيطية: théorème des valeurs intermédiaires

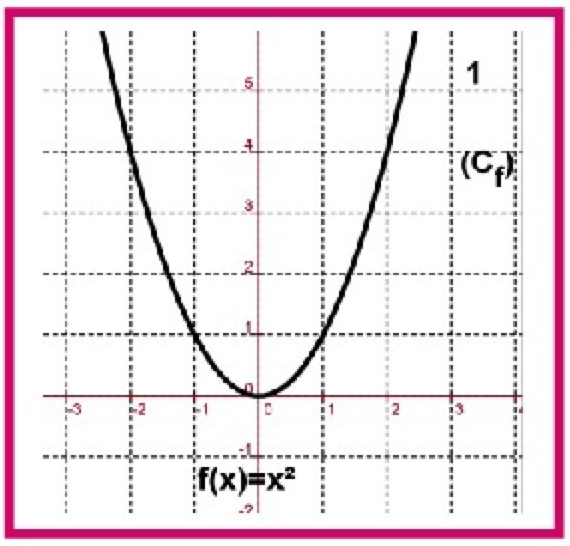
01. نشاط:

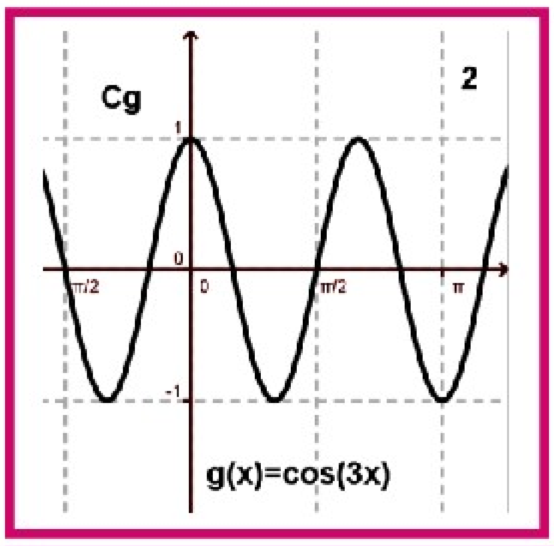
نأخذ $a=1$ و $b=-2$ في الرسم 1 ؛ $a=0$ و $b=\pi$ (الرسم2)

1) استنتج مبيانيا $f(a)$ و $f(b)$. (الرسم 1)

2) نأخذ عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ هل يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]=[-2,1]$ حيث : $f(c)=k$. (الرسم 1)

3) أعط الخاصية:





02. خاصية:

f دالة متصلة على القطعة $[a,b]$.

- لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ حيث : $f(c)=k$.

03. برهان :

نضع $f([a,b])=[m,M]$ لأن f متصلة على $[a,b]$.

حالة 1 : $f(a)\le f(b)$.

$k\in[f(a),f(b)]\subset[m,M]$ إذن $k\in[m,M]=f([a,b])$.

ومنه : $\exists c\in[a,b]\ /\ k=f(c)$

إذن : كل عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ حيث : $f(c)=k$.

04. نتائج :

- بما أن : صورة قطعة $[a,b]$ بدالة متصلة هي القطعة: $f([a,b])=[m,M]$ إذن $k\in f([a,b])=[m,M]$.
- إذا كان : $f(a)\times f(b)<0$ أي $f(a)$ و $f(b)$ (احدهما موجب و الآخر سالب) ومنه : $k=0\in f([a,b])=[m;M]$ ومنه يوجد عنصر c من $[a,b]$ حيث : $f(c)=k=0$
- نتيجة $(f(a)\times f(b)<0)$: المعادلة : $x\in[a,b]/f(x)=0$ تقبل على الأقل حل على $[a,b]$.
- إذا كانت f رتيبة قطعا على $[a,b]$ فإن c وحيد . ومنه المعادلة : $x\in[a,b]/f(x)=0$ تقبل حل و حيد على $[a,b]$.

X. دالة متصلة و رتيبة قطعا:

01. نشاط: f دالة متصلة و رتيبة قطعا. لدينا صور المجالات الآتية

المجال I	f متصلة و تزايدية قطعا نحدد : المجال f(I)	f متصلة وتناقصية قطعا نحدد: المجال f(I)	المجال I	f متصلة و تزايدية قطعا نحدد : المجال f(I)	f متصلة وتناقصية قطعا نحدد: المجال f(I)
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$	$]a,+\infty[$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to+\infty} f(x),\lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,b[$	$\left[f(a),\lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to b^-} f(x),f(a)\right]$	$]-\infty,a]$	$\left]\lim_{x\to-\infty} f(x),f(a)\right]$	$\left[f(a),\lim_{x\to-\infty} f(x)\right[$

$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$]-\infty, a[$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$	$]a,b]$
$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$]-\infty, +\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$]a,b[$
			$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), f(a)\right]$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$[a,+\infty[$

02. نتيجة :

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على المجال $[a,b]$

- فإنه لكل عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد وحيد c من $[a,b]$ حيث: $f(c)=k$.
- إذا كان $f(a)\times f(b)<0$ المعادلة $x\in[a;b] / f(x)=0$ تقبل حل وحيد .

XI. العمليات على الدوال المتصلة:

01. خاصية: (تقبل)

I مجال ضمن المجموعة $\mathbb{R}$ $(I\subset\mathbb{R})$.

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I فإن الدوال: $f+g$ و $f\times g$ و $\alpha f, (\alpha\in\mathbb{R})$ متصلة على I.
- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I و g لا تنعدم على المجال I فإن الدوال: $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلة على I.

02. مثال:

لنعتبر الدوال التالية المعرفة ب: 1) $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}+\cos(x)$. 2) $g(x)=(x^2+3x-2)\times\sqrt{x}$

1) حدد مجموعة تعريف واتصال كل دالة من الدوال السابقة.

جواب

1) نحدد مجموعة تعريف:

- الدالة $x\to\cos x$ معرفة و متصلة على $\mathbb{R}$.

الدالة $x\to\frac{2x+1}{x-1}$ معرفة و متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

إذن الدالة $x\to\frac{2x+1}{x-1}+\cos x$ معرفة و متصلة على $D_f=\mathbb{R}\cap(\mathbb{R}\setminus\{1\})=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

- الدالة $x\to x^2+3x-2$ معرفة و متصلة على $\mathbb{R}$.

الدالة $x\to\sqrt{x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$.إذن الدالة $x\to(x^2+3x-2)\sqrt{x}$ معرفة و متصلة على

$D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}^+=\mathbb{R}^+$.

XII. اتصال مركبة دالتين متصلتين:

تذكير : $I\xrightarrow{f}f(I)$ و $J\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ و $f(I)\subset J$

$$g\circ f:\ I\xrightarrow{f}f(I)\subset J\xrightarrow{g}\mathbb{R}$$

$$x\xrightarrow{f}f(x)\xrightarrow{g}g(f(x))$$

01. خاصية:

لتكن f و g دالتين عدديتين.
إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J حيث: $f(I)\subset J$ فإن الدالة $g\circ f$ متصلة على I.

02. مثال: أدرس اتصال الدالة $f(x)=\sin(2x+1)$.
الدالة $x\to 2x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$.
الدالة $x\to \sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$. إذن الدالة: $x\to\sin(2x+1)$ متصلة على $\mathbb{R}$. (لا نها مركبة دالتين متصلتين)

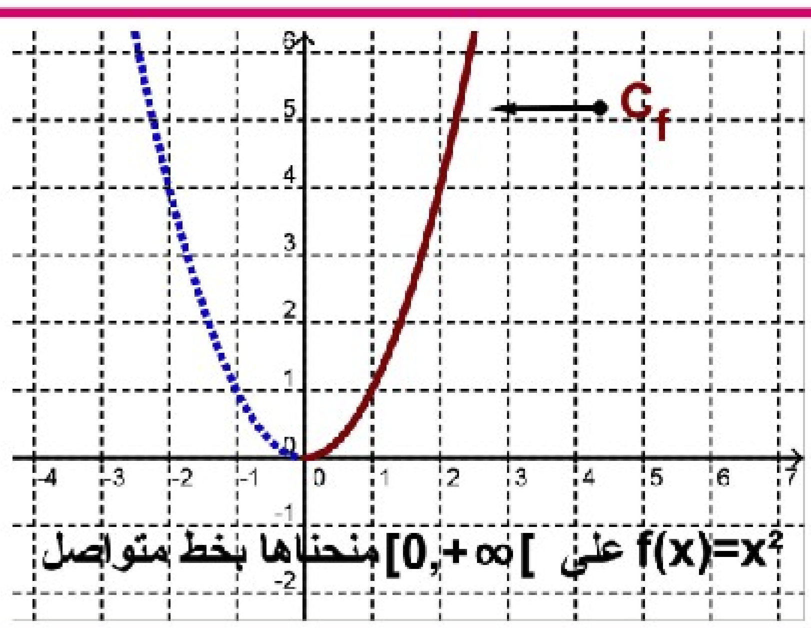
03. نتائج:

- $f(x)=\sin(ax+b)$ و $g(x)=\cos(ax+b)$ دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$.
- الدالة $h(x)=\tan(ax+b)$ متصلة في كل x تحقق ما يلي $ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.
- f دالة موجبة و متصلة على المجال I فإن الدالة $x\mapsto\sqrt{f(x)}$ متصلة على I.

XIII. الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال:

01. نشاط: $f(x)=x^2$ على $I=[0;+\infty[$

1) مبيانيا هل الدالة f متصلة و رتيبة قطعا على المجال $I=[0;+\infty[$
2) استنتج مبيانيا $J=f(I)$ (أي صورة المجال I ب f).
3) هل لكل y من $J=f(I)$ له سابق وحيد c من I.
4) استنتج طبيعة التطبيق f.
5) لنعتبر المعادلة: $(E): x\in I=[0,+\infty[\ / f(x)=y$
استنتج عدد حلول المعادلة (E).



02. خاصية:

f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على مجال I و $y\in f(I)$.

- الدالة f هي تقابل من I إلى $f(I)$.
- المعادلة: $x\in I/f(x)=y$ تقبل حل وحيد على I.

03. برهان:

- بما أن صورة مجال I بدالة متصلة f هو المجال $f(I)$ إذن الدالة f شمولية من I نحو $f(I)$.
- نبين أن f تباينية من I نحو $f(I)$.
  - نفترض أن f تزايدية قطعا على I.

أي نبين: $\forall x,x'\in I: f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$. أو أيضا: $\forall x,x'\in I: x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')$
ليكن x و x' من I حيث $x\neq x'$ (أي $x<x'$ أو $x>x'$). $f(x)=f(x')$
حالة 1: $x<x'$
$x<x'$ إذن $f(x)<f(x')$ (لأن f تزايدية قطعا على I)
إذن $f(x)\neq f(x')$.
حالة 2: $x>x'$
$x>x'$ إذن $f(x)>f(x')$ (لأن f تزايدية قطعا على I)
إذن $f(x)\neq f(x')$.

خلاصة : $\forall x,x'\in I : x\neq x' \Rightarrow f(x)\neq f(x')$ أي f f تباينية من I نحو $f(I)$ حالة f تزايدية قطعا على I.

❖ نفترض أن f تناقصية قطعا على I . بنفس الطريقة نبين أن : f تباينية من I نحو $f(I)$.

خلاصة : الدالة f هي تقابل من I إلى $f(I)$.

04. تعريف:

f تقابل من I إلى J. الدالة g المعرفة بما يلي:

$$g : J \rightarrow I$$
$$y \rightarrow g(y) = x$$

مع $f(x) = y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f ونرمز لها: $g = f^{-1}$

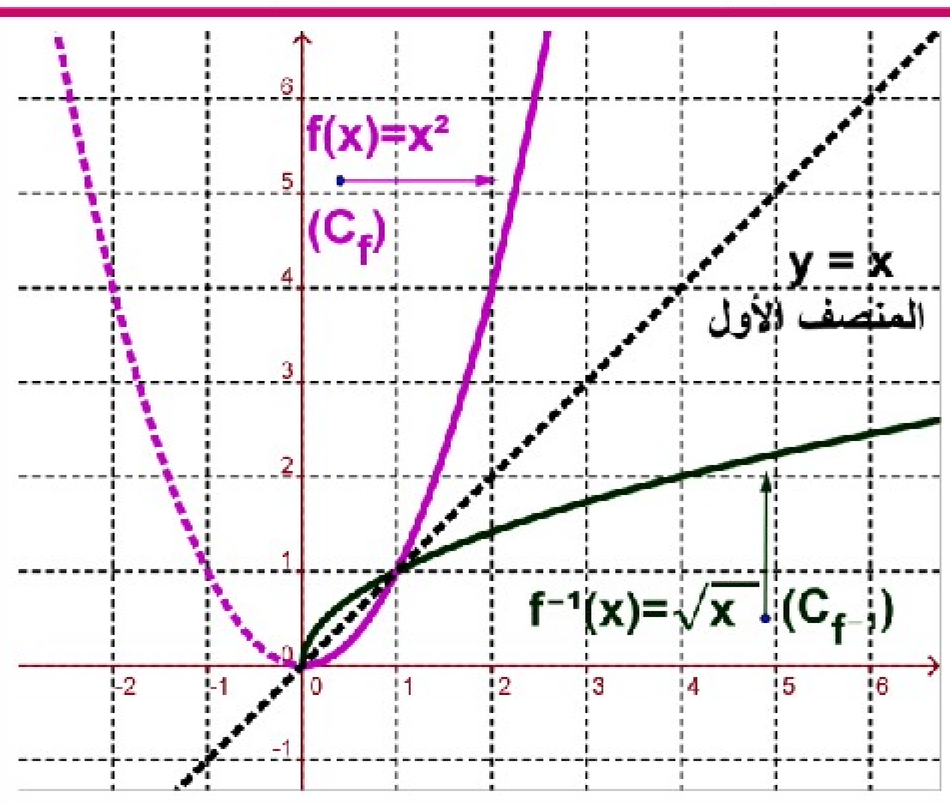
05. ملاحظة:

- الدالة f معرفة كما يلي: $f : I \rightarrow J=f(I)$ ، $x \rightarrow f(x) = y$
- الدالة f^{-1} معرفة كما يلي: $f^{-1} : J=f(I) \rightarrow I$ ، $y \rightarrow f^{-1}(y) = x$
- $\left.\begin{matrix} f(x) = y \\ x\in I \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f^{-1}(y) = x \\ y\in J \end{matrix}\right.$
- $\forall y\in J : f\circ f^{-1}(y) = y$. $\forall x\in I : f^{-1}\circ f(x) = x$.
- ويمكن كتابة $\forall y\in J : f\circ f^{-1}(y) = y$ كذلك على الشكل التالي : $\forall x\in J : f\circ f^{-1}(x) = x$

06. خاصيات الدالة العكسية: (تقبل)

f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على مجال I و $J = f(I)$. f^{-1} الدالة العكسية ل f.

1. الدالة f^{-1} متصلة على المجال $J = f(I)$. (تقبل)
2. الدالة f^{-1} رتيبة قطعا على المجال J و لها نفس رتابة f على I
3. $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1} و (C_f) منحنى الدالة f متماثلان بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $(D) : y = x$ في معلم متعامد ممنظم (المستقيم (D) يسمى المنصف الأول)



07. مثال: لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = x^2$

1) أ – مبيانيا هل f متصلة على $I = [0;+\infty[$.

ب - استنتج رتابة f على I.

ج - حدد : $J = f(I)$.

د – هل f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال يجب تحديده.

2) حدد: f^{-1} . (C_f) منحنى الدالة f. $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1}

08. مفردات :

الدالة العكسية f^{-1} المحصل عليها تسمى كذلك الجذر من الرتبة 2 . و نرمز لها ب: $f^{-1}=\sqrt[2]{\ }$ أو باختصار : $f^{-1}=\sqrt{\ }$

XIV. الدالة قوس الظل : la fonction arctangente

01. خاصية :

الدالة $f(x)=\tan x$ تقابل من $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ إلى $J=\mathbb{R}$.

دالتها f^{-1} العكسية تسمى الدالة قوس الظل ونرمز لها ب : $f^{-1}=\arctan$.

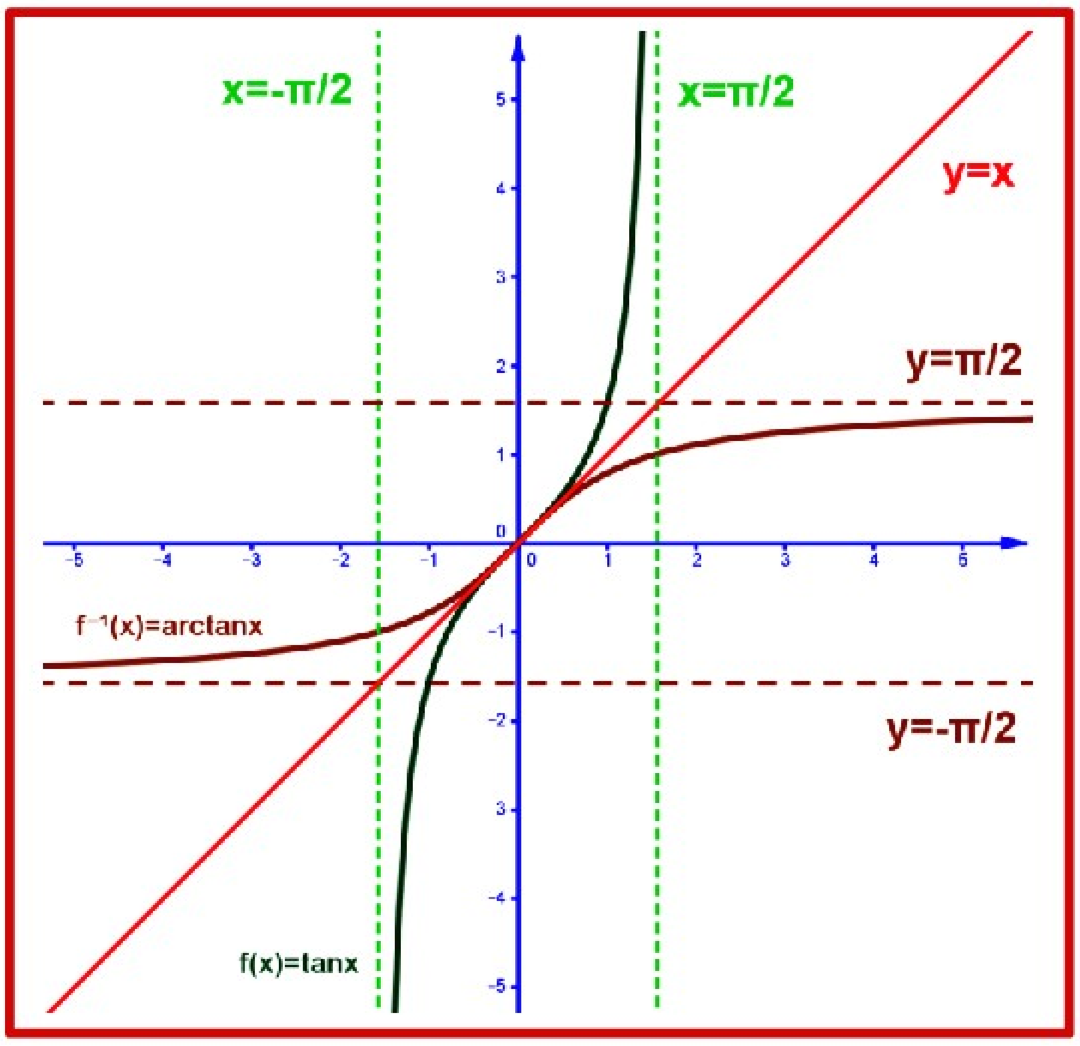
لدينا : $f^{-1}:\mathbb{R}\to I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
$x\mapsto f^{-1}(x)=\arctan x$

02. برهان :

لدينا الدالة $f(x)=\tan x$ متصلة على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و تزايدية قطعا على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ لأن $f'(x)=1+\tan^2 x>0$ إذن f تقابل من $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ إلى $f(I)=\mathbb{R}$ لأن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$.

03. نتائج :

- لدينا : $f:\mathbb{R}\to I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
$x\mapsto f(x)=\arctan x$
- مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\arctan x$ هي $D_f=\mathbb{R}$.
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ -\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$.
- الدالة $f(x)=\arctan x$ متصلة و تزايدية على $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.
- $\left.\begin{array}{l}\tan x=y\\ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\arctan y=x\\ y\in\mathbb{R}\end{array}\right.$
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ \tan(\arctan x)=x$
- $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ ;\ \arctan(\tan x)=x$.
- منحنى $(C_{f^{-1}})$ للدالة $f^{-1}(x)=\arctan x$ هو مماثل (C_f) منحنى الدالة $f(x)=\tan x$ بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد ممنظم .
(المنصف الأول هو المستقيم (D) الذي معادلته $(D):y=x$).



04. تمرين تطبيقي :

- $f(x)=\arctan\frac{1}{x-1}$ حدد D_f مجموعة تعريف f .
- أحسب : $f(0)$ و $f(2)$ و $f(1+\sqrt{3})$ و $f\left(1+\frac{1}{\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)}\right)$.
- أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to1^+} f(x)$.

XV. دالة الجذر من الرتبة n

01. نشاط:

$n\in\mathbb{N}^*$. لنعتبر الدالة $f(x)=x^n$ على المجال $I=[0;+\infty[$.

بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} على المجال J حدده .

02. مفردات:

- الدالة العكسية f^{-1} تسمى الدالة الجذر من الرتبة n .
- الدالة العكسية f^{-1} يرمز لها ب: $f^{-1}=\sqrt[n]{\ }$.
- نكتب: $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$. أو أيضا $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$
- حالة : $n=1$ لدينا $f^{-1}(x)=\sqrt[1]{x}=x$ (حالة غير مهمة).
- حالة : $n=2$ لدينا $f^{-1}(x)=\sqrt[2]{x}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$. (الدالة تسمى باختصار الجذر المربع)
- حالة : $n=3$ لدينا $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$. (الدالة تسمى باختصار الجذر المكعب أو الجذر الثالث).

03. تعريف وخاصية:

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

- الدالة $f(x)=x^n$ متصلة و تزايدية قطعا على $I=[0;+\infty[$.
- f تقابل من I إلى $J=f(I)=[0,+\infty[$ و دالتها العكسية f^{-1} تسمى الدالة الجذر من الرتبة n و نرمز لها: $f^{-1}=\sqrt[n]{\ }$
- نكتب : $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$.أو أيضا: $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$
- العدد: $\sqrt[n]{a}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد الحقيقي الموجب a .

04. خاصية:

- $\sqrt[n]{0}=0$; $\sqrt[n]{1}=1$. $\sqrt[n]{x^n}=x$ و $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$; $\forall x\geq0$. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$.
- منحنى $\left(C_{f^{-1}}\right)$ لدالة $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$ هو مماثل $\left(C_f\right)$ منحنى الدالة $f(x)=x^n$ بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد ممنظم (المنصف الأول هو المستقيم (D) الذي معادلته $(D): y=x$).

05. نتائج:

- $\forall a\in \mathbb{R}^+ \; ; \; \forall b\in \mathbb{R}^+ \; ; \; \sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a=b$.
- $\forall a\in \mathbb{R}^+ \; ; \; \forall b\in \mathbb{R}^+ ; \; \sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a\le b$.

XVI. العمليات على الجذور من الرتبة n .

01. خاصيات:

$a\ge 0$ و $b\ge 0$ و n و m من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

- $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$.
- $\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$; $(b>0)$ و $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $(b>0)$
- $\sqrt[n\times m]{a^m}=\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\times m]{a}$.

02. مثال :

بسط: $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[15]{3^{11}}$.

لدينا :

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[15]{3^{11}}=\sqrt[3\times5]{81}\times\sqrt[15]{3^{11}}$$
$$=\sqrt[15]{3^4\times3^{11}}$$
$$=\sqrt[15]{3^{15}}=3$$

خلاصة : $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[15]{3^{11}}=3$

XVII. بعض خاصيات الدوال التي هي على شكل: $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$.

01. خاصيات ☹ (تقبل)

f دالة عددية موجبة على مجال I. n من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

- إذا كانت $f(x)$ متصلة على I فإن $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$ متصلة على I.
- إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ و $\ell\ge 0$ فإن : $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\ell}$
- إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$.
- تبقى الخاصيات صحيحة إذا كان : $x\to\infty$; $x\to x_0^+$; $x\to x_0^-$

02. تمرين تطبيقي :

لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\sqrt[4]{x+1}$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف f.

2) أحسب: $f(0)$; $f(15)$; $f(-1)$

3) أحسب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

XVIII. القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا:

01. نشاط:

1) بين أن : $\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\left(3\right)^{\frac{1}{5}}\right)^2$.

جواب:

لدينا : $\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}} = 9^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{9}$ و $\left(\left(3\right)^{\frac{1}{5}}\right)^2 = \left(\sqrt[5]{3}\right)^2 = \sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{9}$ إذن $\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\left(3\right)^{\frac{1}{5}}\right)^2$

02. كتابة جديدة :

من خلال : $\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\left(3\right)^{\frac{1}{5}}\right)^2$ سنكتب: $\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\left(3\right)^{\frac{1}{5}}\right)^2 = 3^{\frac{2}{5}}$

03. خاصية :

ليكن $a\in\mathbb{R}^{+*}$ و $r\in\mathbb{Q}^*$.

إذا كان : $r = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ مع n و n' من $\mathbb{N}^*$ و m و m' من $\mathbb{Z}$ فإن $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$.

05. برهان :

لدينا :

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n'} = \sqrt[n]{a^{m\times n'}}$$
$$= \sqrt[n]{a^{m'\times n}} \quad ; \quad \left(\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}\right)$$
$$= a^{m'}$$

ومنه : $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n'} = a^{m'}$ إذن : $\sqrt[n']{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}}$ ومنه : $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$

خلاصة : $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$

04. تعريف :

$r = \frac{m}{n}\in\mathbb{Q}^*$ (مع $n\in\mathbb{N}^*$ و $m\in\mathbb{Z}$) و $x\in\mathbb{R}^{+*}$.

الكتابة $\sqrt[n]{x^m}$ نرمز لها ب : $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ أو أيضا ب : $\sqrt[n]{x^m} = x^r$ أما x^r يسمى القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r.

- $x^r = x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$.

05. أمثلة :

1) مثال 1 : أكتب على شكل x^r ما يلي : $\left(\sqrt[9]{7}\right)^{11}$ و $\sqrt[8]{3^5}$ و $\left(\sqrt[9]{21}\right)^{-11}$ و $\sqrt[13]{2^{-15}}$ و $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{-32}$.

2) مثال 2 : أكتب بطريقة أخرى الأعداد التالية: $\sqrt[4]{3^5};\sqrt[4]{3^{-5}};\sqrt{7^3};\sqrt[5]{11};\sqrt[3]{8}$.

06. ملاحظة:

- تعريف الأس في $\mathbb{Q}$ هو تمديد لتعريف الأس في $\mathbb{Z}$.
- لدينا : $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a}$: $\forall a > 0 , \forall n \in \mathbb{N}^*$.بمأن : $\sqrt[n]{0} = 0$ يمكن أن نصطلح أن : $0^{\frac{1}{n}} = 0$.
- الدالة $f(x) = (x-2)^{\frac{1}{3}}$ هي معرفة على $D_f =]2,+\infty[$ يمكن تمديد الدالة f في $x_0 = 2$ بالدالة g في حيث

$$\begin{cases} g(x) = f(x) = (x-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x-2} & ; x>2 \\ g(x) = 0 \end{cases}.$$

07. خاصيات القوى الجذرية :

x و y من $\mathbb{R}^{+*}$ و r' و r من $\mathbb{Q}^*$. لدينا :

- $x^r \rangle 0$
- $x^r = x^{r'} \Leftrightarrow r = r'$
- $x^r \times y^r = (x \times y)^r$ و $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$ و $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$ و $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ و $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

08. مثال: بسط ما يلي.

1) $A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right)$.

2) $B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}}$.

$$A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right) = (2)^{\frac{-5}{3}} \times (2^2)^{\frac{-1}{2}} \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = (2)^{\frac{-5}{3}} \times (2^{-1}) \times (2^2) = (2)^{\frac{-5}{3}-1+2} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{-1}{4}}} = \frac{7^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{7^{\frac{-1}{4}}} = 7^{1+\frac{1}{4}} = 7^{\frac{5}{4}}$$

أَهَمُّ مَا نَحْتَاجُهُ فِي دِرَاسَةِ الدّوَالِ

النهايات و الفروع اللانهائية

$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow C_f$ يقبل مقارب عمودي معادلته $x=a$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b \Leftrightarrow C_f$ يقبل مقارب أفقي معادلته $y=b$ بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0 \Leftrightarrow C_f$ يقبل مقارب مائل معلدلته $y=ax+b$ بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

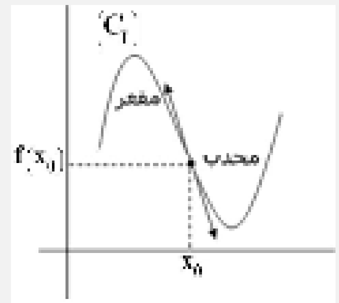
- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ ← C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل
- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ ← C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب
- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a$
  - $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ ← C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$
  - $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=b$ ← C_f يقبل مقارب مائل معادلته $y=ax+b$

ب. تقعر منحنى و نقط الانعطاف

- إذا كان $f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in I$ فإن (C_f) محدب

- إذا كان $f''(x)\leq 0 \quad \forall x\in I$ فإن (C_f) مقعر

- إذا كانت f'' تنعدم و تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف
- إذا كانت f' تنعدم و لا تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف



ج. مركز و محور تماثل (C_f)

- المستقيم ذي المعادلة $x=a$ محور تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in D_f: & 2a-x\in D_f\\ \forall x\in D_f: & f(2a-x)=f(x)\end{cases}$

- النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in D_f: & 2a-x\in D_f\\ \forall x\in D_f: & f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$

د. اتصال دالة عددية

- f متصلة في a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
- f متصلة في a على اليمين $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a)$
- f متصلة في a على اليسار $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=f(a)$
- f متصلة في a $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=f(a)$

ه. مبرهنة القيم الوسيطية

- مبرهنة القيم الوسيطية (وجودية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a,b[$

- مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال

$]a,b[$

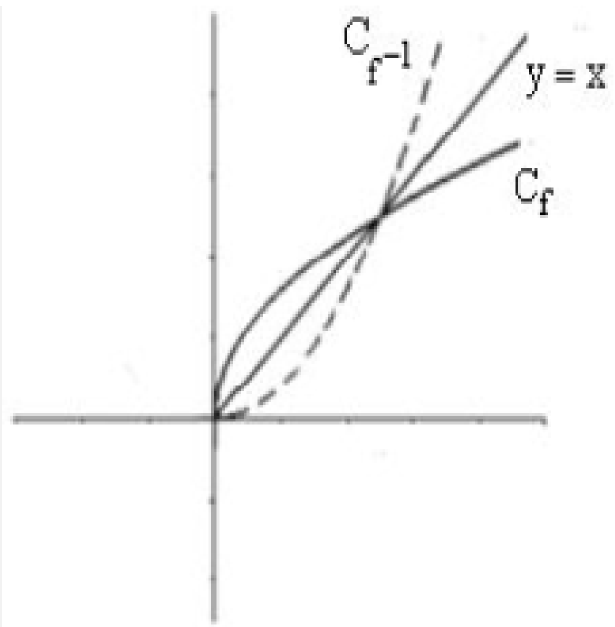
- مبرهنة (وجودية ووحدانية الحل على مجال I)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على I و $0 \in f(I)$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

و. اتصال مركب دالتين

خاصية :
إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g متصلة على مجال بحيث $f(I) \subset J$ فإن $g \circ f$ متصلة على I.

ز. الدالة العكسية



خاصية : إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن المعادلة $f(x)=y$ حيث $y \in f(I)$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

الدالة التي تربط كل عدد y بالحل تسمى الدالة العكسية للدالة f و نرمز لها ب : f^{-1}

نتائج:
$$\begin{cases} f(y)=x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f(x)=x & ;x \in I \\ f \circ f^{-1}(x)=x & ;x \in J \end{cases} \quad (2)$$

خاصيات: لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على المجال J لدينا :

- f^{-1} متصلة على المجال J
- f و f^{-1} لهما نفس الرتابة
- منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$ (المنصف الأول للمعلم)

ح. الإشتقاق

f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$ $l=f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليمين		$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$ $l=f_d'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_d'(a)$ و معادلته : $y=f_d'(a).(x-a)+f(a)$

f قابلة للاشتقاق في a على اليسار	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f_g'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f_g'(a)$ و معادلته : $y = f_g'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a		✓ قابلة للاشتقاق في a على اليمين ✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار ✓ $f_d'(a) = f_g'(a) = f'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a).(x-a)+f(a)$

- إذاكانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f_d'(a) \neq f_g'(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a,f(a))$ معاملاهما الموجهان $f_d'(a)$ و $f_g'(a)$ و النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة
- إذا كانت $f'(a)=0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

المجال I	الدالة المشتقة f'	الدالة f
$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$

$I =]-\infty,0[$ أو $I =]0,+\infty[$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$
$I =]0,+\infty[$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$x \mapsto x^r \quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$
$I =]0,+\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$I =]-\infty,0[$ أو $I =]0,+\infty[$	$x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$

الدالة المشتقة	الدالة
$\alpha . f'$	$\alpha . f$
$f' + g'$	$f + g$
$f' \times g + f \times g'$	$f \times g$
$-\frac{g'}{g^2}$	$\frac{1}{g}$
$\frac{f'g - fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}$
$f' \times g' \circ f$	$g \circ f$
$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f}$
$' \quad n \quad 1$	n

- ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$(\forall x > 0) \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

- إذا كانت f دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$(\forall x \in I) \quad \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$$

- لتكن f دالة معرفة على مجال I تقبل دالة عكسية f^{-1} و ليكن x_0 و y_0 عددان بحيث : $f^{-1}(x_0) = y_0$

إذا كانت $f'(y_0) \neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في x_0 و لدينا $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$

- إذا كانت f' لا تنعدم على I فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$ و لدينا :

$$(\forall x \in f(I)) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

رتابة دالة

- إذا كانت $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in I$ فإن f تزايدية على I
- إذا كانت $f'(x)\leq 0$ $\forall x\in I$ فإن f تناقصية على I
- إذا كانت $f'(x)>0$ $\forall x\in I$ فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كانت $f'(x)<0$ $\forall x\in I$ فإن f تناقصية قطعا على I

خاصية

- إذا كانت $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in I$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كانت $f'(x)\leq 0$ $\forall x\in I$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تناقصية قطعا على I

ط. دالة اللوغاريتم النبيري

1. تعريف :

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز : $\ln$

2. استنتاجات و خاصيات :

- $D_{\ln}=]0,+\infty[$ $\left(\ln\left(\boxed{>0}\right)\right)$
- $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)$ إذن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- $\forall x>0;\forall y>0\quad \ln x=\ln y\Leftrightarrow x=y$
- $\forall x>0;\forall y>0\quad \ln x>\ln y\Leftrightarrow x>y$
- $\forall x>0;\forall y>0\quad \ln x\leq \ln y\Leftrightarrow x\leq y$
- $\ln(1)=0$
- يوجد عدد حقيقي وحيد من $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ نرمز له ب : e بحيث $e\simeq 2,718$ و يحقق : $\ln(e)=1$
- $\forall x>0\quad \forall a\in\mathbb{R}\quad \ln x=a\Leftrightarrow x=e^{a}$
- إشارة $\ln x$:
  - إذا كان : $0<x<1$ فإن $\ln x<0$
  - إذا كان : $x\geq 1$ فإن $\ln x\geq 0$

3. العمليات على الدالة $\ln$

ليكن x و y من $]0,+\infty[$ و $r\in\mathbb{Q}$ لدينا :

- $\ln(x.y)=\ln(x)+\ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^{+}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{n}}=0^{+}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln x=0^{-}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^{n}\ln x=0^{-}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$$

خاصية :

إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $\forall x\in I\quad U(x)\neq 0$

فإن الدالة $x\mapsto \ln|U(x)|$ قابلة للاشتقاق على I و

لدينا : $\forall x\in I\quad \left(\ln|U(x)|\right)'=\frac{U'(x)}{U(x)}$

ملاحظة : إذا كانت U موجبة قطعا :

$$\left(\ln(U(x))\right)'=\frac{U'(x)}{U(x)}$$

نتيجة : مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$

- $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$
- $\ln(x^r)=r\ln(x)$

هي الدوال : $x \mapsto \ln|U(x)|+\lambda \quad (\lambda\in \mathbb{R})$

ي. الدالة الأسية

أ. ______

الدالة العكسية للدالة $\ln$ تسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها ب : $\exp$

ملاحظة: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x)=e^x$

. <u>نتائج :</u>

$$\begin{cases} e^x = y \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln(y) \\ (y>0)\end{cases}$$

$$\exp:\mathbb{R}\mapsto\ 0,+\infty$$
$$x\mapsto \exp(x)$$

$\forall x\in\mathbb{R}:\ e^x>0$ و $D\quad=\mathbb{R}$

x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$e\quad = e \quad\Leftrightarrow x=y$$
$$e\quad < e \quad\Leftrightarrow x<y$$
$$e\quad \ge e \quad\Leftrightarrow x\ge y$$
$$\forall x\in\mathbb{R}:\ln\ e^x\quad =x$$
$$\forall x>0: e\quad ^x=x$$

❖ $e^0=1$ و $e^1=e$

ج. <u>العمليات :</u>

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

1) $e^x\times e^y=e^{x+y}$

2) $\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$

3) $\frac{1}{e^x}=e^{-x}$

4) $(e^x)^r=e^{rx} \qquad (r\in\mathbb{Q})$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0^+$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0^-$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^ne^x=\begin{cases}0^+ & n\ \text{زوجي}\\ 0^- & n\ \text{فـردي}\end{cases}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

1) الدالة $\exp$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad (e^x)'=e^x$$

2) إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x\mapsto e^{U(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$(\forall x\in I)\quad \left(e^{U(x)}\right)'=U'(x)e^{U(x)}$$

3) $(\forall x\in I)\quad (e^{rx})'=re^{rx}$

4)

الدالة	الأصلية
e^x	e^x
e^{rx}	$\frac{1}{r}e^{rx}$
$U'(x)e^{U(x)}$	$e^{U(x)}$

الدوال الأصلية

f دالة معرفة على المجال I بما يلي : $f(x)=.......$	الدوال الأصلية ل f على I معرفة بما يلي: $F(x)=......$	المجال I
k (k عدد حقيقي ثابت)	$kx+c$	
x^{n} $\left(n\in \mathbb{N}^{*}\right)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
x^{n} $\left(n\neq -1;n\in \mathbb{Z}^{*}\right)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$
x^{r} $r\in \quad -\{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$]0,+\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^{2}(x)=\frac{1}{\cos^{2}(x)}$	$\tan(x)$	$\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,(k\in \mathbb{Z})$
$(a\neq 0),\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$(a\neq 0),\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^{2}}$	$\frac{-1}{x}+c$	$]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$]0,+\infty[$
e^{x}	$e \ +c$	

الدالة f	الدوال الأصلية ل f على I	شروط على u
$u'u^{n}$ $\left(n\in \mathbb{N}^{*}\right)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$u'u^{n}$ $\left(n\neq -1;n\in \mathbb{Z}^{*}\right)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	لكل x من I , $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	لكل x من I , $u(x)>0$
$u'u^{r}$ $r\in \quad -\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+c$	لكل x من I , $u(x)>0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)+c$	لكل x من I , $u(x)\neq 0$
$u'e^{u}$	$e^{u}+c$	لكل x من I

حساب التكامل

1. تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و F دالة أصلية لها على $[a,b]$.

تكامل f من a إلى b هو العدد الحقيقي : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2. ______

- نكتب $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$
- يمكن تغيير x بأي متغير آخر مثلا : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$

3. ______

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. ______

خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$.لدينا :

- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

1. خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$.لدينا :

- إذا كانت $f \geq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- إذا كانت $f \leq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- إذا كانت $f \leq g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

2. ______

تعريف و خاصية :

- لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$. العدد $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل f على $[a,b]$

يوجد على الأقل عدد c من $[a,b]$ بحيث : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

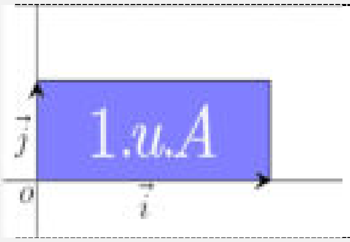
ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

خاصية :

لتكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' متصلتان على I و a و b عنصرين من I لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

I. حساب المساحات :

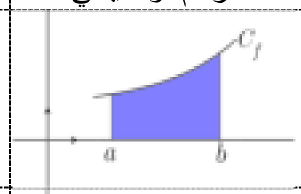
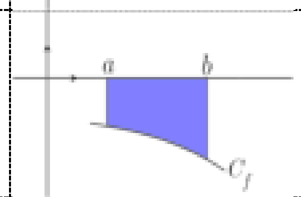
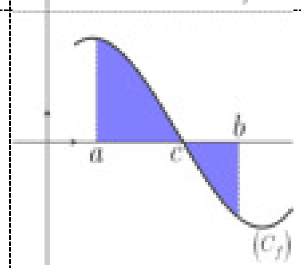
ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد (O,i,j) وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة O و المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$ $1u.A = \lVert\vec{i}\rVert \times \lVert\vec{j}\rVert$	

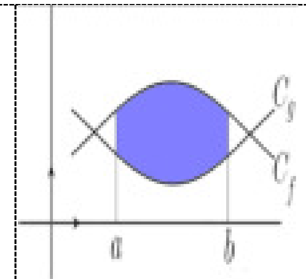
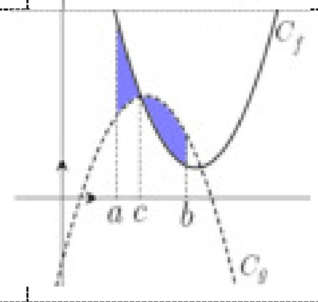
<u>خاصية 1:</u> لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$
مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u.A$$

<u>خاصية 2:</u> لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$
مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)u.A$$

رسم توضيحي	ملاحظات	مساحة الحيز الملون في الرسم هي:
	f موجبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$
	f سالبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$
	• f موجبة على المجال $[a,c]$ و • f سالبة على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx\right)u.A$

$\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right)u.A$	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,b]$	
(( )− ( )) + (( )− ( ))). .	• (C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,c]$ و • (C_f) يوجد تحت (C_g) على المجال $[c,b]$	

I. <u>حساب الحجوم :</u>

<u>خاصية 1:</u>

ليكن (Σ) مجسما محصورا بين المستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتاهما على التوالي : $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$

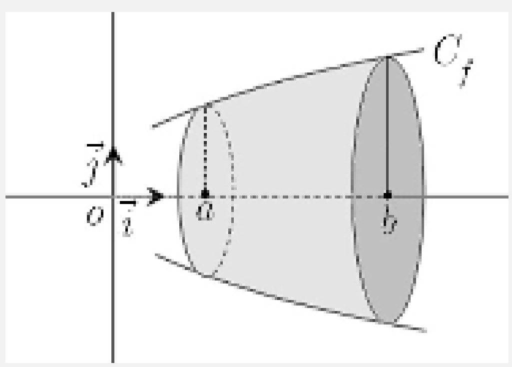
و لتكن $S(t)$ مساحة تقاطع المجسم (Σ) مع المستوى الذي معادلته $z=t$ حيث $a\le t\le b$

إذا كانت الدالة : $t\mapsto S(t)$ متصلة على المجال $[a,b]$ فإن V حجم المجسم (Σ) هو $V=\int_a^b S(t)dt$ بوحدة قياس الحجم

<u>خاصية 2:</u>

حجم المجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a,b]$ هو :

$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2dx\right]u.v$ حيث : $u.v$: وحدة الحجوم



つづく

f x g x dx g x f x dx u A

I. الاشتقاق في نقطة الاشتقاق على اليمين و اليسار:

01. تعريف (تذكير) :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و $\ell\in\mathbb{R}$ نقول أن : الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كان:

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ أو أيضا: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell$ العدد ℓ يسمى العدد المشتق ل f في x_0 و يرمز له ب : $f'(x_0)$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

02. خاصية:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0.

- معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي : $(T):y=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$
- كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0. (العكس ليس دائما صحيح) .
- تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي a و توجد دالة ε حيث :

$\forall x\in D_f\setminus\{x_0\}\quad f(x)=f(x_0)+a(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$ مع $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$. (و في هذه الحالة $f'(x_0)=a$).

03. الدالة التآلفية h ل f بجوار x_0:

- تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0.

الدالة h المعرفة ب: $h(x)=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة ل f بجوار x_0 .

نكتب $f(x)\approx h(x)$ بجوار x_0 (أي h تقريب ل f بجوار x_0)

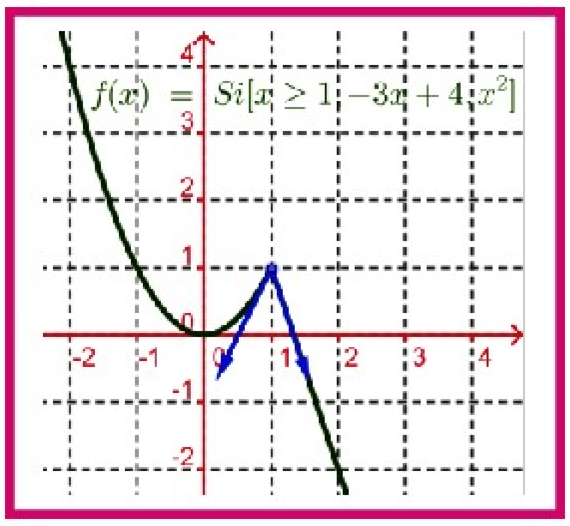
04. ملحوظة :

منحنى الدالة h هو المستقيم (T) المماس لمنحنى f في النقطة التي أفصولها x_0

05. نشاط 2 :

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x)=-3x+4 & ;x\geq 1\\ f(x)=x^2 & ;x<1\end{cases}$

1. أدرس اشتقاق f على يمين $x_0=1$. ثم أنشئ نصف المماس.
2. أدرس اشتقاق f على يسار $x_0=1$. ثم أنشئ نصف المماس.
3. هل f قابلة للاشتقاق في $x_0=1$ ؟
4. حدد معادلتي نصفي المماس لمنحنى الدالة f على يمين و يسار النقطة ذات الأفصول $x_0=1$.



الجواب

بطريقة مبيانيا

ملاحظة: النقطة ذات الأفصول $x_0=1$ تسمى نقطة مزواة .

.06 تعريف: (الاشتقاق على يمين x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $\left[x_0, x_0+\alpha\right[$ ، $(\alpha>0)$

f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كان $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_d = f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$

العدد $f_d'(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليمين x_0 ل f.

.07 تعريف: (الاشتقاق على يسار x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $\left]x_0-\alpha, x_0\right]$ ، $(\alpha>0)$

f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كان $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_g = f_g'(x_0) \in \mathbb{R}$. العدد $f_g'(x_0)$. يسمى العدد المشتق على اليسا x_0

.08 خاصية:

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت ما يلي:

- f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0.
- f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0.
- العدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار في x_0. أي $\left(f_d'(x_0)=f_g'(x_0)\right)$.

.09 تمرين تطبيقي :

أدرس اشتقاق f في x_0 : (1 $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $x_0=0$ على اليمين . (2 $f(x)=\sqrt[4]{x}$ ؛ $x_0=0$ على اليمين .

(3 $f(x)=[x]$ $x_0=0$ على اليمين و على اليسار. (4 $f(x)=\arctan x$ ؛ $x_0=0$

II. اشتقاق دالة على مجال – الدالة المشتقة الأولى لدالة:

.01 تعريف:

- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في كل نقطة x_0 من $]a,b[$ نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$.
- f دالة عددية قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b[$ إذا كانت
  - الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$
  - f قابلة للاشتقاق على اليمين في a .

.02 الدالة المشتقة للدالة:

- تعريف:

الدالة التي تربط كل عنصر x_0 من المجال I بالعدد $f'(x_0)$ تسمى الدالة المشتقة ل f و نرمز لها ب f'

- ملحوظة :

إذا كان : $I=[a,b]$ و $I=[a,b[$ و $I=]a,b[$ نصطلح ان : $f'(a)=f_d'(a)$ و $f'(b)=f_g'(b)$

- **مثال** : الدالة المشتقة ل $f(x)=x^3$ على $\mathbb{R}$ هي $f'(x)=3x^2$.

III. جدول الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية: (الجدول1)

الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f'	الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f'
a	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$D_f=\mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{2\times\sqrt{x}}$	$D_{f'}=]0,+\infty[$
x	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$\cos x$	$D_f=\mathbb{R}$	$\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
x^n $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$\sin x$	$D_f=\mathbb{R}$	$\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$	$\dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ و $c\neq 0$	$\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ و $c\neq 0$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$	$\tan x$	$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$	$1+\tan^2 x$	$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

IV. العمليات على الدوال المشتقة:

01. خاصيات: (أنظر الجدول 2)

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I.

الدالة	مشتقتها	شرط	الدالة	مشتقتها	شرط
$f+g$	$(f+g)'=f'+g'$		$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$	g لا تنعدم على I
$\alpha\times f$	$(\alpha\times f)'=\alpha\times f'$	$\alpha\in\mathbb{R}$	f^n	$(f^n)'(x)=n\times(f(x))^{n-1}\times f'(x)$	$n\in\mathbb{N}^*$
$f\times g$	$(f\times g)'=f'\times g+f\times g'$		f^n	$(f^n)'(x)=n\times(f(x))^{n-1}\times f'(x)$	$n\in\mathbb{Z}^{-*}$ و f لا تنعدم على I
$\dfrac{1}{g}$	$\left(\dfrac{1}{g}\right)'=\dfrac{-g'}{g^2}$	g لا تنعدم على I			

02. أمثلة: أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f في الحالات التالية

أ- $f(x)=-2x^4+3x^2-1$. ب - $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$. ج- $f(x)=2x\cos x$. د- $f(x)=1+(3x+2)^4$.

V. الدالة المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية (أو المتتابعة) لدالة f.

1. مفردات :

- المشتقة ل f' تسمى المشتقة الثانية ل f . نرمز لها ب : $(f'(x))'=f''(x)=f^{(2)}(x)$.
- إذا كانت $f^{(2)}$ بدورها قابلة للاشتقاق على I فدالتها المشتقة $\left(f^{(2)}\right)'(x)$ تسمى المشتقة الثالثة ل f ونرمز لها ب $\left(f^{(2)}\right)'=f^{(3)}$

2. بصفة عامة :

المشتقة من الرتبة n للدالة f (أي $f^{(n)}(x)$)هي المشتقة ل $f^{(n-1)}(x)$ (أي المشتقة من الرتبة n-1) $(f^{(n-1)}(x))$ونرمز لها ب:
$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}\right)'(x)$

مثال:

أحسب $f^{(3)}(x)$ حيث : أ - $f(x)=x^5$ ب - $f(x)=\frac{1}{x^2}$. ج – بين أن : $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

VI. مشتقة مركب دالتين - مشتقة الدالة العكسية

01.مشتقة مركب دالتين :

1) مبرهنة 1 :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فإن $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0.
و لدينا: $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\times f'(x_0)$.

2) مبرهنة 2 :

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على I و $f(I)$ على التوالي
إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق في $f(I)$ فإن $g\circ f$ قابلة للاشتقاق على I .
و لدينا: $\forall x\in I:(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$.

3) نتائج :

الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f '	الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f '
$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$x\in D_g$ و $g(x)\geq 0$	$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\times\sqrt{g(x)}}$	$x\in D_{g'}$ و $g(x)>0$	$f(x)=\cos(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-a\times\sin(ax+b)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=a\times\cos(ax+b)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$f(x)=\tan(ax+b)$	$ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$f'(x)=a\left[1+\tan^2(ax+b)\right]$	$ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

4) مثال:

أحسب $f'(x)$ مع أ - $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ ب - $f(x)=\cos(2x-4)$.

جواب :

- $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x}\right)'=\frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$
- $f'(x)=(\cos(2x-4))'=(2x-4)'\cos'(2x-4)=-2x\sin(2x-4)$

02.مشتقة الدالة العكسية

1) مبرهنة 1 :

لتكن f متصلة و رتيبة قطعا على I (لإذن الدالة f تقابل من المجال I إلى المجال $J=f(I)$).
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)\neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في y_0 $f(x_0)=y_0$
لدينا: $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

2) برهان :
بمأن f متصلة على I إذن دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $J=f(I)$ و منه لكل y_0 من J لدينا $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$.
ندرس اشتقاق f^{-1} في y_0 من J . نضع $f^{-1}(y)=x$ و $f^{-1}(y_0)=x_0$ مع x و x_0 من I .
لدينا :

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}\in\mathbb{R}\ ;\ \left(f'(x_0)\neq 0\right)$$

$$=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}\ ;\ \left(f^{-1}(y_0)=x_0\right)$$

$$=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(y_0)}$$

خلاصة : f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0=f(x_0)$ من $J=f(I)$ حيث : $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

3) مبرهنة 2 :

لتكن f دالة تقابل من المجال I إلى المجال $J=f(I)$.

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة 'f لا تنعدم على I (أي $\forall x\in I\ ;\ f'(x)\neq 0$) فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق المجال $J=f(I)$. لدينا: $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

4) تطبيق 1 : مشتقة: $\sqrt[n]{x}$ و x^r و $g(x)=[f(x)]^r$. (جدول 4)

$n\in\mathbb{N}^*$ و $r\in\mathbb{Q}^*$ و f موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على I		
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\left((x)^{\frac{1}{n}}\right)'=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.
$f(x)=x^r$	$f(x)=\left(x^r\right)'=rx^{r-1}$	
$g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$	$g'(x)=\dfrac{1}{n}\times f'(x)\times(f(x))^{\frac{1}{n}-1}$	g قابلة للاشتقاق على I
$g(x)=[f(x)]^r$	$g'(x)=\left([f(x)]^r\right)'=r\times f'(x)\times[f(x)]^{r-1}$	

- أمثلة: أحسب f' مع:

$$.f(x)=\sqrt[5]{x} \qquad .f(x)=\sqrt[5]{x^2+1} \qquad f(x)=\sqrt[5]{(x^2+1)^7}$$

جواب :

- $$\left[f(x)=\sqrt[5]{x}\right]'=\left[x^{\frac{1}{5}}\right]'=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$$

- $$\left[f(x)=\sqrt[5]{(x^2+1)}\right]'=\left[(x^2+1)^{\frac{1}{5}}\right]'=\frac{1}{5}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{5}-1}=\frac{14}{7}x(x^2+1)^{\frac{4}{5}}=\frac{14}{7}x\sqrt[5]{(x^2+1)^4}$$

- $$\left[f(x)=\sqrt[5]{(x^2+1)^7}\right]'=\left[(x^2+1)^{\frac{7}{5}}\right]'=\frac{7}{5}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{7}{5}-1}=\frac{14}{7}x(x^2+1)^{\frac{2}{5}}=\frac{14}{7}x\sqrt[5]{(x^2+1)^2}.$$

5) تطبيق 2 : مشتقة الدالة $f(x)=\arctan x$ ثم $f(x)=\arctan(u(x))$.

- خاصية 1 :

أ- الدالة $f(x)=\arctan x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

ب- إذا كانت الدالة $u(x)$ قابلة للاشتقاق على I فإن الدالة $f(x)=\arctan(u(x))$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$\forall x\in I : f'(x)=\left(\arctan(u(x))\right)'=\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} .$$

- مثال :

- $$\left(\arctan(x^3-5x)\right)'=\frac{(x^3-5x)'}{1+(x^3-5x)^2}=\frac{3x^2-5}{1+(x^3-5x)^2} .$$

- $$\left(\arctan(\sin x)\right)'=\frac{(\sin x)'}{1+(\sin x)^2}=\frac{\cos x}{1+(\sin x)^2} .$$

- $$\left(\arctan^7(x^3-5x)\right)'=7\left(\arctan(x^3-5x)\right)'\arctan^6(x^3-5x)=7\frac{(x^3-5x)'}{1+(x^3-5x)^2}\arctan^6(x^3-5x)$$

$$=\frac{3x^2-5}{1+(x^3-5x)^2}\arctan^6(x^3-5x)$$

VII.مبرهنة رول - مبرهنة التزايدات المنتهية :

A. مطارف دالة عددية قابلة للاشتقاق.

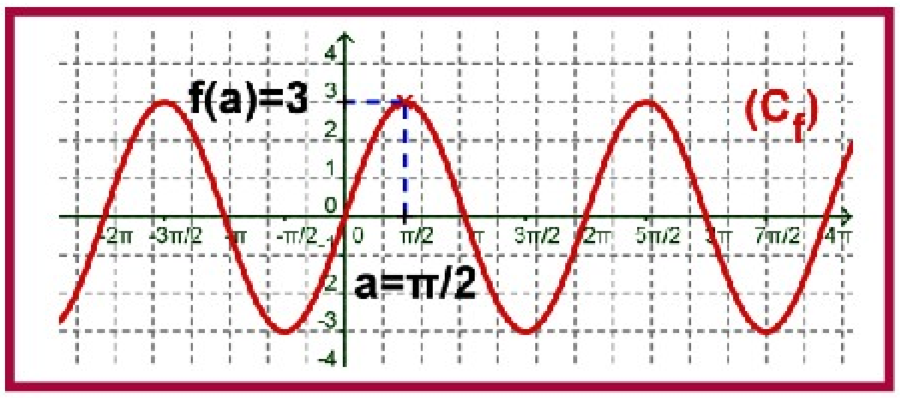
1. نشاط:

المنحنى الآتي يمثل دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. a عنصر من I.

1) هل f تقبل مطراف في a ؟

2) أعط قيمة ل $f'(a)$.

3) أعط الخاصية.



2. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I . a عنصر من I.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة a و تقبل مطراف في النقطة a فإن $f'(a)=0$.

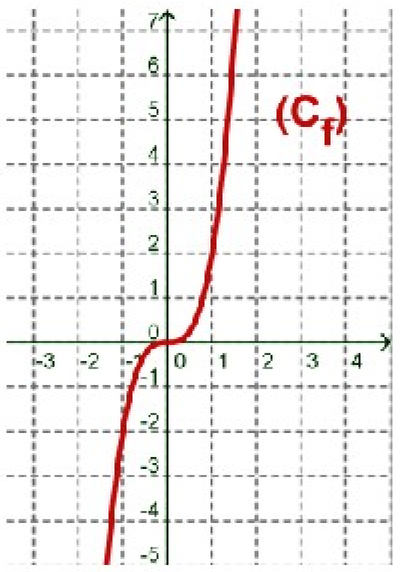
3. ملحوظة :

إذا كان $f'(a)=0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن $f(a)$ مطراف للدالة f .

4. مثال :

$f(x)=2x^3$ لدينا : $f'(x)=6x^2$ ومنه : $f'(0)=0$
ولكن $f(0)$ ليس مطراف ل f .

الدالة $f(x)=2x^3$



5. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I . a عنصر من I
إذا كانت 'f تنعدم في النقطة a و تتغير إشارتها بجوار a فإن $f(a)$ مطراف ل f .

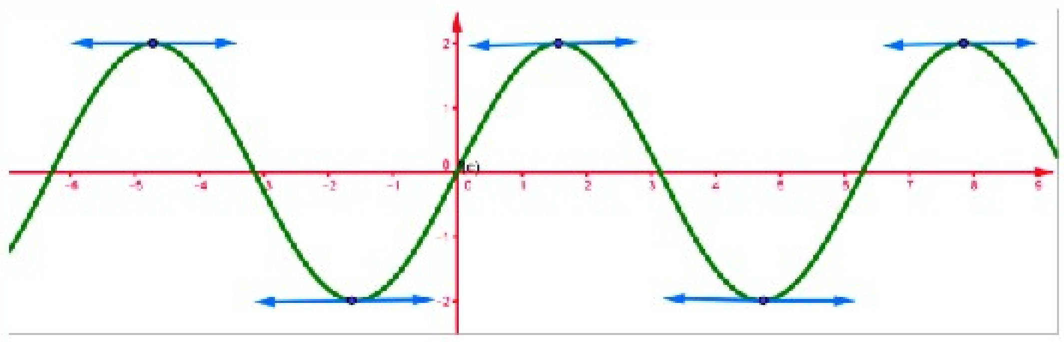
B. مبرهنة رول : théorème de Rolle

1. مبرهنة :

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a<b$. f دالة عددية تحقق ما يلي :

أ- f متصلة على القطعة $[a,b]$.
ب- f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.
ج- $f(a)=f(b)$.

إذن يوجد عنصر c من $]a,b[$ حيث $f'(c)=0$



2. برهان :

حالة 1 : f دالة ثابتة على $[a,b]$:

بمأن f دالة ثابتة على $[a,b]$ إذن : $f'(x)=0$: $\forall x\in]a,b[$.
و بالتالي المبرهنة صحيحة.

حالة 2 : f ليست بدالة ثابتة على $[a,b]$:

بمأن f متصلة على القطعة $[a,b]$ إذن $f([a,b])=[m,M]$ مع $m<M$ لأن f ليست بدالة ثابتة .

نضع : $m=f(\alpha)$ و $M=f(\beta)$ مع α و β من $[a,b]$ ..

إذن : $\forall x\in[a,b]\ m=f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)=M$. (1)

- حالة : $\alpha=a$ أو $\alpha=b$ نبين أن : $\beta\in]a,b[$.

بالنسبة ل : $\alpha=a$ لدينا $\beta\neq\alpha$ إذن $\beta\neq a$

نفترض أن : $\beta=b$ إذن $M=f(\beta)=f(b)=f(a)=f(\alpha)=m$ و هذا غير ممكن إذن $\beta\neq b$.

و منه : $\beta\in]a,b[$.

بنفس الطريقة ل $\alpha=b$. نحصل على $\beta\in]a,b[$.

و بالتالي f تقبل مطراف في β (قيمة قصوى حسب (1)).

إذن : $f'(\beta)=0$ يكفي أن نأخذ $c=\beta$.

3. ملحوظة :

يمكن تطبيق مبرهنة رول حيث f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ و $f(a)=f(b)$

C. مبرهنة التزايدات المنتهية T.A.F

1. مبرهنة :

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a<b$. f دالة عددية تحقق ما يلي :

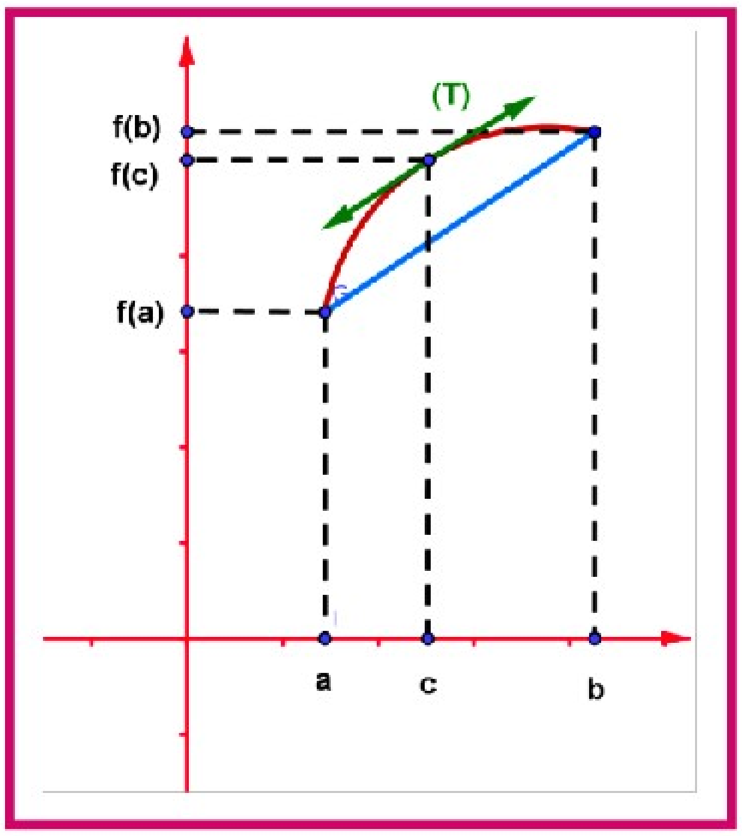
أ- f متصلة على القطعة $[a,b]$.

ب- f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.

إذن يوجد عنصر c من $]a,b[$ حيث $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

أو أيضا يوجد عنصر c من $]a,b[$ حيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

2. برهان :



نعتبر الدالة : g المعرفة على $[a,b]$ بما يلي : $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x-f(a)$

الدالة g تحقق ما يلي :

- g متصلة على القطعة $[a,b]$.
- g قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.
- $g(a)=g(b)$.

حسب مبرهنة رول $\exists c\in\,]a,b[\ :\ g'(c)=0\quad (2)$

أي :

$$(2)\Leftrightarrow \exists c\in\,]a,b[\ :\ \left(f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x-f(a)\right)'_{x=c}=0$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in\,]a,b[\ :\ \left(f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)_{x=c}=0$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in\,]a,b[\ :\ f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in\,]a,b[\ :\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

3. ملحوظة :

يمكن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية حيث f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$

D. تطبيقات مبرهنة التزايدات المنتهية :

1. متفاوتة التزايدات المنتهية :

❖ خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. k عنصر من $\mathbb{R}^+$.
إذا كان : $\forall x\in I \quad |f'(x)|\leq k$ فإن $\forall x,y\in I \quad |f(x)-f(y)|\leq k|x-y|$.
أي : $\left(\forall x\in I \quad |f'(x)|\leq k\right)\Rightarrow\left(\forall x,y\in I \quad |f(x)-f(y)|\leq k|x-y|\right)$.

❖ برهان :

حالة 1 : $x=y$. لدينا : $|f(x)-f(y)|=0\leq k|x-y|=0$ الاستلزام صحيح .
حالة 2 : $x\neq y$. نأخذ : $x<y$ (نفس الشيء ل $y<x$) .
لدينا : $[x,y]\subset I$ (لأن I مجال)
بمأن : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن f قابلة للاشتقاق على $[x,y]$.
إذن : $\exists c\in]x,y[\; : f(x)-f(y)=(x-y)f'(c)$ (حسب مبرهنة T.A.F)
ومنه : $|f(x)-f(y)|=|(x-y)f'(c)|=|x-y||f'(c)|\leq k|x-y|$. مع $k\geq 0$ و $|f'(c)|\leq k$.
خلاصة : $\left(\forall x\in I \quad |f'(x)|\leq k\right)\Rightarrow\left(\forall x,y\in I \quad |f(x)-f(y)|\leq k|x-y|\right)$

❖ مثال :

نبين : $\forall x,y\in \mathbb{R} : |\cos x-\cos y|\leq |x-y|$.
نضع : $f(x)=\cos x$ لدينا : الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x\in \mathbb{R} : |\cos x|\leq 1$
ومنه حسب متفاوتة التزايدات المنتهية : $\forall x,y\in \mathbb{R} : |\cos x-\cos y|\leq |x-y|$.

2. إشارة المشتقة الأولى و رتابة دالة :

❖ خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. k

- إذا كان $\forall x\in I : f'(x)\geq 0$ فإن f تزايدية على I.
- إذا كانت $\forall x\in I : f'(x)>0$ فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كان $\forall x\in I : f'(x)\leq 0$ فإن f تناقصية على I.
- إذا كان $\forall x\in I : f'(x)<0$ فإن f تناقصية قطعا على I.
- إذا كان $\forall x\in I : f'(x)=0$ (على I بكامله) فإن f ثابتة على I.

3. برهان :

ليكن a و b من I مع $a<b$ لدينا : $[a,b]\subset I$ (لأن I مجال).
بمأن : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن f قابلة للاشتقاق على $[x,y]$.
ومنه حسب مبرهنة T.A.F : $\exists C\in]a,b[\; : f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.
حالة : $\forall x\in I : f'(x)\geq 0$ إذن : $f'(c)\geq 0$ و منه $(b-a)f'(c)\geq 0$ و بالتالي $f(b)-f(a)\geq 0$ أي $f(b)\geq f(a)$
خلاصة : f تزايدية على I.

4. ملحوظة : (يمكن للدالة 'f أن تنعدم في نقط منعزلة من I وهذا لا يؤثر على رتابة f)

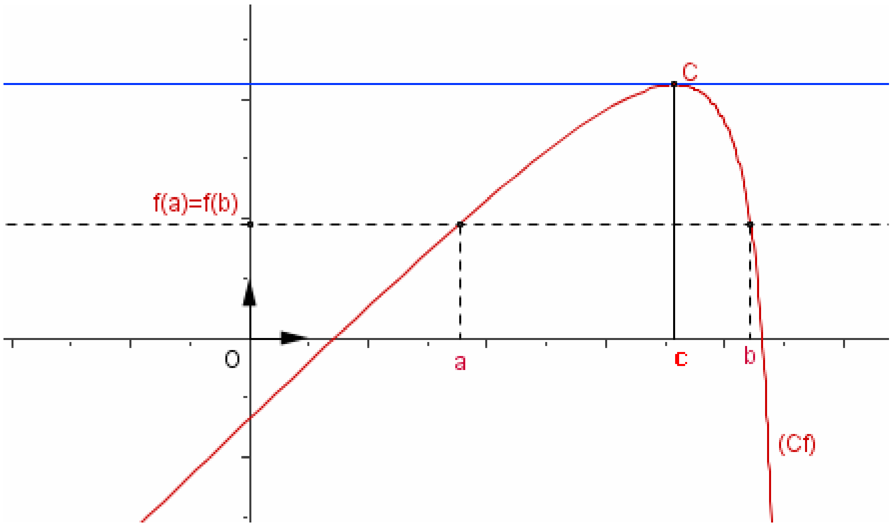
مبرهنة التزايدات المنتهية

I

1- مبرهنة رول

تذكير: اذاكانت لدالة f مطراف نسبي في c و كانت f قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c)=0$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ بحيث $f(a)=f(b)$



الشكل جانبه يؤول هندسيا هذه الشروط:

يظهر من خلال الشكل عن وجود نقطة C من المنحنى (C_f) أفصولها ينتمي الى $]a;b[$ بحيث المماس لـ (C_f) في C يوازي محور الافاصيل أي يوجد c من $]a;b[$ بحيث $f'(c)=0$

لنبرهن هذا

*- إذا كانت f ثابتة فان $f'(c)=0 \quad \forall c\in]a;b[$

*- f دالة غير ثابتة ومنه يوجد $x_0\in]a;b[$ حيث $f(x_0)\prec f(a)=f(b)$ أو $f(x_0)\succ f(a)=f(b)$

بما أن f متصلة على $[a;b]$ فان f تقبل قيمة قصوى $M=\underset{x\in[a,b]}{\mathrm{Sup}}\ f(x)$ و قيمة دنيا $m=\underset{x\in[a,b]}{\mathrm{Inf}}\ f(x)$

لدينا $M\neq f(a)=f(b)$ أو $m\neq f(a)=f(b)$ لأن إذا كان غير ذلك فان f ستكون ثابتة

إذا كان $M\neq f(a)=f(b)$ فانه يوجد c من $]a;b[$ حيث $f(c)=M$ أي أن f تقبل قيمة قصوى عند c و حيث f قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c)=0$

إذا كان $m\neq f(a)=f(b)$ فانه يوجد c من $]a;b[$ حيث $f(c)=m$ أي أن f تقبل قيمة دنيا عند c و حيث f قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c)=0$

مبرهنة رول

اذا كانت دالة f معرفة على المجال $[a;b]$ تحقق الشروط التالية:

1- f متصلة على $[a;b]$

2- f قابلة للاشتقاق على $]a;b[$

3- $f(a)=f(b)$

فانه يوجد عنصر c من $]a;b[$ حيث $f'(c)=0$

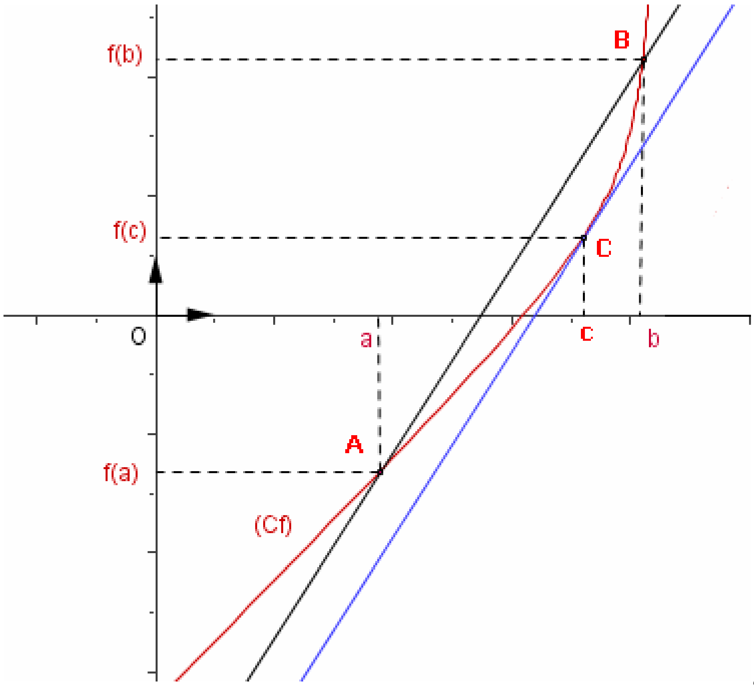
ملاحظات

❖ وجود c من $]a;b[$ حيث $f'(c)=0$ لا يستثني وجود نقط أخرى k حيث $f'(k)=0$

❖ لنطبيق مبرهنة رول الشروط الثلاث ضرورية

❖ معطيات مبرهنة رول شروط كافية، لكنها غير لازمة

2- مبرهنة التزايدات المنتهية



لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$
و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$

الشكل جانبه يؤول هندسيا الشرطين:
يظهر من خلال الشكل عن وجود نقطة C
من المنحنى (C_f) أفصولها ينتمي الى $]a;b[$
بحيث المماس لـ (C_f) في C يوازي (AB)
أي أن معامليهما الموجهين متساويين
يوجد c من $]a;b[$ بحيث $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

لنبرهن هذا

نعتبر $g(x)=f(x)-\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$

لدينا إذن g دالة متصلة على $[a;b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$

لدينا $g(a)=g(b)=0$

اذن حسب مبرهنة رول يوجد عنصر c من $]a;b[$ حيث $g'(c)=0$

$$\forall x\in]a;b[\qquad g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

و منه $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

إذا كانت دالة f معرفة على المجال $[a;b]$ تحقق الشرطين التاليين: 1- f متصلة على $[a;b]$ 2- f قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ فانه يوجد عنصر c من $]a;b[$ حيث $(b-a)f'(c)=f(b)-f(a)$

ملاحظات

وجود c من $]a;b[$ حيث $(b-a)f'(c)=f(b)-f(a)$ لا يستثني وجود نقط أخرى k
حيث $(b-a)f'(k)=f(b)-f(a)$

تمرين

1- بين أن $|\sin x-\sin y|\le |x-y| \quad \forall (x;y)\in\mathbb{R}^2$

2- استنتج أن $|\sin x|\le x \quad \forall x\in\mathbb{R}+$

3- خاصية

نشاط

لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $I=[x_0;+\infty[$ و قابلتين للاشتقاق على I

حيث $f(x_0)=g(x_0)$ و $f'(x)\geq g'(x)$ لكل x من I نعتبر $h=f-g$ على I

بتطبيق مبرهنة التزايدات المتهية على h في المجال $[x_0;x]$ حيث $x\in I$ بين أن $f(x)\geq g(x)$ لكل x من I

الجواب

لدينا g متصلة على $[x_0;x]$ و قابلة للاشتقاق على $]x_0;x[$ لكل x من I

ومنه يوجد عنصر c من $]x_0;x[$ حيث $(x-x_0)h'(c)=h(x)-h(x_0)$ أي $(x-x_0)h'(c)=h(x)$

و بما أن $h'(c)=f'(c)-g'(c)$ و $f'(x)\geq g'(x)$ لكل x من I فان $h'(c)\geq 0$ أي $(x-x_0)h'(c)\geq 0$

ومنه $h(x)\geq 0$ لكل x من I

اذن $f(x)\geq g(x)$ لكل x من I

لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $I=[x_0;+\infty[$ و قابلتين للاشتقاق على I

إذا كان $f(x_0)=g(x_0)$ و $f'(x)\geq g'(x)$ لكل x من I فان $f(x)\geq g(x)$ لكل x من I

ملاحظة: يمكن تعويض المجال I بـ $]-\infty;x_0]$ أو $[x_0;a]$ أو $]a;x_0]$ أو $[x_0;a[$ و الخاصية تبقى صالحة

تمرين

1- بين أن $x-\frac{x^3}{3}\leq \arctan x \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

2- بين أن $1-\frac{x^2}{2}\leq \cos x\leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

تمرين

نعتبر المتتالية $u_n=1+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}+................+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

تذكير لعموميات حول المتتاليات العددية و المتتاليات الحسابية و الهندسية

i. متتالية مكبورة – مصغورة – محدودة : (تذكير)

01. تعريف :

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية عددية. M و m عددين من $\mathbb{R}$.

- $(u_n)_{n\ge n_0}$ مكبورة ب M يكافئ $\forall n\ge n_0; u_n\le M$. (أو $\forall n\ge n_0; u_n<M$)
- $(u_n)_{n\ge n_0}$ مصغورة ب m يكافئ $\forall n\ge n_0; m\le u_n$. (أو $\forall n\ge n_0; m<u_n$)
- $(u_n)_{n\ge n_0}$ محدودة يكافئ إن u_n مكبورة ومحدودة .

02. مثال : نعتبر المتتالية العددية : $(w_n=\dfrac{n+3}{n+4})_{n\in\mathbb{N}}$. بين أن: w_n مكبورة ثم مصغورة على $\mathbb{N}$.

ii. رتابة متتالية :

01. تعريف :

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية.

1) u_n متتالية تزايدية على I يكافئ $\forall n,m\in I; n<m\Rightarrow u_n\le u_m$.
2) u_n متتالية تزايدية على I يكافئ $\forall n,m\in I; n<m\Rightarrow u_n\le u_m$
3) u_n متتالية ثابتة على I يكافئ $\forall n,m\in I; u_n=u_m$

02. خاصية :

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية.

- u_n متتالية تزايدية على I يكافئ: $\forall n\in I; u_n\le u_{n+1}$.
- u_n متتالية تناقصية قطعا على I يكافئ: $\forall n\in I; u_n\ge u_{n+1}$
- u_n متتالية ثابتة على I يكافئ: $\forall n\in I; u_{n+1}=u_n$

03. مثال :

نأخذ $w_1=1$ و $w_{n+1}=1+w_n$. أدرس رتابة w_n .

iii. المتتالية الحسابية :

01. تعريف :

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية عددية .
نقول إن u_n متتالية حسابية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم r وحدها الأول u_{n_0} يعني إن $\forall n\ge n_0 : u_{n+1}-u_n=r$.

02. مثال: نعتبر المتتالية العددية الآتية : $u_n=2n+3; n\ge 0$. بين أن u_n متتالية حسابية وحدد عناصرها المميزة .

iv. صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0}. لدينا : $\forall n\ge n_0 : u_n=u_{n_0}+(n-n_0)r$.

02. خاصية :

$(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r إذا وفقط إذا كان $\forall n,p\ge n_0 : u_n=u_p+(n-p)r$. (مع n و p من $\mathbb{N}$)

.03 أمثلة :

- مثال 1 : u_n متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها u_7. أحسب u_{2007}.
- مثال 2 : متتالية حسابية أساسها r وحدها $u_0=5$. أحسب $u_{100}=-45$. حدد r و u_n بدلالة n .

v. المجموع لحدود متتابعة لمتتالية حسابية :

.01 خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} . $n_0 \leq p < n$. لدينا :

$$S_n=\sum_{i=p}^{i=n}u_i=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\dots+u_n=\left[\frac{u_n+u_p}{2}\right]\times(n-p+1)$$

أو أيضا : (عدد الحدود) $\times$ $S_n=\dfrac{(\text{ le premier terme })+(\text{ le dernier terme })}{2}$

.02 ملاحظة :

$S_n=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$ هناك $n+1$ من الحدود

$S_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n$ هناك n من الحدود

$S_n=u_2+u_3+u_4+\dots+u_n$ هناك $n-1$ من الحدود

vi. متتالية هندسية :

.01 تعريف :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

نقول إن u_n متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم q و حدها الأول u_{n_0} يعني ان $\forall n\geq n_0 : u_{n+1}=q\times u_n$

vii. صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

.01 خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q وحدها الأول u_{n_0} . لدينا : $\forall n\geq n_0 : u_n=u_{n_0}\times q^{(n-n_0)}$

.02 خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q إذا وفقط إذا كان $\forall n,p\geq n_0 : u_n=u_p\times q^{n-p}$. (مع n و p من $\mathbb{N}$)

.03 تمرين :

viii. المجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية :

.01 خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q وحدها الأول u_{n_0} . $n_0\leq p<n$.

1) لدينا : مع $q\neq 1$:
$$S=\sum_{i=p}^{i=n}u_i=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\dots+u_n=\left[\frac{q^{(n-p+1)}-1}{q-1}\right]\times u_p$$

2) لدينا : مع $q=1$:
$$S=\sum_{i=p}^{i=n}u_i=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\dots+u_n=u_p+u_p+u_p+\dots+u_p=u_p(n-p+1)$$

.ix المعدل الحسابي – المعدل الهندسي : لثلاثة حدود متتابعة .

.01 المعدل الحسابي.

$u_i = a$ و $u_{i+1} = b$ و $u_{i+2} = c$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها r .

لدينا : $u_i = u_{i+1} - r$ و $u_{i+2} = u_{i+1} + r$ ومنه : $2u_{i+1} = u_i + u_{i+2}$.

خلاصة : $a + b = 2c$ وهي تسمى المعدل الحسابي .

.02 المعدل الهندسي : إذا كانت u_n هندسية بالنفس الطريقة نحصل على: $a \times c = b^2$ تسمى المعدل الهندسي.

نهاية متتالية

A. نهاية منتهية لمتتالية

.01 نشاط:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_n = \frac{1}{n} + 2 \; ; \; n \geq 1$

على المستقيم العددي نأخذ المجال المفتوح $\left]2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}\right[= I_{\left(2, \frac{1}{4}\right)} = I_2$ الذي مركزه 2 . وحدة القياس 2cm.

أ – مثل المجال على المستقيم العددي.

ب – أحسب بعض الحدود و مثلها على المستقيم العددي.

ج – ماذا تلاحظ ؟

د – إذا كانت n تؤول إلى $+\infty$. ماذا يمكن أن نقول عن قيم u_n؟

.02 مفردات و رموز :

- نقول : توجد رتبة p ابتداء من الرتبة $p = 5$ لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq p$ فإن $u_n \in \left]2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}\right[$

  نعبر عن ذلك : $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n \in \left]2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}\right[$
- نقول إن نهاية المتتالية u_n هي 2 عندما تؤول n إلى $+\infty$
- نكتب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

.03 تعريف:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية.

نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي العدد الحقيقي ℓ إذا كان كل مجال مفتوح مركزه ℓ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ابتداء من رتبة معينة. نكتب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

أو أيضا : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |u_n - \ell| < \varepsilon$

.04 ملاحظة:

- إذا كان للمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ نهاية فهذه النهاية وحيدة .
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^i}=0$; $\left(i\in\mathbb{N}^*\right)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n-\ell\right)=0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=|\ell|$ (العكس غير صحيح مثال $u_n=(-1)^n$)

.05 مثال:

لنعتبر المتتالية $u_n=\frac{1}{n}+3; n\geq 1$

نبين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n-3\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3-3=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$

B. نهاية اللا منتهية لمتتالية:

.01 تعريف:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية.

- نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هي $+\infty$ إذا كان كل مجال على شكل $]A,+\infty[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة معينة. نكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

  أو أيضا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0\,,\exists p\in\mathbb{N}\,,\forall n\geq p\,,\, u_n>A$
- نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هي $-\infty$ إذا كان كل مجال على شكل $]-\infty,A[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة معينة. نكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

  أو أيضا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0\,,\exists p\in\mathbb{N}\,,\forall n\geq p\,,\, u_n<-A$

.02 ملاحظة:

- إذا كان $k>0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}ku_n=+\infty$.
- إذا كان $k<0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}ku_n=-\infty$.

.03 مثال :

$u_n=n^3$. نبين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

لكل $A>0$ نبحث هل يوجد p من $\mathbb{N}$ لكل n يحقق $n\geq p$ يعطينا $u_n>A$.

ليكن $A>0$ حيث $u_n>A$ أي $n^3>A$ ومنه $n>\sqrt[3]{A}$.

وفي هذه الحالة :

نقول لكل $A>0$ يوجد p حيث $p=E\left(\sqrt[n]{A}\right)+1$ لكل n يحقق $n\geq p$ يعطينا $u_n>A$ أو باختصار: نقول لكل $A>0$ يكفي أن نأخذ $p=E\left(\sqrt[n]{A}\right)+1$.

خلاصة : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

تقارب متتالية عددية

01. تعريف:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

- إذا كانت نهاية المتتالية u_n منتهية نقول إن المتتالية متقاربة.
- إذا كانت نهاية المتتالية u_n غير منتهية أو u_n ليس لها نهاية نقول إن المتتالية u_n متباعدة.

02. مثال:

- $u_n=\frac{1}{n}$. لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ إذن u_n متقاربة.
- $u_n=n^4$. لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ إذن u_n متباعدة.
- $u_n=(-1)^n$ ليس لها نهاية: u_n هي متباعدة.

العمليات على نهايات المتتاليات- المتتاليات والترتيب

01. العمليات:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين عدديتين .

- العمليات على المتتاليات هي نفس العمليات على الدوال العددية.

  مثال: $(u_n)_{n\geq n_0}+(v_n)_{n\geq n_0}=(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$
- العمليات على نهايات الدوال العددية هي نفس النهايات على الدوال.

  مثال : أ- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell'$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n=\ell+\ell'$

  مثال : ب - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n=+\infty$

02. الترتيب:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ متتاليات عدديتين حيث $\exists p\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq p, v_n\leq u_n\leq w_n$

- إذ كان $u_n>0$ فإن $\ell>0$.
- إذا كان (u_n) و (v_n) متقاربتين (أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell'$) و $\exists p\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq p, v_n\leq u_n$ فإن $\ell'\leq\ell$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n-\ell=0$.

03. تطبيق:

1) أحسب نهاية المتتالية التالية: $u_n = \frac{1}{n} + 3; n \geq 1$

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} 3 = 3$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

2) أحسب نهاية المتتالية التالية: $v_n = \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n}; n \geq 1$.

لدينا: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right) = 3$ و $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. ومنه : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n} = +\infty$

مصاديق التقارب

01. نشاط:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ متتاليات عددية حيث ابتداء من الرتبة p (مع $p \geq n_0$) . لدينا ما يلي :

- $v_n \leq u_n \leq w_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$ ماذا يمكننا أن نستنتج ؟
- $v_n \geq \alpha . u_n$ (مع $\alpha > 0$) و $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ماذا يمكننا أن نستنتج ؟
- $v_n \leq \alpha . u_n$ (مع $\alpha > 0$) و $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ماذا يمكننا أن نستنتج ؟
- $|v_n - \ell| \leq \alpha . u_n$ (مع $\alpha > 0$) و $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ماذا يمكننا أن نستنتج ؟

02. مصاديق:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ متتاليات عددية .

إذا كان ابتداء من الرتبة p ، لكل n من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq p$ يتحقق ما يلي:

1. $v_n \leq u_n \leq w_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$ فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
2. $v_n \geq \alpha . u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. $v_n \leq \alpha . u_n$ و $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
4. $|v_n - \ell| \leq \alpha . u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

مع $\alpha > 0$ و p عدد صحيح طبيعي معلوم ($p \geq n_0$) و $\ell \in \mathbb{R}$.

03. أمثلة :

1. مثال للمصداق 1:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة ب: $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5 \; ; \; n > 0$

نبين أن: $\lim_{n\to+\infty} v_n = -5$.

لدينا: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ إذن: $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

و منه: $\frac{-1}{n} - 5 \leq \frac{(-1)^n}{n} - 5 \leq \frac{1}{n} - 5$

و بالتالي : $\frac{-1}{n}-5 \leq v_n \leq \frac{1}{n}-5$

و لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n}-5 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}-5 = -5$

ومنه: حسب أحد مصاديق التقارب نحصل: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$

خلاصة : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$

2. مثال للمصداق 2:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة ب: $u_n = 2n+\cos(n); n\geq 0$ أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا: $-1\leq \cos(n)\leq 1 \Leftrightarrow 2n-1\leq 2n+\cos(n)\leq 2n+1$

ومنه : $2n-1\leq 2n+\cos(n)$ أي $2n-1\leq u_n$

ونعلم بأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n-1 = +\infty$ إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

خلاصة: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+\cos(x) = +\infty$

3. مثال للمصداق 4:

$v_n = \frac{\cos n}{n}\ ; n\geq 1$ نبين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

لدينا : (لأن $|\cos n|\leq 1$) $|v_n-0| = \left|\frac{\cos n}{n}\right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n}$

ومنه: $|v_n-0|\leq \frac{1}{n}$ و بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

تمرين : أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n+5}{n^3}$.

04. خاصية :

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة.

05. مثال :

لنعتبر المتتالية : $u_n = \frac{1}{n^3}+7; n\geq 1$.

1) نبين أن: u_n مصغورة:

لدينا: $n\geq 1$ إذن $\frac{1}{n}$ موجب قطعا أي $u_n > 0$ ومنه $0 < u_n$ وبالتالي u_n مصغورة ب 0. خلاصة: u_n مصغورة ب 0

2) نبين أن: u_n تناقصية:

لكل $n\geq 1$ لدينا: $n+1\geq n \Leftrightarrow (n+1)^3 \geq n^3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3} \Leftrightarrow u_{n+1}\leq u_n$$

ومنه : u_n تناقصية. خلاصة: حسب ما سبق u_n مصغورة ب 0 و تناقصية إذن هي متتالية متقاربة.

06. ملحوظة:

- كل متتالية تزايدية و سالبة (أي مكبورة ب 0) هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و موجبة (أي مصغورة ب 0) هي متقاربة.

متتاليات خاصة

A. متتالية على شكل: $u_n = a^n$ مع $a \in \mathbb{R}$.

01. خاصية:

- إذا كان $a > 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.
- إذا كان $a = 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- إذا كان $-1 < a < 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- إذا كان $a \leq -1$ فإن : a^n ليس لها نهاية.

02. أمثلة:

- $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$ لأن $a = 3 > 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < a = \frac{1}{2} < 1$.
- $(-1)^n$ ليس لها نهاية.
- تمرين: أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n - 8^n}{7^n}$

B. متتالية على شكل: $u_n = n^r$ مع $r \in \mathbb{Q}^*$.

01. خاصية:

- إذا كان $r < 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = 0$.
- إذا كان $r > 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = +\infty$.

02. تمرين تطبيقي :

- لنعتبر المتتالية التالية: $u_n = \sqrt[7]{n^3} ; n \geq 1$ أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (لاحظ $u_n = \sqrt[7]{n^3} = n^{\frac{3}{7}}$)
- لنعتبر المتتالية التالية: $u_n = \sqrt[7]{n^{-3}} ; n \geq 1$ أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (لاحظ $u_n = \sqrt[7]{n^{-3}} = n^{-\frac{3}{7}}$)

C. متتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ على شكل: $v_n = f(u_n)$

01. نشاط : نعتبر الدالة : $f(x) = \frac{2x-5}{7x+4}$ و المتتالية $\left(u_n = \frac{1}{n^3}\right)_{n\geq 1}$.

1) لنعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة ب : $v_n = f(u_n)$ أكتب v_n بدلالة n.

2) أ – أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ب - أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

3) إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ استنتج علاقة بين $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و f و ℓ . ثم أعط الخاصية :

.02 خاصية :

إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية و f دالة متصلة في ℓ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ $(\ell\in\mathbb{R})$ فإن المتتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ المعرفة ب $v_n = f(u_n)$ هي متقاربة و نهايتها تحقق ما يلي: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(\ell)$.

.03 تمرين :

نضع $f(x) = \dfrac{5x-6}{x+3}$ و $u_n = \dfrac{\cos n}{n}; n\geq 1$.

1) أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) نعتبر $v_n = \dfrac{5\cos n - 6n}{\cos n + 3n}; n\geq 1$. أكتب v_n بدلالة f و u_n.

3) حدد النهاية التالية $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

D. متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ على شكل: $u_{n+1} = f(u_n)$

.01 خاصية:

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و $f(I)\subset I$ و $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية حيث : $u_{n+1} = f(u_n)$

- $u_{n_0}\in I$ (حدها الأول من I).
- u_n متتالية متقاربة و نهايتها ℓ .

فإن ℓ هو حل للمعادلة $f(x) = x$.(أي ℓ تحقق $\ell = f(\ell)$)

.02 تمرين :

لنعتبر المتتالية : $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}; n\geq 0$ و $u_0 = 2$. نعتبر أن u_n متقاربة (u_n تزايدية و مكبورة ب).

1) حدد مجموعة اتصال الدالة $f(x) = \sqrt{6+x}$.

2) أعط جدول تغيرات f على D_f .

3) لنعتبر المجال $I = [0,3]$ تحقق بأن $f(I)\subset I$ و $u_0\in I$.

4) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

C. المتتاليات المتحادية :

.01 تعريف :

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين عدديتين .

نقول إن : (u_n) و (v_n) متحاديتان لنعني أن :

1. إحداهما تزايدية و الأخرى تناقصية .
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

.02 تمرين تطبيقي : لتكن $u_n = \frac{1}{n}$ و $v_n = -\frac{1}{n^2}$ متتاليتين عدديتين .

1. بين أن : (u_n) تناقصية ثم (v_n) تزايدية .
2. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n$. استنتج بأن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متحاديتان .

.03 خاصية :

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين متحاديتين .

إذا كانت (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية فإن لكل $n\geq n_0$ لدينا $u_n \leq v_n$.

.04 برهان :

بمأن المتتالية (u_n) تزايدية إذن المتتالية $(-u_n)$ تناقصية .

نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بما يلي : $w_n = v_n - u_n$. المتتالية (w_n) لأنها مجموع متتاليتين تناقصيتين .

من جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ إذن $w_n \geq 0$ أي $w_n = v_n - u_n \geq 0$ و بالتالي $v_n \geq u_n$.

خلاصة : $u_n \leq v_n$.

.05 خاصية :

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين متحاديتين . لدينا :

- (u_n) و (v_n) متقاربتان.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$

.06 برهان :

ملحوظة : إذا كانت (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$ فإن $u_n \leq \ell \leq v_n$ الرتابة قطعا $u_n < \ell < v_n$

حالة 1 : (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية (نفس البرهان ل (u_n) تناقصية و (v_n) تزايدية).

(u_n) تزايدية إذن : $\forall n\in\mathbb{N}\,,\, n\geq n_0\;\; u_{n_0} \leq u_n$. (v_n) تناقصية إذن : $\forall n\in\mathbb{N}\,,\, n\geq n_0\;\; v_n \leq v_{n_0}$

ومنه : $u_{n_0} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n_0}$ و و ذلك لكل $n \geq n_0$.

إذن : المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة ب v_{n_0} إذن (u_n) متقاربة . نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

إذن : المتتالية (v_n) تناقصية و مصغورة ب u_{n_0} إذن (u_n) متقاربة . نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$.

بمأن : $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين متحاديتين إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \Leftrightarrow \ell' - \ell = 0 \Leftrightarrow \ell' = \ell$.

خلاصة : $\ell' = \ell$

الحسابيات

I- قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$
نقول إن b يقسم a و نكتب b/a إذا وجد k في $\mathbb{Z}$ حيث $a=kb$

$$(a;b)\in\mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \quad a=kb$$

2- ملاحظات

*- إذا كان b يقسم a إننا نقول إن b قاسم لـ a أو a مضاعف لـ b

*- ليكن $b\in\mathbb{Z}$ مجموعة مضاعفات العدد b هي المجموعة $b\cdot\mathbb{Z}=\{k\cdot b/k\in\mathbb{Z}\}$

*- ليكن $a\in\mathbb{Z}^*$ $b\in\mathbb{Z}$: $b/a\Rightarrow |b|\le|a|$

3- خاصيات العلاقة " b/a "

*- a/a $\forall a\in\mathbb{Z}$ نقول إن العلاقة" b/a " انعكاسية

*- $\begin{cases} b/a \\ a/c \end{cases}\Rightarrow b/c$ $\forall(a;b;c)\in\mathbb{Z}^3$ نقول إن العلاقة" b/a " متعدية

*- $\begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases}\Rightarrow |a|=|b|$ $\forall(a;b;c)\in\mathbb{Z}^3$

ملاحظة

$\begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases}\Rightarrow a=b$ $\forall(a;b;c)\in\mathbb{N}^3$ نقول إن العلاقة" b/a " تخالفية في $\mathbb{N}$

تمرين

1- بين أن $b/a \Leftrightarrow a\cdot\mathbb{Z}\subset b\cdot\mathbb{Z}$ $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2$

2- بين أن $a/(x_1x_2-y_1y_2) \Leftrightarrow a/(x_2-y_2) \wedge a/(x_1-y_1)$ $\forall(a;x_1;x_2;y_1;y_2)\in\mathbb{Z}^5$

II- القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$

1- القسمة الاقليدية في $\mathbb{N}$

مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{N}$ حيث $a\ne b$
يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث $a=bq+r$ حيث $0\le r\prec b$

اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد $(q;r)$ بحيث $a=bq+r$ حيث $0\le r\prec b$ تسمى القسمة الاقليدية لـ a على b في $\mathbb{N}$
العدد a يسمى المقسوم و العدد b يسمى المقسوم عليه و العدد q الخارج و r الباقي.

2- القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة

ليكن a من $\mathbb{Z}$ و b في $\mathbb{N}^*$ حيث $a\ne b$
يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ حيث $a=bq+r$ حيث $0\le r\prec b$

اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد $(q;r)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ بحيث $a=bq+r$ حيث $0\le r\prec b$ تسمى القسمة الاقليدية لـ a على b في $\mathbb{Z}$
العدد a يسمى المقسوم و العدد b يسمى المقسوم عليه و العدد q الخارج و r الباقي

تمرين

حدد الأعداد الصحيحة النسبية x بحيث يكون للقسمة الاقليدية لـ x على 7 خارج q و باقي q^2

تمرين

بين إذا كان للقسمة الاقليدية لـ a على b و القسمة الاقليدية لـ a' على b نفس الخارج q و كان $a \prec x \prec a'$ فان q خارج القسمة الاقليدية لـ x على b

III- الموافقة بترديد n

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$

نقول إن a يوافق b بترديد n و نكتب $a \equiv b \quad [n]$ إذا كان n يقسم $a-b$

$$\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \quad a \equiv b \quad [n] \Leftrightarrow n/a-b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a-b=kn$$

2- خاصيات العلاقة " الموافقة بترديد n"

أ- $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \equiv a \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" انعاكسية

ب- $\forall (a;b) \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b \quad [n] \Rightarrow b \equiv a \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" تماثلية

ج- $\forall (a;b) \in \mathbb{Z} \quad (a \equiv b \quad [n]) et (b \equiv c \quad [n]) \Rightarrow a \equiv c \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" متعدية

نلخص الخاصيات أ و ب و ج بقولنا إن العلاقة " الموافقة بترديد n" علاقة تكافؤ

د- خاصية

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$

$a \equiv b \quad [n]$ تكافئ a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n

البرهان

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$ بحيث $a=nq_1+r_1$ و $b=nq_2+r_2$ مع $0 \le r_1 \prec n$ و $0 \le r_2 \prec n$

❖ إذا كان a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n أي $r_1=r_2$ فان $a-b=n(q_1-q_2)$

أي أن $a \equiv b \quad [n]$

❖ عكسيا إذا كان $a \equiv b \quad [n]$ فانه يوجد k من $\mathbb{Z}$ حيث $a-b=nk$

و منه $r_1-r_2=(k-q_1-q_2)n$ أي n يقسم r_1-r_2

و لدينا $0 \le r_1 \prec n$ و $0 \le r_2 \prec n$ ومنه $|r_1-r_2| \prec n$

و بالتالي $r_1-r_2=0$ أي $r_1=r_2$

3- المجموعة $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

* - $\forall (a;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists (q;r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad a=nq+r \quad et \quad 0 \le r \prec n$

- $\forall (a;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad a \equiv r \quad [n] \quad et \quad r \in \{0;1;.....;n-1\}$

- المجموعة $\{x \in \mathbb{Z} / x \equiv r \quad [n]\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية التي لها نفس الباقي r في القسمة الاقليدية على n نرمز لها بـ $\overline{r}$

المجموعة $\overline{r}$ تسمى صنف تكافؤ r بالنسبة للعلاقة " الموافقة بترديد n"في $\mathbb{Z}$

- $x \in \overline{r} \Leftrightarrow x \equiv r \quad [n]$

* - $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0;1;....;n-1\} / \quad a \equiv r \quad [n]$ أي $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0;1;....;n-1\} / \quad \overline{a} = \overline{r}$

* - إذا كان $\overline{r}=\overline{r'}$ و $0 \le r \prec n$ و $0 \le r' \prec n$ فان $r=r'$

* - $\forall (x;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \{0;1;..;n-1\} / \quad x \in \overline{r}$ (r باقي القسمة الاقليدية على n)

اذن $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup .... \cup \overline{(n-1)}$

المجموعة $\{\overline{0};\overline{1};.....;\overline{n-1}\}$ يرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

عناصر $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ منفصلة مثنى مثنى

أمثلة

* $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}=\{\overline{0};\overline{1}\}$ حيث $\overline{0}=2\cdot\mathbb{Z}$ و $\overline{1}=\{x\in\mathbb{Z}/x=2k+1\quad(k\in\mathbb{Z})\}$

* $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}=\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{6}\}$ حيث $\overline{0}=7\cdot\mathbb{Z}$ و $\overline{1}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+1\quad(k\in\mathbb{Z})\}$

و $\overline{2}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+2\quad(k\in\mathbb{Z})\}$ و $\overline{3}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+3\quad(k\in\mathbb{Z})\}$

و ....و $\overline{6}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+6\quad(k\in\mathbb{Z})\}$

في $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$ لدينا $\overline{532}=\overline{4}$ لأن $532\equiv 4\quad[7]$

$\overline{-36}=\overline{6}$ لأن $-36\equiv 6\quad[7]$

4- انسجام العلاقة " الموافقة بترديد n" مع الجمع والضرب

أ- خاصية

ليكن x و y و z و t من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$

إذا كان $x\equiv y\quad[n]$ و $z\equiv t\quad[n]$ فان $x+z\equiv y+t\quad[n]$

إذا كان $x\equiv y\quad[n]$ و $z\equiv t\quad[n]$ فان $x\times z\equiv y\times t\quad[n]$

نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" منسجمة مع الجمع والضرب

ب- نتائج

*- إذا كانت $x\in\overline{r}$ و $x'\in\overline{r'}$ فان $x+x'\in\overline{r+r'}$ و $x\times x'\in\overline{r\times r'}$ نكتب $\overline{r+r'}=\overline{r}+\overline{r'}$ و $\overline{r\times r'}=\overline{r}\times\overline{r'}$

*- $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2\quad\forall(p;n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}\quad a\equiv b\quad[n]\Rightarrow a^p\equiv b^p\quad[n]$

أمثلة

* في $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$ $\overline{3}+\overline{4}=\overline{7}=\overline{2}$, $\overline{0}+\overline{1}+\overline{2}+\overline{3}+\overline{4}=\overline{10}=\overline{0}$, $\overline{3}\times\overline{4}=\overline{12}=\overline{2}$

تمرين

حدد مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية x حيث في $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$ $\overline{x}+\overline{5}=\overline{2}$

تمرين

1- أعط جدول الجمع ثم الضرب في $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$

2- بين أن العدد $2^{70}+3^{70}$ قابلة للقسمة على 13

تمرين

1- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad n(n^4-1)\equiv 0\quad[n]$

2- بين أن 17 يقسم $3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

3- ليكن n من $\mathbb{N}$ ، حدد بواقي القسمة الاقليدية للأعداد $1^n+2^n+3^n+4^n$ على4

IV- القاسم المشترك الأكبر

نرمز لمجموعة قواسم العدد الصحيح النسبي a بالرمز D_a

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر قاسم مشترك موجب قطعا لـ a و b يرمز له بـ$a\wedge b$

$$\delta=a\wedge b\Leftrightarrow\begin{cases}\delta\in D_a\cap D_b\\ \forall x\in D_a\cap D_b\quad x\leq\delta\end{cases}$$

2- خاصيات

ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$

$$a \wedge b = b \wedge a$$
$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$
$$a \wedge a = |a|$$

مثال $48 \wedge 60 = 12$

3- خوارزمية اقليدس أو طريقة " القسمات المتتالية " لتحديد القاسم المشترك

أ- ملاحظة

* $\forall a \in \mathbb{Z}^* \quad D_a = D_{-a}$

* $\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^{*2} \quad a \wedge b = |a| \wedge |b|$ ومنه تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين نسبيين يرجع إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين.

ب- ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$

- إذا كان b/a فان $a \wedge b = b$
- إذا كان b لا يقسم a فانه يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ حيث $a = bq + r$ و $0 \prec r \prec b$

بما أن $r = a - bq$ فان كل قاسم مشترك لـ a وb يقسم r

و بالتالي قاسم مشترك لـ a وb هو قاسم مشترك لـb و r أي $D_a \cap D_b \subset D_r \cap D_b$

عكسيا كل قاسم مشترك لـb و r يقسم a (لأن $a = bq + r$)

ومنه كل قاسم مشترك لـb و r هو قاسم مشترك لـ a وb أي $D_r \cap D_b \subset D_a \cap D_b$

إذن $D_a \cap D_b = D_r \cap D_b$ و بالتالي $a \wedge b = r \wedge b$

تمهيدة

ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث b لا يقسم a و r باقي القسمة الاقليدية لـ a على b

$$a \wedge b = r \wedge b$$

ج- ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ نفترض أن $b \prec a$

بإجراء القسمة الاقليدية لـ a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ حيث $0 \le r_1 \prec b$

❖ إذا كان $r_1 = 0$ فان b/a و منه $a \wedge b = b$

❖ اذا كان $r_1 \succ 0$ نجري القسمة الاقليدية لـ b على r_1 و نحصل على $b = r_1 q_2 + r_2$ و $0 \le r_1 \prec r_2$

اذا كان $r_2 = 0$ فان $b \wedge r_1 = r_1$ و منه $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1$

إذا كان $r_2 \succ 0$ نجري القسمة الاقليدية لـ r_1 على r_2 و نحصل على $r_1 = r_2 q_3 + r_3$ و $0 \le r_3 \prec r_2$

....

بإجراء العملية n مرة نحصل على

$$a = bq_1 + r_1 \text{ ، } 0 \prec r_1 \prec b \text{ ، } a \wedge b = b \wedge r_1$$
$$b = r_1 q_2 + r_2 \text{ ، } 0 \prec r_2 \prec r_1 \text{ ، } b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \text{ ، } 0 \prec r_3 \prec r_2 \text{ ، } r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3$$

. . .

. . .

. . .

. . .

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \text{ ، } 0 \prec r_n \prec r_{n-1} \text{ ، } r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n$$

و منه نستنتج $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3 = ... = r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n$ ،

$0 \prec r_n \prec r_{n-1} .... \prec r_3 \prec r_2 \prec r_1 \prec b$

نضع $A = \{r_1; r_2; r_3 .... r_n; .....\}$

A جزء من $\mathbb{N}$ مكبور بالعدد b و منه A مجموعة منتهية

إذن $r_p \neq 0 \quad ; \quad r_{p+1} = 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} /$

بما أن $r_{p+1}=0$ فان $r_{p-1}=r_p q_{p+1}$ و منه $r_{p-1}\wedge r_p=r_b$

إذن $a\wedge b=r_p$

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو اخر باقي غير منعدم في طريقة القسمات المتتالية لـ a على b

مثال باستعمال طريقة القسمات المتتالية، نحدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1640 و 156

$$1640=156\times 10+80$$

$$156=80\times 1+76$$

$$80=76\times 1+4$$

$$76=4\times 19+0$$

إذن $1640\wedge 156=4$

3- خاصيات

أ- مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta=a\wedge b$

يوجد عددان u و v من $\mathbb{Z}$ خيث $\delta=au+bv$

البرهان

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta=a\wedge b$

نعتبر $A=\left\{n\in\mathbb{N}^*/n=au+bv\quad ;\quad (u;v)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

لدينا $A\neq\emptyset$ لأن $a^2+b^2\in A$

$A\subset\mathbb{N}$ و بالتالي $\exists p\in A\quad \forall x\in A\quad x\geq p$

ليكن $p=au_0+bv_0$ نبرهن أن $\delta=p$

❖ بما أن δ/a و δ/b فان δ/p و منه $\delta\leq p$

❖ بإنجاز القسمة لـ a على p نحصل على $0\leq r\prec p\quad ;\quad a=pq+r\quad \exists(q;r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$

❖ ومنه $r=a-q(au_0+bv_0)=a(1-qu_0)+b(-qv_0)$

إذا كان $r\succ 0$ فان $r\in A$ و منه $r\geq p$ و هذا يتناقض مع كون $r\prec p$

و بالتالي $r=0$ أي p/a وبنفس الطريقة نبرهن أن p/b

ومنه p قاسم مشترك لـ a و b وبالتالي $\delta\geq p$

لدينا $\delta\leq p$ و $\delta\geq p$ إذن $\delta=p$

ب- استنتاجات

* من البرهان السابق نستنتج $\delta=a\wedge b$ هو أصغر عدد موجب قطعا من المجموعة

$B=\left\{n\in\mathbb{Z}^*/n=au+bv\quad ;\quad (u;v)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

* بما أن δ قاسم مشترك لـ a و b فان أي قاسم لـ δ يقسم a و b

عكسيا اذا كان c قاسم مشترك لـ a و b فان $b=k_2c\quad ;\quad a=k_1c\qquad \exists(k_1;k_2)\in\mathbb{Z}^2$

بما أن $\delta=a\wedge b$ فانه $\delta=au+bv\qquad \exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2/$

ومنه $\delta=(k_1u+k_2v)c$ أي c يقسم δ

مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta=a\wedge b$

مجموعة قواسم δ هي مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b $\qquad(\quad D_a\cap D_b=D_\delta\quad)$

نتيجة

إذا كان a و b و c أعداد من $\mathbb{Z}$ فان

$a\wedge b=\delta\Rightarrow ca\wedge cb=|c|\delta$

4- القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد

تعريف

a_1 و a_2 وa_3.....و a_k أعداد من $\mathbb{Z}^*$
أكبر عدد صحيح طبيعي يقسم في آن واحد a_1 و a_2 وa_3.....و a_k يسمى القاسم المشترك الأكبر لـ a_1 و a_2 وa_3.....و a_k

مثال $12 \wedge -18 \wedge 15 = 3$

نتيجة

إذا كان δ هو القاسم المشترك الأكبر لـ a_1 و a_2 وa_3.....و a_k فانه توجد اعداد α_1 و α_2 وα_3..... و α_k من $\mathbb{Z}$ حيث $\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i a_i$

V- الأعداد الأولية فيما بينها

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$
نقول a و b أوليان فيما بينهما إذا كان $a \wedge b = 1$

2- مبرهنة Bezout

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$
اذا كان $a \wedge b = 1$ فانه $au + bv = 1 \quad \exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 /$
عكسيا: ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ حيث $au + bv = 1 \quad \exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 /$
ومنه كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 1 و بالتالي $D_a \cap D_b = \{-1;1\}$ أي $a \wedge b = 1$

مبرهنة Bezout

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$
$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 / \quad au + bv = 1$

3- نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و d قاسم مشترك لـ a و b
$$a \wedge b = |d| \Leftrightarrow \frac{a}{|d|} \wedge \frac{b}{|d|} = 1$$

ملاحظة

اذا كان a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $a \wedge b = \delta$ فان يوجد p و q من $\mathbb{Z}^*$
حيث $b = q\delta \quad ; \quad a = \delta p \quad ; \quad p \wedge q = 1$

4- مبرهنة كوص Théorème de GAUSS

أ- مبرهنة

ليكن a و b وc من $\mathbb{Z}^*$
إذا كان c يقسم الجداء ab و كان $a \wedge c = 1$ فان c يقسم b

البرهان

ليكن a و b وc من $\mathbb{Z}^*$ حيث c/ab و $a \wedge c = 1$
ومنه $ab = kc \quad ; \quad au + cv = 1 \quad \exists (u;v;k) \in \mathbb{Z} /$
و بالتالي $b = b \times 1 = b(au + cv) = bau + bcv = kcu + bcv = c(ku + bv)$
اذن c يقسم b

ب- استنتاجات

a - مبرهنة

ليكن a و b وc من $\mathbb{Z}^*$
$a \wedge b = 1 \quad et \quad a/c \quad et \quad b/c \Rightarrow ab/c$

مثال يكون x قابل للقسمة على 6 اذا كان قابل للقسمة على 2 و 3

ملاحظة

الشرط $a \wedge b = 1$ ضروري

مثال 36 يقبل القسمة على 4 2 و 6 ،و لا يقبل القسمة على $6 \times 4 = 24$

b- مبرهنة

ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$ و n من $\mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} ab \equiv ac \quad [n] \\ a \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow b \equiv c \quad [n]$$

البرهان

$$ab \equiv ac \quad [n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad ab - ac = kn$$

$$\Leftrightarrow n / a(b-c)$$

و حيث أن $a \wedge n = 1$ فان $n/(b-c)$ اذن $b \equiv c \quad [n]$

5- خاصيات

*- ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1$$

*- ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و n من $\mathbb{N}^*$

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1$$

*- ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و n و m من $\mathbb{N}^*$

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^m \wedge b^n = 1$$

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$

إذا كان $a \wedge b = 1$ فان $x = au + bv \quad \exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

تمرين محلول

تمرين حدد الأعداد الصحيحة النسبية حيث $17x + 3y = 94$

الحل

الطريقة1

لدينا $17 \times 2 + 3 \times 20 = 94$ و $17x + 3y = 94$ ومنه $17(x-2) + 3(y-20) = 0$

أي $-17(x-2) = 3(y-20)$

ومنه $3/17(x-2)$ و حيث أن $17 \wedge 3 = 1$ فان $3/(x-2)$ أي $x - 2 = 3k \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

وبالتالي $x = 3k + 2 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

ومنه $17(3k+2) + 3y = 94 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$ و بالتالي $y = -17k + 20 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

إذن $S = \{(3k+2; -17k+20) / k \in \mathbb{Z}\}$

الطريقة2

$$17x + 3y = 94 \Leftrightarrow 17x - 94 = 3y$$

$$\Leftrightarrow 17x \equiv 94 \quad [3]$$

$$\Leftrightarrow 2x \equiv 1 \quad [3]$$

$$\Leftrightarrow -x \equiv 1 \quad [3]$$

$$\Leftrightarrow -x \equiv -(-1) \quad [3]$$

بما أن $-1 \wedge 3 = 1$ فان $x = -1 \quad [3]$ ومنه $x = 3k - 1 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

و بالتالي $y = 17k + 37 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

إذن $S = \{(3k-1; 17k+37) / k \in \mathbb{Z}\}$

تمرين

حدد الأعداد q و u_0 من المجموعة $\mathbb{N}^*$ بحيث $u_0 \wedge q = 1$ و الأعداد u_0 و u_1 و u_2 و u_3 حدود المتتالية الهندسية التي أساسها q و تحقق $u_1 + 2u_3 = 44u_0^2$

تمرين

بين إذا كان $a \wedge b = 1$ فان $(a+b) \wedge b = 1$ و $(a+b) \wedge ab = 1$

استنتج أن $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ غير قابلة للاختزال

تمرين

بين أن العدد $\sqrt{\frac{2}{3}}$ عدد لاجدري

6- الأعداد الأولية فيما بينها في مجموعها

تعريف

نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3......وa_n من $\mathbb{Z}^*$ أولية فيما بينها في مجموعها إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد هو 1

ملاحظة

عندما نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3......وa_n من $\mathbb{Z}^*$ أولية فيما بينها في مجموعها هذا لا يعني أولية فيما بينها مثنى مثنى

مبرهنة

نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3......وa_n من $\mathbb{Z}^*$ أولية فيما بينها في مجموعها إذا وفقط وجدت أعداد u_1 و u_2 و u_3......وu_n من $\mathbb{Z}^*$ حيث $\sum_{i=1}^{n} u_1 a_i = 1$

حل المعادلة $ax + by = c$ $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$

أ- مثال

نحل في $\mathbb{Z}^2$ $1075x + 64y = 9$

نطبق خوارزمية اقليدس لتحديد $1075 \wedge 64$

$$1075 = 64 \times 16 + 51$$
$$64 = 51 \times 1 + 13$$
$$51 = 13 \times 3 + 12$$
$$13 = 12 \times 1 + 1$$
$$12 = 12 \times 1 + 0$$

ومنه $1075 \wedge 64 = 1$

ومنه يوجد $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حيث $1075x + 64y = 9$

لنضع $a = 1075$ $b = 64$

من خوارزمية اقليدس نستنتج أن

$$51 = a - 16b$$
$$13 = b - (a - 16b)$$
$$12 = a - 16b - 3(b - (a - 16b))$$
$$1 = b - (a - 16b) - (a - 16b - 3(b - (a - 16b)))$$
$$1 = -5a + 84b$$

و منه $9 = -45a + 756b$ أي $9 = -45 \times 1075 + 756 \times 64$

و منه $(-45;756)$ حل للمعادلة $1075x + 64y = 9$ و بالتالي $1075(x+45) + 64(y-756) = 0$

و بالتالي $64/1075(x+45)$ و حيث أن $1075 \wedge 64 = 1$ فان $64/(x+45)$

إذن $\exists k \in \mathbb{Z} \quad x+45=64k$ أي $\exists k \in \mathbb{Z} \quad x=64k-45$ و منه $\exists k \in \mathbb{Z} \quad y=1075k+756$

عكسيا إذا كان $x=64k-45 \quad ; \quad y=1075k+756$ فانهما يحققان المعادلة $1075x+64y=9$

إذن $S=\{(64k-45;1075k+756)/k \in \mathbb{Z}\}$

ب – الحالة العامة

نعتبر المعادلة $ax+by=c \quad (x;y)\in \mathbb{Z}^2 \quad (E)$ حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$

نضع $\delta = a \wedge b$ ومنه $a' \wedge b' = 1 \quad b=\delta b' \quad et \quad a=\delta a' \quad / \quad \exists(a';b')\in \mathbb{Z}^{*2}$

* إذا كان δ / c فان المعادلة تصبح $a'x+b'y=c'$ بوضع $c=\delta c'$

بما أن $1=a' \wedge b'$ فانه يوجد $(u_0;v_0)$ من $\mathbb{Z}^{*2}$ حيث $a'u_0+b'v_0=c'$ أي المعادلة $a'x+b'y=c'$ تقبل حلا

* عكسيا إذا كان للمعادلة $ax+by=c$ في $\mathbb{Z}^2$ ليكن $(x_0;y_0)$ حلا للمعادلة أي $ax_0+by_0=c$ ومنه $\delta(a'x_0+b'y_0)=c$ إذن δ/c

خاصية

> ليكن $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$ و $\delta = a \wedge b$
>
> للمعادلة $ax+by=c$ حلول في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كان δ / c

حل المعادلة $ax+by=c$

لنفترض أن δ / c إذن حل المعادلة يرجع إلى حل المعادلة $a'x+b'y=c'$

بما أن $1=a' \wedge b'$ فانه يوجد $(u_0;v_0)$ حيث $a'x+b'y=1$ أي $a'c'u_0+b'c'v_0=c'$

ومنه $a'(x-c'u_0)+b'(y-c'v_0)=0$ و بالتالي $a'(x-c'u_0)=-b'(y-c'v_0)$

و بالتالي $a'/b'(c'v_0-y)$ و حيث أن $1=a' \wedge b'$ فان $a'/(c'v_0-y)$

اذن $y=-a'k+c'v_0$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ومنه نستنتج أن $x=kb'+c'u_0$

عكسيا نتأكد أن $(kb'+c'u_0;-a'k+c'v_0)$ هو حل للمعادلة $a'x+b'y=c'$

إذن $\{(kb'+c'u_0;-a'k+c'v_0)/k \in \mathbb{Z}\}$

تمرين

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $7x-3y=1$

ليكن a من $\mathbb{N}$ بحيث باقي القسمة الاقليدية لـ a على 7 و 3 على التوالي1 و 2

حدد باقي القسمة الاقليدية لـ a على35

VI- المضاعف المشترك الأصغر

1- تعريف

> ليكن $(a;b)\in \mathbb{Z}^{*2}$
>
> المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b هو أصغر مضاعف مشترك موجب لـ a و b نرمز له بـ $a \vee b$

2- خاصيات

> أ- *- ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$
>
> $a \vee b = b \vee a$
>
> $(a \vee b)|c| = ac \vee bc$
>
> $a \wedge a = |a|$
>
> $b/a \Leftrightarrow a \vee b = |a|$
>
> ب- *- ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $a \vee b = m$
>
> كل مضاعف مشترك لـ a و b هو مضاعف للعدد m

ج- مبرهنة

> ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $a \vee b = m$ و $a \wedge b = \delta$
>
> $m\delta = |ab|$

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$
$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |ab|$

3- المضاعف المشترك لعدة أعداد

تعريف

a_1 و a_2 وa_3 .....و a_k أعداد من $\mathbb{Z}^*$
أصغر مضاعف مشترك موجب للأعداد a_1 و a_2 وa_3 .....و a_k يسمى المضاعف المشترك الأصغر لـ a_1 و a_2 وa_3 .....و a_k

VII- الأعداد الأولية

1- تعاريف

أ- القواسم الفعلية لعدد صحيح نسبي

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{Z}$
نقول إن العدد d قاسم فعلي للعدد a إذا و فقط إذا كان d يقسم a و $d \notin \{-1;1;-a;a\}$

أمثلة

*- القواسم الفعلية للعدد 6 هي 2 و 2- و 3 و 3-
*- لدينا $D_7 = \{1;-1;7;-7\}$ العدد 7 لا يقبل قواسم فعلية

ب- الأعداد الأولية

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{Z}$
نقول إن العدد a أولي إذا و فقط إذا كان a يخالف 1 و 1- و ليس له قواسم فعلية
a أولي $\Leftrightarrow$ $D_a = \{1;-1;a;-a\}$ و $|a| \neq 1$

نرمز لمجموعة الأعداد الأولية بـ P

2- خاصيات

أ- إذا كان p و q عددين أوليين و $|q| \neq |p|$ فانهما أوليين فيما بينهما (العكس غير صحيح)
ب- إذا كان p أولي فانه أولي مع أي عدد a من $\mathbb{Z}$ بحيث p لا يقسم a
ج- ليكن a عددا غير أولي في $\mathbb{Z}^*$ و يخالف 1و 1- .
أصغر قاسم فعلي موجب للعدد a هو عدد أولي
د- مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

البرهان

نبرهن أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية
لتكن P^+ مجموعة الأعداد الأولية الموجبة
$P^+ \neq \varnothing$ لأن $2 \in P^+$
لنفترض أن P^+ منتهية و ليكن p أكبر عنصر من P^+ . لنعتبر $m = p!+1$ لدينا $m \succ p$
و منه $m \notin P^+$ أي m ليس أوليا و بالتالي للعدد m قاسم أولي q ومنه $q \in P^+$ و $q \leq p$
$q \leq p$ يستلزم q يقسم $p!$ لأن) q أحد عوامل $p!$)
لدينا q/m و $q/p!$ ومن $q/(m-p!)$ أي $q/1$ وهذا يتناقض مع كون q أولي
ومنه P^+ غير منتهية إذن P غير منتهية

3- طريقة عملية لتحديد الأعداد الأولية

مبرهنة

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$
إذا كان n غير أولي فانه يوجد عدد أولي موجب p يقسم n و $p^2 \leq n$

البرهان

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ و n غير أولي و ليكن p أصغر قاسم فعلي موجب لـ n إذن p أولي ومنه يوجد k من $\mathbb{N}^*$ حيث $n = pk$

بما أن $1 \prec p \prec n$ فان $1 \prec k \prec kp = n$ إذن k قاسم فعلي موجب للعدد n و بالتالي $p \leq k$
إذن $p^2 \leq pk = n$

ملاحظة

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

لتأكد من أن n هل أولي أم لا. نرى هل يقبل القسمة على أحد الأعداد الأولية p حيث $p^2 \leq n$

- فإذا كان يقبل القسمة على أحدهم فان n غير أولي
- و إذا كان لا يقبل القسمة على أي واحد مهن فان n عدد أولي

(عمليا نتوقف عندما تكون $p^2 \succ n$)

مثال العدد 179 لا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد الأولية التالية 2 و 3 و 5 و7 و 11 و 13
$17^2 = 289 \quad ; \quad 13^2 = 169$

4- خاصيات

خاصية

*- إذا كان عدد أولي يقسم جداء أعداد صحيحة نسبية فانه يقسم أحد عوامل هذا الجداء

البرهان

ليكن p عددا أوليا و $a = a_1 \times a_2 \times ...... \times a_n$ جداء n من الأعداد الصحيحة النسبية

نفترض أن p/a نبين $p/a_i \quad \exists i \in \{1;2;.....;n\}/$

من أجل $n=2$ لدينا $p/a_1 \times a_2$. إذا كان p/a_1 فان ذلك هو المطلوب

إذا كان p لا يقسم a_1 فان $a_1 \wedge p = 1$ وحيث $p/a_1 \times a_2$ فان حسب GAUSS p/a_2

لنفرض أن الخاصية صحيحة بالنسبة لـ n لنبرهن صحتها بالنسبة لـ $n+1$

ليكن $b = a_1 \times a_2 \times ...... \times a_n \times a_{n+1}$ بحيث p/b

إذا كان p/a_{n+1} فان ذلك هو المطلوب

إذا كان p لا يقسم a_{n+1} فان $a_{n+1} \wedge p = 1$ وحيث p/b فان حسب GAUSS $p/a_1 \times a_2 \times ... \times a_n$

ومنه $p/a_i \quad \exists i \in \{1;2;.....;n\}/$

نتيجة

لتكن p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية موجبة و p عددا أوليا
$p / p_1 \times p_2 \times ...... \times p_n \Rightarrow \exists i \in \{1;2;....;n\} \quad p = p_i$

5- التفكيك الى جداء من عوامل أولية

1- مبرهنة

كل عدد صحيح نسبي n غير منعدم ومخالف لـ1 و 1- يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل
$n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و α_1
و α_2 ......و α_n أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة و $\varepsilon = \pm 1$

ملاحظة عندما نكتب n على شكل $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ فاننا نقول اننا فككنا n الى جداء عوامل أولية

مثال فكك العدد1752- إلى جداء عوامل أولية

2- تطبيقات

(A) نتيجة1

ليكن $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية
يكون عدد d قاسما للعدد n اذا وفقط اذا كان تفكيك d الى عوامل جداء أولية على شكل
$d = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ...... \times p_k^{\beta_k}$
حيث $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ لكل i من $\{1;2;....;k\}$

نتيجة2

ليكن $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية
يكون عدد m مضاعفا للعدد n إذا وفقط إذا كان تفكيك m إلى عوامل جداء أولية على شكل

$$d = \varepsilon p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times ...... \times p_k^{\lambda_k}$$
حيث $0 \le \alpha_i \le \lambda_i$ لكل i من $\{1;2;....;k\}$

(B) القاسم المشترك الأكبر – المضاعف المشترك الأصغر

+ القاسم المشترك الأكبر

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ حيث $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ و $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ...... \times p_k^{\beta_k}$
وحيث p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد $\delta = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times ...... \times p_k^{\lambda_k}$
حيث $\lambda_i = \inf(\alpha_i;\beta_i)$ و i تنتمي $\{1;2;....;k\}$

+ المضاعف المشترك الأصغر

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ حيث $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ و $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ...... \times p_k^{\beta_k}$ وحيث p_1
p_2 ......و p_n أعداد أولية
المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو العدد $m = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times ...... \times p_k^{\lambda_k}$
حيث $\lambda_i = \sup(\alpha_i;\beta_i)$ و i تنتمي $\{1;2;....;k\}$

مثال حدد $-180 \wedge 1170$ و $-180 \vee 1170$

تمرين

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و p عددا أوليا في $\mathbb{N}$

1- بين أن $\forall d \in \mathbb{N} \quad p/d \Rightarrow \left[\exists m \in \mathbb{N} \quad \exists d' \in \mathbb{N} \quad d = p^m d' \quad p \wedge d' = 1\right]$

2- برهن أن $\forall q \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad q/p^m \Leftrightarrow \left[\exists k \in \{1;2;....;n\} \quad q = p^k\right]$ و استنتج عدد قواسم p^n

3- ليكن $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_n^{\alpha_n}$ تفكيك للعدد الصحيح الطبيعي a إلى جداء من عوامل أولية
و $\varphi(a)$ عدد قواسم a
بين أن $\varphi(a) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2).....(1+\alpha_n)$ و استنتج عدد قواسم عدد صحيح نسبي

VIII- نظمات العد

1- نشاط تمهيدي

1- بين أن $\forall (m;n) \in \mathbb{N}^2 \quad m \ge 1 \Rightarrow m^n \ge 1 + n(m-1)$

2- استنتج أن $\forall m \in \mathbb{N} \quad m \succ 1 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad m^n \succ p$

3- بين أن $\forall b \in \mathbb{N} \quad b \succ 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists! k \in \mathbb{N} \quad b^k \le n \prec b^{k+1}$

1- نبين أن $\forall (m;n) \in \mathbb{N}^2 \quad m \ge 1 \Rightarrow m^n \ge 1 + n(m-1)$

ليكن $(m;n) \in \mathbb{N}^2$ لدينا $m^n = ((m-1)+1)^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i (m-1)^i = 1 + n(m-1) + \sum_{i=2}^{i=n} C_n^i (m-1)^i$

و حيث أن $m - 1 \ge 0$ فان $m^n \ge 1 + n(m-1)$

2- نستنتج أن $\forall m \in \mathbb{N} \quad m \succ 1 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad m^n \succ p$

ليكن $m \in \mathbb{N}$ حيث $m \succ 1$

إذا و جدد n فان $m^n \ge 1 + n(m-1)$

ليكن $p \in \mathbb{N}$

حسب أرخميدس يوجد n من $\mathbb{N}$ حيث $n(m-1) \succ p - 1$ أي $1 + n(m-1) \succ p$ إذن $m^n \succ p$

3- نبين أن $\forall b \in \mathbb{N} \quad b \succ 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists! k \in \mathbb{N} \quad b^k \le n \prec b^{k+1}$

نعتبر $A_n=\left\{k\in\mathbb{Z}/n\prec b^{k+1}\right\}$

حسب (2) $\forall b\in\mathbb{N}\quad b\succ 1\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}\quad \exists k_n\in\mathbb{N}\quad b^{k_n+1}\succ b^{k_n}\succ n$ إذن $A_n\neq\varnothing$

$A_n\subset\mathbb{N}$ و منه A_n يقبل أصغر عنصر k_{n_0} أي أن $b^{k_{n_0}}\leq n\prec b^{k_{n_0}+1}$

لأن لو كان $b^{k_{n_0}}\succ n$ و $n\geq 2$ فان $b^{k_{n_0}}\geq 2\succ 1$ ومنه $k_{n_0}\geq 1$ و بالتالي $k_{n_0}-1\geq 0$

وحيث $b^{(k_{n_0}-1)+1}\succ n$ فان $k_{n_0}-1\in A_n$ وهذا يتناقض مع كون k_{n_0} أصغر عنصر لـA_n

لو أن $n=1$ فان $k_{n_0}=0$ $\left(b^0\leq 1\leq b^{0+1}\right)$

2- تعريف

أساس نظمة عد هو عدد الأرقام التي تستعمل لتمثيل الأعداد الصحيحة الطبيعية

أمثلة

- أساس نظمة العد العشري هو 10. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و9
- أساس نظمة العد الاثنائي هو 2. الأرقام المستعملة هي 0 و 1
- أساس نظمة العد الاثنى عشري هو 12. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و9 و 10 و 11 نرمز في الكتابة لرقم10 بـ α و لـ11 بـ β
- أساس نظمة العد الثماني هو 8. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و3 و 4 و 5 و 6 و 7

3- نظمة العد ذات الأساس b . $(b\succ 1)$

أ- تمهيدة1

ليكن b عددا صحيحا طبيعيا حيث $(b\succ 1)$ لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد k و r_k و q_k في $\mathbb{N}$ حيث $n=b^kq_k+r_k$ و $0\leq r_k\prec b^k$ و $0\leq q_k\prec b$

البرهان

ليكن $(b;n)\in\mathbb{N}^2$ حيث $(b\succ 1)$

إذا كان $n=0$ فان نتيجة بديهية

إذا كان $n\in\mathbb{N}^*$ فانه حسب النشاط التمهيدي $\exists!k\in\mathbb{N}\quad b^k\leq n\prec b^{k+1}$

بإجراء القسمة الاقليدية للعدد n على b^k نحصل على $n=b^kq_k+r_k$ و $0\leq r_k\prec b^k$ و $q_k\in\mathbb{N}$

لنبين أن $0\leq q_k\prec b$

إذا كان $q_k\geq b$ ومنه $q_kb^k\geq b^{k+1}$ و بالتالي $n=b^kq_k+r_k\geq b^{k+1}$ و هذا يتناقض مع كون $n\prec b^{k+1}$

إذن $0\leq q_k\prec b$

ب- حسب التمهيدة1 لدينا $n=b^kq_k+r_k$ و $0\leq r_k\prec b^k$ و $0\leq q_k\prec b$

بتطبيق التمهيدة على r_k نحصل على $r_k=b^{k-1}q_{k-1}+r_{k-1}$ و $0\leq r_{k-1}\prec b^{k-1}$ و $0\leq q_{k-1}\prec b$ (لأن $r_k\prec b^k$)

نطبق التمهيدة على r_{k-1} وهكذا حت نصل الى r_1 فنحصل على

$r_{k-1}=b^{k-2}q_{k-2}+r_{k-2}$ و $0\leq r_{k-2}\prec b^{k-2}$ و $0\leq q_{k-2}\prec b$

. . .

. . .

. . .

$r_2=bq_1+r_1$ و $0\leq r_1\prec b$ و $0\leq q_1\prec b$

$r_1=1\times q_0$ و $q_0=r_1$

بجمع جميع أطراف المتساويات نحصل على الكتابة في شكلها الوحيد $n=\sum_{i=0}^{i=k}q_ib^i$

حيث $0\leq q_i\prec b$ و i تنتمي $\{1;2;....;k\}$

تمهيدة2

ليكن b عددا صحيحا طبيعيا حيث $(b \succ 1)$

لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث $n=\sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$ بحيث $0 \le q_i \prec b$

وi تنتمي $\{1;2;....;k\}$ و$q_k \succ 0$ اذا كان $n \succ 0$

ملاحظة

الكتابة $n=\sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$ حيث $0 \le q_i \prec b$ و i تنتمي $\{1;2;....;k\}$ تبين أنه لتمثيل عدد صحيح طبيعي n في نظمة العد ذات الأساس b

نحتاج الى b رمز و نمثل العدد n في نظمة العد ذات الأساس b بكتابة $n=\overline{q_k q_{k-1} ....q_0}_{(b)}$

أمثلة

* في نظمة العد العشري كتابة العدد2703 هي $2703=2\times 10^3+7\times 10^2+0\times 10+3$

* في نظمة العد الثنائي كتابة العددين 8 و 15 هي

$8=1\times 2^3+0\times 2^2+0\times 2+0$ أي أن العدد 8 ممثل في نظم العد الاثنائي بـ$\overline{1000}$

$15=1\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2+1$ أي أن العدد 15 ممثل في نظم العد الاثنائي بـ$\overline{1111}$

* في نظمة العد الثماني

$15=1\times 8+7$ ومنه $15=\overline{17}_{(8)}$

$131=2\times 8^2+0\times 8+3$ ومنه $131=\overline{203}_{(8)}$

ج- طريقة عملية لإيجاد تمثيل عدد صحيح طبيعي في نظمة عد ما

ليكن $b \in \mathbb{N}$; $b \succ 1$ $n \in \mathbb{N}$

لدينا

$0 \le r_0 \prec b$; $n=bq_1+r_0$

$0 \le r_1 \prec b$; $q_1=bq_2+r_1$

. .

$0 \le r_k \prec b$; $q_k=bq_{k+1}+r_k$

$n \ge q_1 \ge q_2 \ge ..... \ge q_q$

بما أن المجموعة $A=\{q_1;q_2....\}$ مكبورة في $\mathbb{N}$ وغير فارغة فانه يوجد k بحيث $q_k=r_k$

ومنه

$0 \le r_0 \prec b$; $n=bq_1+r_0$

$0 \le r_1 \prec b$; $q_1=bq_2+r_1$

. .

$0 \le r_{k-1} \prec b$; $q_{k-1}=bq_k+r_{k-1}$

$q_k=r_k$

و بضرب طرفي المتساوية رقم i بالعدد b^i نحصل على

$n=bq_1+r_0$

$bq_1=b^2q_2+br_1$

. .

$b^i q_i=b^{i+1}q_{i+1}+b^i r_i$

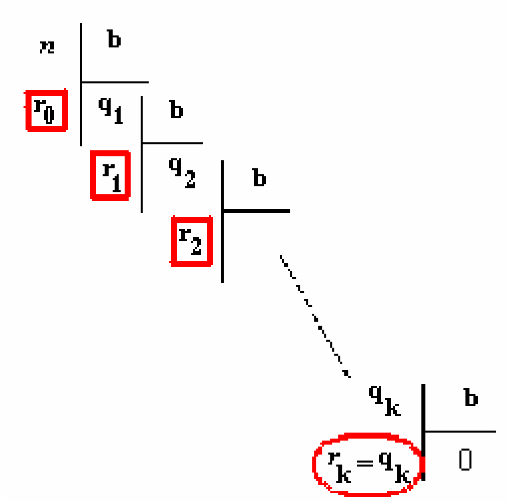
$$b^{k-1}q_{k-1} = b^k q_k + b^{k-1} r_{k-1}$$

$$b^k q_k = b^k r_k$$

بجمع أطراف المتساويات نحصل على $n = \sum_{i=0}^{i=k} b^i r_i$ و $0 \le r_i \prec b$ و $i \in \{1;2;....;k\}$

إذا كان $r_k \neq 0$ فان $n = \overline{r_k r_{k-1}......r_1 r_0}$

طريقة عملية



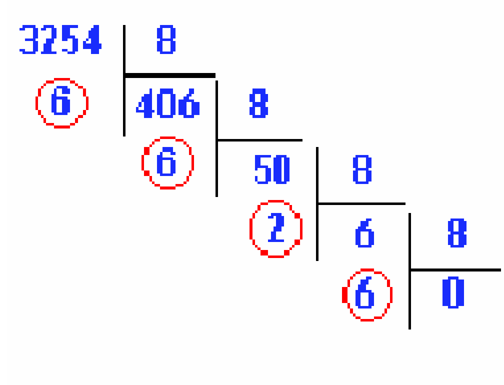
لتحديد تمثيل للعدد n في نظمة العد ذات الأساس b

نحسب البواقي r_i $(0 \le i \le k)$

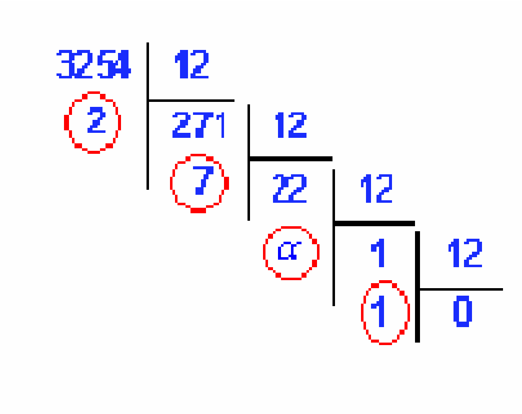
$$n = \overline{r_k r_{k-1}......r_1 r_0}_{(b)}$$

مثال

لنبحث عن تمثيل للعدد 3254 في نظمة العد الثماني ثم نظمة العد الاثنا عشري



$3254 = \overline{6266}_{(8)}$



$3254 = \overline{1\alpha 72}_{(12)}$

4- مقارنة عددين ممثلين في نفس النظمة

خاصية

ليكن x و y ممثلين في نفس نظمة العد بـ $x = \overline{a_n a_{n-1}.....a_0}_{(b)}$ و $y = \overline{c_m c_{m-1}......c_0}_{(b)}$

إذا كان $n \succ m$ فان $x \succ y$

خاصية

ليكن x و y ممثلين في نفس نظمة العد بـ $x = \overline{a_n a_{n-1}.....a_0}_{(b)}$ و $y = \overline{c_n c_{n-1}......c_0}_{(b)}$

إذا كان $c_n = a_n$ $c_{n-1} = a_{n-1}.......c_{i+1} = a_{i+1}$ et $a_i \neq c_i$ فان ترتيب x و y هو نفس ترتيب a_i و c_i

5- تغيير أساس نظمة عد

لتمثيل عدد x في نظمة عد ذات الأساس b نمثله أولا في نظمة العد العشري و نحدد تمثيله في نظمة عد ذات الأساس b

تمرين

هل توجد نظمة العد ذات الأساس b حيث $\overline{xxx} \times \overline{xxx} = \overline{yyyyyy}$

6- مصاديق قابلية القسمة على بعض الأعداد في نظمة العد العشري

ليكن x عدد صحيح طبيعي كتابته في نظمة العدد العشري هي $x=\overline{a_n a_{n-1}.....a_1 a_0}$

$$x\equiv 0\quad [4]\Leftrightarrow 4/\overline{a_1 a_0}$$

$$x\equiv 0\quad [5]\Leftrightarrow a_0=0\quad ou\quad a_1=5$$

$$x\equiv 0\quad [5]\Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}\in\{00;25;50;75\}$$

$$x\equiv 0\quad [3]\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i\equiv 0\quad [3]$$

$$x\equiv 0\quad [9]\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i\equiv 0\quad [9]$$

$$x\equiv 0\quad [11]\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a_i\equiv 0\quad [11]$$

Moustaouli Mohamed

1. تقديم و تعاريف :

- ❖ توجد مجموعة يرمز لها ب $\mathbb{C}$ و تسمى مجموعة الأعداد العقدية و تحقق $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
  و هي تحتوي على عدد نرمز له ب i حيث $i^2 = -1$
- ❖ كل عدد z من $\mathbb{C}$ يكتب على شكل $z = a + ib$ مع $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
- ❖ العدد a يسمى الجزء الحقيقي و نرمز له ب $\Re e(z)$
- ❖ العدد b يسمى الجزء التخيلي و نرمز له ب $\operatorname{Im}(z)$
- ❖ الكتابة $z = a + ib$ مع $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z
- ❖ إذا كان $z = ib$ حيث $b \in \mathbb{R}$ نقول أن z تخيلي صرف و نكتب $z \in i\mathbb{R}$

2. خاصيات :

ليكن $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ لدينا :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$
- $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) = 0 \end{cases}$

العمليات في $\mathbb{C}$

ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- $-z = -a - ib$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$
- جميع خصائص الجداء و الجمع في $\mathbb{R}$ تبقى صالحة في $\mathbb{C}$
- $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

- $(a-ib)^2=a^2-b^2-2abi$
- $(a-ib)(a+ib)=a^2+b^2$

3. مرافق عدد عقدي

تعريف :

مرافق العدد العقدي $z=a+ib$ **مع** $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ **هو العدد العقدي** $\overline{z}=a-ib$

خاصيات المرافق

ليكن z_1 **و** z_2 **عددين عقديين**

- ✓ $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- ✓ $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$
- ✓ $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)}=\frac{1}{\overline{z_1}}$ $(z_1\neq 0)$
- ✓ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- ✓ $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ **حيث** $n\in\mathbb{Z}$ **و** $z\in\mathbb{C}$

نتائج :

- $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$
- $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z=-\overline{z}$

4. معيار عدد عقدي :

معيار العدد العقدي $z=a+ib$ **مع** $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ **هو العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب :** $|z|$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

خاصيات :

ليكن z **و** z' **عددين عقديين**

- ✓ $|z|=\sqrt{z.\overline{z}}$
- ✓ $|z\times z'|=|z|\times|z'|$
- ✓ $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ $(z\neq 0)$

✓ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$

✓ $\left|z^n\right| = |z|^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

✓ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

5. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

أ. عمدة عدد عقدي غير منعدم :

ليكن $z = x + iy$ من $\mathbb{C}^*$ حيث x و y من $\mathbb{R}$

كل عدد حقيقي θ بحيث : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$ يسمى عمدة ل z و نكتب : $\arg(z) = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

أو $\arg(z) \quad \theta \quad 2\pi \quad (k \quad \mathbb{Z})$

ب. خاصيات العمدة:

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين

✓ $\arg\left(\overline{z_1}\right) \equiv -\arg(z_1)[2\pi]$

✓ $\arg(z_1 \times z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$

✓ $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg(z_1)[2\pi]$

✓ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$

✓ $\arg\left(z_1^{\,n}\right) \equiv n\arg(z_1)[2\pi]$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

6. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف :

كل عدد عقدي z غير منعدم يكتب على شكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
حيث $|z| = r$ و $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

خاصيات الشكل المثلثي :

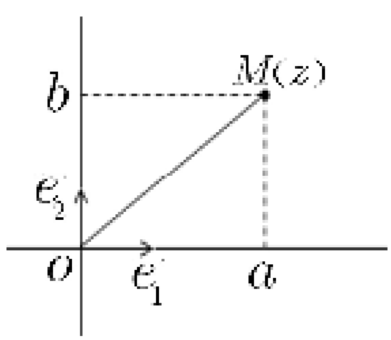
- $\overline{r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))} = r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
- $r(\cos\theta+i\sin\theta)\times r'(\cos\theta'+i\sin\theta') = rr'(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))$
- $\dfrac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
- $\dfrac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r'(\cos\theta'+i\sin\theta')} = \dfrac{r}{r'}(\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta'))$
- $(r(\cos\theta+i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$ حيث $n\in\mathbb{Z}$ (علاقة موافر)

7. تأويلات هندسية للأعداد العقدية :

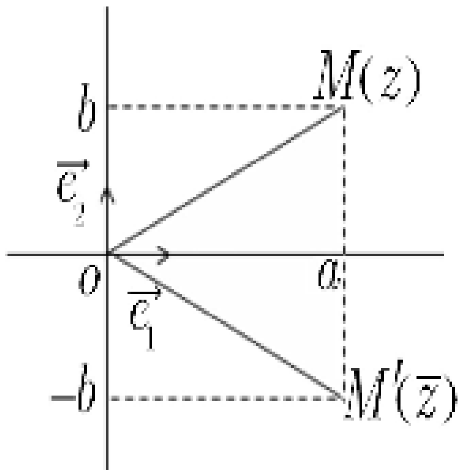
تعاريف:

في المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O,e_1,e_2)
لتكن النقطة $M(a,b)$

- العدد العقدي $z = a+ib$ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ يسمى لحق النقطة M
- النقطة $M(a,b)$ تسمى صورة العدد $z = a+ib$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

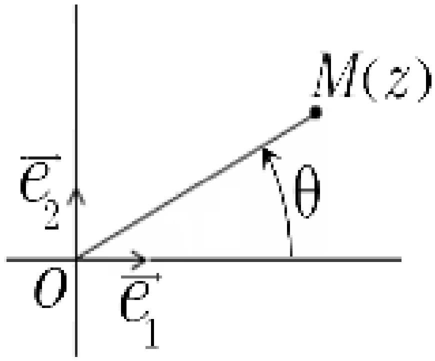


- مرافق $z=a+ib$ هو $\bar{z}=a-ib$

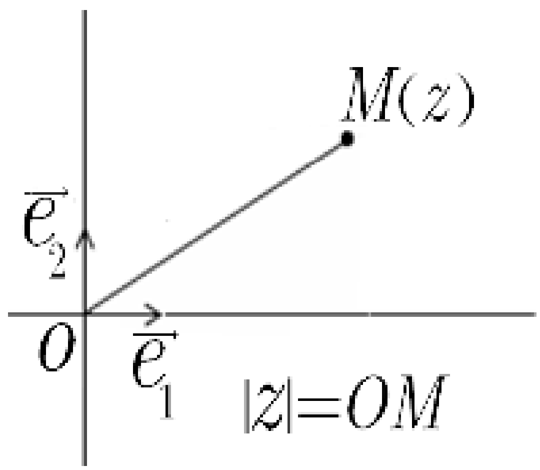


- لدينا كذلك $z=a+ib$ هو لحق المتجهة $U(a,b)$
- المستوى (P) يسمى المستوى العقدي
- $(O,\vec{e_1})$ يسمى المحور الحقيقي
- $(O,\vec{e_2})$ يسمى المحور التخيلي
- $\overrightarrow{OM}=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}$ و نكتب $z_M=a+ib$ أو $aff(M)=a+ib$

❖ ليكن $z=a+ib$ لحق النقطة M من المستوى العقدي لدينا : $\arg(z)\equiv(\overline{e_1,OM})[2\pi]$



❖ المسافة OM : $OM = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$



المسافة AB :
لتكن A و B نقطتان لحقاهما على التوالي z_A و z_B
لدينا : $AB = |z_B - z_A|$

<u>خاصيات :</u>

لتكن A و B نقطتان لحقاهما على التوالي z_A و z_B

و u v متجهتان من المستوى العقدي (P) :

- لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو : $z_B - z_A$
- لحق المتجهة $\vec{u}+\vec{v}$ هو : $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$
- لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ هو : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$
- M نقطة لدينا :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow z_M = z_A + z_B$$
$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow z_M = \alpha . z_A$$

- لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$ نقط مختلفة مثنىمثنى
  - A و B و C مستقيمية $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
  - $(AB)//(DC) \Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

    $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi]$
  - $(AB)\perp(DC) \Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$

    $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
  - النقط A و B و C و D متداورة $\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \dfrac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

قياس الزوايا :

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$

- $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \arg(z_A)[2\pi]$ حيث $O \neq A$
- $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$ حيث $A \neq B$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$ حيث $A \neq B$ و $A \neq C$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

  حيث $A \neq B$ و $C \neq D$

8. الشكل الأسي لعدد عقدي :

تعريف :

كل عدد عقدي غير منعدم يكتب على شكله الأسي ب: $z = re^{i\theta}$
حيث $|z| = r$ **و** $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

خاصيات :

- ✓ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- ✓ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- ✓ $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- ✓ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- ✓ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- ✓ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

صيغ أولير

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

9. الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم

❖ ليكن Z من $\mathbb{C}$ و n من $\mathbb{N}^* -$

نسمي الجذر النوني للعدد Z أو الجذر من الرتبة n للعدد Z كل عدد عقدي z يحقق $z^n = Z$

- ليكن $Z = re^{i\theta}$ $(r>0)$

العدد Z يقبل n جذر نوني و هذه الجذور النونية تكتب على شكل : $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ بحيث $k \in \{0,1,2,........,\mathrm{n}-1\}$

- صور الجذور النونية للعدد Z تكون مضلعا منتظما ذو n ضلع محاطا بالدائرة التي مركزها O وشعاعها $\sqrt[n]{r}$
- الجذور النونية للعدد 1 هي الأعداد : $w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$ بحيث $k \in \{0,1,2,........,\mathrm{n}-1\}$ و تسمى الجذور من الرتبة n للوحدة
- ليكن Z من $\mathbb{C}^*$ و a أحد الجذور النونية للعدد Z

نحصل على الجذور النونية للعدد Z بضرب a في الجذور النونية للوحدة

10. الجذور المربعة لعدد عقدي غير منعدم

أ. الطريقة المثلثية :

ليكن $Z = re^{i\theta}$ $(r>0)$

الجذران المربعان للعدد Z هما : $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$

ب. الطريقة الجبرية :

1) إذا كان $Z \in \mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{Z}$ و $-\sqrt{Z}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

2) إذا كان $Z \in \mathbb{R}_-^*$: $i\sqrt{-Z}$ و $-i\sqrt{-Z}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

3) إذا كان $Z \in i\mathbb{R}_+^*$ $\left(b \in \mathbb{R}_+^*\right)$ $Z = ib$: $(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

4) إذا كان $Z \in i\mathbb{R}_-^*$ $\left(b \in \mathbb{R}_-^*\right)$ $Z = ib$: $(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

5) إذا كان $Z = a+ib$ ($a \neq 0$ و $b \neq 0$) :

- إذا كان $b>0$:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

و $$-\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

❖ <u>إذا كان</u> $b<0$:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

و $$-\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

هما الجذران المربعان للعدد Z

11. المعادلات من الدرجة الثانية :

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0 \quad (a\neq 0)$

حل المعادلة $az^2+bz+c=0$

$$\downarrow$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

- **إذا كان** $\Delta=0$:

فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : $z=\frac{-b}{2a}$

- إذا كان $\Delta\neq 0$:

فإن Δ يقبل جذرين مربعين هما μ و $-\mu$ و يكون للمعادلة حلين هما :

$z=\frac{-b+\mu}{2a}$ أو $z=\frac{b-}{2a}$

<u>ملاحظة :</u> **إذا كان** z_1 و z_2 هما حلي المعادلة $az^2+bz+c=0$ فإن :

$$\begin{cases} z_1+z_2=\dfrac{-b}{a} \\ z_1\times z_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

12. التحويلات الإعتيادية :

نعتبر تحويلا في المستوى يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$

- ❖ الكتابة العقدية للإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ هي : $z'=z+z_{\vec{u}}$
- ❖ الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و نسبته k هي : $z'-\omega=k(z-\omega)$
- ❖ الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته θ هي : $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$

نعتبر التطبيق : $\begin{array}{cccc} f: & P & \mapsto & P \\ & M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array}$ حيث $z'=az+b$

- ➢ إذاكان $a=1$:

فإن f إزاحة متجهتها $\vec{u}$ ذات اللحق b

- ➢ إذا كان $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$:

فإن f تحاكي مركزه Ω لحقه $\dfrac{b}{1-a}$ و نسبته a

(Ω هي النقطة الصامدة بالتحويل f أي $f(\Omega)=\Omega$ ويتم تحديد لحقها بحل المعادلة $z=az+b$)

- ➢ إذاكان $a\in\mathbb{C}^*-\{1\}$ حيث $|a|=1$:

فإن f دوران مركزه Ω لحقه $\dfrac{b}{1-a}$ و زاويته $\arg(a)$

(Ω هي النقطة الصامدة بالتحويل f أي $f(\Omega)=\Omega$ ويتم تحديد لحقها بحل المعادلة $z=az+b$)

إذاكان $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ حيث $|a| \neq 1$:

فإن $f = h \circ r$

حيث : h هو التحاكي الذي مركزه Ω لحقه $\frac{b}{1-a}$ و نسبته $|a|$

و r هو الدوران مركزه Ω لحقه $\frac{b}{1-a}$ و زاويته $\arg(a)$

ملاحظات :

- إذا كان r دوران مركزه Ω و زاويته θ فإن r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r له نفس المركز و زاويته $-\theta$
- التحاكي الذي نسبته -1 هو تماثل مركزي

الأعداد العقدية

مبرهنة

توجد مجموعة $\mathbb{C}$ تتضمن $\mathbb{R}$ و تحقق:

$i)$ يحتوي $\mathbb{C}$ على عنصر غير حقيقي i و يحقق $i^2=-1$

$ii)$ كل عنصر من $\mathbb{C}$ يكتب بكيفية و حيدة على الشكل: $a+ib$ بحيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

$iii)$ المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ و لهما نفس

الخاصيات

خاصية ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ $\quad$ $a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow a=a'$ و $b=b'$

ليكن عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

العدد a يسمى الجزء الحقيقي نكتب $\mathrm{Re}(z)=a$، و العدد b يسمى الجزء التخيلي نكتب $\mathrm{Im}(z)=b$

خاصية $(\mathbb{C};+;\times)$ جسم تبادلي

1- التمثيل الهندسي لعدد عقدي

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

كل نقطة $M(a;b)\in(P)$ هي صورة عدد عقدي وحيد $z=a+ib$ وهذا الأخير يسمى لحق M ونكتب M(z)

أو $z=aff(M)$

العدد العقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ يسمى أيضا لحق المتجهة $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ نكتب $z=aff(\vec{u})$

* لحق $\overrightarrow{AB}$ هو z_B-z_A حيث $A(z_A)$ و $B(z_B)$

* تكون النقط المختلفة $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in\mathbb{R}$

* التطبيق $M(z)\to M'(z+a)$ من المستوى (P) نحو المستوى (P) هو الازاحة التي متجهتها

$\vec{u}$ حيث $aff(\vec{u})=a$

2- المرافق و المعيار

ليكن عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

* العدد العقدي $z=a-ib$ يسمى مرافق العدد العقدي $z=a+ib$ ونرمز له بـ $\bar{z}=a-ib$.

* العدد الحقيقي $\sqrt{z\bar{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z=a+ib$. نرمز له بـ $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

لتكن $(z;z')\in\mathbb{C}^2$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{Z}^*$

* $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$; $z-\bar{z}=2\operatorname{Im}(z)i$

* $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$ $\quad$ $\overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z}'$ $\quad$ $\overline{z^n}=\bar{z}^n$ $\quad$ $\overline{\alpha z}=\alpha.\bar{z}$ $\quad$ $z'\neq 0$ $\quad$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

* $\left|\sum_{i=1}^{i=m} z_i\right|\leq\sum_{i=1}^{i=m}|z_i|$ $\quad$ $m\in\mathbb{N}^*$

* $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=z$

* $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=-z$

* $|z.z'|=|z||z'|$ $\quad$ $|z^n|=|z|^n$ $\quad$ $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ $\quad$ $z'\neq 0$

* $\|\overrightarrow{AB}\|=AB=|z_B-z_A|$

3- الشكل المثلثي لعدد عقدي والعمدة

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

ليكن $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و النقطة M صورته , وليكن α قياسا

للزاوية $\left(\widehat{\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}}\right)$.

العدد α يسمى عمدة للعدد العقدي z و نكتب $[2\pi]$ $\quad$ $\arg z\equiv\alpha$.

-* ليكن $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و r عددا حقيقيا موجبا قطعا و α

عددا حقيقيا $\quad$ نضع $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$

ومنه $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ حيث $\sin\alpha=\frac{b}{r}$; $\cos\alpha=\frac{a}{r}$ إذن $[2\pi]$ $\quad$ $\arg z\equiv\alpha$

الكتابة $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z و نكتب $z=[r,\alpha]$

خاصيات

*- اذا كان $z=[r,\alpha]$ و $z'=[r',\alpha']$ فان + $zz'=[rr',\alpha+\alpha']$ و $\frac{z}{z'}=\left[\frac{r}{r'},\alpha-\alpha'\right]$

+ $\bar{z}=[r,-\alpha]$ و $-z=[r,\alpha+\pi]$

+ $z^n=[r^n;n\alpha]$ $\frac{1}{z}=\left[\frac{1}{r};-\alpha\right]$

صيغة موافر $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ $\forall n\in\mathbb{Z}^*$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

إذا كان $A(z_A)\neq B(z_B)$ و $D(z_D)\neq C(z_C)$ فان $\arg(z_B-z_A)=\left(\overline{\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}}\right)$ $[2\pi]$

و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ $[2\pi]$

4- الكتابة الاسية

$z=[r,\alpha]=re^{i\alpha}$ $\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$ $\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$

5- الجذور النونية لعدد عقدى غير منعدم

الجذور النونية $a=[r,\alpha]$ (جذور المعادلة $z^n=a$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$)هي

$z_k=\left[\sqrt[n]{r};\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]$ $k\in\{0;1;2........,n-1\}$

الجذور النونية للوحدة أي الجذور النونية لـ 1 هي $z_k=\left[1;\frac{2k\pi}{n}\right]$ $k\in\{0;1;2;..........;n-1\}$

6- المعادلات من الدرجة الثانية

لتكن a و b و c أعدادا عقدية بحيث a غير منعدم .

المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلين في $\mathbb{C}$ هما $z_1=\frac{-b+d}{2a}$; $z_2=\frac{-b-d}{2a}$ حيث d جدر

مربع للميز b^2-4ac .

7- تطبيقات هندسة

خاصية

ليكن z_A و z_B عددين غير منعدمين صورتهما على التوالي A و B .

النقطة $M(z_A\times z_B)$ تحقق المثلث OMB منشابه مباشرة مع المثلث OAI حيث $OB=\frac{BM}{IA}=\frac{OM}{OA}$

خاصية

كل دوران مركزه Ω ذات اللحق ω و قياس زاويته θ هو التطبيق في المستوى العقدي الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بنقطة $M'(z')$ حيث $z' = ze^{i\theta} + \omega(1 - e^{i\theta})$

خاصية

ليكن a و b عددين عقدين بحيث $a \neq 1$; $|a| = 1$

التطبيق F في المستوى الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بنقطة $M'(z')$ حيث $z' = az + b$ هو الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ و زاويته $\arg(a)$

الشكل الجبري

- $\mathbf{i}^2=-1$ ، $\mathbf{i}\notin \mathbf{IR}$
- $z\in C$ يعني $z=a+\mathbf{i}b$ حيث $(a,b)\in IR^2$ و يسمى الشكل الجبري
- $z\in \mathbf{i}IR$ يعني $z=\mathbf{i}b$ حيث $b\in IR$ و يسمى عددا تخيليا صرفا
- نكتب: $\operatorname{Re}(z)=a$ و $\operatorname{Im}(z)=b$

المرافق

a و b هو عددان حقيقيان

مرافق: $z=a+\mathbf{i}b$ هو $\overline{z}=a-\mathbf{i}b$

المعيار

a و b هو عددان حقيقيان

معيار $z=a+\mathbf{i}b$ هو $\boxed{|z|=\sqrt{a^2+b^2}}$

أمثلة: $|3+4\mathbf{i}|=\sqrt{9+16}=5$ ، $\overline{3+4\mathbf{i}}=3-4\mathbf{i}$ ، $\overline{7\mathbf{i}-8}=-8-7\mathbf{i}$

متساويات هامة

$\boxed{z\overline{z}=|z|^2}$ ، $\boxed{|z|=1\Leftrightarrow z\overline{z}=1\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{1}{z}}$ ، $\boxed{\mathbf{i}^3=-\mathbf{i}}$ ، $\boxed{\mathbf{i}^4=1}$ ، $\boxed{-\mathbf{i}=\frac{1}{2}(1-\mathbf{i})^2}$ ، $\boxed{\mathbf{i}=\frac{1}{2}(1+\mathbf{i})^2}$

خاصيات

لكل: $(a,b)\in IR^2$ و $(a',b')\in IR^2$:

$\boxed{a+\mathbf{i}b=a'+\mathbf{i}b' \Leftrightarrow \begin{cases}a=a'\\ b=b'\end{cases}}$ ، $\boxed{\begin{array}{l} a+\mathbf{i}b\in IR \Leftrightarrow b=0\\ z\in IR \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)=0\end{array}}$ ، $\boxed{\begin{array}{l} a+\mathbf{i}b\in \mathbf{i}IR \Leftrightarrow a=0\\ z\in \mathbf{i}IR \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z)=0\end{array}}$

$\boxed{z\in IR \Leftrightarrow \overline{z}=z}$ ، $\boxed{z\in \mathbf{i}IR \Leftrightarrow \overline{z}=-z}$

لكل: $(z,z')\in C^2$

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ ، $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$ ، $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$ ، $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ ، $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$

$|z||z'|=|zz'|$ ، $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ ، $|z^n|=|z|^n$ ، $|z+z'|\le|z|+|z'|$

حالات خاصة لكل $a\in IR$

$\overline{a}=a$ ، $\overline{\mathbf{i}}=-\mathbf{i}$ ، $\overline{az}=a\overline{z}$ ، $\overline{\mathbf{i}z}=-\mathbf{i}\overline{z}$ ، $\overline{z+az'}=\overline{z}+a\overline{z'}$ ، $\overline{z+\mathbf{i}z'}=\overline{z}-\mathbf{i}\overline{z'}$

انتبه: $z+\mathbf{i}z'$ و $z-\mathbf{i}z'$ ليسا مترافقين، لأن z و z' ليسا بالضرورة حقيقيان.

الثانية ع ر	قوانين التركيب الداخلي الزمرة ـ الحلقة ـ الجسم	ح.بوعيون

I) تعريف وأمثلة:

1- تعريف:

لتكن E مجموعة غير فارغة. نسمي قانون تركيب داخلي في E كل تطبيق f من E نحو E

$$f : E\times E \to E : (a,b) \to a*b$$

ترميز: العنصر $f(a,b)$ يسمى مركب العنصرين (a,b) ونرمز له عادة ب $a*b$; aTb ; $a\perp b$

إذا كان $*$ قانون تركيب داخلي في E فإننا نكتب $(E,*)$ ونقرأ المجموعة E مزودة بالقانون $*$.

ملاحظة: ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E:

$$\left(\forall(a,b,c,d)\in E^4\right) \quad \begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \Rightarrow a*c=b*d$$

لأن:

$$\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \Rightarrow (a,c)=(b,d) \Rightarrow f(a,c)=f(b,d)$$

$$\Rightarrow a*c=b*d$$

*) لدينا:

$$\left(\forall(a,b,c)\in E^3\right)\begin{cases} a=b \Rightarrow a*c=b*c \\ a=b \Rightarrow c*a=c*b \end{cases}$$

2- أمثلة:

1- الجمع والضرب قانونا تركيب داخلي في $\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$

2- $\otimes$ الضرب قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}^+$ لكنه ليس كذلك في $\mathbb{R}^-$. لأن إذا كان $(a,b)\in\mathbb{R}_-^2$ فإن: $(a\times b)\in\mathbb{R}^+$ أي $(a\times b)\notin\mathbb{R}_-$.

3- $\oplus$ جمع متجهتين قانون تركيب داخلي في كل من V_2 و V_3.

4- الجداء السلمي ليس قانون تركيب داخلي في V_2 و V_3.

5- الجداء المتجهي قانون تركيب داخلي في V_3.

6- لتكن E مجموعة غير فارغة و $P(E)$ مجموعة أجزاء E. الاتحاد والتقاطع والفرق التماثلي قوانين تركيب داخلية في $P(E)$.

7- ليكن X جزء من $\mathbb{R}$. ليكن $F(X,\mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة من X نحو $\mathbb{R}$. الجمع والضرب المعرفين على $F(X,\mathbb{R})$ كما يلي:

$$(\forall x\in X) \qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f.g)(x)=f(x).g(x)$$

قوانين تركيب داخلية في $F(X,\mathbb{R})$.

8- لتكن $A(E,E)$ مجموعة التطبيقات من E نحو E. E مجموعة غير فارغة.

التركيب o المعرف على $A(E,E)$ ب:

$$(\forall x\in E) \qquad (fog)(x)=f(g(x))$$

قانون تركيب داخلي في $A(E,E)$.

9- ليكن T مجموعة إزاحة المستوى. و H_0 مجموعة التحاكيات التي مركزها O. و R_0 مجموعة الدورانات التي لها نفس المركز O. التركيب "o" قانون تركيب داخلي في كل من T و H_0 و R_0.

لأن:

$$T_{\vec u}oT_{\vec v}=T_{\vec u+\vec v}$$
$$h_{(O,R)}oh'_{(O,R')}=h_{(O,RR')}$$
$$R_{(o,\alpha)}oR_{(o,\beta)}=R_{(o,\alpha+\beta)}$$

10- القانون $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\ a*b=a^4+a^3-3a^2b$$

قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$.

11- نعتبر المجموعة $E=\{1,2,3,6\}$

لنبين أن المضاعف المشترك الأصغر "$\vee$" قانون تركيب داخلي في E.

ولهذا نضع الجدول التالي الذي يسمى جدول القانون في E أو جدول (E,v).

$\vee$	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

نلاحظ أن مركب أي عنصر من E هو عنصر من E. وبالتالي القانون "$\vee$" قانون تركيب داخلي في E.

3- جزء مستقر بالنسبة لقانون تركيب داخلي:

a) تعريف:

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$. وليكن S جزء من E $(S\subset E)$.

نقول إن S جزء مستقر من $(E,*)$ إذا وفقط إذا كان:

$$\left(\forall(x,y)\in S^2\right) \quad x*y\in S$$

b) أمثلة:

1- $\mathbb{R}^+$ جزء مستقر من $(\mathbb{R},\times)$

2- $\mathbb{R}_-$ ليس جزءا مستقرا من $(\mathbb{R},\times)$

3- نعتبر المجموعة: $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$

$$\left(\forall(z,z')\in U^2\right):|z.z'|=|z|.|z'|=1.1=1$$

إذن: $\left(\forall(z,z')\in U^2\right):zz'\in U$

إذن U جزء مستقر من $(\mathbb{C},\times)$

ملاحظة:

إذا كان S جزءا مستقرا من $(E,*)$ فإن $*$ قانون تركيب داخلي في S.

II) خاصيات قوانين التركيب الداخلي:

1- التجميعية و التبادلية:

a) تعريف:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E.

1) نقول إن القانون $*$ تجميعي في E إذا وفقط إذا كان

$$\left(\forall (a,b,c)\in E^3\right)\ a*(b*c)=(a*b)*c$$

2) نقول إن القانون $*$ تبادلي في E إذا وفقط إذا كان

$$\left(\forall (a,b)\in E^2\right)\quad a*b=b*a$$

ملاحظة:

إذا كان القانون $*$ تجميعي فإن:

$$a*(b*c)=a*b*c$$

b) أمثلة:

القوانين (1)، (3)، (6)، (7) و (9) التي رأيناها في أمثلة قوانين التركيب الداخلية كلها تجميعية وتبادلية (الفقرة I).

. لنبين على (7) و (9) :

لنبين أن الجمع تجميعي في $F(X,\mathbb{R})$:

ليكن f وg وh من $F(X,\mathbb{R})$. لنبين أن:

$$f+(g+h)=(f+g)+h$$

يعني: $(f+(g+h))(x)=((f+g)+h)(x)$

لدينا :

$$\begin{aligned}(\forall x\in X)\left(f+(g+h)\right)(x)&=f(x)+(g+h)(x)\\&=f(x)+g(x)+h(x)\\&=\left(f(x)+g(x)\right)+h(x)\\&=(f+g)(x)+h(x)\\&=\left((f+g)+h\right)(x)\end{aligned}$$

(لأن الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$).

إذن $f+(g+h)=(f+g)+h$ ومنه الجمع تجميعي في $F(X,\mathbb{R})$.

لنبين أن o تجميعي في T

نعتبر $t_{\vec u}$ و $t_{\vec v}$ و $t_{\vec w}$ من T لنبين أن:

$$t_{\vec u}o\left(t_{\vec v}ot_{\vec w}\right)=\left(t_{\vec u}ot_{\vec v}\right)ot_{\vec w}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}t_{\vec u}o\left(t_{\vec v}ot_{\vec w}\right)&=t_{\vec u}ot_{\vec v+\vec w}\\&=t_{\vec u+(\vec v+\vec w)}=t_{(\vec u+\vec v)+\vec w}=t_{\vec u+\vec v}ot_{\vec w}\\&=\left(t_{\vec u}ot_{\vec v}\right)ot_{\vec w}\end{aligned}$$

(لأن الجمع تجميعي في V_3).

إذن:

$$\left(\forall (t_{\vec u},t_{\vec v},t_{\vec w})\in \mathrm{T}^3\right);t_{\vec u}o\left(t_{\vec v}ot_{\vec w}\right)=\left(t_{\vec u}ot_{\vec v}\right)ot_{\vec w}$$

إذن o تجميعي في T.

ملاحظة:

. الجداء المتجهي ليس تجميعيا و لا تبادليا في V_3

. ليكن $(\vec i,\vec j,\vec k)$ معلم م.م مباشر.

← لدينا $\vec i\wedge\vec j=-\vec j\wedge\vec i$ إذن "$\wedge$" ليس تبادليا.

← لدينا $(\vec i\wedge\vec j)\wedge\vec j=\vec k\wedge\vec j=-\vec i$

و $\vec i\wedge(\vec j\wedge\vec j)=\vec i\wedge\vec 0=\vec 0$

إذن $(\vec i\wedge\vec j)\wedge\vec j\neq\vec i\wedge(\vec j\wedge\vec j)$

ومنه "$\wedge$" (الجداء المتجهي) ليس تجميعيا في V_3.

تمرين تطبيقي:

نعتبر القانون $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$x*y=x+y+xy$$

ادرس تجميعية وتبادلية القانون $*$.

. التبادلية:

لدينا: $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ x*y=x+y+xy$

$$=y+x+yx=y*x$$

إذن $x*y=y*x$ ومنه $*$ تبادلي.

. التجميعية:

ليكن x وy وz من $\mathbb{R}$ لنتحقق هل:

$$(x*y)*z=x*(y*z)$$

لدينا:

$$\begin{aligned}(x*y)*z&=(x+y+xy)*z\\&=x+y+xy+z+(x+y+xy)z\\&=x+y+xy+z+xz+yz+xyz\quad(1)\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}x*(y*z)&=x*(y+z+yz)\\&=x+y+z+yz+x(y+z+yz)\\&=x+y+z+yz+xy+xz+xyz\quad(2)\end{aligned}$$

وبما أن (2) و (1) فإن $*$ تجميعي:

$$\left(\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right)\ (x*y)*z=x*(y*z)$$

c) تجميعية مركب تطبيقي:

خاصية:

نعتبر التطبيقات من:

$$E\to F\to G\to H$$

لدينا: $ho(gof)=(hog)of$

هذا لا يعني أن o تجميعي.

– لنبين أن: $ho(gof)=(hog)of$

يعني:

$$(\forall x\in E)\ \left(ho(gof)\right)(x)=\left((hog)of\right)(x)$$

– ليكن $x\in E$

نضع $y=f(x)$ و $z=g(y)$ و $h(z)=t$

لدينا:

$$\begin{aligned}\left((hog)of\right)(x)&=(hog)\left(f(x)\right)=(hog)(y)\\&=h\left(g(y)\right)=h(z)=t\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}\left(ho(gof)\right)(x)&=h\left((gof)(x)\right)\\&=h\left(g\left(f(x)\right)\right)=h\left(g(y)\right)\\&=h(z)=t\end{aligned}$$

إذن:

$$(\forall x\in E)\left((hog)of\right)(x)=\left(ho(gof)\right)(x)$$

ومنه: $(hog)of=ho(gof)$

حالة خاصة:

ليكن $A(E,E)$ مجموعة التطبيقات من E نحو E.
لدينا "o" قانون تجميعي غير تبادلي في $A(E,E)$.

2- العنصر المحايد:

a) تعريف:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E و $e\in E$.
نقول إن e عنصر محايد في E بالنسبة للقانون $*$ أو عنصر محايد في $(E,*)$ إذا وفقط إذاكان:

$$(\forall x\in E)\ e*x=x\ \ et\ \ x*e=x$$

ملاحظة:

إذا كان القانون $*$ تبادلي فإن e عنصر محايد إذا وفقط إذا كان: $(\forall x\in E)\ \ x*e=x$

b) أمثلة:

← العدد 0 هو العنصر المحايد في كل من $(\mathbb{C},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Z},+),(\mathbb{N},+)$

← العدد 1 هو العنصر المحايد في كل من $(\mathbb{C},\times),(\mathbb{R},\times),(\mathbb{Q},\times),(\mathbb{Z},\times),(\mathbb{N},\times)$

← $\vec{0}$ هو العنصر المحايد في كل من: $(V_3,+),(V_2,+)$

← $\varnothing$ هو العنصر المحايد في $(P(E),\cup)$

← E هو العنصر المحايد في $(P(E),\cap)$

← $\varnothing$ هو العنصر المحايد في $(P(E),\Delta)$

← الدالة $\theta:x\to 0$ هو العنصر المحايد في $(F(X,\mathbb{R}),+)$

← الدالة $f:x\to 1$ هو العنصر المحايد في $(F(X,\mathbb{R}),\times)$

← التطبيق المطابق $Id_E:x\to x$ عنصر محايد في $(A(E,E),o)$ $\ (foId_E=Id_Eof=f)$

ملاحظة:

نعتبر القانون $*$ المعرف على $\mathbb{N}^*$ بما يلي:

$$(\forall(a,b)\in\mathbb{N}^{*2})\ \ a*b=a^b$$

لدينا: $(\forall a\in\mathbb{N}^*)a*1=a^1=a$ (1)
ولدينا: $1*a=1^a=1$
إذن 1 ليس عنصر محايدا.
وبما أنه يحقق (1) نقول إن 1 محايد على اليمين.

تعريف:

← نقول إن e عنصر محايد على اليمين في $(E,*)$ إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in E)\ x*e=x$

← نقول إن e عنصر محايد على اليسار في $(E,*)$ إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in E)\ e*x=x$

← يكون e محايدا إذا وفقط إذا كان محايد على اليمين وعلى اليسار.

c) وحدانية العنصر المحايد:

خاصية:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E. إذا كان للقانون $*$ عنصرا محايد فإنه وحيد.

برهان:

نفترض أن $*$ يقبل عنصرين محايدين e و e'
- لدينا e عنصر محايد و $e'\in E$ إذن: $e*e'=e'$

ولدينا e' عنصر محايد و $e\in E$ إذن: $e*e'=e$
إذن $e'=e$
ومنه العنصر المحايد وحيد. (إذا كان موجودا).

تمارين تطبيقي:

تمرين (1):

نعتبر $*$ القانون المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)x*y=xy-4x-4y+20$$

- هل للقانون $*$ عنصر محايد؟

. لنبحث عن e من $\mathbb{R}$ بحيث: $(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x*e=x$
ونلاحظ أن $*$تبادلي. إذن يكفي أن نبحث عن e بحيث:

$$(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x$$

لدينا:

$$(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x\ \Leftrightarrow\ (\forall x\in\mathbb{R})ex-4e-4x+20-x=0$$
$$\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R})x(e-5)-4e+20=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}e-5=0\\20-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e=5\\e=5\end{cases}$$

إذن $e=5$ هو العنصر المحايد للقانون $*$.

تمرين (2):

نعتبر القانون $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ ب:

$$(\forall x,y\in\mathbb{R})x*y=x+4y-1$$

هل للقانون $*$ عنصر محايد؟

. لنبحث عن e من $\mathbb{R}$ بحيث $(\forall x\in\mathbb{R})x*e=e*x=x$

يعني: $(\forall x\in\mathbb{R})x*e=x\ \ et\ \ e*x=x$

- لدينا:

$$(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R})e+4x-1=x$$
$$\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R})e+3x-1=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}3=0\\e-1=0\end{cases}$$

وهذا مستحيل.
إذن $*$ لا يقبل عنصر محايدا في $\mathbb{R}$.

3- العنصر المماثل:

a) تعريف:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E. نفترض أن $*$ يقبل عنصرا محايدا e.
نقول إن العنصر x من E يقبل مماثلا بالنسبة ل $*$ إذا وفقط إذا وجد عنصر x' من E بحيث:

$$x*x'=x'*x=e$$

ملاحظة:

إذا كان القانون $*$ تبادلي نكتفي بإحدى المتساويتين.

b) أمثلة:

← في كل من $(\mathbb{C},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Z},+)$ كل عنصر x يقبل مماثلا هو $-x$.

← في $(\mathbb{C}^*,\times);(\mathbb{R}^*,\times);(\mathbb{Q}^*,\times)$ كل عنصر x يقبل مماثلا هو $\frac{1}{x}$.

لأن: $x.\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.x=1$

← ليكن $B(E,E)$ مجموعة التقابلات من E نحو E.

لدينا "o" قانون تركيب داخلي في $B(E,E)$ العنصر المحايد هو التطبيق الطابق Id_E.

كل عنصر f من $B(E,E)$ له مماثل هو تقابله العكسي f^{-1}

لأن: $fof^{-1} = f^{-1}of = Id_E$

c) خاصيات:

خاصية (1):

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E.
نفترض أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا e وتجميعي. إذا كان لعنصر x مماثل x' فإن هذا المماثل وحيد.

برهان:

نفترض أن x يقبل مماثلين x' و x''.

يعني: $x*x' = x'*x = e$

$x*x'' = x''*x = e$

– لدينا:

$x' = x'*e = x'*(x*x'') = (x'*x)*x''$

$= e*x'' = x''$

إذن $x' = x''$.

خاصية (2):

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E.
نفترض أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا e وتجميعي.
إذا كان لعنصرين x و y مماثلان x' و y' فإن: $x*y$ يقبل مماثلا هو $y'*x'$.

يعني: $(x*y)' = y'*x'$.

برهان:

لدينا:

$(x*y)*(y'*x')$

$= x*(y*y')*x' = x*e*x'$

$= (x*e)*x' = x*x' = e$

وبنفس الطريقة نجد: $(y'*x')*(x*y) = e$

استنتاج:

ليكن f و g من $B(E,E)$.

مماثل f هو f^{-1} ومماثل g هو g^{-1}.

مماثل fog هو $g^{-1}of^{-1}$.

ونعلم أن مماثل fog هو $(fog)^{-1}$

إذن: $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

تمرين:

نعتبر القانون $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$x*y = xy - 4x - 4y + 20$
من خلال ما سبق 5 هو العنصر المحايد.
– حدد العناصر التي تقبل مماثلا.

ليكن $x \in \mathbb{R}$

لنتحقق هل x يقبل مماثلا.

لنبحث عن x' بحيث $x*x' = 5$ (القانون تبادلي).

لدينا: $x*x' = 5 \Leftrightarrow xx' - 4x - 4x' + 20 = 5$

$\Leftrightarrow x'(x-4) = 4x - 15$

← إذا كان $x \neq 4$

فإن: $x' = \dfrac{4x-15}{x-4}$ ومنه x يقبل مماثلا هو $\dfrac{4x-15}{x-4}$

← إذا كان $x = 4$

فإن $o = 1$ ومنه 4 لا يقبل مماثلا

إذن مجموعة العناصر التي تقبل مماثلا هي: $\mathbb{R} - \{4\}$

والمماثل هو: $\dfrac{4x-15}{x-4}$.

4– العنصر المنتظم:

a) تعريف:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E. نقول إن عنصرا a من E منتظم إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall(x,y)\in E^2)\begin{cases} a*x = a*y \Rightarrow x = y \\ x*a = y*a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

ملاحظة:

إذا كان القانون $*$ تبادلي فإن أحد الاستلزامين كاف.

b) أمثلة:

← جميع عناصر كل من المجموعات $\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ منتظمة بالنسبة للجمع لأن: $a+x = a+y \Rightarrow x = y$

← في كل من $\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ كل عنصر $a \neq 0$ منتظم بالنسبة للضرب لأن: $ax = ay \Rightarrow x = y$

تمرين:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E، تجميعي.
e العنصر المحايد في $(E,*)$. ليكن $a \in E$.
– بين أنه إذا كان a يقبل مماثلا فإن a منتظم.

نفترض أن a يقبل مماثلا a'

لنبين أن a منتظم أي: $(\forall(x,y)\in E^2)$

$a*x = a*y \Rightarrow x = y$

$x*a = y*a \Rightarrow x = y$

لدينا:

$a*x = a*y \Rightarrow a'*(a*x) = a'*(a*y)$

$\Rightarrow (a'*a)*x = (a'*a)*y$

$\Rightarrow e*x = e*y$

$\Rightarrow x = y$

وبنفس الطريقة نبين أن: $x*a = y*a \Rightarrow x = y$

إذن a منتظم.

III) التشاكل:

1– تعريف وأمثلة:

a) تعريف:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E.
و T قانون تركيب داخلي في F.
نسمي تشاكل من $(E,*)$ نحو (F,T) كل تطبيق $f: E \to F$ يحقق ما يلي:
$(\forall(x,y)\in E^2): f(x*y) = f(x)\mathrm{T}f(y)$.

b) أمثلة:

1- نعتبر التطبيق: $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},+)$

$x\to ax$

لنبين أن f تشاكل.

يعني: $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ f(x+y)=f(x)+f(y)$

– لدينا: $f(x+y)=a(x+y)=ax+ay$
$=f(x)+f(y)$

إذن:

$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ f(x+y)=f(x)+f(y)$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(\mathbb{R},+)$.

2- نعتبر $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$

$r\to a^r$ مع $(a\in\mathbb{R}_+^*)$

بين أن f تشاكل من $(\mathbb{Q},+)$ نحو $(\mathbb{R},\times)$

– ليكن r و r' من $\mathbb{Q}$.

لنبين أن: $f(r+r')=f(r)\times f(r')$

لدينا:

$f(r+r')=a^{r+r'}=a^r\times a^{r'}=f(r)\times f(r')$

إذن: $(V(r,r')\in\mathbb{Q}^2)\ f(r+r')=f(r).f(r')$

ومنه f تشاكل من $(\mathbb{Q},+)$ نحو $(\mathbb{R},\times)$.

تمارين تطبيقية:

تمرين 1:

نعرف في $\mathbb{R}^2$ جمع زوجين وجداء زوجين بما يلي:

$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$

$(x,y).(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$

ونعتبر التطبيق $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$

$z=a+ib\to(a,b)$

بين أن f تشاكل من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(\mathbb{R}^2,+)$

بين أن f تشاكل من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathbb{R}^2,\times)$

← لنبين أن f تشاكل من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(\mathbb{R}^2,+)$.

ليكن $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$

لنبين أن: $f(z+z')=f(z)+f(z')$

لدينا:

$z+z'=(a+ib)+(a'+ib')$
$=(a+a')+i(b+b')$

$f(z+z')=(a+a',b+b')$

إذن: $=(a,b)+(a',b')=f(z)+f(z')$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(\mathbb{R}^2,+)$.

← لنبين أن f تشاكل من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(\mathbb{R}^2,+)$.

ليكن $z=a+ib$ ولنبين أن: $f(z.z')=f(z).f(z')$

$z'=a'+ib'$

لدينا:

$z.z'=(a+ib).(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$

إذن:

$f(z.z')=(aa'-bb',ab'+a'b)$

ولدينا:

$f(z).f(z')=(a,b).(a',b')$
$=(aa'-bb',ab'+a'b)$

إذن $f(z.z')=f(z).f(z')$

ومنه f تشاكل من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathbb{R}^2,\times)$

تمرين 2:

نعتبر المجموعة $A=\{f_{(a,b)}:x\to ax+b\ /\ (a,b)\in IR^2\}$

ونعرف على IR^2 القانون T بمايلي $(a,b)T(a',b')=(aa',ab'+b)$ ونعتبر التطبيق

$\varphi:(A,\circ)\to(IR,T)$

$f_{(a,b)}\to(a,b)$

بين أن φ تشاكل

يكون φ تشاكل من (A,o) نحو $(\mathbb{R}^2,\mathrm{T})$ إذا وفقط إذا كان:

$(\forall(f_{(a,b)},f_{(a',b')})\in A^2):$

$\varphi(f_{(a,b)}of_{(a',b')})=\varphi(f_{(a,b)})\mathrm{T}\varphi(f_{(a',b')})$

لدينا $(\forall x\in\mathbb{R})(f_{(a,b)}of_{(a',b')})(x)=f_{(a,b)}(f_{(a',b')}(x))$
$=f_{(a,b)}(a'x+b')$
$=a(a'x+b')+b$
$=aa'x+ab'+b$

إذن:

$\varphi(f_{(a,b)}of_{(a',b')})=(aa',ab'+b)$
$=(a,b)T(a',b')$
$=\varphi(f_{(a,b)})T\varphi(f_{(a',b')})$

ومنه: φ تشاكل

2- خاصيات:

خاصية 1

ليكن f تشاكل من $(E,*)$ نحو (F,T)
لدينا $f(E)$ جزء مستقر من (F,T).

برهان:

ليكن $f:(E,*)\to(F,\mathrm{T})$ تشاكل.

لنبين أن $f(E)$ مستقر من (F,T)

*) لدينا $f(E)\subset F$

*) ليكن x' و y' من $f(E)$. لنبين أن: $x'\mathrm{T}y'\in f(E)$.

لدينا x' و y' من $f(E)$. إذن يوجد x و y من E بحيث:

$x'=f(x)$ و $y'=f(y)$

إذن:

$x'\mathrm{T}y'=f(x)\mathrm{T}f(y)=f(x*y)$

ولدينا $x*y\in E$

إذن $f(x*y)\in f(E)$ يعني: $x'\mathrm{T}y'\in f(E)$

إذن $f(E)$ مستقر من (F,T).

ملاحظة:

إذا كان f تشاكل من $(E,*)$ نحو (F,T) فإن T قانون تركيب داخلي في $f(E)$.

خاصية (2):

ليكن $f:(E,*)\to(F,\top)$ تشاكلا.

*) إذا كان $*$ تجميعي في E فإن $\top$ تجميعي في $f(E)$.

*) إذا كان $*$ تبادلي في E فإن $\top$ تبادلي في $f(E)$.

*) إذا كان ل $*$ عنصر محايد e في E فإن $\top$ يقبل مماثلا في $(f(E),\top)$ هو $f(x')$ يعني: $(f(x))'=f(x')$.

برهان:

ليكن $f:(E,*)\to(F,\top)$ تشاكلا.

← نفترض أن $*$ تجميعي في E. لنبين أن $\top$ تجميعي في $f(E)$.

ليكن x',y',z' من $f(E)$. لنبين أن $x'\top(y'\top z')=(x'\top y')\top z'$.

لدينا $x',y',z'\in f(E)$. إذن يوجد x,y,z من E بحيث:

$x'=f(x)\,;\,y'=f(y)\,;\,z'=f(z)$

إذن:

$$\begin{aligned}(x'\top y')\top z' &= (f(x)\top f(y))\top f(z)\\ &= f(x*y)\top f(z)\\ &= f[(x*y)*z]\\ &= f[x*(y*z)] = f(x)\top f(y*z)\\ &= f(x)\top(f(y)\top f(z))\end{aligned}$$

إذن: $(x'\top y')\top z'=x'\top(y'\top z')$

ومنه $\top$ تجميعي في (E)

+ بنفس الطريقة نبين أن $\top$ تبادلي في $f(E)$.

+ نفترض أن e عنصر محايد في $(E,*)$. لنبين أن $f(e)$ عنصر محايد في $f(E)$.

ليكن x' من $f(E)$. لنبين أن: $x'\top f(e)=f(e)\top x'=x'$

لدينا $x'\in f(E)$ إذن يوجد x من E بحيث $x'=f(x)$.

بنفس الطريقة نجد: $f(e)\top x'=x'$

إذن $f(e)$ هو العنصر المحايد في $f(E)$.

← نفترض أن x' هو مماثل x في $(E,*)$. لنبين أن $f(x')$ هو مماثل $f(x)$ في $(f(E),\top)$.

يعني: $f(x)\top f(x')=f(x')\top f(x)=f(e)$

لدينا:

$$f(x)\top f(x')=f(x*x')=f(e)$$
$$f(x')\top f(x)=f(x'*x)=f(e)$$

إذن $f(x')$ هو مماثل $f(x)$ في $(f(E),\top)$.

ملاحظة:

1) إذا كان $f:(E,*)\to(F,\top)$ تشاكلا فإن f ينقل خاصيات $*$ في E إلى $\top$ في $f(E)$.

وإذا كان f شمولي فإن $f(E)=F$ وبالتالي f ينقل خاصيات $*$ في E إلى $\top$ في F.

2) نقول إن مجموعتين E وF متشاكلتان إذا وفقط إذا وجد تشاكل من E نحو F.

− ونقول إن E وF متشاكلتان تقابليا إذا وفقط إذا وجد تشاكل تقابلي من E نحو F.

IV) الزمرة: Groupe

1− تعريف:

لتكن G مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي * نقول إن $(G,*)$ زمرة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

← " * " تجميعي في G

← " * " يقبل عنصرا محايدا.

← كل عنصرين G يقبل مماثلا.

ملاحظات:

ليكن $(G,*)$ زمرة.

← إذا كان " * " تبادلي، نقول إن $(G,*)$ زمرة تبادلية أو أبيلية (Abelien).

← إذا كانت G منتهية. نقول إن $(G,*)$ زمرة منتهية.

← يمكن أن نرمز للقانون " * " بالجمع " + " (دون أن يكون هو الجمع المعتاد) وفي هذه الحالة نرمز للعنصر المحايد ب " 0 ". ونرمز لمماثل x ب$-x$.

← يمكن أن نرمز للقانون " * " بالضرب " . " (دون أن يكون هو الضرب الاعتيادي). وفي هذه الحالة نرمز للعنصر المحايد ب 1. ولمماثل x بx^{-1}.

2 − أمثلة:

← كل من $(\mathbb{C},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Z},+)$ زمرة تبادلية.

← كل من $(\mathbb{C}^*,\times),(\mathbb{R}^*,\times),(\mathbb{Q}^*,\times)$ زمر تبادلية.

← كل من $(V_2,+)$ و $(V_3,+)$ زمرة تبادلية.

← $(F(X,\mathbb{R}),+)$ زمرة تبادلية.

← $(B(E,E),o)$ (مجموعة التقابلات)، زمرة غير تبادلية.

← كل من $(R_o,o),(H_o,o),(T,o)$ زمر تبادلية.

← $(P(E),\cap)$ و $(P(E),\cup)$ ليسا زمرتين.

← $(P(E),\Delta)$ زمرة تبادلية.

3− خاصيات

خاصية (1):

لتكن $(G,*)$ زمرة. لدينا ما يلي:

← " * " تجميعي.

← " * " يقبل عنصرا محايدا.

← كل عنصر x من G يقبل مماثلا x' في G.

← كل عنصر a من G منتظم (لأنه يقبل مماثلا).

← $(\forall(a,x,y)\in G^3)\quad a*x=a*y\Leftrightarrow x=y$

$x*a=y*a\Leftrightarrow x=y$

نلخص هذه الخاصية بقولنا: يمكن الاختزال في زمرة وبدون شروط.

خاصية (2):

لتكن $(G,*)$ زمرة. وليكن a وb من G.

كل من المعادلتين: $a*x=b\ (1)$ و $x*a=b\ (2)$ تقبل حلا وحيدا في G.

برهان:

$$(1) \Leftrightarrow a*x=b$$
$$\Leftrightarrow a'*a*x=a'*b$$
$$\Leftrightarrow e*x=a'*b$$
$$\Leftrightarrow x=a'*b$$

إذن (1) تقبل حلا وحيدا في G هو $a'*b$

– بنفس الطريقة نجد أن (2) تقبل حلا وحيدا في G: $b*a'$

استنتاج:

ليكن $(G,*)$ زمرة. وليكن $a\in G$.

نعتبر التطبيق $\begin{array}{l} f:G\to G \\ x\to a*x \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} g:G\to G \\ x\to x*a \end{array}$

التطبيقان f و g تقابلان.

4– زمرة جزئية: Sous - groupe

a) تعريف:

لتكن $(G,*)$ زمرة. و H جزء مستقر من $(G,*)$.

نقول إن $(H,*)$ زمرة جزئية ل $(G,*)$ أو H زمرة جزئية ل G:

إذا وفقط إذا كان $(H,*)$ زمرة.

b) أمثلة:

← $(\mathbb{Q},+)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{R},+)$.

← $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{C}^*,\times)$.

← لتكن $B(P,P)$ مجموعة تقابلات المستوى.

كل من $(R_o,o),(H_o,o),(T,o)$ زمرة جزئية ل $(B(P,P),o)$.

← ليكن $(G,*)$ زمرة عنصرها المحايد e.

لدينا $(\{e\},*)$ زمرة جزئية ل $(G,*)$.

و $(G,*)$ زمرة جزئية ل $(G,*)$.

وكل زمرة جزئية H تخالف هتين الزمرتين تسمى زمرة جزئية فعلية (non trivial)

ملاحظة:

يمكن لزمرة G أن تكون غير تبادلية لكن الزمرة الجزئية تبادلية.

– **مثال:** $(B(P,P),o)$ غير تبادلية.

لكن (T,o) تبادلية.

c) خاصيات:

خاصية (1):

لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها المحايد e ولتكن H زمرة جزئية ل $(G,*)$.

لدينا ما يلي:

← $H\neq\varnothing$

← e هو العنصر المحايد في H.

← إذا كان $x\in H$ و x' مماثل x في G، فإن $x'\in H$.

← $\left(\forall(x,y)\in H^2\right): x*y'\in H$

حيث y' مماثل y في G.

برهان:

*) لدينا $H\neq\varnothing$ لأنها تضم العنصر المحايد.

*) لنبين أن e هو العنصر المحايد في H:

ليكن e' العنصر المحايد في H.

لنبين أن $e=e'$:

ليكن $x\in H$

لدينا e' هو العنصر المحايد في H. إذن: $x*e'=x$ (1)

ولدينا $H\subset G$ إذن $x\in G$. ولدينا e هو العنصر المحايد في G إذن $x*e=x$ (2).

من (1) و (2) نجد: $x*e'=x*e$

إذن: $e'=e$

إذن e هو العنصر المحايد في H.

*) ليكن $x\in H$ و x' مماثل x في G.

لنبين أن x' ينتمي ل H.

ليكن x'' مماثل x في H.

لدينا: $\begin{cases} x*x'=e \\ x*x''=e'=e \end{cases}$ إذن $x*x'=x*x''$

إذن $x'=x''$

ومنه $x'\in H$

*) ليكن x و y من H. و y' مماثل y في G.

لنبين أن $x*y'\in H$.

لدينا $y\in H$. ومن خلال ما سبق $y'\in H$.

إذن: $\begin{cases} x\in H \\ y'\in H \end{cases}$ إذن $x*y'\in H$ لأن H جزء مستقر من G.

خاصية (2):

ليكن $(G,*)$ زمرة. و H جزء من G.

تكون H زمرة جزئية ل $(G,*)$ إذا وفقط إذا كان:

*) $H\neq\varnothing$.

*) $\left(\forall(x,y)\in H^2\right)$ $x*y'\in H$

حيث y' مماثل y في G.

برهان:

*) نفترض أن H زمرة جزئية ل $(G,*)$.

من خلال الخاصية السابقة لدينا:

$H\neq\varnothing$

و $\left(\forall(x,y)\in H^2\right)$ $x*y'\in H$ مع y' مماثل y في G.

*) نفترض أن

$H\neq\varnothing$ و $\left(\forall(x,y)\in H^2\right)$ $x*y'\in H$ $\quad$ (II)

لنبين أن H زمرة جزئية ل $(G,*)$.

1– لدينا $H\neq\varnothing$ إذن يوجد a: $a\in H$.

لدينا $(a,a)\in H^2$

إذن من خلال (II): $a*a'\in H$

يعني: $e\in H$

2– ليكن $x\in H$.

لدينا $(e,x)\in H^2$ إذن: $e*x'\in H$

يعني: $x'\in H$

إذن $x'\in H$:$\left(\forall x\in H\right)$

حيث x' هو مماثل x في G.

3- ليكن x و y من H

من خلال ما سبق نستنتج أن $y'\in H$.

إذن $(x,y')\in H^2$ ومن (II) نجد: $x*(y')'\in H$

يعني: $x*y\in H$

إذن H جزء مستقر.

ومنه القانون * قانون تركيب داخلي في H.

4- لنبين أن $(H,*)$ زمرة:

- * تجميعي في G إذن * تجميعي في H

- $e\in H$ و $(\forall x\in H): e*x=x*e=x$:

إذن e العنصر المحايد في H.

- ليكن $x\in H$.

لدينا $x\in G$ إذن x يقبل مماثل x' في G. يعني: $x*x'=x'*x=e$ ومن خلال ما سبق لدينا $x'\in H$.

إذن x' هو مماثل x في H. وبالتالي $(H,*)$ زمرة جزئية.

ملاحظة:

1- *) إذا رمزنا للقانون " * " ب " + " فإن الخاصية المميزة تصبح:

- $H\neq\emptyset$
- $(\forall(x,y)\in H^2)\, x-y\in H$

*) إذا رمزنا للقانون * ب " $\times$ " فإن الخاصية المميزة تصبح:

- $H\neq\emptyset$
- $(\forall(x,y)\in H^2)\, x.y^{-1}\in H$

2- لتكن $(G,*)$ زمرة و $H\subset G$

تكون $(H,*)$ زمرة جزئية ل $(G,*)$ إذا وفقط إذا كان:

*) $H\neq\emptyset$

*) $(\forall(x,y)\in H^2)\ x+y\in H$

*) $(\forall x\in H): x'\in H$ (x' مماثل x في G).

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

نعتبر المجموعة: $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$

بين أن $(U,\times)$ زمرة تبادلية.

*) لنبين أن $(U,\times)$ زمرة تبادلية:

نعلم أن $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية.

إذن يكفي أن نبين أن $(U,\times)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{C}^*,\times)$.

← لدينا:

$$(\forall z\in U): |z|=1$$

إذن: $z\neq 0$

إذن: $z\in\mathbb{C}^*$

إذن: $U\in\mathbb{C}^*$

← لدينا $U\neq\emptyset$ (لأن $1\in U$).

← ليكن z_1 و z_2 من U. لنبين أن: $z_1\times z_2^{-1}\in U$

لدينا: $|z_1\times z_2^{-1}|=|z_1|\times\left|\frac{1}{z_2}\right|$

$$=|z_1|\times\frac{1}{|z_2|}=1$$

لأن $|z_1|=1$

و $|z_2|=1$

إذن: $z_1\times z_2^{-1}\in U$

وبالتالي فإن U زمرة جزئية ل $(\mathbb{C}^*,\times)$.

ومنه فإن $(U,\times)$ زمرة تبادلية.

تمرين (2):

ليكن $n\in\mathbb{N}$. نعتبر المجموعة:

$$n\mathbb{Z}=\{nk/k\in\mathbb{Z}\}$$

بين أن $(n\mathbb{Z},+)$ زمرة تبادلية.

*) لنبين أن: $(n\mathbb{Z},+)$ زمرة تبادلية.

لدينا $n\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}$. ونعلم أن $(\mathbb{Z},+)$ زمرة تبادلية.

إذن يكفي أن نبين أن $(n\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{Z},+)$:

← لدينا $n\mathbb{Z}\neq\emptyset$ (لأن $0\in n\mathbb{Z}$).

← ليكن x و y من $n\mathbb{Z}$. لنبين أن: $x-y\in n\mathbb{Z}$.

لدينا x و y من $n\mathbb{Z}$ إذن يوجد k_1 و k_2 بحيث:

$x=nk_1$ و $y=nk_2$

إذن:

$$x-y=nk_1-nk_2=n(k_1-k_2)$$
$$=nk_3$$

مع $k_3=k_1-k_2\in\mathbb{Z}$

إذن: $x-y\in n\mathbb{Z}$

ومنه $(\forall(x,y)\in n\mathbb{Z}^2): x-y\in n\mathbb{Z}$

وبالتالي $(n\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{Z},+)$.

إذن $(n\mathbb{Z},+)$ زمرة تبادلية.

تمرين (3):

لتكن $(G,.)$ زمرة عنصرها المحايد e.

ليكن $a\in G$.

نضع: $C_a=\{x\in G/a.x=x.a\}$ (centralisateur de a)

$$Z(G)=\{x\in G/(\forall y\in G): x.y=y.x\}$$
(centre de G)

بين أن C_a و $Z(G)$ زمرتان جزئيتان ل $(G,.)$.

*) لنبين أن: C_a زمرة جزئية ل $(G,.)$:

← لدينا: $a.e=e.a=a$

إذن: $e.a=a.e$ إذن $e\in C_a$

ومنه: $C_a\neq\emptyset$.

← ليكن x و y من C_a. لنبين أن: $x.y^{-1}\in C_a$

يعني: $a.(x.y^{-1})=(x.y^{-1}).a$

لدينا x و y من C_a إذن:

$$\begin{cases} x.a = a.x & (1) \\ y.a = a.y & (2) \end{cases}$$

لدينا من (2): $(y.a)^{-1} = (a.y)^{-1}$

يعني:

$$a^{-1}.y^{-1} = y^{-1}.a^{-1}$$

إذن:

$$\begin{cases} x.a = a.x \\ a^{-1}.y^{-1} = y^{-1}.a^{-1} \end{cases}$$

إذن: $x.a.a^{-1}.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1}$

يعني: $x.e.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1}$

يعني: $x.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1}$

يعني: $x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1}.a^{-1}.a$

يعني: $x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1}.e$

يعني: $x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1}$

إذن: $\left(\forall (x,y) \in C_a^2\right)\ x.y^{-1} \in C_a$

ومنه C_a زمرة جزئية ل $(G,.)$

*) لنبين أن $Z(G)$ زمرة جزئية ل $(G,.)$:

← لدينا: $(\forall y \in G): e.y = y.e = y$

إذن $e \in Z(G)$

← ليكن a و b من $Z(G)$. لنبين أن: $a.b^{-1} \in Z(G)$

يعني: $(\forall y \in G):\ (a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$

ليكن $y \in G$. لنبين أن: $(a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$

– لدينا a و b من $Z(G)$. إذن:

$$\begin{cases} a.y = y.a & (1) \\ b.y = y.b & (2) \end{cases}$$

وبنفس الطريقة السابقة نجد:

$$(a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$$

إذن:

$$(\forall y \in G):\ (a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$$

إذن $a.b^{-1} \in Z(G)$.

ومنه $Z(G)$ زمرة جزئية ل $(G,.)$.

5– تشاكل زمرة:

خاصية:

لتكن $(G,*)$ زمرة. E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي T. و $f:(G,*) \to (E,\mathrm{T})$ تشاكل.

لدينا ما يلي:

*) $(f(G),\mathrm{T})$ زمرة.

*) إذا كانت $(G,*)$ زمرة تبادلية فإن $(f(G),\mathrm{T})$ زمرة تبادلية.

*) إذا كان f تشاكل شمولي، فإن: $f(G) = E$ إذن: (E,T) زمرة.

نقول إن التشاكل يحول زمرة إلى زمرة.

تمرين:

لتكن $(G,.)$ زمرة.

نعتبر التطبيق: $f_a : G \to G$

$$x \to a.x.a^{-1}$$

1) بين أن f_a تشاكل تقابلي من $(G,.)$ إلى $(G,.)$

2) نعتبر المجموعة:

$$F = \{f_a / a \in G\}$$

a) بين أن " o " قانون تركيب داخلي في F.

b) نعتبر التطبيق $h : G \to F$

$$a \to f_a$$

← بين أن h تشاكل شمولي من $(G,.)$ نحو (F,o)

← استنتج أن (F,o) زمرة.

1) *) لنبين أن f_a تشاكل من $(G,.)$ نحو $(G,.)$

ليكن x و y من G.

لنبين أن: $f_a(x.y) = f_a(x).f_a(y)$

لدينا:

$$\begin{aligned} f_a(x.y) &= a.x.y.a^{-1} \\ &= a.x.e.y.a^{-1} \\ &= a.x.a^{-1}.a.y.a^{-1} \\ &= (a.x.a^{-1}).(a.y.a^{-1}) \\ &= f_a(x).f_a(y) \end{aligned}$$

إذن f_a تشاكل.

*) لنبين أن f_a تقابل:

ليكن $y \in G$. لنبحث عن x من G بحيث: $f_a(x) = y$

لدينا:

$$\begin{aligned} f_a(x) = y &\Leftrightarrow a.x.a^{-1} = y \\ &\Leftrightarrow a^{-1}.a.x.a^{-1} = a^{-1}.y.a \\ &\Leftrightarrow e.x.a^{-1}.a = a^{-1}.y.a \\ &\Leftrightarrow x.a^{-1}.a = a^{-1}.y.a \\ &\Leftrightarrow x = a^{-1}.y.a \in G \end{aligned}$$

إذن كل عنصر y من G يقبل سابق وحيد $x = a^{-1}.y.a$

إذن f_a تقابل.

ومنه f_a تشاكل تقابلي من $(G,.)$ نحو $(G,.)$.

2) a) لنبين أن " o " قانون تركيب داخلي في F.

ليكن f_a و f_b من F. لنبين أن $f_a o f_b \in F$

ليكن $x \in G$. لنحسب: $f_a o f_b(x)$:

$$\begin{aligned} f_a o f_b(x) &= f_a(f_b(x)) \\ &= f_a(b.x.b^{-1}) \\ &= a.b.x.b^{-1}.a^{-1} = a.b.x.(a.b)^{-1} = f_{ab}(x) \end{aligned}$$

إذن: $(\forall x \in G): f_a o f_b(x)\ f_{ab}(x)$

إذن: $f_a o f_b = f_{ab}$

ولدينا: $\begin{cases} a\in G \\ b\in G \end{cases}$ إذن $a.b\in G$

إذن $f_{ab}\in F$

وبالتالي $\left(\forall (f_a,f_b)\in F^2\right): f_a o f_b\in F$

إذن " o " قانون تركيب داخلي في F .

b) *) لنبين أن h تشاكل شمولي من $(G,.)$ نحو (F,o).

← ليكن a و b من G. لنبين أن: $h(a.b)=h(a)oh(b)$

لدينا: $h(a.b)=f_{ab}=f_a o f_b=h(a)oh(b)$

إذن h تشاكل.

← ولدينا h شمولي لأن كل عنصر f_a من F له سابق على الأقل a من G.

ومنه h تشاكل شمولي من $(G,.)$ نحو (F,o).

*) لنبين أن (F,o) زمرة.

− لدينا $(G,.)$ زمرة.

− و h تشاكل شمولي من $(G,.)$ نحو (F,o).

إذن (F,o) زمرة.

V) الحلقة:

1) توزيعية قانون بالنسبة لآخر.

تعريف:

لتكن E مجموعة مزودة بقانونها تركيب داخليين * و T .
نقول إن T توزيعي بالنسبة ل * إذا وفقط إذا كان:

$$\left(\forall (x,y,z)\in E^3\right) x\mathrm{T}(y*z)=(x\mathrm{T}y)*(x\mathrm{T}z) \quad (1)$$
$$(x*y)\mathrm{T}z=(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z) \quad (2)$$

ملاحظة:

*) إذا كان القانون T تبادلي فإن إحدى الخاصيتين (1) أو (2) كافية.
*) إذا تحققت الخاصية (1) نقول إن T توزيعي بالنسبة ل * على اليمين.

أمثلة:

1− الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في كل من $\mathbb{N},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{R},\mathbb{C}$.

2− الجمع ليس توزيعيا بالنسبة للضرب:

$$x+(y\times z)\neq (x+y)\times(x+z)$$

3− الاتحاد توزيعي بالنسبة للتقاطع. والتقاطع توزيعي بالنسبة للاتحاد في $P(E)$.

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

4− الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في $F(X,\mathbb{R})$

2) تعريف حلقة:

تعريف:

لتكن A مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين * و T نقول إن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:
*) $(A,*)$ زمرة تبادلية.
*) T تجميعي.
*) T توزيعي بالنسبة ل *

ملاحظات:

*) إذا كان القانون T تبادلي. نقول إن الحلقة A تبادلية.
*) إذا كان للقانون T عنصر محايد، نقول إن الحلقة A واحدية.
*) نرمز عادة للقانون * ب " + " وللقانون T ب "$\times$" ونرمز في هذه الحالة للعنصر المحايد ل * ب 0 أو 0_A ويسمى صفر حلقة. ونرمز للعنصر المحايد ل T ب 1 أو 1_A.

3) أمثلة:

1− كل من $(\mathbb{Z},+,\times),(\mathbb{Q},+,\times),(\mathbb{R},+,\times),(\mathbb{C},+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

2− $(F(X,\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

4) خاصيات:

خاصية (1):

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة صفرها e
لدينا: $(\forall a\in A): a\mathrm{T}e=e\mathrm{T}a=e$.

ملاحظة:

إذا رمزنا ل $(A,*,\mathrm{T})$ ب $(A,+,\times)$ الخاصية تصبح:

$$(\forall a\in A): a\times 0=0\times a=0$$

برهان:

لدينا: $a\mathrm{T}(e*e)=a\mathrm{T}e$ (لأن $e*e=e$)

يعني: $(a\mathrm{T}e)*(a\mathrm{T}e)=a\mathrm{T}e$

يعني: $(a\mathrm{T}e)*(a\mathrm{T}e)=(a\mathrm{T}e)*e$

يعني: $a\mathrm{T}e=e$ (لأن $(A,*)$ زمرة)

إذن: $a\mathrm{T}e=e$

وبنفس الطريقة نبين أن $e\mathrm{T}a=e$

ومنه $e\mathrm{T}a=a\mathrm{T}e=e$

خاصية (2):

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ صفرها e
نرمز ل a' لمماثل a في $(A,*)$.
لدينا: $\left(\forall (a,b)\in A^2\right): a\mathrm{T}b'=a'\mathrm{T}b=(a\mathrm{T}b)'$

ملاحظة:

إذا رمزنا ل $(A,*,\mathrm{T})$ ب $(A,+,\times)$ الخاصية تصبح:

$$\left(\forall (a,b)\in A^2\right): a\times(-b)=(-a)\times b=-(a.b)$$

برهان:

لنبين أن: $(a\mathrm{T}b)'=a\mathrm{T}b'$

يعني: $(a\mathrm{T}b)*(a\mathrm{T}b')=e$ (لأن * تبادلي).

- لدينا:

$$\begin{aligned}(aTb)*(aTb') &= aT(b*b') \\ &= aTe \\ &= e\end{aligned}$$

إذن $(aTb)' = aTb'$

بنفس الطريقة نبين أن $(aTb)' = a'Tb$

5) العناصر القابلة للمماثلة:

تعريف:

> لتكن $(A,*,T)$ حلقة واحدية وحدتها ε.
> نقول إن عنصرا a من A قابل للمماثلة أو يقبل مقلوبا إذا كان له مماثل بالنسبة للقانون T في A.

خاصية:

> لتكن $(A,*,T)$ حلقة واحدية وحدتها ε.
> ولتكن U مجموعة العناصر القابلة للمماثلة.
> لدينا: (U,T) زمرة.

برهان:

- لدينا $U \neq \varnothing$ لأن $\varepsilon \in U$.
- لنبين أن T قانون تركيب داخلي في U.

ليكن x و y من U لنبين أن $(xTy) \in U$

لدينا x و y من U إذن يقبلان مماثلين x'' و y'' في (A,T).

إذن xTy له مماثل هو $y''Tx''$.

إذن $xTy \in U$

ومنه T قانون تركيب داخلي في U.

- لدينا T تجميعي في A. إذن تجميعي في U.
- لدينا: $(\forall a \in U): \varepsilon Ta = aT\varepsilon = a$

و $\varepsilon \in U$

إذن ε هو العنصر المحايد في U.

- ليكن $x \in U$ لنبين أنه يقبل مماثلا x'' في (U,T).

لدينا $x \in U$ إذن يقبل مماثلا x'' في (A,T).

ولدينا x'' يقبل مماثلا هو x إذن $x'' \in U$

إذن x يقبل مماثلا هو x'' في (U,T).

وبالتالي (U,T) زمرة.

6) قواسم الصفر في حلقة:

مثال:

نعتبر الحلقة $(F(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$ صفرها: $\theta : x \to 0$

ونعتبر الدالتين: $f : x \to |x| - x$

و: $g : x \to |x| + x$

لدينا:

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R}):(f.g)(x) &= f(x).g(x) \\ &= (|x|-x)(|x|+x) \\ &= |x|^2 - x^2 \\ &= x^2 - x^2 = 0 = \theta(x)\end{aligned}$$

إذن: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f.g = \theta$

لدينا إذن $f \neq \theta \ , \ g \neq \theta \ , \ f.g = \theta$

نقول إن f و g قاسمين للصفر في الحلقة $(F(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$.

تعريف (1):

> ليكن $(A,*,T)$ حلقة صفرها 0_A
> نقول إن عنصرا a من A قاسم للصفر إذا وفقط إذا كان:
> $a \neq 0_A$ ويوجد $b \neq 0_A$ بحيث: $aTb = 0_A$

تعريف (2):

> لتكن $(A,*,T)$ حلقة
> نقول إن الحلقة $(A,*,T)$ كاملة (intègre) إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر.

ملاحظة:

نعتبر الحلقة $(A,+,\times)$ صفرها 0_A.

1- يكون a قاسم للصفر إذا كان:

$a \neq 0_A$ ويوجد $b \neq 0_A$ بحيث $a \times b = 0_A$

2- تكون $(A,*,T)$ كاملة إذا وفق إذا كان:

$$(\forall (x,y) \in A^2) \begin{cases} x \neq 0_A \\ y \neq 0_A \end{cases} \Rightarrow x.y \neq 0_A$$

يعني:

$$(\forall (x,y) \in A^2) x.y = 0_A \Rightarrow \begin{cases} x = 0_A \\ \text{أو} \\ y = 0_A \end{cases}$$

أمثلة:

1- كل من $(\mathbb{C},+,\times);(\mathbb{R},+,\times);(\mathbb{Q},+,\times);(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة كاملة.

2- $(F(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة غير كاملة.

7) حلقتان هامتان:

a) حلقة المصفوفات المربعة:

← حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة 2:

تعريف:

> نسمي مصفوفة مربعة من الرتبة 2 بمعاملات حقيقية كل جدول على شكل: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ حيث a,b,c,d من $\mathbb{R}$.
> ونرمز لمجموعة هذه المصفوفات ب $M_2(\mathbb{R})$

- نعرف على $M_2(\mathbb{R})$ الجمع والضرب كما يلي:

$$\leftarrow) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\leftarrow) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix}$$

خاصية:

$(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة غير تبادلية وواحدية.

صفرها المصفوفة المنعدمة: $0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

وحدتها المصفوفة الوحدة: $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ وغير كاملة.

← حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة 3:

تعريف:

نسمي مصفوفة مربعة من الرتبة 3 بمعاملات حقيقية كل جدول على شكل:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$ حيث $a_{ij}\in\mathbb{R}$

ونرمز لمجموعة هذه المصفوفات ب $M_3(\mathbb{R})$

– نعرف الجمع والضرب في $M_3(\mathbb{R})$ بما يلي:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&a_{13}+b_{13}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&a_{23}+b_{23}\\a_{31}+b_{31}&a_{32}+b_{32}&a_{33}+b_{33}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&&\\&&\\&&\end{pmatrix}$$

باستعمال الترميز يمكن أن نعرف الجمع والضرب كما يلي:
نعتبر المصفوفة:

$$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le3\\1\le j\le3}}\quad;\quad B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le3\\1\le j\le3}}$$

*) لدينا $A+B$ هي المصفوفة $S=(S_{ij})_{\substack{1\le i\le3\\1\le j\le3}}$

حيث: $S_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

*) ولدينا $A.B$ هي المصفوفة $C=(C_{ij})_{\substack{1\le i\le3\\1\le j\le3}}$

حيث $C_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{jk}$

مثال:

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&1&-2\\1&2&-1\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7&-1\\-2&2&-2\\3&3&2\end{pmatrix}$$

خاصية:

$(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة غير تبادلية، غير كاملة وواحدية صفرها المصفوفة المنعدمة: $0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ووحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) الحلقة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

سبق وأن عرفنا الجمع والضرب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ كما يلي:

$$\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}$$
$$\bar{x}.\bar{y}=\overline{x.y}$$

خاصية:

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية صفرها $\bar{0}$ ووحدتها $\bar{1}$.

ملاحظة:

*) نعتبر $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ لدينا:

$$\bar{2}.\bar{3}=\bar{0}$$
و
$$\bar{2}\neq\bar{0} \text{ و } \bar{3}\neq\bar{0}$$

إذن $\bar{2}$ و $\bar{3}$ قاسمان للصفر.

إذن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة غير كاملة.

*) نعتبر $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ حيث n أولي.

$(\forall\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}\bar{x}.\bar{y}=\bar{0}&\Rightarrow\overline{x.y}=\bar{0}\\&\Rightarrow xy\equiv0[n]\\&\Rightarrow n/xy\\&\Rightarrow n/x \text{ أو } n/y\\&\Rightarrow x\equiv0[n] \text{ أو } y\equiv0[n]\\&\Rightarrow\bar{x}=\bar{0} \text{ أو } \bar{y}=\bar{0}\end{aligned}$$

إذن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة كاملة.

*) نعتبر الحلقة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ حيث n غير أولي.

إذن n يقبل قاسم فعلي موجب n_1.

يعني: $n=n_1+n_2$

n_1 قاسم فعلي موجب إذن n_2 قاسم فعلي موجب.

لدينا $1<n_1<n$ إذن $n\times n_1$ يعني $n_1\not\equiv0[n]$

و $1<n_2<n$ و $n\times n_2$ و $n_2\not\equiv0[n]$

يعني: $\bar{n}_1\neq\bar{0}$ و $\bar{n}_2\neq\bar{0}$

ولدينا: $n_1.n_2=n$

يعني: $\overline{n_1.n_2}=\bar{n}$

يعني: $\bar{n}_1.\bar{n}_2=\bar{0}$

إذن $\bar{n}_1$ و $\bar{n}_2$ قاسمان للصفر.

ومنه: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة غير كاملة.

خاصية:

الحلقة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ كاملة إذا وفقط إذا كان n أولي.

تمرين:

نعتبر الحلقة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$، $n\in\mathbb{N}^*$
حدد العناصر القابلة للمماثلة.

- لدينا:

$$\overline{x} \text{ قابلة للمماثلة } \Leftrightarrow (\exists \overline{x'} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : \overline{x}.\overline{x'} = \overline{1}$$
$$\Leftrightarrow (\exists x' \in \mathbb{Z}) : x.x' \equiv 1[n]$$
$$\Leftrightarrow (\exists x', k \in \mathbb{Z}) : xx' = 1 + nk$$
$$\Leftrightarrow (\exists x', k \in \mathbb{Z}) : xx' - nk = 1$$
$$\Leftrightarrow x \wedge n = 1$$

إذن مجموعة العناصر التي تقبل مقلوبا هي:

$$U = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} / x \wedge n = 1\}$$

ملاحظة:

لدينا $(U, \times)$ زمرة تبادلية.

VI) الجسم: Corps

1) تعريف:

لتكن k مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين * و $\top$.

نقول إن $(K, *, \top)$ جسم إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

*) $(K, *, \top)$ حلقة واحدية.

*) كل عنصر يخالف صفر الحلقة يقبل مماثلا بالنسبة ل $\top$.

ملاحظة:

1- إذا كان القانون $\top$ تبادلي نقول إن الجسم K تبادلي.

2- يكون $(K, *, \top)$ جسما إذا وفقط إذا كان:

*) $(K, *)$ زمرة.

*) $(K - \{0_k\}, \top)$ زمرة.

*) $\top$ توزيعي بالنسبة ل *.

2) أمثلة:

1- كل من $(\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي.

2- نعتبر الحلقة $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ حيث p أولي.

لنبين أنها جسم.

- لدينا $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدية.

- ليكن $\overline{x} \neq \overline{0}$

يعني $x \not\equiv 0[p]$ يعني $p \nmid x$

وبما أن p أولي فإن $p \wedge x = 1$

إذن حسب Bezout يوجد U و V بحيث:

$$pu + xv = 1$$

يعني: $\overline{p}.\overline{u} + \overline{x}.\overline{v} = \overline{1}$

يعني: $\overline{x}.\overline{v} = \overline{1}$ $\qquad (\overline{0} = \overline{p})$

إذن $\overline{x}$ يقبل مماثلا هو $\overline{v}$.

إذن كل عنصر $\overline{x} \neq \overline{0}$ يقبل مقلوبا.

ومنه $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ جسم.

خاصية:

إذا كان p أولي فإن $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ جسم تبادلي.

3- نعتبر الحلقة $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$

- لدينا $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدية.

- نعتبر المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

لنتحقق هل A تقبل مقلوبا.

لنبحث عن $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ بحيث: $A.A' = A'.A = I$

لدينا:

$$A.A' = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ c+d=0 \\ a+b=0 \\ c+d=0 \end{cases}$$

وهذا مستحيل.

إذن A لا تقبل مقلوبا A'.

ومنه $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ ليس جسم.

وبنفس نجد أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ ليس جسما.

3) خاصيات:

خاصية (1):

ليكن $(K, +, \times)$ جسم.

لدينا كل عنصر من $K - \{0_k\}$ منتظم بالنسبة للضرب.

يعني: $(\forall a \in K - \{0_k\})(\forall (x, y) \in K^2)$:

$$\begin{cases} a.x = a.y \Rightarrow x = y \\ x.a = y.a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

خاصية (2):

ليكن $(K, +, \times)$ جسم.

لدينا:

$$(\forall (x, y) \in K^2) : x.y = 0_k \Rightarrow x = 0_k \text{ أو } y = 0_k$$

استنتاج: كل جسم هو حلقة كاملة.

خاصية (3):

ليكن $(K, +, \times)$ جسم.

نعتبر المعادلة $a \times x = b$

*) إذا كان $a \neq 0_k$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا $x = a^{-1}b$.

*) إذا كان $a = 0_k$ و $b \neq 0_k$ فإن المعادلة ليس لها حل.

*) إذا كان $a = 0_k$ و $b = 0_k$ فإن $S = K$

نفس الشيء بالنسبة للمعادلة $x \times a = b$.

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

نعتبر: $L=\left\{\begin{array}{l} f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\to ax/a\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$

بين أن: $(L,+,o)$ جسم تبادلي.

تمرين (2):

نعتبر $E=\left\{M_{(a,b)}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b\end{pmatrix}/a,b\in\mathbb{R}\right\}$

بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

I. تقديم الدالة $f(x)=\ln(x)$ (اللوغاريتم النيبري):

01. تقديم الدالة اللوغاريتم النيبري :

❖ نشاط :

لنعتبر الدالة العددية المعرفة ب : $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \to f(x)=\frac{1}{x}$$

1) هل f تقبل دالة أصلية على المجال $]0,+\infty[$ ؟ علل جوابك

2) كم توجد من دالة أصلية F ل f حيث $F(1)=0$ ؟

❖ مفردات:

الدالة الأصلية F للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$ حيث $F(1)=0$

- نرمز لها ب $F(x)=\ln(x)$
- الدالة F تسمى الدالة اللوغاريتم النيبري

❖ تعريف :

الدالة الأصلية F للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1 (أي $F(1)=0$) تسمى الدالة اللوغاريتم النيبري و يرمز لها ب $F(x)=\ln(x)$

❖ ملحوظة:

بدلا من كتابة : $F(x)=\ln(x)$ نكتب : $\cancel{f}(x)=\ln(x)$

❖ نتائج:

- الدالة $f(x)=\ln(x)$ مجموعة تعريفها هي $D_f=]0,+\infty[$
- $f(1)=\ln(1)=0$
- الدالة $f(x)=\ln(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي $f'(x)=[\ln(x)]'=\frac{1}{x}>0$
- إذن الدالة $f(x)=\ln(x)$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- $\forall a,b\in]0,+\infty[\ , \ a<b \Leftrightarrow \ln(a)<\ln(b)$.
- $\forall a,b\in]0,+\infty[\ , \ a=b \Leftrightarrow \ln(a)=\ln(b)$.

01. إشارة $\ln(x)$ هي كما يلي:

إشارة $\ln(x)$: نعلم أن : $\ln(1)=0$

لدينا : 1) $x>1 \Rightarrow \ln(x)>0$

2) $0<x<1 \Rightarrow \ln(x)<0$

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	−	0	+	

تطبيق:

1) مجموعة تعريف الدالة أ - $f(x)=\frac{2}{\ell n(x)}$. ب - $f(x)=\sqrt{\ell n(x)}$

2) حل المعادلة: $\ell n(2x)-\ell n(x-1)=0$

3) حل المتراجحة: $\ell n(2x)-\ell n(x-1)\leq 0$

02. المشتقة اللوغاريتمية لدالة:

❖ **تعريف و خاصية:**

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $\forall x\in I: u(x)\neq 0$.

الدالة: $f(x)=\ell n|u(x)|$ قابلة للاشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة هي : $f'(x)=\left[\ell n|u(x)|\right]'=\frac{u'(x)}{u(x)}$ (أي المشتقة اللوغاريتمية ل u على I).

الدالة $x\rightarrow\frac{u'(x)}{u(x)}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I.

❖ **برهان:**

لدينا : u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن u متصلة على I . بمأن : $\forall x\in I: u(x)\neq 0$ إذن $u(x)<0$ و إما $u(x)>0$.

- حالة : $u(x)>0$ ومنه : $f(x)=\ell n|u(x)|=\ell n(u(x))$

بمأن $u(x)>0$ إذن $u(I)\subset]0,+\infty[$ ومنه الدالة $x\rightarrow\ell n(x)$ قابلة للاشتقاق على $u(I)$

ومنه :
$$I\xrightarrow{u}u(I)\xrightarrow{\ell n}\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow u(x)\longrightarrow\ell n(u(x))=\ell n\circ u(x)$$

إذن: f قابلة للاشتقاق لأنها مركبة دالتين قابلتين للاشتقاق ومنه:

$$f'(x)=\left[\ell n|u(x)|\right]'=\left[\ell n(u(x))\right]'=\left[\ell n\circ u(x)\right]'=u'(x)\times\ell n'\circ u(x)=u'(x)\times\frac{1}{u(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

- حالة : $u(x)<0$ ومنه : (بنفس الطريقة نبرهن على ذلك)

❖ **مثال :**

نحسب : f' مع $f(x)=\left[\ell n|x^2-x|\right]$

لدينا: $f'(x)=\left[\ell n|x^2-x|\right]'=\frac{(x^2-x)'}{x^2-x}=\frac{2x-1}{x^2-x}$

❖ **مثال:**

لنعتبر الدالة : $u(x)=3x^2-5x$

أوجد الدالة المشتقة اللوغاريتمية ل u.الدالة المشتقة اللوغاريتمية ل u هي الدالة: $x\rightarrow\frac{6x-5}{3x^2-5x}$

❖ **استنتاج**

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I حيث $\forall x\in I\ :\ u(x)\neq 0$

الدوال الأصلية للدالة: $x\rightarrow\frac{u'(x)}{u(x)}$ على المجال I هي الدوال التي على شكل $F(x)=\ell n|u(x)|+c$ مع $(c\in\mathbb{R})$.

❖ تمرين :

- أوجد الدوال الأصلية للدالة: $f(x)=\frac{5}{x-2}$ على $]2,+\infty[$

03. الخاصيات الجبرية:

❖ خاصيات:

لكل a و b من $]0,+\infty[$

- $\ell n(a\times b)=\ell n(a)+\ell n(b)$
- $\ell n\left(\frac{1}{b}\right)=-\ell n(b)$
- $\ell n\left(\frac{a}{b}\right)=\ell n(a)-\ell n(b)$
- $\ell n(a^r)=r\times \ell n(a)$ مع $r\in\mathbb{Q}$
- نستنتج : $\ell n(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\times\ell n(a)$ و $\ell n(\sqrt[3]{a})=\frac{1}{3}\times\ell n(a)$

❖ نبرهن على: $\ell n(a\times b)=\ell n(a)+\ell n(b)$.

نعتبر $a>0$ (معلوم) و الدالة : $f(x)=\ell n(ax)$ ثم الدالة $g(x)=\ell n(a)+\ell n(x)$. ومنه $f(1)=\ell n(a)$ (1) و $g(1)=\ell n(a)$ (2)

- f و g معرفتين على $]0,+\infty[$.
- $f'(x)=[\ell n(ax)]'=\frac{(ax)'}{ax}=\frac{1}{x}$ و $g'(x)=[\ell n(a)+\ell n(x)]'=\frac{1}{x}$ ومنه : $f'(x)=g'(x)$ إذن :

$(f(x)-g(x))'=0$ و بالتالي $f(x)-g(x)=c$ مع $c\in\mathbb{R}$ إذن $f(x)=g(x)+c$ (3)

نأخذ $x=1$ و منه $f(1)=g(1)+c$ و حسب (1) و (2) نحصل على $c=0$ و بالتالي $f(x)=g(x)$ حسب (3).

إذن : $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \ell n(ax)=\ell n(a)+\ell n(x)$ وذلك لكل $x\in]0,+\infty[$ نأخذ $x=b$ نحصل على $\ell n(ab)=\ell n(a)+\ell n(b)$.

خلاصة : $\ell n(ab)=\ell n(a)+\ell n(b)\ :\ \forall a,b\in]0,+\infty[$

❖ نبرهن على: $\ell n\left(\frac{1}{b}\right)=-\ell n(b)$.

نأخذ : $b>0$ لدينا:

$$\ell n(1)=0\Leftrightarrow \ell n\left(\frac{b}{b}\right)=0\Leftrightarrow \ell n\left(b\times\frac{1}{b}\right)=0\Leftrightarrow \ell n(b)+\ell n\left(\frac{1}{b}\right)=0\Leftrightarrow \ell n\left(\frac{1}{b}\right)=-\ell n(b)$$

خلاصة: $\ell n\left(\frac{1}{b}\right)=-\ell n(b)$.

❖ نرهن على: $\ell n(a^r)=r\times\ell n(a)$ مع $r\in\mathbb{Q}$

بنفس الطريقة المستعمل في البرهان $\ell n(a\times b)=\ell n(a)+\ell n(b)$ مع اعتبار الدالة $f(x)=\ell n(x^r)$ و الدالة $g(x)=r\ell n(x)$

❖ تطبيق:

- نضع : $\ell n(2) \simeq 0,69$. أحسب : $\ell n(4)$ و $\ell n(8)$
- بسط : $\ell n\left(\sqrt{3}\right)+\ell n(9)$
- بسط : $\ell n\left[\left(\sqrt{5}\right)^{2012}\right]-\ell n\left(\sqrt{5}\right)$

❖ ملحوظة:

الكتابة : $\ell n(x)\times \ell n(x)=\ell n^2(x)$

الكتابة : $\ell n(x)\times \ell n(x)\times \ell n(x)=\ell n^3(x)$

بصفة عامة : $\underbrace{\ell n(x)\times \ell n(x)\times \cdots \times \ell n(x)}_{n}=\ell n^n(x)$ $n\in \mathbb{N}^*$

❖ تطبيق: بسط : $\ell n^2\left(3-\sqrt{2}\right)-\ell n^2\left(3+\sqrt{2}\right)$

04. نهايات اعتيادية :

❖ خاصيات:

الدالة: $f(x)=\ell n(x)$ معرفة على $D_f=]0,+\infty[$ إذن:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ell n(x)=-\infty$ ومنه الدالة f تقبل مقارب عمودي معادلته: $x=0$ (اي محور الأراتيب)
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\ell n(x)=+\infty$ (ومنه يجب دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$)
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ell n(x)}{x}=0$ ومنه $a=0$ إذن الدالة f تقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\times \ell n(x)=0^-$

❖ برهان ل : $\lim\limits_{x\to +\infty}\ell n(x)=+\infty$

ليكن $A>0$ نعتبر n أصغر عدد صحيح طبيعي حيث $n\ell n(2)>A$ إذن $n\geq E\left(\dfrac{A}{\ell n2}\right)+1$.

ومنه :

إذا كان : $x>2^n$ فإن : $x>2^n \Rightarrow \ell n(x)>\ell n\left(2^n\right)$

$\Rightarrow \ell n(x)>n\ell n(2)$

$\Rightarrow \ell n(x)>A \ ; \ \left(n\ell n(2)>A\right)$

ومنه : $\forall A>0 , \exists B=2^n>0 , x>B \Rightarrow \ell n(x)>A$.

خلاصة : $\lim\limits_{x\to +\infty}\ell n(x)=+\infty$.

❖ برهن على : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ell n(x)=-\infty$ (يمكنك أن تضع $X=\dfrac{1}{x}$).

❖ برهن على : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ell n(x)}{x}=0$

1. يمكنك اعتبار الدالة $f(x)=2\sqrt{x}-\ln(x)$. ثم ادرس رتابة f على $[1,+\infty[$

2. استنتج : $\frac{2}{\sqrt{x}} \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq 0$ ثم النهاية $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

❖ نبرهن على : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\times\ln(x)=0^-$.

نضع : $X=\frac{1}{x}$ ومنه : $x\to 0^+$ فإن $X\to+\infty$.

إذن :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\times\ln(x)=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\times\ln\left(\frac{1}{X}\right)$$
$$=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\times(-\ln X)$$
$$=\lim_{X\to+\infty}\frac{-\ln X}{X}$$
$$=0$$

خلاصة : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\times\ln(x)=0^-$

❖ تطبيق: أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{x}$

05. نهايات ضرورية معرفتها :

❖ خاصيات:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ و $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$.
- $\lim_{x\to 0^+} x^n\times\ln(x)=0^-$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$; $n\in\mathbb{N}^*$

❖ نبرهن على $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$:

1. ادرس اشتقاق الدالة $f(x)=\ln x$ في $x_0=1$.

2. استنتج نهاية : $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}$.

❖ نبرهن على $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ يمكنك استعمال نفس الطريقة مع $f(x)=\ln(x+1)$ و $x_0=0$

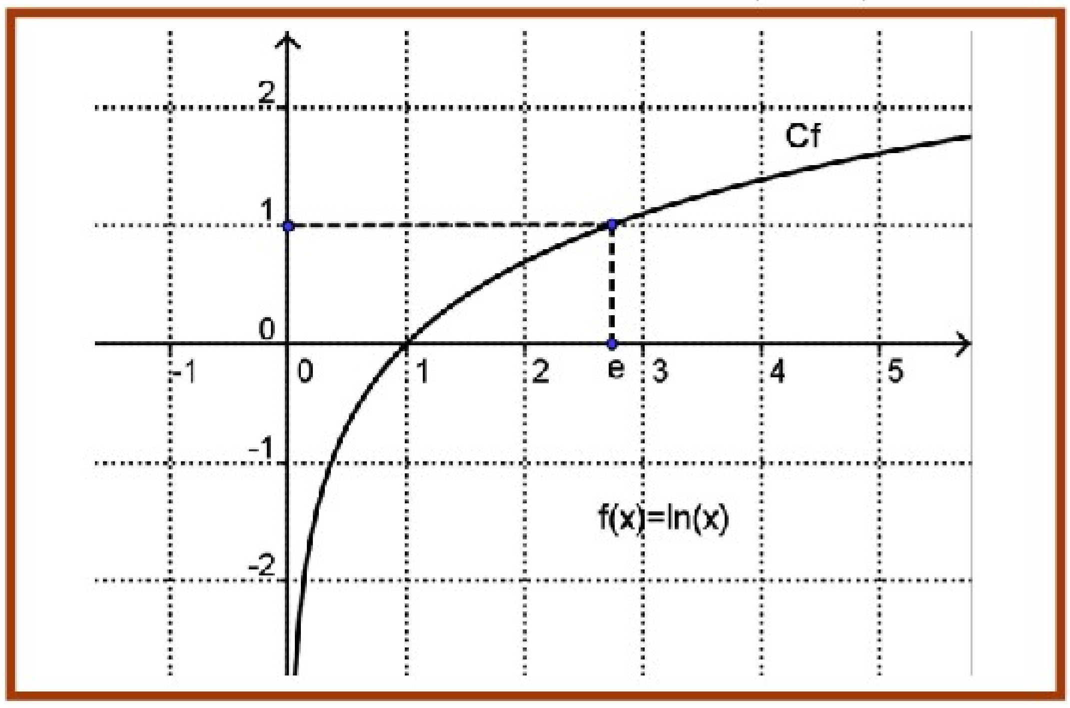
❖ تطبيق: أحسب : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x\times\ln(x)}$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x^3}$

06. دراسة الدالة $f(x)=\ln(x)$:

- حسب ما سبق نستنتج: جدول تغيرات f

x	0	1	$+\infty$
f '	‖	+	
f	‖	$-\infty \nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$

- إنشاء منحنى الدالة: f في م. م. م $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$



❖ نتائج:

- الدالة $f(x)=\ell n(x)$ متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- f تقابل من $]0,+\infty[$ إلى $]-\infty,+\infty[$ $f(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$
- المعادلة $f(x)=1$ (أي $\ell n(x)=1$) تقبل حلا وحيدا على $]0,+\infty[$ ونرمز لهذا الحل ب: e مع $(e\simeq 2,718)$ عدد اللاجذري
- $\forall r\in\mathbb{Q}: r=\ell n\left(e^{r}\right)$.

❖ مثال:

$$3=\ell n\left(e^{3}\right) \quad \text{و} \quad -\frac{2}{7}=\ell n\left(e^{-\frac{2}{7}}\right)$$

❖ تطبيق:

حدد مجموعة تعريف الدالة: $f(x)=\dfrac{1}{3-\ell n(x)}$

II. دالة اللوغاريتم للأساس a مع: $a\in\ ]0,1[\cup]1,+\infty[$

❖ تعريف:

ليكن a من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (a عدد موجب قطعا و $a\neq 1$)

الدالة المعرفة كما يلي: $f\ :\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$

$$x\to f(x)=\frac{\ell n(x)}{\ell n(a)}$$

تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a و نرمز لها ب $\log_a$.

❖ نتائج:

- $\log_a(x)=\dfrac{\ell n(x)}{\ell n(a)}$ و $\log_a(1)=\dfrac{\ell n(1)}{\ell n(a)}=0$
- $\log_a(a)=\dfrac{\ell n(a)}{\ell n(a)}=1$
- $\log_a(e)=\dfrac{\ell n(e)}{\ell n(a)}=\dfrac{1}{\ell n(a)}$

❖ ملحوظة:

$\log_e(x)=\dfrac{\ell n(x)}{\ell n(e)}=\ell n(x)$ إذن $\log_e=\ell n$

❖ خاصيات:

لكل x و y من $]0,+\infty[$ و $a\in\,]0,1[\cup]1,+\infty[$

- $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$
- $\log_a\left(\dfrac{1}{y}\right)=-\log_a(y)$
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$
- $\log_a(x^r)=r\times\log_a(x)$ مع $r\in\mathbb{Q}$
- $\log_a(\sqrt{x})=\dfrac{1}{2}\times\log_a(x)$ و $\log_a(\sqrt[3]{x})=\dfrac{1}{3}\times\log_a(x)$

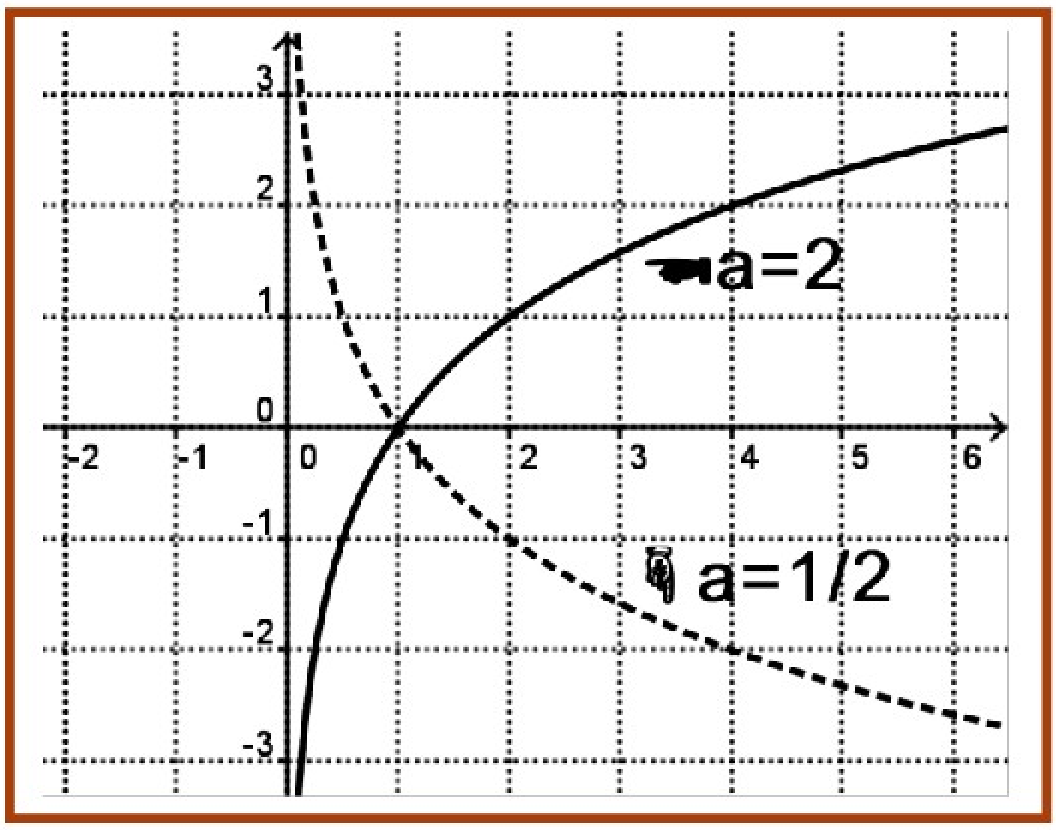
❖ نبرهن على: $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

لدينا: $\log_a(x\times y)=\dfrac{\ell n(x\times y)}{\ell n(a)}=\dfrac{\ell n(x)+\ell n(y)}{\ell n(a)}=\dfrac{\ell n(x)}{\ell n(a)}+\dfrac{\ell n(y)}{\ell n(a)}=\log_a(x)+\log_a(y)$

إذن: $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

❖ ملحوظة:

- في حالة : $a=10$ الدالة : $f(x)=\log_{10}(x)$ تسمى الدالة اللوغاريتم العشري ويرمز لها باختصار: $f(x)=\text{Log}(x)$ إذن: $\log_{10}=\text{Log}$. (لدينا : $\log_{10}(x)=\text{Log}(x)\simeq 0,43\ell n(x)$)
- $\text{Log}(1)=0$; $\text{Log}(10)=1$; $\text{Log}(10^r)=r$;
- التمثيل المبياني ل $f(x)=\log_a(x)$. نأخذ: $a=2$ و $a=\dfrac{1}{2}$.



❖ تمارين تطبيقية :

بسط التعابير التالية:

1) $\log_2(8)-\log_2\left(\sqrt[3]{32}\right)+\log_2(9)-\log_2(3)$.

2) $\log_3\left(\frac{15}{4}\right)+\log_2\left(\frac{1}{27}\right)+\log_3\left(\frac{4}{5}\right)$.

3) $\log(100)-\log\left(10^{2013}\right)+\log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)$.

4) بين أن: $\forall a,b\in\left]1,+\infty\right[\ \log_b(a)=\frac{1}{\log_a(b)}$.

5) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\log_3(2x)\times\left(\log_5(x)-1\right)=0$.

6) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\log_{\sqrt{3}}(3x-1)\geq\log_{\sqrt{3}}(x+1)$

7) أدرس الدالة : $f(x)=\log_5(x+1)$

I. تقديم الدالة $f(x)=\exp(x)=e^x$ (الأسية النيبرية):

تقديم الدالة الأسية النيبري :

1. نشاط : لنعتبر الدالة العددية المعرفة ب: $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \to f(x)=\ell n(x)$$

- هل f تقابل من المجال $I=]0,+\infty[$ إلى مجال J ؟علل جوابك مع تحديد J.

2. مفردات:

الدالة العكسية f^{-1} ل f تسمى الدالة الأسية النيبرية (أو الدالة الأسية) ويرمز لها ب: exp أو e

ولهذا نكتب: $f^{-1}=\exp=e: \mathbb{R} \to]0,+\infty[$

$$x \to f^{-1}(x)=\exp(x)=e^x$$

3. تعريف و خاصية:

الدالة العددية المعرفة ب : $f(x)=\ell n(x)$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ الدالة $f(x)=\ell n(x)$ تقابل من $]0,+\infty[$ إلى $\mathbb{R}$. الدالة العكسية f^{-1} ل f تسمى الدالة الأسية النيبرية (أو الدالة الأسية) و يرمز لها ب: exp أو e

الدالة الأسية معرفة كما يلي : $f^{-1}=\exp=e: \mathbb{R} \to]0,+\infty[$

$$x \to f^{-1}(x)=\exp(x)=e^x$$

4. ملحوظة :

- العلاقة التي تربط $f(x)=\ell n(x)$ و $f^{-1}(x)=\exp(x)=e^x$ هي $\left.\begin{array}{l}\exp(x)=e^x=y\\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\ell n(y)\\ y>0\end{array}\right.$
- لدينا: $\forall x\in]0,+\infty[: f^{-1}\circ f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x))=x$ إذن : $\forall x\in]0,+\infty[\ ,\ \exp\circ \ell n(x)=x \Leftrightarrow \exp(\ell n(x))=x$
- لدينا: $\forall x\in \mathbb{R} : f\circ f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x))=x$ إذن : $\forall x\in \mathbb{R}\ ,\ \ell n\circ \exp(x)=x \Leftrightarrow \ell n(\exp(x))=x$.

5. كتابة جديدة :

- نعلم أن : $\forall r\in \mathbb{Q}\ ,\ r=\ell n(e^r)$ (1) إذن : $(1) \Leftrightarrow \forall r\in \mathbb{Q}\ ,\ \exp(r)=\exp(\ell n(e^r)) \Leftrightarrow \forall r\in \mathbb{Q}\ ,\ \exp(r)=e^r$

ومنه نحصل على : $\forall r\in \mathbb{Q} : \exp(r)=e^r$

و هذا يدفعنا لتمديد هذه الكتابة على باقي الأعداد الحقيقية x ومنه : نكتب $\forall x\in \mathbb{R} : \exp(x)=e^x$

6. نتائج:

	الدالة $f(x)=\exp(x)=e^x$		
1	معرفة على $D_f=\mathbb{R}$	5	$\forall x>0 : e^{\ell n(x)}=x$
2	متصلة على $D_f=\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق على $D_f=\mathbb{R}$	6	$\forall x\in \mathbb{R} : \ell n(e^x)=x$
3	تزايدية قطعا على المجال $D_f=\mathbb{R}$.	7	$\forall a,b\in \mathbb{R} : a=b \Leftrightarrow e^a=e^b$
4	$\left.\begin{array}{l}y=e^x\\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\ell n(y)\\ y>0\end{array}\right.$	8	$\forall a,b\in \mathbb{R} : a<b \Leftrightarrow e^a<e^b$

7. أمثلة :

.1 $e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$

.2 $e^{\ln(24)} = 24$ و $\ln(e^{-13}) = -13$ و $e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$.

.3 $e^{x+3} = e^{2x+7} \Leftrightarrow x+3 = 2x+7$ و $e^{x+1} < e^{6x-2} \Leftrightarrow x+1 = 6x-2$

8. إشارة e^x :

$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$ (إشارة e^x موجبة قطعا)

x	$-\infty$ $+\infty$
e^x	$+$

9. تطبيق:

1) حدد مجموعة تعريف: $f(x) = \frac{2}{e^x}$ و $f(x) = \sqrt{e^x}$

2) حل المعادلة: $e^{2x} - e^{(x-1)} = 0$

3) حل المتراجحة: $e^{2x} - e^{(x-1)} \leq 0$

II. خاصيات $f(x) = \exp(x) = e^x$

خاصيات جبرية :

1. خاصيات :

	لكل a و b من $\mathbb{R}$	مثال		لكل a و b من $\mathbb{R}$	مثال
1	$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^7 = e^4 \times e^3$	4	$(e^x)^r = e^{rx}\ (r \in \mathbb{Q})$	$(e^x)^3 = e^{3x}$
2	$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$	$e^{-2} = \frac{1}{e^2}$	5	$\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$	$\sqrt{e^{x-3}} = e^{\frac{1}{2}(x-3)}$
3	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$e^5 = \frac{e^7}{e^2}$	6	$\sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{1}{3}x}$	$\sqrt[3]{e^{2+2x}} = e^{\frac{1}{3}(2+2x)}$

2. برهان ل $e^{a+b} = e^a \times e^b$:

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ نضع : $A = e^{a+b}$ و $B = e^a \times e^b$.

ومنه :

$$A = e^{a+b} \Leftrightarrow \ln(A) = \ln(e^{a+b})$$
$$\Leftrightarrow \ln(A) = a+b \quad , \quad (1)$$
$$B = e^a \times e^b \Leftrightarrow \ln(B) = \ln(e^a \times e^b)$$
$$\Leftrightarrow \ln(B) = \ln(e^a) + \ln(e^b)$$
$$\Leftrightarrow \ln(B) = a+b \quad , (2)$$

حسب (1) و (2) نحصل على $\ln(A) = \ln(B)$ إذن : $A = B$ أي $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

خلاصة : $e^{a+b} = e^a \times e^b$

3. ملحوظة:

الكتابة : $e^x \times e^x = (e^x)^2 = e^{2x}$ و $e^x \times e^x \times e^x = (e^x)^3 = e^{3x}$.

بصفة عامة : $\underbrace{e^x \times e^x \times \cdots \times e^x}_{n} = (e^x)^n = e^{nx}$

III. مشتقة الدالة الأسية:

1. خاصية:

الدالة : $f(x)=e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}:(e^x)'=e^x$.

بمأن الدالة $f(x)=\ln(x)$ قابلة للاشتقاق على $I=]0,+\infty[$. و دالتها المشتقة $f'(x)=\frac{1}{x}$ لا تنعدم على هذا المجال فإن دالتها العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}:\ (e^x)'=(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}=\frac{1}{f'(e^x)}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x$.

خلاصة : $\forall x\in\mathbb{R}:(e^x)'=e^x$

2. خاصية:

$u(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f(x)=e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة تحقق ما يلي:

$f'(x)=\left[e^{u(x)}\right]'=u'(x)e^{u(x)}$

- تطبيق: أحسب الدالة المشتقة ل: $f(x)=e^{5x^3+3x}$

جواب : $f'(x)=\left[e^{5x^3+3x}\right]'=(5x^3+3x)'\times e^{5x^3+3x}=(15x^2+3)e^{5x^3+3x}$

3. ملحوظة:

الدوال الأصلية للدالة ل : $g(x)=u'(x)e^{u(x)}$ هي الدوال التي على شكل: $G(x)=e^{u(x)}+c\ ;\ (c\in\mathbb{R})$

4. تطبيق:

نجد الدوال الأصلية ل: $f(x)=x.e^{3x^2+1}$ هي $F(x)=\frac{1}{6}e^{3x^2+1}+c$

IV. نهايات اعتيادية ل $f(x)=e^x$

1. نهايات اعتيادية

نهايات $f(x)=e^x$	تأويل الهندسي لنتيجة
$\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+$	الدالة f تقبل مقارب أفقي معادلته: $y=0$ (اي محور الأفاصيل) بجوار $-\infty$
$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$	ومنه يجب دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$	الدالة f تقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

نهايات يجب معرفتها

1	$\lim_{x\to-\infty}x\times e^x=0^-$
2	$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$
3	$\lim_{x\to-\infty}x^n\times e^x=0$ مع $(n\in\mathbb{N}^*)$
4	$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ مع $n\in\mathbb{N}^*$

2. برهان :

أ – لنهاية اعتيادية : مثلا : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. (يمكن استنتج هذه النهاية من خلال $f(x)=\ell n(x)$ و دالتها العكسية $f^{-1}(x)=e^x$)

نضع : $e^x=x$ إذن : $x\to+\infty$ فإن : $X\to+\infty$ و كذلك $x=\ell n(X)$.

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=\lim\limits_{X\to+\infty}\ell n(X)=+\infty$.

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

ب – لنهاية يجب معرفتها : مثلا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ مع $n\in\mathbb{N}^*$.

نضع : $X=\frac{x}{n}$ إذن : $x\to+\infty$ فإن : $X\to+\infty$.

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{nX}}{(nX)^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^X)^n}{(nX)^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^X}{nX}\right)^n=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n^n}\left(\frac{e^X}{X}\right)^n=+\infty$

3. تطبيق1 :

تطبيق 1 : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}$

طريقة1 : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\times e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\times e^x=+\infty$

طريقة2 : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$ مع $t=2x$

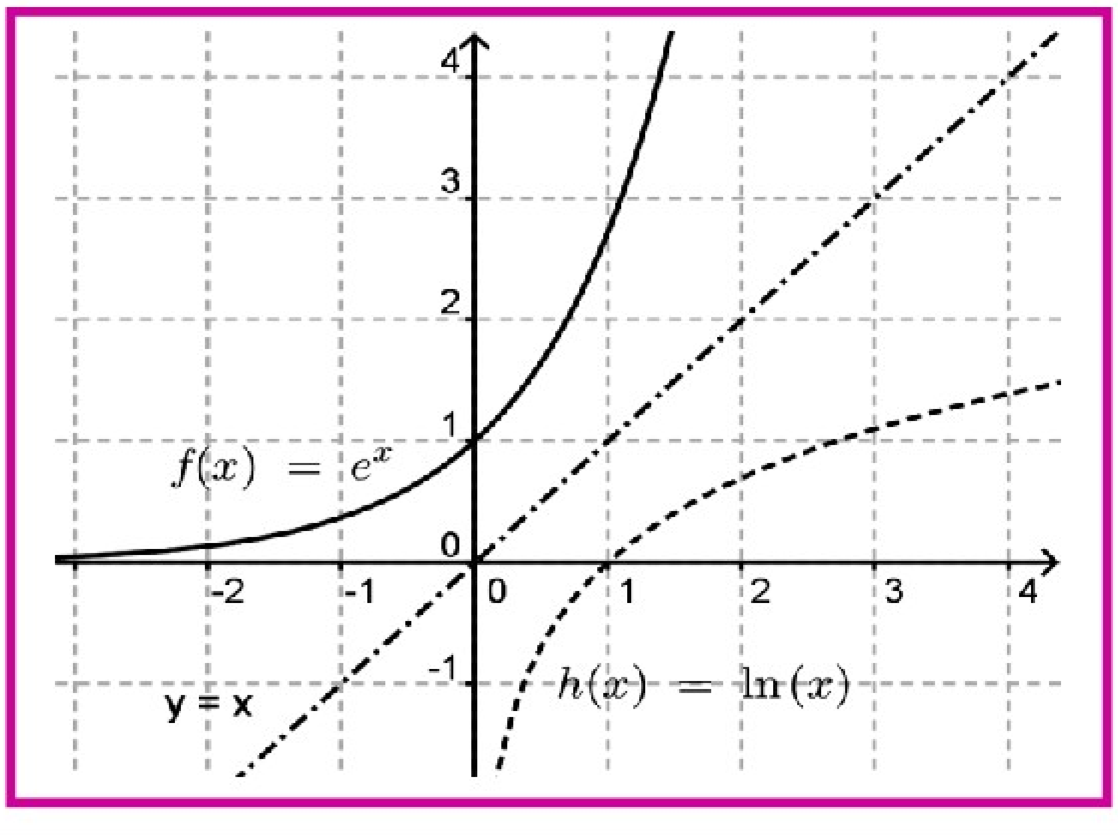
تطبيق2 : أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+2x}{x^3}$

V. دراسة الدالة $f(x)=e^x$:

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$ .... $+\infty$
f '	+
f	0 ↗ $+\infty$

إنشاء منحنى الدالة f في م. م. م $(0,\vec{i},\vec{j})$



VI. الدالة الأسية للأساس a مع: $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$:

1. تعريف:

ليكن a من $]0,1[\cup]1,+\infty[$. الدالة المعرفة كما يلي: $\forall x>0\ ,\ \log_a(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ هي متصلة و رتيبة قطعا على $]0,+\infty[$ هي تقابل و تقابلها العكسي f^{-1} يسمى الدالة الاسية للأساس a و معرفة كما يلي :

$$f^{-1}\ :\ \mathbb{R}\to]0,+\infty[$$
$$x\to f^{-1}(x)=e^{x\ln a}$$

2. توضيح :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x)=y &\Leftrightarrow f(y)=x \\ &\Leftrightarrow \log_a(y)=x \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(a)}=x \\ &\Leftrightarrow \ln(y)=x\ln(a) \\ &\Leftrightarrow y=e^{x\ln(a)} \end{aligned}$$

إذن : $f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow e^{x\ln(a)}=y$.

3. كتابة جديدة ل $f^{-1}(x)=e^{x\ln a}$:

نأخذ : r من $\mathbb{Q}$ نحصل على $f^{-1}(r)=e^{r\ln a}=e^{\ln a^r}=a^r$.

وهذا يدفعنا لتمديد هذه الكتابة على باقي الأعداد الحقيقية x ومنه : نكتب $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f^{-1}(x)=e^{x\ln a}=a^x$

خلاصة : $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ e^{x\ln a}=a^x$.

4. مثال :

$5^x=e^{x\ln 5}$ و $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=e^{-x\ln 5}$ و $10^x=e^{x\ln 10}$.

5. ملحوظة : لكل x من $\mathbb{R}$: $\log_a(a^x)=x$. و لكل $x>0$: $a^{\log_a(x)}=x$ و $10^x=y\Leftrightarrow x=\mathrm{Log}(y)$

6. تذكير لمراحل تعريف الأس :

- القوة ذات الأس الصحيح الطبيعي : $a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\ldots\times a}_{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ مع $a^1=a$ و $a^0=1$.
- القوة ذات الأس الصحيح النسبي : $\forall p>0\ ,\ a^p=\underbrace{a\times a\times\ldots\ldots\times a}_{p}$ و $(a\neq 0)\ ,\ \forall p<0\ ,\ a^p=\dfrac{1}{a^{-p}}$ مع $a^1=a$ و $a^0=1$.
- القوة ذات الأس الجذري : $r=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ (مع $p\in\mathbb{Z}$ و $q\in\mathbb{N}^*$) $(a>0)$, $\forall r\in\mathbb{Q}\ ,\ a^r=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$.
- القوة ذات الأس عدد حقيقي $(a>0)$, $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ a^x=e^{x\ln a}$

7. نتائج:

ليكن a من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ و الدالة $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$

1) f معرفة و متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

2) $[f(x)]'=(a^x)'=(\ln(a))\times e^{x\ln a}=(\ln(a))\times a^x$

3) ومنه إشارة: $[f(x)]'=(a^x)=(\ln(a))\times a^x$ هي إشارة $\ln a$:

- إذا كان: $0<a<1$ فإن: $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$ تناقصية:
  ومنه : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a^x<a^y \Leftrightarrow x>y$.
- إذا كان : $a>1$ فإن : $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$ تزايدية:
  ومنه : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a^x<a^y \Leftrightarrow x<y$

8. خاصيات :

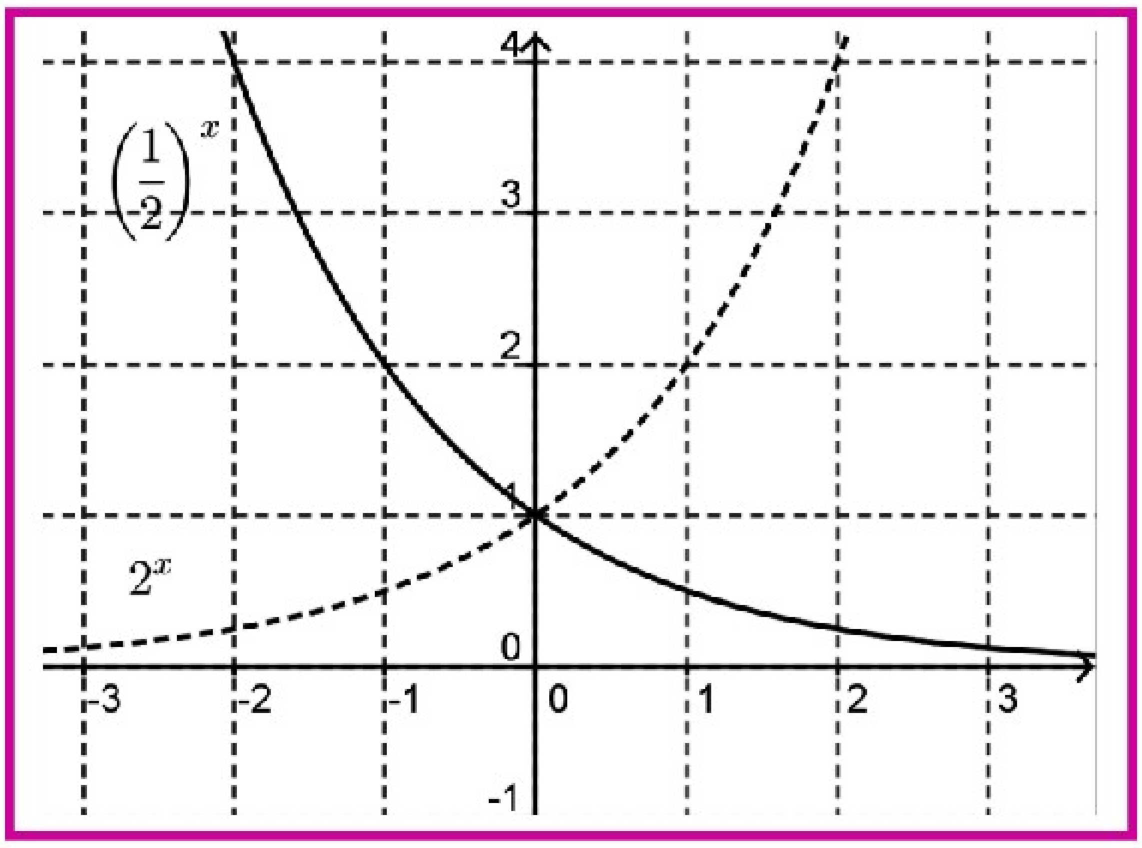
لكل x و y من $\mathbb{R}$:

- $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$
- $a^x\times a^y=a^{x+y}$ و $\frac{1}{a^x}=a^{-x}$ و $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$ و $(a^x)^y=a^{xy}$

إنشاء منحنى الدالة: f في م. م.م مع $(0,\vec{i},\vec{j})$

حالة 1 : $0<a<1$ نأخذ: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

حالة 2 : $a>1$ نأخذ : $f(x)=2^x$.



9. مثال :

1) أكتب الدالة الآتية باستعمال الدالة الأسية النبيرية : $f(x)=3^{x^3-x}$

2) حدد مجموعة تعريف f.

3) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

4) ثم أحسب الدالة المشتقة f' ل f.

I. دالة أصلية لدالة عددية:

01. تقديم دالة أصلية لدالة :

a. نشاط: لنعتبر الدالة : $f(x)=4x^2-5x+3$.

1) هل توجد دالة $F(x)$ تحقق ما يلي $F'(x)=f(x)$ على $\mathbb{R}$ ؟
2) إذا كان الجواب بنعم أكتب صيغة الدالة $F(x)$.

b. مفردات:

كل دالة $F(x)$ تحقق $F'(x)=f(x)$ تسمى دالة أصلية للدالة $f(x)$

c. تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال I . نقول إن دالة F هي
دالة أصلية للدالة f على I اذا كانت F قابلة للاشتقاق على I و $\forall x\in I : F'(x)=f(x)$

1. أمثلة :

1) دالة أصلية للدالة $f(x)=4x+2$ على $\mathbb{R}$ هي $F(x)=2x^2+2x$
2) دالة أصلية للدالة $f(x)=\cos x$ على $\mathbb{R}$ هي $F(x)=\sin x$

02. تحديد جميع الدوال الأصلية لدالة f :

نشاط: دالة أصلية للدالة $f:x\to 2x+3$ على $\mathbb{R}$ هي $F:x\to x^2+3x$.
هل هناك دالة أخرى $G(x)$ حيث G دالة أصلية للدالة f ؟

2. خاصية :

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على مجال I .
مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I هي المجموعة المكونة من الدوال التي هي على شكل: $F(x)+c$ مع $c\in\mathbb{R}$

3. مثال:

نعتبر الدالة $f(x)=10x-2$ المعرفة على $\mathbb{R}$.

1) هل الدالة : $F(x)=5x^2-2x+3$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=10x-2$ على $\mathbb{R}$.
2) حدد جميع الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

03. الدالة الأصلية $G(x)$ حيث: $G(x_0)=y_0$.

1. نشاط: لنعتبر الدالة العددية المعرفة ب: $f(x)=2x+3$.

1) حدد الدوال الأصلية ل f :
2) حدد دوال الأصلية G ل f (إذا كان ممكن) حيث $G(1)=7$.
3) كم من دالة تحقق ذلك ؟

2. خاصية

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على مجال I . ليكن x_0 من I و y_0 و $\mathbb{R}$.
توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على المجال I حيث: $G(x_0)=y_0$.

d. مثال: نحدد الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $f(x)=x^3-2x+3$ و التي تأخذ القيمة -7 عند 0.

04. الاتصال و الدوال الأصلية:

1. خاصية :

كل دالة متصلة f على مجال I تقبل دالة أصلية F على I.

2. أمثلة : مثال 1: كل دالة حدودية تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$. مثال 2: كل دالة جذرية تقبل دالة أصلية على مجموعة تعريفها .
مثال 3: $f(x)=\sqrt{x}$ تقبل دالة أصلية على $]0,+\infty[$.

05. دالة أصلية: لمجموع دالتين - جداء دالة في عدد حقيقي α

1. نشاط: F دالة أصلية للدالة f على I. G دالة أصلية للدالة g على I.
1) حدد دالة أصلية لدالة $f+g$. 2) حدد دالة أصلية لدالة $\alpha\times f$.

2. خاصية

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على مجال I على التوالي و $\alpha\in\mathbb{R}$.
- $F+G$ هي دالة أصلية ل $f+g$.
- $\alpha\times F$ هي دالة أصلية ل $\alpha\times f$.

3. مثال: لنعتبر الدوال: $g(x)=\cos(x)$ و $f(x)=3x$ و $h(x)=3x+2\cos(x)$.

II الدوال الأصلية و العمليات

الدالة h	دالة الأصلية ل h هي F
$h=f'+g'$	$F=f+g$
$h=\alpha f'$	$F=\alpha f$
$h=f'\times g+f\times g'$	$F=f\times g$
$h=-\frac{g'}{g^2}$	$F=\frac{1}{g}$
$h=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$	$F=\frac{f}{g}$
$h=f'\times f^n$ مع $n\neq-1$	$F=\frac{1}{n+1}f^{n+1}$
$h=f'\times f^r$ مع $r\neq-1$	$F=\frac{1}{r+1}f^{r+1}$
$h=f'\times g'\circ f$	$F=g\circ f$
$h=f'(ax+b)$ مع $a\neq 0$	$F=\frac{1}{a}f\ (ax+b)$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\arctan(u(x))+c$

ملحوظة: c عدد حقيقي .

III جدول دوال أصلية لدوال اعتيادية

الدالة f	الدوال الأصلية ل f
$f(x)=a;(a\in\mathbb{R})$	$F(x)=ax+c$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+c$
$f(x)=x^n;(n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$f(x)=x^r;(r\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\})$	$F(x)=\frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)+c$
$f(x)=\sin(ax+b)\ a\neq 0$	$F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)+c$
$f(x)=\cos(ax+b)\ a\neq 0$	$F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$f(x)=1+\tan^2(x)$	$F(x)=\tan(x)+c$
$f(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$F(x)=2\sqrt{f(x)}+c$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+c$

التكامـــل

I- تكامل دالة متصلة على مجال

1- تعريف و ترميز

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I .

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فان F(b)-F(a)=G(b)-G(a).

أي أن العدد الحقيقي F(b)-F(a) غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية F.

تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I.
العدد الحقيقيF(b)-F(a) حيث F دالة أصلية للدالة f علىI , يسمى تكامل الدالة f من a إلى b
ويكتب $\int_a^b f(x)dx$ ويقرأ مجموع $f(x)dx$ من a إلى b أو تكامل من a إلى b لـ $f(x)dx$.

a وb يسميا محدا التكامل $\int_a^b f(x)dx$

في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض x بأي حرف آخر ، بمعنى أن

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots\ldots$$

من أجل تبسيط الكتابة F(b)-F(a) نكتبها على الشكل $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

أمثلة

* نحسب $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

الدالة $x \to \frac{1}{x}$ متصلة على $[1;2]$ و دالة أصلية لها هي $x \to \ln x$

اذن $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$

* أحسب $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x dx$; $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$

2- خاصيات

أ- خاصيات

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb وc عناصر منI

* $\int_a^a f(x)dx = 0$ * $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (علاقة شال)

أمثلة

أحسب $I = \int_{-1}^{1} |x|dx$

$$\int_{-1}^{1} |x|dx = \int_{-1}^{1} |x|dx = \int_{-1}^{0} -xdx + \int_0^1 xdx = \left[\frac{-1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1$$

ب)- لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$
$$x \to \int_a^x f(t)dt$$

لدينا $\forall x \in I \quad \varphi(x) = F(x) - F(a)$ حيث F دالة أصلية لـ f على I.

اذن φ قابلة للاشتقاق على I و $\varphi' = f \quad \varphi(a) = 0$ أي أن φ دالة الأصلية للدالة f على I التي تنعدم في a

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I.

الدالة المعرفة على I بما يلي $x \to \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية لـ f على I التي تنعدم في a

مثال نعلم أن الدالة $x \to \ln x$ هي الدالة الأصلية لـ $x \to \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في1 .

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

تمرين حدد الدالة الأصلية لـ f على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في 2 حيث $\forall x \in]0;+\infty[\quad f(x) = \frac{1}{x}\ln x$

ج)- خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ و λ عدد حقيقي ثابت

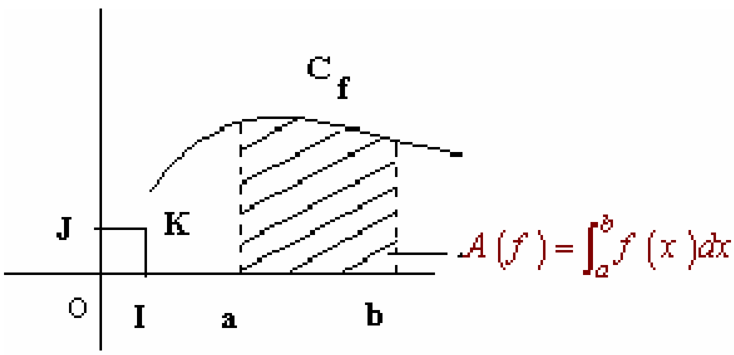
$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$$

تمرين حدد $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1)dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ (يمكن اخطاط $\cos^4 x$)

تمرين نعتبر $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$

أحسب $I + J \quad I - J$ و استنتج $I \quad ; \quad J$

د التأويل الهندسي للعدد $\int_a^b f(x)dx$



خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على $[a;b]$ ($a \prec b$) فان مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ هي

$A(f) = \int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

ملاحظة إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامدين فان وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع OIJK

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{1}{x^2}$

أنشئ C_f $\left(\|\vec{i}\|=1cm \quad \|\vec{j}\|=2cm\right)$

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين

$x=1 \quad ; \quad x=3$.

II- تقنيات حساب التكاملات

1- الاستعمال المباشر لدوال الأصلية

أمثلة

* أحسب $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ نلاحظ أن $\frac{(\ln x)^2}{x}$ على شكل $u'u^2$ حيث $u(x)=\ln x$

و نعلم أن الدالة الأصلية لـ $u'u^2$ هي $\frac{1}{3}u^3$ إذن $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\left[\frac{1}{3}u^3(x)\right]_1^e=\left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e=\frac{1}{3}$

* أحسب $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx$ لدينا $\frac{2}{e^x+1}=2\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ بهذا التحويل نلاحظ أن $\frac{2}{1+e^x}$ يكتب على شكل

$-2\frac{u'}{u}$ حيث $u(x)=1+e^{-x}$ إذن $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx=\left[-2\ln|u(x)|\right]_0^1=\left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1$

تمرين -1 حدد $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 x dx$

-2 أ- أوجد a وb وc حيث $\frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x}=ax+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2+1} \qquad \forall x\neq 0$

ب- استنتج قيمة $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x}dx$

-3 بين أن التعبير $\frac{1}{x^2-2x+5}$ يكتب على شكل $\frac{1}{2}\frac{u'}{u^2+1}$ حيث u دالة يجيب تحديدها .

استنتج قيمة $\int_1^{1+2\sqrt{3}}\frac{1}{x^2-2x+5}dx$

-4 أحسب $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx \quad ; \quad \int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx \qquad \left(\frac{1}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)$

2- المكاملة بالأجزاء

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a;b]$ بحيث f' و g' متصلتين على $[a;b]$

نعلم أن

$$\forall x\in[a;b] \qquad (fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\forall x\in[a;b] \qquad f'(x)g(x)=(fg)'(x)-f(x)g'(x)$$

خاصية

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\left[(fg)(x)\right]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

مثال أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx$ نضع $u'(x)=\cos x \quad ; \quad v(x)=x$

ومنه $u(x)=\sin x \quad ; \quad v'(x)=1$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

تمرين أحسب $I=\int_1^e \ln x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\pi} x^2\sin x dx \quad ; \quad K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx$

الحل

$$K=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-K$$

$$K=\frac{1}{2}\left(\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=.........$$

تمرين 1- أحسب $\int_1^2 x^2\ln x dx \qquad \int_0^3 (x-1)e^{2x}dx \qquad \int_0^1 x\sqrt{x+3}dx \qquad \int_0^1 \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|dx$

2- باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ f على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $f(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$

3- أحسب $I=\int_0^x e^t\cos^2 t dt$ (يمكن اعتبار $J=\int_0^x e^t\sin^2 t dt$)

3- المكاملة بتغيير المتغير

لتكن g دالة قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ حيث g' متصلة على $[a;b]$. و f دالة متصلة على J حيث $g([a;b])=J$

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على J فان $(F\circ g)'(x)=f(g(x))\times g'(x) \quad \forall x\in[a;b]$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\left[F\circ g(x)\right]_a^b=F(g(b))-F(g(a))=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

خاصية

لتكن g دالة قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ حيث g' متصلة على $[a;b]$. و f دالة متصلة على J حيث $g([a;b])=J$.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

ملاحظة

إذا وضعنا $t=g(x)$ فان $\frac{dt}{dx}=g'(x)$ أي $dt=g'(x)dx$

إذا عوضنا في التعبير $f(g(x))g'(x)dx$ المتغير x بالمتغير t نحصل على $f(t)dt$

ولدينا إذا كان $\left.\begin{matrix}x=a\\x=b\end{matrix}\right\}$ فان $\left.\begin{matrix}t=g(a)\\t=g(b)\end{matrix}\right\}$

نقول إننا أجرينا تغييرا للمتغير بوضع $t=g(x)$

أمثلة أحسب $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{4}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx \quad \left(t=\frac{1}{x}\right) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x} \quad \left(t=\tan\frac{x}{2}\right)$

ملاحظة $\left(\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$

تمرين أحسب

$$\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{x}} \quad \left(t=2+\sqrt{x}\right) \quad ; \quad \int_1^{\ln 2} \sqrt{e^x+1} \quad \left(e^x=t\right)$$

$$\int_1^2 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx \quad \left(t=e^x\right) \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx \quad \left(t=\tan x\right)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx \quad \left(t=\frac{e^u-e^{-u}}{2} \quad ; \quad x=\frac{1}{t}\right)$$

III- التكامل و الترتيب

1- مقارنة تكاملين

a) لتكن f دالة متصلة على [a;b] و F دالة أصلية لـ f على [a;b]

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad \forall x\in[a;b] \quad F'(x)=f(x)$$

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان F تزايدية على $[a;b]$

وحيث أن $a\le b$ فان $F(a)\le F(b)$ ادن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

خاصية

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a\le b)$

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

b) خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ $(a\le b)$

إذا كانت $f\le g$ على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

مثال

نؤ طر $I=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

لدينا $\frac{x^2}{2}\le\frac{x^2}{1+x}\le x^2 \Leftrightarrow 1\le 1+x\le 2$ $\quad \forall x\in[0;1]$ ومنه $\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx \le I \le \int_0^1 x^2 dx$

إذن $\frac{1}{6}\le I\le\frac{1}{3}$

c) خاصيات

أ- لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a\le b)$

إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \le 0$

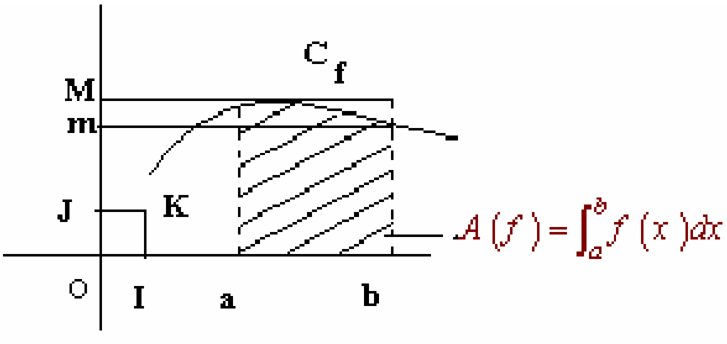
ب- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

ج- لتكن M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان المساحة $A(f)=\int_a^b f(x)dx$ في معلم م.م محصورة بين مساحتي المستطيل الذي بعديه M و $(b-a)$ و المستطيل الذي بعديه m و $(b-a)$.



مثال

نعتبر $I=\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$ نبين أن $0\le I\le\sqrt{2}$

الدالة $x\to\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ موجبة و تناقصية على $]0;+\infty[$ ومنه $\sup_{x\in[1;3]} f(x)=f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

اذن $0\le I\le(3-1)\frac{\sqrt{2}}{2}$

2- القيمة المتوسطة لدالة متصلة في قطعة

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ ($a\prec b$) و M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

إذن $m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$ ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل c في $[a;b]$

حيث $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

خاصية و تعريف

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ ($a\ne b$)

العدد الحقيقي $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a;b]$.

يوجد على الأقل c في $[a;b]$ حيث $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان المساحة $A(f)=\int_a^b f(x)dx$ في معلم م.م هي مساحة المستطيل

الذي بعداه $(b-a)$ و $f(c)$.

تمرين 1- أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على I في الحالتين التاليتين

a) $f(x)=(x-1)e^x$; $I=[-1;0]$; b) $f(x)=\frac{x^3+5x^2+x+3}{x+1}$; $I=[0;1]$

2- أطر الدال f على $[0;1]$ حيث $f(x)=\arctan x$

الجواب عن السؤال2 لدينا f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$; $\forall x\in[0;1]$ و منه

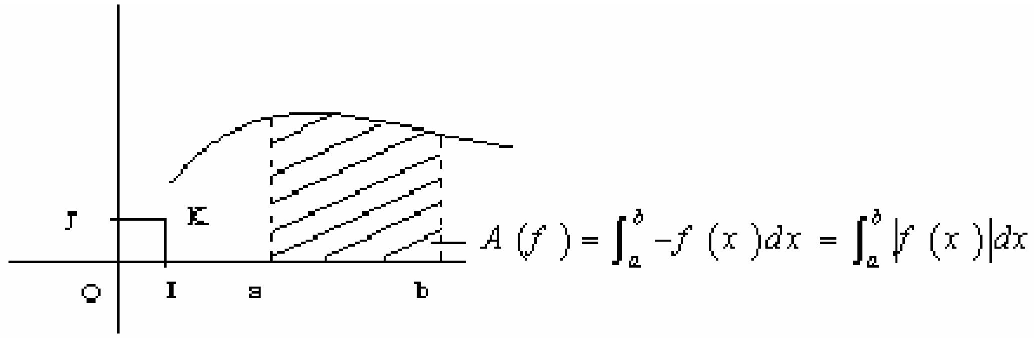
$\frac{1}{2}\le f'(x)\le 1$ $\forall x\in[0;1]$ اذن $\int_0^x \frac{1}{2}dt\le\int_0^x f'(t)dt\le\int_0^x dt$ $\forall x\in[0;1]$ $\frac{x}{2}\le f(x)\le x$

IV- حساب المساحات

1- حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $(\Delta_2): x=b$



*إذ ا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان مساحة $\Delta(f)$ هي $\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

*إذا كان كانت f سالبة على $[a;b]$ مساحة هي مساحة $\Delta(-f)$

$$A(f)=\int_a^b -f(x)dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

* إذا كانت f تغير إشارتها على $[a;b]$ مثلا يوجد c من $[a;b]$ حيث f موجبة على $[a;c]$ و سالبة على $[c;b]$

الحيز $\Delta(f)$ على $[a;b]$ هو اتحاد $\Delta(f)$ على $[a;c]$ و $\Delta(f)$ على $[c;b]$

$$A(f)=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

خاصية

المستوى منسوب الى م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $(\Delta_2): x=b$

مساحة الحيز $\Delta(f)$ هو $\int_a^b |f(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة

اصطلاحات

العدد الموجب $\int_a^b |f(x)|dx$ يسمى المساحة الهندسية للحيز $\Delta(f)$.

العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$ يسمى المساحة الجبرية للحيز $\Delta(f)$.

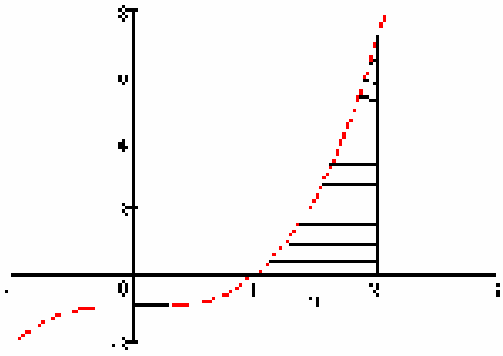
مثال

نعتبر $f(x)=x^3-1$

حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين ذا المعادلتين

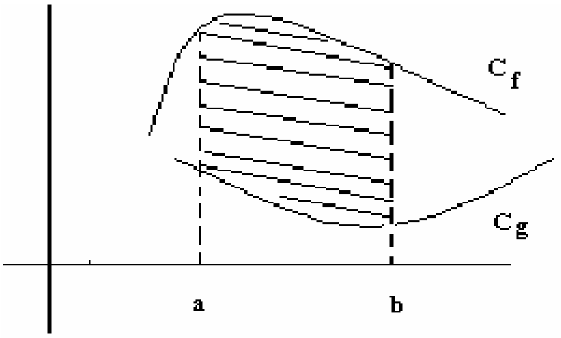
$x=0 \quad ; \quad x=2$

$$A=\int_0^2 |f(x)|dx=\int_0^1 (1-x^3)dx+\int_1^2 (x^3-1)dx=\frac{7}{2}u \qquad \left(u=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\right)$$



-2 مساحة حيز محصور بين منحنيين

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ و Δ هو الحيز المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $(\Delta_2): x=b$ في م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$



إذا كان $f \geq g \geq 0$ فان $A(\Delta)=A(f)-A(g)$

$$A(\Delta)=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

إذا كانت $f \leq g$ و كيفما كانت إشارتي f و g و بإتباع نفس الطريقة نحصل على أن

$$A(\Delta)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

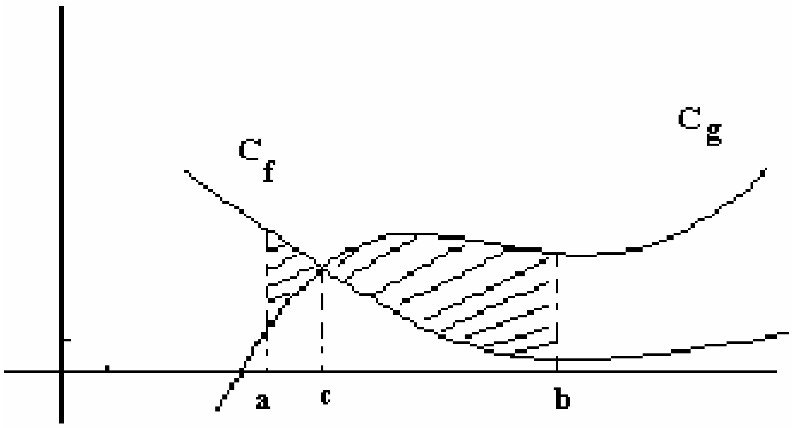
خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$

مساحة الحيز Δ المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $(\Delta_2): x=b$

هي $A(\Delta)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ وحدة قياس المساحات

ملاحظة



$$A(\Delta)=\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx$$

V- حساب الحجوم في الفضاء

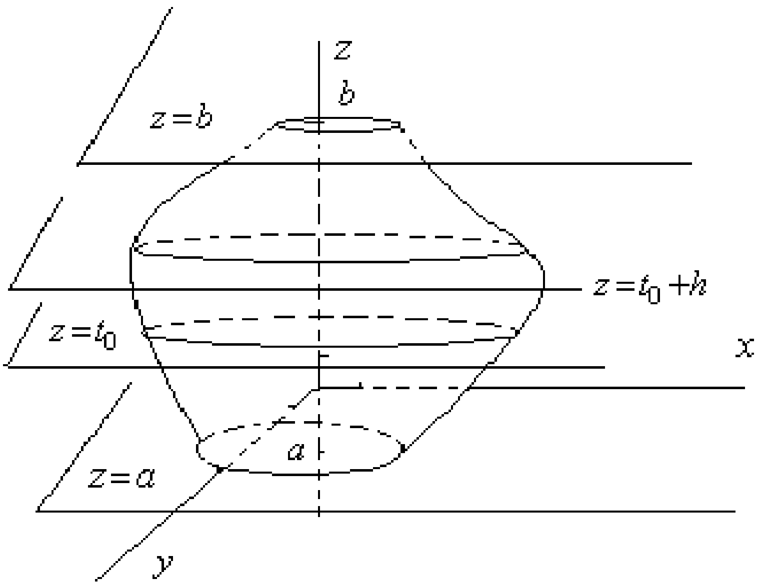
الفضاء منسوب إلى معلم م.م $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نفترض أن وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب الذي طول حرفه $\|\vec{i}\|$

1- حجم مجسم في الفضاء

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z=a$ و $z=b$

نرمز بـ$S(t)$ إلى مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S حيث $z=t$ و بالرمز $V(t)$ إلى حجم مجموعة النقط من S المحصور بين المستويين $z=a$; $z=t$

ليكن t_0 من $[a;b]$ و h عددا موجبا حيث $t_0+h\in[a;b]$



حجم مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S المحصورة بين $z=t_0$ و $z=t_0+h$ هو $V(t_0+h)-V(t_0)$

ومن جهة ثانية هذا الحجم محصور بين حجمي الأسطوانتين التي ارتفاعهما h و مساحتا قاعدتيهما على التوالي $S(t_0)$ و $S(t_0+h)$

إذا افترضنا أن $S(t_0)\le S(t_0+h)$ فان $h\cdot S(t_0)\le V(t_0+h)-V(t_0)\le h\cdot S(t_0+h)$

و منه $S(t_0)\le \dfrac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}\le S(t_0+h)$

و إذا افترضنا أن التطبيق $t\to S(t)$ متصل على $[a;b]$ فان $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}=S(t_0)$

إذن الدالة $t\to V(t)$ قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ و $V'(t)=S(t)\quad \forall t\in[a;b]$

أي أن الدالة $t\to V(t)$ دالة أصلية للدالة $t\to S(t)$ على $[a;b]$

و بما أن $V(a)=0$ فان $V(t)=\int_a^t S(x)dx\quad \forall t\in[a;b]$

إذن حجم المجسم S هو $V=V(b)=\int_a^b S(x)dx$ وحدة قياس الحجم .

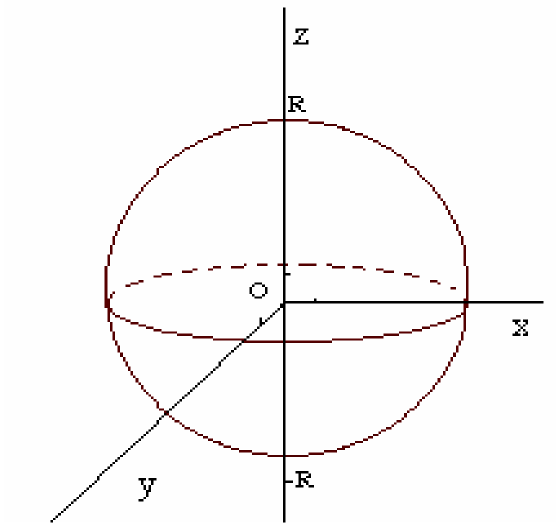
خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم م.م

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z=a$ و $z=b$

نرمز بـ$S(t)$ الى مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S حيث $z=t$

إذا كان أن التطبيق $t\to S(t)$ متصلا على $[a;b]$ فان حجم المجسم S هـو $V=\int_a^b S(z)dz$ وحدة قياس الحجم.



<u>تمرين</u>

أحسب حجم الفلكة التي مركزها O و شعاعها R

الحل : نفترض أن الفضاء منسوب م.م.م أصله O.

الفلكة محصورة بين المستويين المعرفين على التوالي

بالمعادلتين $z = R$; $z = -R$

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفلكة حيث $z = t$ $-R \le t \le R$

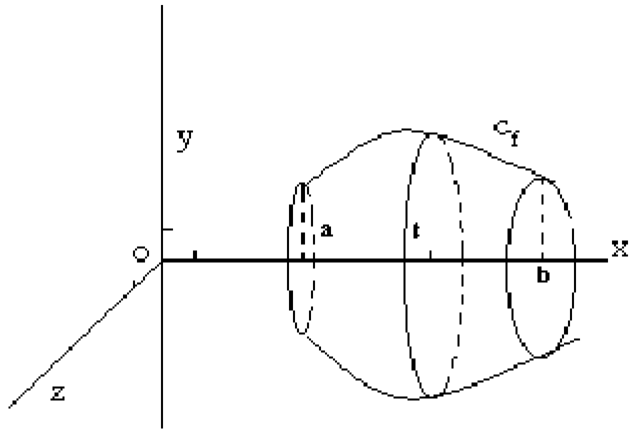
هي قرص شعاعه $\sqrt{R^2 - t^2}$ و مساحته $S(t) = \pi\left(R^2 - t^2\right)$

بما أن التطبيق $t \to \pi\left(R^2 - t^2\right)$ متصلة على $[-R;R]$ فان $= \frac{4}{3}\pi R^3$

<u>2- حجم مجسم الدوران</u>

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

إذا دار C_f حول المحور $(O;\vec{i})$ دورة كاملة فانه يولد مجسما يسمى مجسم الدوران



في هذه الحالة لدينا مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الجسم بحيث $x = t$ هي قرص مساحته

$S(t) = \pi f^2(t)$

التطبيق $t \to \pi f^2(t)$ متصلة على $[a;b]$

إذن حجم المجسم الدوراني هو $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$

<u>خاصية</u>

الفضاء منسوب إلى م.م.م أصله o , و f دالة متصلة على $[a;b]$

حجم مجسم الدوران المولد عن دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) هو $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$

بوحدة قياس الحجم .

<u>تمرين</u>

نعتبر $f(x) = \frac{1}{2}x\ln x$

أنشئ C_f و حدد حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) في المجال $[1;e]$

<u>IV- حساب بعض النهايات باستعمال التكامل</u>

مبرهنة

لتكن f متصلة على $[a;b]$.

لكل عنصر n من $\mathbb{N}^*$ نضع $S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$; $s_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$

إذا كانت f رتيبة قطعا على $[a;b]$ أو قابلة للاشتقاق و f' محدودة على $[a;b]$ فان المتتاليتين (S_n) و (s_n)

متقاربتين و تقبلان التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ نهاية مشتركة لهما عندما يؤول n إلى $+\infty$

مثال

نعتبر $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+......+\frac{1}{2n}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

حدد $\lim u_n$

لدينا $$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

حيث $f(x)=\frac{1}{x}$

لدينا f متصلة وتناقصية على $[1;2]$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln 2$

حالة خاصة

المتوسط الحسابي $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ يؤول الى القيمة المتوسطة $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

تمرين

أحسب النهايات $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2}$

I. المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$

01. تذكير:

- f دالة عددية نرمز لها ب : y.
- f' الدالة المشتقة ل f نرمز ل f' ب : y'.
- الكتابة $f'(x) = af(x) + b$ نكتبها على الشكل الآتي $y' = ay + b$ و تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات ثابتة .
- كل دالة عددية g قابلة للاشتقاق و تحقق المعادلة السابقة (أي $g'(x) = ag(x) + b$) تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

02. حل المعادلة: $y' = ay + b$

المعادلة التفاضلية على شكل	حلول المعادلة هي الدوال $f(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي هي على شكل	مثال	الحلول هي
$y' = b ; b \neq 0$	$f(x) = bx + c$ (مع $c \in \mathbb{R}$)	$y' = 7$	$f(x) = 7x + c$ مع $c \in \mathbb{R}$
حالة خاصة $y' = 0$	$f(x) = c$ (مع $c \in \mathbb{R}$)	$y' = 0$	$f(x) = c$ مع $c \in \mathbb{R}$
$y' = ay ; a \neq 0$	$f(x) = c \times e^{ax}$ (مع $c \in \mathbb{R}$)	$y' = 2y$	$f(x) = c \times e^{2x}$ مع $c \in \mathbb{R}$
$y' = ay + b$ و a و b من $\mathbb{R}^*$	$f(x) = c \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ (مع $c \in \mathbb{R}$)	$y' = 4y + 5$	$f(x) = c \times e^{4x} - \frac{5}{4}$ مع $c \in \mathbb{R}$

03. برهان ل : $a=0$; $y' = ay + b = b$

$y' = b ; b \neq 0$ (الدالة المشتقة ثابتة إذن : $y = f(x) = bx + c$ مع $c \in \mathbb{R}$.

04. برهان ل $a \neq 0$; $y' = ay$ (1) :

نعتبر دالة f حل للمعادلة التفاضلية (1) حيث f معرفة على مجال I . ومنه : $\forall x \in I : f'(x) = af(x)$.

حالة : $\forall x \in I , f(x) = 0$. الدالة المنعدمة هي حل لهذه المعادلة التفاضلية (1) مع $c = 0$.

حالة : $\forall x \in I , f(x) \neq 0$

إذن : $\frac{f'(x)}{f(x)} = a$ و بالتالي : $\ln|f(x)| = ax + c'$ مع c' من $\mathbb{R}$. (درس الدوال الأصلية) .

ومنه : $|f(x)| = e^{ax+c'} = e^{ax} \times e^{c'} = \lambda e^{ax}$ مع $\lambda = e^{c'} > 0$ من $\mathbb{R}$.

ومنه : $f(x) = \lambda e^{ax} > 0$ أو $f(x) = -\lambda e^{ax} < 0$, $\forall x \in I$ مع $\lambda = e^{c'} > 0$ من $\mathbb{R}$.

إذن : يوجد x_1 و x_2 من I حيث : $f(x_1) = \lambda e^{ax_1} > 0$ و $f(x_2) = -\lambda e^{ax_2} < 0$ ؛ حسب مبرهنة التزايدات المنتهية T.V.I

نستنتج أن : يوجد c_0 من I حيث $f(c_0) = 0$. هذا غير ممكن لأن $\forall x \in I , f(x) \neq 0$)

إذن : $\forall x \in I , f(x) = \lambda e^{ax}$ أو $\forall x \in I , f(x) = -\lambda e^{ax}$

باختصار : $\forall x \in I , f(x) = -ce^{ax}$ مع $c \in \mathbb{R}$.

05. برهان ل $y' = ay + b \ ; a \neq 0$ (2) :

لدينا :

$$y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow y' = az \ , \ z = y + \frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow z' = az \ , \ z = y + \frac{b}{a} \ , z' = \left(y + \frac{b}{a}\right)' = y'$$

حسب البرهان السابق نحصل على : حلول المعادلة التفاضلية : $z' = az$ هي الدوال التي على شكل : $z = ce^{ax}$ مع c من $\mathbb{R}$.

إذن : $z = ce^{ax} \Leftrightarrow z = y + \frac{b}{a} = ce^{ax} \Leftrightarrow y = ce^{ax} - \frac{b}{a}$

خلاصة الحل العام ل $y' = ay + b$ و a و b من $\mathbb{R}^*$: هي الدوال التي على شكل $f(x) = c \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ (مع $c \in \mathbb{R}$)

06. خاصية :

المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ تقبل حلا وحيدا f يحقق الشرط البدئي $f(x_0) = y_0$ مع x_0 و y_0 من $\mathbb{R}$

II. المعادلة التفاضلية: $y'' + ay' + by = 0$

01. تعاريف:

a و b من $\mathbb{R}$.

- المعادلة $(E): y'' + ay' + by = 0$ حيث المجهول هو دالة y مع y' مشتقتها الأولى مع y'' مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة .
- كل دالة عددية f قابلة للاشتقاق مرتين و تحقق المعادلة التفاضلية (E) تسمى حل خاص للمعادلة التفاضلية (E)
- المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ حيث r هو المجهول تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $(E): y'' + ay' + by = 0$.

02. حل المعادلة التفاضلية: $y'' + ay' + by = 0$

مبرهنة مقبولة :

لتكن المعادلة التفاضلية: $(E): y'' + ay' + by = 0$ و معادلتها المميزة $r^2 + ar + b = 0$ حيث: a و b من $\mathbb{R}$

و $\Delta = a^2 - 4b$ المميز للمعادلة المميزة

- ❖ $\Delta = a^2 - 4b > 0$ إذن المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$ لها حلين حقيقيين r_1 و r_2 فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي : الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $y = f(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.
- ❖ $\Delta = a^2 - 4b = 0$ إذن المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$ لها حل حقيقي مزدوج r_1 فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي : الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $y = f(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_1 x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.
- ❖ $\Delta = a^2 - 4b < 0$ إذن المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$ لها حلين عقديين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$ فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي : الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $y = f(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

03. ملحوظة:

المعادلة التفاضلية: $y''+\omega^2 y=0$ حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$; $y=f(x)=\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$

04. أمثلة

مثال 1 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E):\ y''-5y'+6y=0$.

1. اعط المعادلة المميزة ل (E) .
2. أعط حلول المعادلة المميزة .
3. استنتج حلول المعادلة (E) .

جواب :

1. المعادلة المميزة ل (E) :
   هي : $(C):\ r^2-5r+6=0$.
2. حلول المعادلة هي :
   $r_2=3\ ,\ r_1=2\ ,\ \Delta=1$.
3. نستنتج حلول المعادلة :
   الحل العام ل (E) هي الدوال التالي على شكل : $y=f(x)=\alpha e^{2x}+\beta e^{3x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

مثال 2 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E):\ y''+y'+y=0$.

1. اعط المعادلة المميزة ل (E) .
2. أعط حلول المعادلة المميزة .
3. استنتج حلول المعادلة (E) .

جواب :

1. المعادلة المميزة ل (E) :
   هي : $(C):\ r^2+r+1=0$.
2. حلول المعادلة هي :
   $\Delta=-3\ ,\ r_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j\ ,\ r_2=\overline{r_1}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\bar{j}$.
3. نستنتج حلول المعادلة :
   الحل العام ل (E) هي الدوال التالي على شكل : $f(x)=\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{1}{2}x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

05. تمرين :

1) حل المعادلة التفاضلية: $(E):y'+2y=0$

2) بين أن : $y_0=e^{-3x}$ حل للمعادلة التفاضلية $(E'):y'+2y=-e^{-3x}$

3) حدد الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E') التي تحقق $g(0)=2$

ثانوية الجولان التأهيلية
بيوكرى

الثانية علوم رياضية

الأستاذ : أحمد مومني

المعادلات التفاضلية

المعدلة التفاضلية هي كل معادلة يكون المجهول فيها دالة عددية وتحتوي على مشتقات هذه الدالة
حل معادلة تفاضلية ما يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة . و مجموعة هذه الدوال تسمى الحل العام للمعادلة التفاضلية و كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلا خاصا
في هذا الدرس سنتطرق إلى نوعين من المعادلات التفاضلية :
1 – المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى : $y' = ay + b$
2 – المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية: $y'' + ay' + b = 0$

I – المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى

1 – المعادلة التفاضلية من نوع : $y' = ay$

a – خاصية

ليكن $a \in \mathbb{R}$
الحل العام لمعادلة من نوع $y' = ay$ هو كل دالة y على شكل $y : x \to Ae^{ax}$ حيث A ثابتة حقيقية تحدد بالشروط البدئية

b – مثال

حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(E): \quad y' = -3y$ و الذي يحقق الشرط $y(0) = \frac{1}{5}$

الحل:
حسب الخاصية السابقة الحل العام للمعادلة (E) هو الدالة y المعرفة كما يلي: $y(x) = Ae^{-3x}$ حيث A ثابتة حقيقية سنحددها

لدينا $y(0) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow Ae^{0} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow A = \frac{1}{5}$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $(E): \quad y' = -3y$ و الذي يحقق الشرط البدئي $y(0) = \frac{1}{5}$ هو الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $y(x) = \frac{1}{5}e^{-3x}$

2 – المعادلة التفاضلية من نوع : $y' = ay + b$

a – خاصية

ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين
الحل العام لمعادلة من نوع $y' = ay + b$ هو كل دالة y على شكل $y : x \to Ae^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث A ثابتة حقيقية تحدد بالشروط البدئية

b – مثال

حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(E): \quad y' = 7y + 5$ و الذي يحقق الشرط $y(-1) = 3$

الحل :
حسب الخاصية السابقة الحل العام للمعادلة (E) هو الدالة y المعرفة كما يلي: $y(x) = Ae^{7x} - \frac{5}{7}$ حيث A ثابتة حقيقية سنحددها

لدينا

$$y(-1)=3 \Leftrightarrow Ae^{-7}-\frac{5}{7}=3$$
$$\Leftrightarrow Ae^{-7}=3+\frac{5}{7}=\frac{26}{7}$$
$$\Leftrightarrow A=\frac{26}{7}e^{7}$$

لدينا ادن الحل العام للمعادلة التفاضلية $(E): \quad y'=7y+5$ و الذي يحقق الشرط البدئي $y(-1)=3$ هو الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $y(x)=\frac{26}{7}e^{7}e^{7x}-\frac{5}{7}=\frac{26}{7}e^{7(x+1)}-\frac{5}{7}$

II – المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

1 – تحديد الحل العام لمعدلة تفاضلية من الرتبة الثانية :

لتكن $(E): \quad y''+ay'+by=0$ معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

المعادلة التالية $r^2+ar+b=0$ تسمى المعدلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E)

وليكن $\Delta=a^2-4b$ مميز المعدلة المميزة

الجدول التالي يلخص الحالات الثلاثة المرتبطة بإشارة $\Delta=a^2-4b$ و كيفية تحديد الحل العام للمعادلة (E)

إشارة المميز Δ	حلول المعادلة المميزة	الحل العام للمعادلة (E)
$\Delta=0$	المعادلة المميزة لها حل وحيد $r=\frac{-a}{2}$	الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y: x \to (Ax+B)e^{rx}$
$\Delta \rangle 0$	المعادلة المميزة لها حلين حقيقيين هما: $r_1=\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}$ و $r_2=\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$	الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y: x \to Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$
$\Delta \langle 0$	المعادلة المميزة لها حلين عقديين مترافقين يكتبان على شكلهما الجبري : $r_1=\rho+i\omega$ و $r_2=\rho-i\omega$	الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y: x \to (A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x))e^{\rho x}$

ملاحظة:

A و B ثابتتان حقيقيتان تحددان بالشروط البدئية (أنظر الأمثلة)

يمكن تلخيص مضمون الجدول أعلاه في الخطاطة التالية و التي تبين أهم المراحل الضرورية و الكافية لحل معادلة تفاضلية من النوع (E)

$$\boxed{(E): \quad y''+ay'+by=0}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{r^2+ar+b=0}$$

$\boxed{\Delta=0}$ ⇓ الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y: x \to (Ax+B)e^{rx}$ حيث r هو الحل الوحيد للمعادلة المميزة

$\boxed{\Delta \rangle 0}$ ⇓ الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y: x \to Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$ حيث r_1 و r_2 هما الحلين الحقيقيين للمعادلة المميزة

$\boxed{\Delta \langle 0}$ ⇓ الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y: x \to (A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x))e^{\rho x}$ حيث $r_1=\rho+i\omega$ و $r_2=\rho-i\omega$ حلين عقديين للمعادلة التفاضلية

2 - أمثلة

مثال رقم 01:

لتكن (E) المعادلة التفاضلية التالية: $y''-2y'+3y=0$

حدد الحل العام لهذه المعادلة

الحل

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي : $r^2-2r+3=0$

لدينا $\Delta=(-2)^2-4(3)=4-12=-8=\left(i\sqrt{8}\right)^2$

$\Delta \langle 0$ ادن المعادلة المميزة لها حلين عقديين و هما:

$$r_2=\frac{2+i\sqrt{8}}{2}=1+i\sqrt{2} \quad \text{و} \quad r_1=\frac{2-i\sqrt{8}}{2}=\frac{2-i\,2\sqrt{2}}{2}=1-i\sqrt{2}$$

ومنه الحل العام للمعادلة (E) هو: $y:x\to\left(A\cos(\sqrt{2}x)+B\sin(\sqrt{2}x)\right)e^{x}$

مثال رقم02:

حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية $(E):\quad 2y''-3y'-2y=0$:

و الذي يحقق الشرطين البدئيين $y(0)=1$ و $y'(0)=-1$

الحل

المعادلة المميزة للمعادلة $(E):\quad 2y''-3y'-2y=0$ هي كما يلي: $2r^2-3r-2=0$

مميز هذه المعادلة المميزة هو: $\Delta=3^2-4(2)(-2)=9+16=25$ ا

$\Delta \rangle 0$ ادن المعادلة المميزة لها حلين حقيقيين و هما :

$$r_2=\frac{3+\sqrt{25}}{4}=2 \quad \text{و} \quad r_1=\frac{3-\sqrt{25}}{4}=\frac{-1}{2}$$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) هو : $y:x\to Ae^{\frac{-1}{2}x}+Be^{2x}$ حيث A و B ثابتتان حقيقيتان تحددان بالشروط البدئية : ا

لدينا :

$$y(0)=1 \Leftrightarrow Ae^{0}+Be^{0}=1$$
$$\Leftrightarrow A+B=1$$

و لدينا

$$y'(0)=-1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2}Ae^{0}+2Be^{0}=-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}A+2B=-1$$

لدينا ادن النظمة التالية:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ \frac{-1}{2}A+2B=-1 \end{cases}$$

من السهل حل هذه النظمة ونحصل على $A=\frac{6}{5}$ و $B=\frac{-1}{5}$

و منه الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) و الذي يحقق الشرطين البدئيين $y(0)=1$ و $y'(0)=-1$ هو:

$$y:x\to\frac{6}{5}e^{\frac{-1}{2}x}-\frac{1}{5}e^{2x}$$

المخروطيات
المنحنيات من الدرجة الثانية

مثال 1 : **الطريقة الأولى تعتمد على تغيير المعلم بتغيير الأساس**

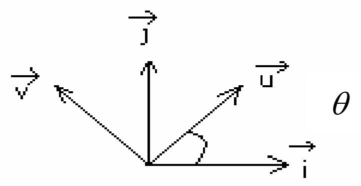
في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ؛ نعتبر المجموعة : $(E)=\left\{M\ (x,y)\in P \,/\, 5x^2+5y^2+6xy-8=0\right\}$.

في المستوى المتجهي V_2 ؛ نعتبر المتجهتين : $\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ و $\vec{v}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.

1. حدد معادلة ديكارتية للمنحنى (E) في المعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ثم استنتج طبيعة المنحنى (E).
2. أنشئ المنحنى (E) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

الحل : تذكير :

إذا كان $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ و $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ أساسان متعامدان ممنظمان حيث : $\left(\overline{\vec{i},\vec{u}}\right)\equiv\theta[2\pi]$ و $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ؛ فإن :



$\vec{u}=\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j}$ و $\vec{v}=-\sin(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j}$.

في المثال ؛ لدينا : $\vec{u}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i}+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$ و $\vec{v}=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i}+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$.

يتم اختيار $\theta=\frac{\pi}{4}$ بحيث تكون معادلة (E) غير محتوية على الحد xy .

1. نعتبر M نقطة من المستوى P بحيث :

(x,y) هو زوج إحداثيتي النقطة M بالنسبة للمعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (X,Y) هو زوج إحداثيتي النقطة M بالنسبة للمعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

لدينا :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{u}+Y\vec{v}\iff x\vec{i}+y\vec{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}X\left(\vec{i}+\vec{j}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}Y\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$$

$$\iff \begin{cases}\boxed{x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)}\\ \boxed{y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)}\end{cases}$$

ومنه فإن :

$$\begin{aligned}M\in(E)&\iff 5x^2+5y^2+6xy-8=0\\&\iff \frac{5}{2}(X-Y)^2+\frac{5}{2}(X+Y)^2+\frac{6}{2}(X-Y)(X+Y)-8=0\\&\iff 5\left(X^2-2XY+Y^2\right)+5\left(X^2+2XY+Y^2\right)+6\left(X^2-Y^2\right)-16=0\\&\iff 16X^2+4Y^2-16=0\\&\iff \boxed{\frac{X^2}{1^2}+\frac{Y^2}{2^2}=1}\end{aligned}$$

إذن (E) إهليليج مركزه $O\,(0,0)$ ورؤوسه بالنسبة للمعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ هي : $A\,(1,0)$ و $A'(-1,0)$ و $B\,(0,2)$ و $B'(0,-2)$.

لدينا : $a=1$ و $b=2$. بما أن $a<b$ فإن : $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ ومنه فإن بؤرتي الإهليليج (E) بالنسبة للمعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ هما $F\left(0,\sqrt{3}\right)$ و $F'\left(0-\sqrt{3}\right)$. ودليلاه هما : $(D):Y=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ و $(D'):Y=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

تباعده المركزي هو : $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

وبما أن : $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \end{cases}$ فإن : $\begin{cases} \boxed{X=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)} \\ \boxed{Y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)} \end{cases}$. إذن بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ نحصل على :

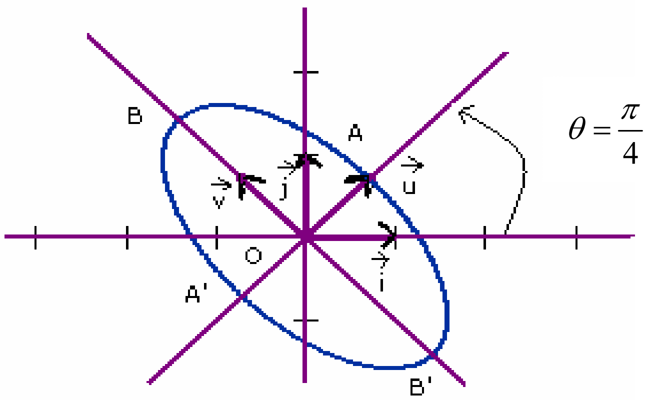
رؤوس (E) هي : $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $A'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $B\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ و $B'\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

بؤرتي (E) هما : $F\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ و $F'\left(\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

دليلا (E) هما : $(D):\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x+y=\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ و $(D'):\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

أي : $(D):-x+y=\frac{4\sqrt{6}}{3}$ و $(D'):x+y=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

إنشاء الإهليليج (E) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$:



مثال 2 : الطريقة الثانية تعتمد على الدوران

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ؛ نعتبر المجموعة $(E)=\{M(x,y)\in P / 5x^2+5y^2+6xy-8=0\}$

ونعتبر الدوران R الذي مركزه $O(0,0)$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{4}$.

1. أكتب معادلة ديكارتية للمجموعة $[R(E)]$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ثم استنتج طبيعة $[R(E)]$.

2. حدد طبيعة المجموعة (E) ثم أنشئها في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الحل : لتكن M نقطة من المستوى P بحيث :

(x,y) هو زوج إحداثيتي النقطة M بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و (X,Y) هو زوج إحداثيتي النقطة $M'=R(M)$ بالنسبة للمعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$. لدينا :

$$M'=R(M)\Leftrightarrow\begin{cases} X=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y \\ Y=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)x+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \boxed{X=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)} \\ \boxed{Y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)} \end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-X+Y) \end{cases}}$$

تذكير : الصيغة التحليلية للدوران $R(O,\theta)$ هي : $\begin{cases} X=\cos(\theta)x-\sin(\theta)y \\ Y=\sin(\theta)x+\cos(\theta)y \end{cases}$

لدينا $M'(X,Y)\in R(E)$ إذن $\exists M(x,y)\in E\,/\,M'=R(M)$ ومنه فإن :

$5x^2+5y^2+6xy-8=0$ و $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-X+Y) \end{cases}$.

إذن : $5\times\dfrac{1}{2}(X+Y)^2+5\times\dfrac{1}{2}(-X+Y)^2+6\times\dfrac{1}{2}(X+Y)(-X+Y)-8=0$

أي : $5\left(X^2+Y^2+2XY\right)+5\left(X^2+Y^2-2XY\right)+6\left(Y^2-X^2\right)-16=0$

يكافئ : $4X^2+16Y^2=16$ وبالتالي فإن : $\dfrac{X^2}{2^2}+\dfrac{Y^2}{1^2}=1$: $[R(E)]$. ومنه فإن $(E')=R(E)$ إهليليج مركزه $O(0,0)$

ولدينا : $a=2$ و $b=1$ إذن : $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ؛ لدينا :

رؤوس (E') هي : $A(2,0)$ و $A'(-2,0)$ و $B(0,1)$ و $B'(0,-1)$.

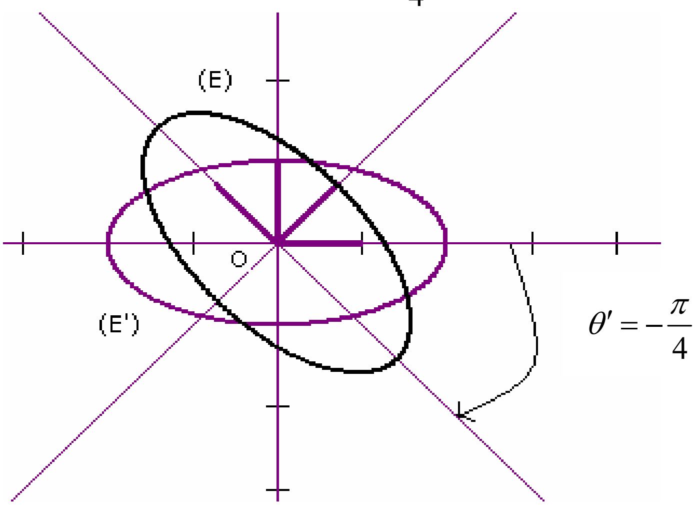
بؤرتي (E') هما : $F(\sqrt{3},0)$ و $F'(-\sqrt{3},0)$.

التباعد المركز للإهليليج (E') هو : $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

دليلا (E') هما : $(D):x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ و $(D'):x=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

2. إنشاء المجموعة (E) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$:

لدينا : $(E')=R\left(O,\dfrac{\pi}{4}\right)((E))$ إذن : $(E)=R\left(O,-\dfrac{\pi}{4}\right)((E'))$ وبما أن (E') إهليليج فإن (E) هو أيضا إهليليج يستنتج من الإهليليج (E') بالدوران الذي مركزه $O(0,0)$ وزاويته $\theta'=-\dfrac{\pi}{4}$ كما يلي :



الفضاءات المتجهية الحقيقية

I – تعريف و أمثلة :

1 – قانون تركيب خرجي :

a – تعريف :

لتكن A و E مجموعتين غير فارغتين

كل تطبيق f من $A\times E$ نحو E يسمى قانون تركيب خارجي معرف على E ذو المعاملات في A

بتعبير أخر :

f قانون تركيب خارجي معرف على E ذو المعاملات في A $\Leftrightarrow$ $\begin{aligned} f : A\times E &\to E \\ (\alpha,x) &\to f(\alpha,x)\end{aligned}$

يرمز عادة للصورة $f(\alpha,x)$ بالرمز $\alpha\bullet x$ أو αx

b – أمثلة :

1 – لكل α من IR و M من $M_2(IR)$ حيث $M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ لدينا : $\alpha M=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22}\end{pmatrix}\in M_2(IR)$

إذن :التطبيق : $\begin{aligned} f : IR\times M_2(IR) &\to M_2(IR) \\ (\alpha,M) &\to \alpha M\end{aligned}$ قانون تركيب خارجي معرف على $M_2(IR)$ و معاملاته في IR

2 – لكل α من IR و f من $F(I,IR)$ (مجموعة الدوال العددية المعرفة على مجال I ضمن IR نحو IR)

لدينا : $\alpha f\in F(I,IR)$

إذن : التطبيق $\begin{aligned} g : IR\times F(I,IR) &\to F(I,IR) \\ (\alpha,f) &\to \alpha f\end{aligned}$ قانون تركيب خارجي معرف على $F(I,IR)$ و معاملاته في IR

2 – تعريف الفضاء المتجهي :

a – تعريف :

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي * و بقانون تركيب خارجي معاملاته في IR : $\begin{aligned} f : IR\times E &\to E \\ (\alpha,x) &\to \alpha\bullet x\end{aligned}$
نقول أن : $(E,*,\bullet)$ فضاء متجهي على IR أو فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :
1 – $(E,*)$ زمرة تبادلية
2 – $(\alpha+\beta)\bullet x=\alpha\bullet x+\beta\bullet x$ $\quad(\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall x\in E)$
3 – $(\alpha\beta)\bullet x=\alpha\bullet(\beta\bullet x)$ $\quad(\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall x\in E)$
4 – $\alpha\bullet(x*y)=\alpha\bullet x*\alpha\bullet y$ $\quad(\forall\alpha\in IR)(\forall(x,y)\in E^2)$

5 – $1\bullet x = x \qquad (\forall x \in E)$

في ما تبقى من هذا الدرس نرمز للقانون الداخلي * بالرمز + و لكل عنصر x من E بالرمز $\vec{x}$ و نسميه متجهة منه التعريف التالي للفضاء المتجهي $(E,+,\times)$

نقول أن : $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي على IR أو فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :
1 – $(E,+)$ زمرة تبادلية
2 – $(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \qquad (\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall\vec{x}\in E)$
3 – $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x}) \qquad (\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall\vec{x}\in E)$
4 – $\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} \qquad (\forall\alpha\in IR)(\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2)$
5 – $1\bullet\vec{x} = \vec{x} \qquad (\forall x \in E)$

b – قواعد الحساب في فضاء متجهي :

ليكن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي لدينا الخاصيات التالية

1	$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{b}+(-\vec{a})$ المتجهة $\vec{b}+(-\vec{a})$ تسمى فرق المتجهتين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وتكتب كذلك $\vec{b}-\vec{a}$
2	$\alpha\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \alpha=0$ أو $\vec{x}=\vec{0} \qquad (\alpha\in IR)(\forall x\in E)$
3	$(-\alpha)\vec{x}=\alpha(-\vec{x})=-(\alpha\vec{x}) \qquad (\alpha\in IR)(\forall x\in E)$
4	$\alpha(\vec{y}-\vec{x})=\alpha\vec{y}-\alpha\vec{x} \qquad (\alpha\in IR)(\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2)$
5	$(\alpha-\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}-\beta\vec{y} \qquad (\forall(\alpha,\beta)\in IR^2)(\forall\vec{x}\in E)$

c – أمثلة و تمارين تطبيقية : (أنظر سلسلة التمارين)

II – الفضاء المتجهي الجزئي :

1 – تعريف :

ليكن $(E,+,\times)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء غير فارغ من E
نقول أن F فضاء متجهي جزئي من الفضاء E إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :
1 – F مستقر بالنسبة للقانون الداخلي + أي : $\vec{x}+\vec{y}\in F \qquad (\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2)$
2 – F مستقر بالنسبة للقانون الخارجي × أي : $\lambda\vec{x}\in F \qquad (\forall\vec{x}\in F)(\forall\lambda\in IR)$

بتعبير أخر :

F فضاء متجهيا جزئيا من E $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} F\neq\emptyset \\ F\subset E \\ (\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2) \quad \vec{x}+\vec{y}\in F \\ (\forall\lambda\in IR)(\forall x\in F) \quad \lambda\vec{x}\in F \end{cases}$

2 – أمثلة :

1	$\{\vec{0}\}$ و E فضائين متجهيين جزئيين من الفضاء المتجهي $(E,+,\times)$
2	P_n مجموعة الحدوديات التي درجتها أصغر من تساوي n فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي

$\left(F\left(IR,IR\right),+,\times\right)$	
$\left\{(x,y)\in IR^2\ /y=2x\right\}$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $\left(\mathrm{IR}^2,+,\times\right)$ (تحقق من ذلك)	3

3 – الخاصية المميزة لفضاء متجهي جزئي :

ليكن $(E,+,\times)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء من E

F فضاء متجهيا جزئيا من E $\Leftrightarrow$	$\begin{cases} F\neq\varnothing \\ \left(\forall(\lambda,\beta)\in IR^2\right)\left(\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2\right) \quad \beta\vec{x}+\lambda\vec{y}\in F \end{cases}$

III – التأليفات الخطية :

1 – تعريف :

لتكن $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و $\cdots$ و $\vec{x}_n$ متجهات من الفضاء المتجهي E و α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n أعدادا حقيقية .

المتجهة $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$ تسمى تأليفة خطية للمتجهات $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و $\cdots$ و $\vec{x}_n$ ذات المعاملات α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n

ونقول كذلك أن الأسرة $B=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\right)$ تولد المتجهة $\vec{x}$ أو المتجهة $\vec{x}$ مولدة بالأسرة $B=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\right)$

و نقول عن أسرة $B=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\right)$ أنها تولد الفضاء المتجهي E إ وفقط إذا كانت كل متجهة $\vec{x}$ من E تكتب على شكل تأليفة خطية للمتجهات $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و $\cdots$ و $\vec{x}_n$

بتعبير اخر:

$\vec{x}$ مولدة بالأسرة $\Leftrightarrow$ $B=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\right)\ \left(\exists(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in IR^n\right)\Big/\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

الفضاء E مولد بالأسرة $\Leftrightarrow$ $B=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\right)\ \left(\forall\vec{x}\in E\right)\left(\exists(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in IR^n\right)\Big/\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

2 – تمرين تطبيقي:

نعتبر المجموعة E المعرفة بالصيغة التالية : $E=\left\{(x,y,z)\in IR^3/x-y+3z=0\right\}$

1 – بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

2 – لتكن $\vec{e}_1=(1,1,0)$ و $\vec{e}_2=(0,3,1)$ متجهتين من E

بين أن الأسرة $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ تولد الفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$

3 – الارتباط و الاستقلال الخطي:

a – تعريف

لتكن $B=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\right)$ أسرة من متجهات الفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$

نقول أن:

الأسرة B مرتبطة خطيا أو مقيدة

$\Leftrightarrow \left(\exists(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in IR^n\right)\Big/\ (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\neq(0,0,\ldots,0)$ و $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=o$

الأسرة B مستقلة خطيا أو حرة $\Leftrightarrow \left(\forall(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in IR^n\ ;\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0\Rightarrow \alpha_1=\alpha_1=\dots=\alpha_n=0\right)$

b – مثال :

في الفضاء المتجهي $\left(M_2(IR),+,\bullet\right)$ نعتبر الأسرتين $B_1=(L,J)$ و $B_2=(L,J,K)$ بحيث :

$$L=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \text{ و } J=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix} \text{ و } K=\begin{pmatrix}2&6\\3&4\end{pmatrix}$$

لدينا : $2L+3J=2\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&6\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6\\3&4\end{pmatrix}=K$

إذن : $2L+3J-K=0$

ومنه ألأسرة $B_2=(L,J,K)$ مقيدة لأن : $2L+3J-K=0$ و $(2,3,-1)\neq(0,0,0)$

من جهة أخرى لدينا :

$$\alpha L+\beta J=0\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\beta\\\beta&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha&2\alpha\\\beta&2\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\alpha=\beta=0$$

إذن الأسرة $B_1=(L,J)$ حرة

c – خاصيات :

إذا كانت B أسرة مقيدة فإن كل أسرة تتضمنB تكون كذلك مقيدة

إذا كانتB أسرة ضمن أسرة حرة فإن B تكون كذلك حرة

بتعبير أخر :

B أسرة مقيدة و $B\subset B'$ $\Leftarrow$ B' أسرة مقيدة B أسرة حرة و $B'\subset B$ $\Leftarrow$ B' أسرة حرة

1 – إذا كانت في أسرة B متجهتان متساويتان فإن B تكون مقيدة 2 – إذا كانت أحدى متجهات أسرة B على شكل تأليفة خطية للعناصر الأخرى فإن B تكون مقيدة 3– إذا كانت أسرة Bحرة فإن جميع عناصرها غير منعدمة و مختلفة مثنى مثنى

4 – أساس فضاء متجهي حقيقي:

a – تعريف :

ليكن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نقول أن أسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$ من متجهات E أساس للفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$ إذا وفقط إذا كانت كل متجهة من E تكتب بكيفية **وحيدة** على شكل تأليفة خطية لمتجهات الأسرة B

بتعبير أخر :

$B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$ أساس للفضاء E $\Leftrightarrow (\forall\vec{x}\in E)\left(\exists!(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in IR^n\right)\Big/\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$

الأعداد الحقيقية α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n تسمى إحداثيات المتجهة $\vec{x}$ بالنسبة للأساس $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$

b – مثال :

في $\left(IR^3,+,\bullet\right)$ نعتبر المتجهات التالية : $\vec{e}_1=(1,0,0)$ و $\vec{e}_2=(0,1,0)$ و $\vec{e}_3=(0,0,1)$

لنبين أن الأسرة $B=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ أساس للفضاء المتجهي $\left(IR^3,+,\bullet\right)$

لتكن $\vec{x}=(a,b,c)\in IR^3$

$$\vec{x}=(a,b,c)=(a,0,0)+(0,b,0)+(0,0,c)$$

لدينا : $=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)$

$$=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3$$

نفترض أنه توجد أعداد حقيقية أخرى a' و b' و c' بحيث : $\vec{x}=a'\vec{e}_1+b'\vec{e}_2+c'\vec{e}_3$

لدينا إذن $a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3=a'\vec{e}_1+b'\vec{e}_2+c'\vec{e}_3\Rightarrow(a-a')\vec{e}_1+(b-b')\vec{e}_2+(c-c')\vec{e}_3=(0,0,0)$

ومنه: $(a-a')(1,0,0)+(b-b')(0,1,0)+(c-c')(0,0,1)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow(a-a',0,0)+(0,b-b',0)+(0,0,c-c')=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow(a-a',b-b',c-c')=(0,0,0)$$

$\Rightarrow a=a'$ و b=b' و c=c'

إذن كل متجهة من $\left(IR^3,+,\bullet\right)$ تكتب بكيفية **وحيدة** على شكل تأليفة خطية لمتجهات الأسرة $B=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$

و بالتالي $B=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ أساس للفضاء المتجهي $\left(IR^3,+,\bullet\right)$

c – خاصيات :

ليكن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

1	$B=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\right)$ أساس للفضاء E $\Leftrightarrow$ B أسرة مولدة وحرة للفضاء المتجهي E عدد متجهات الأساس B يسمى بعد الفضاء التجهي E ونرمز له ب $\dim E$ ($\dim E=card(B)$)
2	إذا كانت α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n إحداثيات متجهة $\vec{x}$ و β_1 و β_2 و $\cdots$ و β_n إحداثيات متجهة $\vec{y}$ فإن $\alpha_1+\beta_1$ و $\alpha_2+\beta_2$ و $\cdots$ و $\alpha_n+\beta_n$ إحداثيات المتجهة $\left(\vec{x}+\vec{y}\right)$
3	إذا كانت α_1 و α_2 و $\cdots$ و α_n إحداثيات متجهة $\vec{x}$ فإن إحداثيات المتجهة $\lambda\vec{x}$ هي : $\lambda\alpha_1$ و $\lambda\alpha_2$ و $\cdots$ $\lambda\alpha_n$
4	جميع أساسات E مكونة من n متجهة $\Rightarrow \dim E=n$
5	$\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ أساس للفضاء E ($\dim E=2$) $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)\Leftrightarrow$ حرة $\Leftrightarrow\det\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)\neq0$
6	$\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ أساس للفضاء E ($\dim E=3$) $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\Leftrightarrow$ حرة $\Leftrightarrow\det\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\neq0$
7	B و B' أساسين للفضاء E $\Rightarrow card(B)=card(B')$