أكاديمية الجهة الشرقية

مستوى الجدع مشترك أدبي
مذكرة رقم1 : الحساب العددي1

الأستاذ: نجيب عثماني

محتوى الدرس

مجموعة الأعداد
العمليات في المجموعة IR وخاصياتها
المتطابقات الهامة
القوى ذات الأس الصحيح النسبي، قوى العدد 10 ، الكتابة العلمية لعدد عشري
الجذور المربعة والعمليات في IR
التناسبية

القدرات المنتظرة

- التمكن من تقنيات الحساب العددي
- التمييز بين مجموعات الأعداد
- التمييز بين عدد وقيمة مقربة له
- توظيف المتطابقات الهامة في نشر وتعميل بعض التعابير الجبرية
توظيف التناسبية في حل مسائل متنوعة

توجيهات تربوية

تهدف هذه الفقرة إلى توظيف مختلف المعارف المكتسبة حول مجموعات الأعداد وإدخال الرموز الخاصة بالمجموعات. كما تهدف إلى تنظيم وتثبيت وتقوية المعارف والقدرات المكتسبة بالتعليم الثانوي الإعدادي .
انطلاقا من أنشطة وتمارين، يقدم الجذر المربع لعدد صحيح طبيعي الذي ليس مربعا كاملا، كمثال لعدد لاجذري .
اختيار أنشطة تبرز دور الرياضيات في معالجة وضعيات مستقاة من الواقع المعيش، وتمثل التناسبية أحد أوجه هذا الاستعمال .
ينبغي تزويد التلميذ بالمعلومات الأساسية المتعلقة بالآلة الحاسبة العلمية (حساب جذر مربع، مجاميع جبرية، قيم مقربة ...)

I. مجموعات الأعداد

نشاط : من بين الأعداد التالية حدد تلك التي تمثل أعدادا صحيحة طبيعية : 2, -5, 11, $\frac{11}{4}$, $12-17$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{16}$, 5, 2 .

- الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ و نكتب: $\mathbb{N}=\{0;1;2;\cdots\}$
- الأعداد الصحيحة النسبية أي الأعداد الصحيحة الطبيعية و مقابلاتها تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ و نكتب: $\mathbb{Z}=\{\cdots-3;-2;0;1;2;3;\cdots\}$
- الأعداد العشرية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز D
- الأعداد الجذرية أي الأعداد التي تكتب على الشكل $\frac{a}{b}$ حيث: $a\in\mathbb{Z}$ و $b\in\mathbb{N}^*$, تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$.
- الأعداد الجذرية و اللاجذرية تكون مجموعة الأعداد الحقيقية و نرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$.

أنشطة : استعمال الرموز: $\in;\notin;\subset;\not\subset$

العدد 7- هو عنصر من $\mathbb{Z}$ نكتب $-7\in\mathbb{Z}$ نقرأ:" 7- ينتمي الى $\mathbb{Z}$ "
في حين 7- لا ينتمي الى $\mathbb{N}$ و نكتب $-7\notin\mathbb{N}$ ولدينا $\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$
$\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ لكن $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ لأنه لا يمكن ايجاد عددين صحيحين a و b بحيث $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ و b غير منعدم.
كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي, نقول ان المجموعة $\mathbb{N}$ توجد ضمن $\mathbb{Z}$ و نكتب $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

ليس كل عدد عشري هو عدد صحيح نسبي, نقول ان المجموعة D ليست ضمن $\mathbb{Z}$ و نكتب $D\not\subset\mathbb{Z}$.
لأن هناك عناصر من D لا تنتمي الى $\mathbb{Z}$.
كذلك: كل عنصر من D هو عنصر من $\mathbb{Q}$: $D\subset\mathbb{Q}$
و كل عنصر من $\mathbb{Q}$ هو عنصر من $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. لدينا
اذن: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset D\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

تمرين1: باستعمال الرموز: $\in;\notin;\subset;\not\subset$ املأ الفراغات التالية :

$\mathbb{Z}$ ...7- و $\mathbb{Q}$.....$\frac{2}{3}$ و $\mathbb{Q}$.....$\sqrt{2}$ و $\mathbb{R}$.....$\sqrt{2}$
و $\mathbb{R}$.....$\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}$.....$\mathbb{N}$
$\mathbb{R}^+$.....$-\frac{2}{3}$ و $\mathbb{N}$.....$\frac{2}{3}$ و $\mathbb{N}$.....$\frac{6}{2}$ و
$\mathbb{N}$.....$\frac{\sqrt{100}}{5}$ و $\mathbb{Z}$.....$\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}$.....$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$.....π و $\mathbb{Q}^{*-}$.....$-\frac{7}{3}$ و $\mathbb{Q}$.....$\sqrt{2}$ و
$\mathbb{N}$.....$\sqrt{16}$ و $\mathbb{N}$.....$\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}^*$.....0

II. العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ وخاصياتها

1. العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$

الجمع في $\mathbb{R}$

a و b و c أعداد حقيقية
1) $a+b=b+a$
2) $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$

3) $a+0=0+a=a$

4) $(-a)+a=a+(-a)=0$

الضرب في $\mathbb{R}$: a و b و c أعداد حقيقية

1. $a\times b=b\times a=ab=ba$
2. $a(bc)=(ab)c=(ac)b=abc$
3. $a\neq 0; a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=\frac{a}{a}=1$

العمليات على الكسور: a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $bd\neq 0$

1) $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

2) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

3) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

4) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

5) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

6) $\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}; bc\neq 0$

7) $-a$ يسمى مقابل a

8) $a-b=a+(-b)$

9) $-(a-b)=-a+b$

10) $\frac{1}{a}$ يسمى مقلوب العدد a حيث $a\neq 0$

العدد $\frac{a}{b}$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و $b\in\mathbb{R}^*$ يسمى خارج العدد a على b.

$$\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$$

11) $\frac{a}{b}=c$ يكافئ $a=bc$

12) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يكافئ $ad=bc$

13) $\frac{a}{b}=1$ يكافئ $a=b$

14) $\frac{a}{b}=0$ يكافئ $a=0$

أمثلة : أحسب و بسط :

$A=-\frac{5}{9}+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}$ و $B=-3(-11)+7-5+8-10$ و

$C=3a-4b+c+11a-3b-7c$

و $D=\frac{\frac{5}{3}-1}{-3\frac{2}{7}}$ و $E=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}$ $F=\frac{4}{7}\times\frac{14}{6}-\frac{25}{8}\times\frac{3}{15}$

$G=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}+1-\frac{3}{2}\right)$ $H=\left(1-\frac{4}{3}\right)^2$

الأجوبة :

$$A=-\frac{5}{9}+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=-\frac{5}{9}+\frac{10}{3}=\frac{-5+30}{9}=\frac{25}{9}$$

$$B=-3(-11)+7-5+8-10=33+7-5+8-10$$

$$B=33+7+8-5-10=48-15=33$$

$$C=3a-4b+c+11a-3b-7c=14a-7b-6c$$

$$D=\frac{\frac{5}{3}-1}{-3\frac{2}{7}}=\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{6}{7}}=-\frac{2}{3}\times\frac{7}{6}=-\frac{7}{9}$$

$$E=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}=\frac{9}{12}+\frac{20}{12}-\frac{14}{12}=\frac{9+20-14}{12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

$$F=\frac{4}{7}\times\frac{14}{6}-\frac{25}{8}\times\frac{3}{15}=\frac{4}{7}\times\frac{7}{3}-\frac{5}{8}\times\frac{3}{3}=\frac{4}{3}-\frac{5}{8}=\frac{32-15}{24}=\frac{17}{24}$$

$$G=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}+1-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{3}-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{10-9}{6}\right)$$

$$G=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

$$H=\left(1-\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{3-4}{3}\right)^2=\left(\frac{-1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

تمرين2: أحسب و بسط :

$A=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}$ و $B=3(-12)-5+14-10$ و

$C=3a-5b+5c-2a-4b-3c-a-2c$

و $D=\frac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}$ و $E=\frac{-2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2$ $F=\frac{4}{3}\times\frac{12}{15}-\frac{16}{3}\times\frac{6}{8}$

$G=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}+1-\frac{1}{2}\right)$ $H=\left(1-\frac{5}{2}\right)^2$ $M=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)^2$

$N=[(a-c)-(a-b)]-[(c-a)+(b-c)]$

الأجوبة :

$$A=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}=\frac{9}{12}+\frac{20}{12}-\frac{14}{12}=\frac{9+20-14}{12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

$$B=3(-12)-5+14-10$$

$$B=-36-5+14-10=-41+4=-37$$

$$C=3a-5b+5c-2a-4b-3c-a-2c=-9b$$

$$D=\frac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{16}{3}\times\frac{2}{1}=\frac{32}{3}$$

$$E=\frac{-2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2=\frac{-8}{12}+\frac{14}{12}-\frac{3}{12}-\frac{24}{12}=\frac{-8+14-3-24}{12}=\frac{-21}{12}=\frac{-7}{4}$$

$$F=\frac{4}{3}\times\frac{12}{15}-\frac{16}{3}\times\frac{6}{8}=\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}-4=\frac{16}{15}-4=\frac{16-60}{15}=\frac{-44}{15}$$

$$G=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}+1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{10}+\frac{10}{10}-\frac{5}{10}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{4+10-5}{10}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{10}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{3\times3}{5\times2}=\frac{3}{5}$$

$$G=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

$$H=\left(1-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{2-5}{2}\right)^2=\left(\frac{-3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$$M=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{4-15}{6}\right)^2=\left(\frac{-11}{6}\right)^2=\frac{(-11)^2}{6^2}=\frac{121}{36}$$

$$N=[(a-c)-(a-b)]-[(c-a)+(b-c)]=(a-c-a+b)-(c-a+b-c)$$

$$N=a-c-a+b-c+a-b+c=a-c$$

تمرين3 : أحسب A و B بحيث $a=-2\ ;\ b=-6\ ;\ c=5$

$$A=2a-b(a+b)+c^2-3ab+b^2$$

$$B=\frac{a}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{a}{c}$$

III. متطابقات هامة_النشر و التعميل:

1)خاصيات:

لكل a و b من $\mathbb{R}$ لدينا: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

1) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

2) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

3) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

4) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab-b^2)$

a و b و k أعداد حقيقية

- $k(a+b)=ka+kb$
- $k(a-b)=ka-kb$
- $(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$

ملحوظة:

ننشر $(a+b)(a+b)^2$ و $(a-b)(a-b)^2$ و نحصل على المتطابقتين الهامتين التاليتين:

- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

نشاط:

عندما تعجز الآلة الحاسبة

أحسب:

$$A=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)$$

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحدتها

لتبسيط الحساب نضع: $x=200520052006$

إذن: $200520052005=x-1$ و $200520052007=x+1$.

و منه: $A=x^2-(x-1)(x+1)$

$$=x^2-(x^2-1)$$

$$=x^2-x^2+1$$

$$=1$$

إذن:

$$A=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)=1$$

2)النشر

أمثلة: أنشر: $x\in\mathbb{R}$

$(2x+1)^2$, $(\sqrt{2}-3)^2$, $(3x-1)^2$, $-2x(3x-4)$,

$(3x-2)(x+3)$, $(3\sqrt{3}-2)(3\sqrt{3}+2)$, $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}\right)$,

$(x-1)^3$, $(2x+1)^3$, $(2x-1)^3$ و $(3x-2)^3$

الأجوبة :

$$(2x+1)^2=(2x)^2+2\times2x\times1+1^2=4x^2+4x+1$$

$$(\sqrt{2}-3)^2=(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times3+3^2=2-6\sqrt{2}+9=11-6\sqrt{2}$$

$$(3x-1)^2=(3x)^2-2\times3x\times1+1^2=9x^2-6x+1$$

$$-2x(3x-4)=-6x^2+8x$$

$$(3x-2)(x+3)=3x^2+9x-2x-6=3x^2+7x-6$$

$$(3\sqrt{3}-2)(3\sqrt{3}+2)=(3\sqrt{3})^2-2^2=27-4=23$$

$$\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}x\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{4}{9}x^2-\frac{9}{25}$$

$$(x-1)^3=(x)^3-3(x)^2\times1+3\times x\times(1)^2-(1)^3=x^3-3x^2+3x-1$$

$$(2x+1)^3=(2x)^3+3(2x)^2\times1+3\times2x\times(1)^2+(1)^3=8x^3+12x^2+6x+1$$

$$(2x-1)^3=(2x)^3-3(2x)^2\times1+3\times2x\times(1)^2-(1)^3=8x^3-12x^2+6x-1$$

$$(3x-2)^3=(3x)^3-3(3x)^2\times2+3\times3x\times(2)^2-(2)^3=27x^3-54x^2+36x-8$$

تمرين4: أنشر: $x\in\mathbb{R}$

$(3x+1)^2$, $(\sqrt{3}-2)^2$, $(5x-2)^2$, $-3x(4x-2)$,

$(5x-2)(2x+1)$, $(2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+3)$, $\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)$,

$(x-2)^3$, $(3x+1)^3$, $(3x-1)^3$ و $(2x-5)^3$

الأجوبة :

$$(3x+1)^2=(3x)^2+2\times3x\times1+1^2=9x^2+6x+1$$

$$(\sqrt{3}-2)^2=(\sqrt{3})^2-2\times\sqrt{3}\times2+2^2=3-4\sqrt{3}+4=7-4\sqrt{3}$$

$$(3x-1)^2=(3x)^2-2\times3x\times1+1^2=9x^2-6x+1$$

$$-3x(4x-2)=-12x^2+6x$$

$$(5x-2)(2x+1)=10x^2+5x-4x-2=10x^2+x-2$$

$$(2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+3)=(2\sqrt{5})^2-3^2=20-9=11$$

$$\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{9}$$

$$(x-2)^3=(x)^3-3(x)^2\times2+3\times x\times(2)^2-(2)^3=x^3-6x^2+12x-8$$

$$(3x+1)^3=(3x)^3+3(3x)^2\times1+3\times3x\times(1)^2+(1)^3=27x^3+27x^2+9x+1$$

$$(3x-1)^3=(3x)^3-3(3x)^2\times1+3\times3x\times(1)^2-(1)^3=27x^3-27x^2+9x-1$$

$$(2x-5)^3=(2x)^3-3(2x)^2\times5+3\times2x\times(5)^2-(5)^3=8x^3-60x^2+150x-125$$

3)التعميل

أمثلة : عمل التعابير التالية: $A=3x^2-3x$ و $B=9x-3$

و $C=4x^2-9$ و $D=1-(1-3x)^2$ و $E=x^3-x^2$

$F=16x^2-8x+1$ $G=16-25x^2$ و $H=4x^2+4x+1$

أجوبة:

$A=3x^2-3x=3x(x-1)$

$B=9x-3=3(3x-1)$

$C=4x^2-9=(2x)^2-3^2=(2x-3)(2x+3)$

$D=1-(1-3x)^2=1^2-(1-3x)^2=(1-(1-3x))(1+(1-3x))$

$D=(1-1+3x)(1+1-3x)=3x(2-3x)$

$E=x^3-x^2=x^2(x-1)$

$F=16x^2-8x+1=(4x)^2-2\times4x\times1+1^2=(4x-1)^2$

$G=16-25x^2=(4)^2-(5x)^2=(4-5x)(4+5x)$

$H=4x^2+4x+1=(2x)^2+2\times2x\times1+1^2=(2x+1)^2$

تمرين5 عمل التعابير التالية: $A=6x^3-2x$ و $B=12x-4$ و $C=25x^2-16$ و $D=4-(2-x)^2$ و $E=x^4-2x^2$ $F=9x^2-6x+1$ و $G=1-4x^2$ $H=25x^2+20x+4$

أجوبة:

$A=6x^3-2x=2x(3x^2-1)$

$B=12x-4=4(3x-1)$

$C=25x^2-16=(5x)^2-4^2=(5x-4)(5x+4)$

$D=4-(2-x)^2=2^2-(2-x)^2=(2-(2-x))(2+(2-x))$

$D=(2-2+x)(2+2-x)=x(4-x)$

$E=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)$

$F=9x^2-6x+1=(3x)^2-2\times3x\times1+1^2=(3x-1)^2$

$G=1-4x^2=(1)^2-(2x)^2=(1-2x)(1+2x)$

$H=25x^2+20x+4=(5x)^2+2\times5x\times2+2^2=(5x+2)^2$

IV. القوى و قوى العدد 10 و الكتابة العلمية:

1)تعريف:

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم و $n\in\mathbb{N}$.

- $a^1=a;a^0=1$
- $a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{\text{مرة العدد}}$
- $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

لكل a و b من $\mathbb{R}^*$ و لكل m و n من $\mathbb{N}$ لدينا:

- $a^n\times b^n=(ab)^n$
- $a^n\times a^m=a^{n+m}$
- $(a^n)^m=a^{nm}=(a^m)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
- $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}=\dfrac{1}{a^{m-n}}$

أمثلة : أحسب وبسط حيث $a\in\mathbb{R}^*$:

$\left(\frac{2}{3}\right)^4$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$, $(-3)^5$, $(a^3)^5$, $a^5\times a^3\times a^1\times a^{-2}$

$a^6\times a^{-3}$, $(3a)^2$, $\left(\frac{a}{2}\right)^6$ و $A=\dfrac{9^2}{3^{-2}}\times\dfrac{3^5}{81^3}$

$B=(-5)^2\times(5^2)^4\times(5^{-5})^3\times5^5$ و $C=2^3\times(2^2)^4\times(2^{-5})^3$

$D=\dfrac{3^{-5}\times4^{-2}}{12^3}\times\dfrac{9}{2^2}$ $E=\dfrac{(-2)^3\times(4^2)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}$

الجواب :

$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$ و $\left(-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1^4}{3^4}=\frac{1}{81}$ و $(-2)^5=-32$

$a^5\times a^3\times a^1\times a^{-2}=a^{5+3+1+(-2)}=a^7$ و $\left((a)^2\right)^5=a^{2\times5}=a^{10}$

$(3a)^2=3^2\times a^2=9a^2$ و $a^6\times a^{-3}=a^{6+(-3)}=a^3$

$\left(\frac{a}{2}\right)^6=\frac{a^6}{2^6}=\frac{a^6}{64}$

$A=\dfrac{9}{3^{-2}}\times\dfrac{3^5}{81^3}=\dfrac{3^2}{3^{-2}}\times\dfrac{3^5}{9^3}=\dfrac{3^2}{3^{-2}}\times\dfrac{3^5}{(3^2)^3}$

$A=\dfrac{3^2\times3^5}{3^{-2}\times(3^2)^3}=\dfrac{3^2\times3^5}{3^{-2}\times3^6}=3^2\times3^5\times3^2\times3^{-6}=3^{2+5+2-6}=3^3=27$

$B=(-5)^2\times(5^2)^4\times(5^{-5})^3\times5^5=5^2\times(5^2)^4\times(5^{-5})^3\times5^5$

$B=5^2\times5^{2\times4}\times5^{-5\times3}\times5^5=5^{2+8-15+5}=5^0=1$

$C=2^3\times(2^2)^4\times(2^{-5})^3=2^3\times2^8\times2^{-15}=2^{3+8-15}=2^{-4}=\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16}$

$D=\dfrac{3^{-5}\times4^{-2}}{12^3}\times\dfrac{9}{2^2}=\dfrac{3^{-5}\times(2^2)^{-2}}{(3\times2^2)^3}\times\dfrac{3^2}{2^2}=\dfrac{3^{-5}\times(2)^{-4}\times3^2}{(3)^3\times2^6\times2^2}$

$D=\dfrac{3^{-5}\times(2)^{-4}\times3^2}{(3)^3\times2^6\times2^2}=3^{-5}\times2^{-4}\times3^2\times(3)^{-3}\times2^{-6}\times2^{-2}=3^{-5-3+2}\times2^{-4-6-2}$

$D=3^{-6}\times2^{-12}$

$E=\dfrac{(-2)^3\times(4^2)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}=\dfrac{-2^3\times4^{2\times(-1)}\times2^3}{1024\times(-2^3)^{-4}}=\dfrac{-2^3\times(2^2)^{-2}\times2^3}{2^{10}\times(-2^3)^{-4}}$

$E=-2^3\times(2^2)^{-2}\times2^3\times2^{-10}\times(-2)^{3\times4}=-2^{3-4+3-10+12}=-2^4=-16$

تمرين6 : أحسب وبسط حيث $a\in\mathbb{R}^*$:

$\left(-\frac{3}{5}\right)^3$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$, $(-5)^3$, $\left((a)^{-2}\right)^3$, $a^7\times a^{-3}\times a^5\times a^{-8}$

$a^7\times a^{-9}$, $(5a)^3$, $\left(\frac{a}{3}\right)^5$ و $A=\dfrac{4}{2^{-3}}\times\dfrac{2^5}{16^3}$

$B=(-3)^2\times(3^2)^4\times(3^{-5})^3\times3^4$ و $C=2^7\times(2^5)^2\times(2^{-5})^3$

$D=\dfrac{5\times3^{-2}}{15^2}\times\dfrac{81}{5^{-4}}$ $E=\dfrac{3^{-2}\times(9^2)^3\times8}{27\times81\times(-3)^6}$

الجواب :

$\left(-\frac{3}{5}\right)^3=-\frac{3^3}{5^3}=-\frac{27}{125}$ و $\left(-\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$

$(-5)^3=-5^3=-125$

$\left((a)^{-2}\right)^3=a^{-2\times3}=a^{-6}$ و $a^7\times a^{-3}\times a^5\times a^{-8}=a^{7-3+5+(-8)}=a^1=a$

$a^7\times a^{-9}=a^{7+(-9)}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}$

$(5a)^3=5^3\times a^3=125a^3$

$\left(\frac{a}{3}\right)^5=\frac{a^5}{3^5}=\frac{a^5}{243}$

$$A=\frac{4}{2^{-3}}\times\frac{2^5}{16^3}=\frac{2^2\times2^5}{2^{-3}\times2^{12}}=2^2\times2^5\times2^3\times2^{-12}=2^{2+5+3-12}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

$B=(-3)^2\times(3^2)^4\times(3^{-5})^3\times3^4=3^2\times(3^2)^4\times(3^{-5})^3\times3^4$

$B=3^2\times3^{2\times4}\times3^{-5\times3}\times3^4=3^{2+8-15+4}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

$C=2^7\times(2^5)^2\times(2^{-5})^3=2^7\times2^{10}\times2^{-15}=2^{7+10-15}=2^2=4$

$D=\frac{5\times3^{-2}}{15^2}\times\frac{81}{5^{-4}}=\frac{5^1\times3^{-2}\times(3)^4}{(3\times5)^2\times5^{-4}}=5^1\times3^{-2}\times3^4\times3^{-2}\times5^{-2}\times5^4=5^3=125$

$E=\frac{3^{-2}\times(9^2)^3\times8}{27\times81\times(-3)^6}=\frac{3^{-2}\times3^{12}\times2^3}{3^3\times3^4\times3^6}=3^{-2}\times3^{12}\times2^3\times3^{-3}\times3^{-4}\times3^{-6}=3^0=1$

حالة خاصة:قوى العدد 10:

$10^1=10$ و $10^0=1$

$10^{-2}=0,01$

$10^{-1}=0,1$

$10^n=\underbrace{1000\cdots0}_{n};n\in\mathbb{N}$ **أمثلة :**

1) أحسب : 10^{-3} , 11^{-2}

2) أكتب على شكل قوة: 100000 و 0,0001 و 0,002

تمرين7: أحسب وبسط : $A=\frac{(10^6)^4\times10^{-2}}{10^4\times10^6\times10^{-13}}$ و

$B=\frac{10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}}{10^{-2}\times10^3\times10^5}$

الجواب :

$A=\frac{(10^6)^4\times10^{-2}}{10^4\times10^6\times10^{13}}=10^{24}\times10^{-2}\times10^{-4}\times10^{-6}\times10^{13}=10^{-1}=\frac{1}{10}=0.1$

$B=\frac{10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}}{10^{-2}\times10^3\times10^5}=10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}\times10^2\times10^{-3}\times10^{-5}$

$B=10^{-8+9+7-4+2-3-5}=10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0.01$

2)الكتابة العلمية:

كل عدد عشري x موجب يكتب على الشكل $x=a\times10^p$ حيث p ينتمي الى $\mathbb{Z}$ و a عدد عشري بحيث $1\le a\prec10$.

هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية.

ملحوظة: إذا كان x عددا سالبا فان كتابته العلمية هي $x=-a\times10^p$

مثال: المسافة بين الأرض و الشمس هي: 149597870 كلم,

تكتب $1,4959787\times10^8$ كلم.

تمرين8: أجب بصحيح أو خطأ

- الكتابة العلمية للعدد : 149597870 كلم هي $1,4959787\times10^8$ كلم.
- $3,25\times10^4$ هي كتابة علمية
- 15×10^3 هي كتابة علمية
- الكتابة العلمية للعدد : -17000000 هي -1.7×10^7

الجواب: الكتابة العلمية تكون على الشكل $x=a\times10^p$ أو $x=-a\times10^p$

حيث p ينتمي الى $\mathbb{Z}$ و a عدد عشري بحيث $1\le a<10$. ومنه

- $1,4959787\times10^8$ هي كتابة علمية صحيح
- $3,25\times10^4$ هي كتابة علمية صحيح
- 15×10^3 هي كتابة علمية خطأ
- -1.7×10^7 هي كتابة علمية صحيح

تمرين9 : حدد الكتابة العلمية للأعداد التالية

300 000 و 45 000 0 و 0,01 و 0,001 و 100 368

0 000و000 25 000 و 0.0002

الجواب: $300000=3\times10^5$ و $450000=4.5\times10^5$

و $0.01=10^{-2}$ و $0.001=10^{-3}$ و $3681000000=3.681\times10^9$

$25000000=2.5\times10^7$ و $0.0002=2\times10^{-4}$

V. الجذور المربعة:

تعريف: ليكن x عددا حقيقيا موجبا. نسمي جذر مربع x , العدد الحقيقي الموجب y .

بحيث $y^2=x$. و نكتب $\sqrt{x}=y$.

$\sqrt{x}=y$ يكافئ $x=y^2$ و $y\ge0$.

أمثلة: $\sqrt{9}=3$ و $\sqrt{81}=9$

خاصية: لكل a و b من $\mathbb{R}^+$ لدينا:

$\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n};n\in\mathbb{N}^*$ و $\left(\sqrt{a}\right)^2=\sqrt{a^2}=a$ و

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};b\succ0$

$\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}};a\succ0$ و $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

إذا كان $x\ge0$ و $y\ge0$ فان : $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ يكافئ $x=y$.

$\sqrt{x}=0$ أذا و فقط إذا كان $x=0$.

أمثلة : بسط و أحسب

$A=\sqrt{16}$ $B=\sqrt{8}$ $C=\sqrt{\frac{9}{2}}$ $D=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$

$E=3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}$

و $F=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ $G=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$

$H=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2$

$M=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)$

عندما تعجز الآلة الحاسبة

الجواب: $A=\sqrt{16}=4$ و $B=\sqrt{8}=\sqrt{2\times4}=\sqrt{2}\times\sqrt{4}=2\sqrt{2}$

$$C=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$D=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{28}{14}}=\sqrt{2}$$

$$E=3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}=3\sqrt{4\times5}+4\sqrt{9\times5}-2\sqrt{16\times5}-\sqrt{36\times5}$$

$$E=3\times2\sqrt{5}+4\times3\sqrt{5}-2\times4\sqrt{5}-6\sqrt{5}=6\sqrt{5}+12\sqrt{5}-8\sqrt{5}-6\sqrt{5}=(6+12-8-6)\sqrt{5}$$

$$E=4\sqrt{5}$$

$$F=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$$

$$F=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$F=\frac{3+2\sqrt{15}+5-\left(3-2\sqrt{15}+5\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3+2\sqrt{15}+5-3+2\sqrt{15}-5}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{15}}{-2}=-2\sqrt{15}$$

$$G=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$$

$$G=5+2\sqrt{10}+2-\left(5-2\sqrt{10}+2\right)=5+2\sqrt{10}+2-5+2\sqrt{10}-2=4\sqrt{10}$$

$$H=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2=(2-3)^2=(-1)^2=1$$

حساب: $M=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)$

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحداتها لتبسيط الحساب

نضع: $x=200520052006$

إذن: $200520052005=x-1$ و $200520052007=x+1$

و منه: $M=x^2-(x-1)(x+1)$

$$M=x^2-\left(x^2-1\right)=x^2-x^2+1=1$$

تمرين10: بسط و أحسب

$$A=\sqrt{121}\qquad B=\sqrt{50}\qquad C=\sqrt{\frac{16}{3}}\qquad D=\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$$

$$E=6\sqrt{8}+\sqrt{32}-2\sqrt{98}$$

و $F=\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ $\quad G=\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2$

$$H=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\right]^2$$

$$G=\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)^2\qquad M=\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2015}\times\left(4\sqrt{3}+7\right)^{2015}$$

$$N=\left(\sqrt{75}-\sqrt{98}\right)\times\left(5\sqrt{3}+7\sqrt{2}\right)\qquad P=(5x+2)^3\qquad Q=\left(\sqrt{3}+1\right)^3$$

$$G=(2015200052004)^2-(2015200052002\times2015200052006)$$

الجواب:

$$A=\sqrt{121}=11 \quad \text{و} \quad B=\sqrt{50}=\sqrt{2\times25}=\sqrt{2}\times\sqrt{25}=5\sqrt{2}$$

$$C=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

$$D=\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{60}{15}}=\sqrt{4}=2$$

$$E=6\sqrt{8}+\sqrt{32}-2\sqrt{98}=6\sqrt{4\times2}+\sqrt{16\times2}-2\sqrt{49\times2}$$

$$E=12\sqrt{2}+4\sqrt{2}-14\sqrt{2}$$

$$E=2\sqrt{2}$$

$$F=\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}=\frac{\left(5\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)+-5\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}$$

$$F=\frac{5\sqrt{7}\sqrt{2}+5\sqrt{7}\sqrt{7}+5\sqrt{2}\sqrt{2}-5\sqrt{2}\sqrt{7}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{35+10}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{45}{-5}=-9$$

$$G=\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}\right)^2\right)$$

$$G=3+2\sqrt{33}+11-\left(3-2\sqrt{33}+11\right)=3+2\sqrt{33}+11-3+2\sqrt{33}-11=4\sqrt{33}$$

$$H=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\right]^2=\left[\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2\right]^2$$

$$H=[2-7]^2=(-5)^2=25$$

$$M=\left(\left(4\sqrt{3}-7\right)\left(4\sqrt{3}+7\right)\right)^{2015}=\left(\left(4\sqrt{3}\right)^2-(7)^2\right)^{2015}=(48-49)^{2015}=(-1)^{2015}=-1$$

$$N=\left(\sqrt{75}-\sqrt{98}\right)\times\left(5\sqrt{3}+7\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{25\times3}-\sqrt{49\times2}\right)\times\left(5\sqrt{3}+7\sqrt{2}\right)$$

$$N=\left(5\sqrt{3}-7\sqrt{2}\right)\times\left(5\sqrt{3}+7\sqrt{2}\right)=\left(5\sqrt{3}\right)^2-\left(7\sqrt{2}\right)^2$$

$$N=75-98=75-98=-23$$

$$P=(5x+2)^3=(5x)^3+3(5x)^2\times2+3\times5x\times(2)^2+(2)^3$$

$$P=125x^3+150x^2+60x+8$$

$$Q=\left(\sqrt{3}+1\right)^3=\left(\sqrt{3}\right)^3+3\left(\sqrt{3}\right)^2\times1+3\times\sqrt{3}\times(1)^2+(1)^3$$

$$Q=3\sqrt{3}+9+3\times\sqrt{3}+1=6\sqrt{3}+10$$

$$G=(2015200052004)^2-(2015200052002\times2015200052006)$$

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحداتها

لتبسيط الحساب نضع: $x=2015200052004$

إذن: $x-2=2015200052002$ و $x+2=2015200052006$

و منه: $G=x^2-(x-2)(x+2)$

$$G=x^2-\left(x^2-4\right)=x^2-x^2+4=4$$

VI. التناسبية

تعريف : a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $bd\neq0$

نقول إن الأعداد a و b و c و d تكون في هذا الترتيب تناسبا إذا وفقط إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

مثال : حدد العدد الحقيقي x إذا علمت أن الأعداد : $x+1$ و 3 و x و 2 تكون في هذا الترتيب تناسبا

الجواب : $x+1$ و 3 و x و 2 تكون في هذا الترتيب تناسبا

يعني $\frac{x+1}{3}=\frac{x}{2}$ يعني $2(x+1)=3x$

يعني $2x+2=3x$ يعني $-x=-2$ يعني $x=2$

أكاديمية الجهة الشرقية

مستوى الجدع مشترك أدبي
الدرس الثالث :
الحساب العددي2: الترتيب في $\mathbb{R}$

الأستاذ: نجيب عثماني

محتوى الدرس

الترتيب في IR وخاصياته:
المستقيم العددي ، المجالات ، القيمة المطلقة
الترتيب والعمليات ، التأطير

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

تمثيل عدد على المستقيم العددي
التمكن من مقارنة عددين أو تعبيرين
تأطير مجموع وجداء عددين حقيقيين
تأطير مقلوب وجذر مربع عدد حقيقي
توظيف خاصيات الترتيب والعمليات في تأطير ومقارنة بعض التعابير الجبرية وإنجاز بعض الإكبارات والإصغارات لعدد أو تعبير جبري.
تمثيل تقاطع واتحاد مجالين على المستقيم العددي .

I. تعاريف:

ليكن a و b عددين حقيقيين.

1. نقول إن a أصغر من أو يساوي b , و نكتب $a \le b$, إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^+$
2. نقول إن a أكبر من أو يساوي b , و نكتب $a \ge b$, إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^+$
3. نقول إن a أصغر قطعا من b , و نكتب $a \prec b$, إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}_+^*$
4. نقول إن a أكبر قطعا من b , و نكتب $a \succ b$, إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$

ملحوظة:

a و b عددان حقيقيان.

- $a \le b$ يكافئ $a \prec b$ أو $a = b$
- إذا كان $a \prec b$ فان $a \le b$
- مقارنة a و b يعني البحث عن التعبير الصحيح من بين التعابير التالية: $a \prec b$, $a \succ b$, $a = b$

أمثلة: لدينا: $\sqrt{5} \prec 3$, $-7 \prec -\frac{1}{3}$, $\pi \succ 2,14$

مثال1 : قارن بين $\frac{101}{102}$ و $\frac{100}{101}$

الجواب:

نحسب الفرق : $\frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{101\times101-100\times102}{101\times102} = \frac{10201-10200}{101\times102}$

اذن : $\frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{1}{101\times102} \in \mathbb{R}^+$ ومنه $\frac{101}{102} \ge \frac{100}{101}$

مثال 2 : قارن : a و b و نضع $a = 2+\sqrt{3}$ و $b = 2\sqrt{3}$

الجواب:

لدينا $a-b = 2-\sqrt{3}$, و بما أن $2-\sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعا

أي: $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$ فان: $a \succ b$

مثال 3 : $a \in \mathbb{R}$ قارن : $2a$ و a^2+1

الجواب: $(a^2+1)-2a = a^2-2a+1 = (a-1)^2 \ge 0$

ومنه $a^2+1 \ge 2a$ مهما يكن : $a \in \mathbb{R}$

تمرين1 : $a \in \mathbb{R}$ قارن : $4a$ و $4a^2+1$

الجواب: $(4a^2+1)-4a = 4a^2-4a+1 = (2a-1)^2 \ge 0$

ومنه $4a^2+1 \ge 4a$ مهما يكن : $a \in \mathbb{R}$

II. خاصيات:

لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

خاصية:

إذا كان $a \le b$ و $b \le c$ فان $a \le c$

ملحوظة:

إذا كان $a \le b$ و $b \prec c$ فان $a \prec c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنته مع نقس العدد b.

مثال:

لدينا: $\frac{30}{31} \prec 1$ و $1 \prec \frac{114,01}{114}$ و منه فان: $\frac{30}{31} \prec \frac{114,01}{114}$

خاصية الترتيب و الجمع:

- $a \le b$ يكافئ $a+c \le b+c$
- إذا كان $a \le b$ و $c \le d$ فان $a+c \le b+d$
- إذا كان $a \ge 0$ و $b \ge 0$ فان $a+b \ge 0$ و $ab \ge 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

- إذا كان $c \succ 0$, فان: $a \le b$ يكافئ $ac \le bc$
- إذا كان $c \prec 0$ فان: $a \le b$ يكافئ $ac \ge bc$
- إذا كان $0 \le a \le b$ و $0 \le c \le d$ فان $0 \le ac \le bd$
- إذا كان $a \le 0$ و $b \le 0$ فان $a+b \le 0$ و $ab \ge 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب:

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة $(ab \succ 0)$

- $a \le b$ يكافئ $\frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$
- إذا كان $a \le b$ و $c \prec d$ فان $a+c \prec b+d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عددان حقيقيان موجبان.

- $a \le b$ يكافئ $a^2 \le b^2$
- $a \le b$ يكافئ $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$
- لكل a من $\mathbb{R}$: $a^2 \ge 0$

ملحوظة:

جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز $\le$ بأحد الرموز: $\ge$ أو $\prec$ أو $\succ$.

إذا كان $a \le 0$ و $b \le 0$ $a \le b$ يكافئ $a^2 \ge b^2$

مثال1: قارن العددين: $a=\sqrt{6}$ و $b=2\sqrt{3}$

لدينا :: $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times \sqrt{3}^2 = 4\times 3 = 12$ و $(\sqrt{6})^2 = 6$ ومنه

ومنه : $a<b$

مثال2: لتكن $1 \le x \le 2$ و $7 \le y \le 8$

أعط تأطيرا لكل من $x+y$, $-y$, $x-y$, x^2 , y^2 , $2x$, $2x-3y$, $\frac{1}{y}$, $\frac{x}{y}$

الجواب: $1 \le x \le 2$ و $7 \le y \le 8$ اذن: $7+1 \le x+y \le 8+2$

$8 \le x+y \le 10$

$7 \le y \le 8$ اذن: $-8 \le -y \le -7$

$x-y = x+(-y)$

لدينا : $1 \le x \le 2$ و $-8 \le -y \le -7$ اذن: $-7 \le x-y \le -5$

$1 \le x \le 2$ يعني $1^2 \le x^2 \le 2^2$ يعني $1 \le x^2 \le 4$

$7 \le y \le 8$ يعني $7^2 \le y^2 \le 8^2$ يعني $49 \le y^2 \le 64$

$1 \le x \le 2$ يعني $2\times 1 \le 2x \le 2\times 2$ يعني $2 \le 2x \le 4$

$7 \le y \le 8$ يعني $3\times 7 \le 3\times y \le 3\times 8$ يعني $21 \le 3y \le 24$

$2x-3y = 2x+(-3y)$

$2 \le 2x \le 4$ و $-24 \le -3y \le -23$

اذن : $2-24 \le 2x-3y \le 4-23$

يعني : $-22 \le 2x-3y \le -19$

$7 \le y \le 8$ يعني $\frac{1}{8} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{7}$

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ اذن : $1\times\frac{1}{8} \le x \times \frac{1}{y} \le 2\times\frac{1}{7}$ اذن : $\frac{1}{8} \le \frac{x}{y} \le \frac{2}{7}$

تمرين2: نضع $2 \le x \le 5$ و $1 \le y \le 2$ اعط تأطيرا للأعداد التالية

اعط تأطيرا للأعداد التالية : x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$ و $-x$ و

$-y$ و $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{x}{y}$

تمرين3: التأطير و العمليات

1. تحقق من أن: $14^2 < 200 < 15^2$

ثم استنتج أن: $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2. تحقق من أن: $22^2 < 500 < 23^2$

ثم استنتج أن: $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

3. استنتج تأطيرا للعددين $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$.

الجواب:

1) لدينا $14^2 = 196$ و $15^2 = 225$ ومنه $14^2 < 200 < 15^2$

لدينا $14^2 < 200 < 15^2$ اذن نستنتج أن : $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$

اذن : $\sqrt{14^2} < \sqrt{2\times 100} < \sqrt{15^2}$ أي : $14 < \sqrt{2}\times 10 < 15$

أي : $14\times\frac{1}{10} < \sqrt{2}\times 10\times\frac{1}{10} < 15\times\frac{1}{10}$

اذن نستنتج أن : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) لدينا $22^2 = 484$ و $23^2 = 529$ ومنه $22^2 < 500 < 23^2$

لدينا $22^2 < 500 < 23^2$ اذن نستنتج أن : $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$

اذن : $\sqrt{14^2} < \sqrt{2\times 100} < \sqrt{15^2}$ أي : $22 < \sqrt{5}\times 10 < 23$

أي : $22\times\frac{1}{10} < \sqrt{5}\times 10\times\frac{1}{10} < 23\times\frac{1}{10}$

اذن نستنتج أن : $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

3) لدينا $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ و $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

اذن : $1,4+2,2 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 1,5+2,3$ أي : $3,6 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 3,8$

و أيضا بضرب طرف لطرف نجد: $1,4\times 2,2 < \sqrt{2}\times\sqrt{5} < 1,5\times 2,3$

أي : $3,08 < \sqrt{10} < 3,45$

تمرين4 :

1. أحسب : $(5-3\sqrt{2})^2$
2. قارن العددين: $3\sqrt{2}$ و 5
3. بسط : $\sqrt{43-30\sqrt{2}}$

الجواب: 1) $(3\sqrt{2}-5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2\times 3\sqrt{2}\times 5 + (5)^2 = 18-30\sqrt{2}\times 5+25$

$(3\sqrt{2}-5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2\times 3\sqrt{2}\times 5 + (5)^2 = 43-30\sqrt{2}$

2) لمقارنة العددين نقارن مربعيهما : $(3\sqrt{2})^2 = 18$ و $(5)^2 = 25$

اذن $3\sqrt{2} < 5$ ومنه $5-3\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$

3) $\sqrt{43-30\sqrt{2}} = \sqrt{(5-3\sqrt{2})^2} = |5-3\sqrt{2}|$

$=5-3\sqrt{2}$ لأن : $5-3\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$

وبالتالي : $\sqrt{43-30\sqrt{2}} = 5-3\sqrt{2}$

III. القيمة المطلقة:

1. إذا كان $x \ge 0$ فان: $|x| = x$
2. إذا كان $x \le 0$ فان: $|x| = -x$

مثال: $|3| = 3$ و $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ و $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$

$|3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$ و $|\pi-4| = -(\pi-4) = -\pi+4$

IV. المجالات:

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \prec b$. ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات و تمثيلها على المستقيم العددي.

المجالات المحدودة:

المجال	المتفاوتة
$[a,b]$	$a \le x \le b$
$]a,b]$	$a \prec x \le b$
$[a,b[$	$a \le x \prec b$
$]a,b[$	$a \prec x \prec b$

المجالات غير المحدودة

المجال	
$]b,+\infty[$	$x \succ b$
$[b,+\infty[$	$x \ge b$
$]-\infty,a]$	$x \le a$
$]-\infty,a[$	$x \prec a$

مصطلحات: الرمزان $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a,b]$ يقرأ: "المجال المغلق a , b " أو " القطعة a , b "
- $]a,b[$ يقرأ " المجال المفتوح a , b "
- $]a,+\infty[$ يقرأ " المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a "

تمرين5: مثل على مستقيم للمجالين I و J
وحدد اتحاد وتقاطع المجالين I و J في الحالات الآتية

$J=[-1,+\infty[$ و $I=]-3,7]$

$J=[4;10]$ و $I=]-\infty,5[$

$J=[-5;-1]$ و $I=[0,10[$

الجواب:

$I\cap J=]-1,7]$ $I\cup J=]-3;+\infty[$

$I\cap J=[4,5[$ $I\cup J=]-\infty;10]$

$I\cap J=\varnothing$ $I\cup J=[-5;10]$

تمرين6: نضع $x\in[1;3]$ و $y\in[2;4]$

1) اعط تأطيرا للأعداد التالية : x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$ و $-x$ و $-y$ و $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{x}{y}$

2) اعط تأطيرا لكل من A و B : $A=x^2+y^2+2x-3y$ و $B=\frac{2x-1}{x+1}$

الجواب:1) $x\in[1;3]$ يعني $1\le x\le 3$

$y\in[2;4]$ يعني $2\le y\le 4$

$1\le x\le 3$ يعني $1^2\le x^2\le 3^2$ يعني $1\le x^2\le 9$

$2\le y\le 4$ يعني $2^2\le y^2\le 4^2$ يعني $4\le y^2\le 16$

$1\le x\le 3$ يعني $2\times1\le 2x\le 2\times3$ يعني $2\le 2x\le 6$

$2\le y\le 4$ يعني $3\times2\le 3\times y\le 3\times4$ يعني $6\le 3y\le 12$

$1\le x\le 3$ يعني $\frac{1}{3}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{1}$ يعني $\frac{1}{3}\le\frac{1}{x}\le 1$

$2\le y\le 4$ يعني يعني $\frac{1}{4}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}$

لدينا $\frac{x}{y}=x\times\frac{1}{y}$ اذن : $1\times\frac{1}{4}\le x\times\frac{1}{y}\le 3\times\frac{1}{2}$ اذن : $\frac{1}{4}\le\frac{x}{y}\le\frac{3}{2}$

2) تأطير A : $6\le 3y\le 12$ يعني $-12\le -3y\le -6$

وحسب النتائج السابقة وبجمع المتفاوتات طرف لطرف نجد:

$1+4+2-12\le x^2+y^2+2x-3y\le 9+16+6-6$

وبالتالي : $-5\le A\le 25$

تأطير B

$$B=\frac{2x-1}{x+1}=(2x-1)\times\frac{1}{x+1}$$

لدينا $1\le x\le 3$ يعني $2\le 2x\le 6$ يعني $2-1\le 2x-1\le 6-1$

يعني $1\le 2x-1\le 5$

لدينا $1\le x\le 3$ يعني $2\le x+1\le 4$ يعني $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{2}$

وبضرب المتفاوتتين التاليتين $1\le 2x-1\le 5$ و $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{2}$

طرف لطرف نجد

$1\times\frac{1}{4}\le(2x-1)\times\frac{1}{x+1}\le 5\times\frac{1}{2}$ يعني $\frac{1}{4}\le B\le\frac{5}{2}$

أكاديمية الجهة الشرقية

مستوى الجدع مشترك أدبي
الدرس الرابع :
الحساب العددي4:
المعادلات والمتراجحات و النظمات

الأستاذ: نجيب عثماني

محتوى الدرس

المعادلات ، المتراجحات ، النظمات

- المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد
- المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد ، تعميل ثلاثية الحدود
- إشارة ، المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد
- متراجحات تؤول في حلها إلى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد
- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين
- نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

طرق الحل: التعويض ، التأليفة الخطية والمحددات

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

- حل معادلات من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية بمجهول واحد، ومعادلات تؤول في حلها إلى المعادلات السابقة.
- تعميل ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية باستعمال مختلف التقنيات.
- حل متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد، ومتراجحات تؤول في حلها إلى المتراجحات السابقة.
- حل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.
- ترييض وضعيات تؤول في حلها إلى المعادلات أو المتراجحات أو النظمات السابقة .

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.

كل معادلة على الشكل $ax+b=0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد, حيث x هو المجهول.

أمثلة : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $-2x+22=0$ 2) $3(2x+5)=6x-1$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ 4) $9x^2-16=0$

5) $(2x+3)(9x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

6) $\frac{2x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5x-2}{2}+\frac{1}{3}$

7) $x^3-x=0$

الجواب:1) $-2x+22=0$ يعني $-2x+22-22=-22$

يعني $-2x=-22$

يعني $-2x\times\left(\frac{1}{-2}\right)=-22\times\left(\frac{1}{-2}\right)$

يعني $x=11$ ومنه: $S=\{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

2) $3(2x+5)=6x-1$ **يعني** $6x+15=6x-1$

يعني $6x-6x=-1-15$ **يعني** $0x=-16$ **يعني** $0=-16$

وهذا غير ممكن ومنه : $S=\varnothing$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ **يعني** $4x-8=6x-2x-8$

يعني $4x-4x+8-8=0$ **يعني** $0=0$

ومنه :كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي : $S=\mathbb{R}$

4)أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

طريقة 1: (التعميل) $9x^2-16=0$ **يعني** $(3x)^2-4^2=0$

يعني $(3x-4)(3x+4)=0$ **يعني** $3x+4=0$ أو $3x-4=0$

يعني $3x=-4$ أو $3x=4$ **يعني** $x=\frac{-4}{3}$ أو $x=\frac{4}{3}$

ومنه : $S=\left\{-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}$

طريقة 2: $9x^2-16=0$ **يعني** $9x^2=16$ **يعني** $x^2=\frac{16}{9}$

يعني $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ أو, $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ **يعني** $x=\frac{4}{3}$ أو, $x=-\frac{4}{3}$

5) $(2x+3)(9x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

يعني $x-\frac{1}{2}=0$ أو $9x-3=0$ أو $2x+3=0$

يعني $x=\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{1}{3}$ أو $x=-\frac{1}{3}$

منه: $S=\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$

6) $\frac{2x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5x-2}{2}+\frac{1}{3}$ (نوحد المقامات)

يعني $\frac{4x+4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{15x-6}{6}+\frac{2}{6}$

يعني $\frac{4x+4-3}{6}=\frac{15x-6+2}{6}$

يعني $\frac{4x+1}{6}=\frac{15x-4}{6}$ يعني $4x+1=15x-4$

يعني $-11x=-5$ يعني $x=\frac{5}{11}$ ومنه: $S=\left\{\frac{5}{11}\right\}$

7) $x^3-x=0$ يعني $x\left(x^2-1\right)=0$ (التعميل)

يعني $x=0$ أو $x^2-1=0$ يعني $x=0$ أو $x^2=1$

يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{1}$ أو $x=-\sqrt{1}$ ومنه: $S=\{-1,0,1\}$

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$

2) $x^3-4x=0$

3) $(5x-7)(3x-10)=0$

الجواب: 1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$ (نوحد المقامات)

يعني $\frac{5x+5}{10}+\frac{40}{10}=\frac{2x-5}{10}+\frac{4x+40}{10}$

يعني $\frac{5x+5+40}{10}=\frac{2x-5+4x+40}{10}$

يعني $5x+5+40=2x-5+4x+40$ يعني $-x=-10$

يعني $x=10$ ومنه: $S=\{10\}$

2) $x^3-4x=0$ يعني $x\left(x^2-4\right)=0$ (التعميل)

يعني $x=0$ أو $x^2-4=0$ يعني $x=0$ أو $x^2=4$

يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{4}$ أو $x=-\sqrt{4}$ ومنه: $S=\{-2,0,2\}$

3) $(5x-7)(3x-10)=0$ يعني $5x-7=0$ أو $3x-10=0$

يعني $x=\frac{7}{5}$ أو $x=\frac{10}{3}$ ومنه: $S=\left\{\frac{7}{5},\frac{10}{3}\right\}$

II. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

1. تعاريف:

تعريف1: المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث x هو المجهول و a و b و c أعداد حقيقية معلومة $(a\neq 0)$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

مثال 1: العدد 1- حل للمعادلة $3x^2+5x+2=0$

لأن: $3(-1)^2+5(-1)+2=0$

مثال 2: العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

لأن: $\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}-\sqrt{3}=3+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}=0$

ملاحظة : كل عدد حقيقي x_0 يحقق المتساوية $ax^2+bx+c=0$ هو حل للمعادلة $ax^2+bx+c=0$

تعريف2: نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$.

العدد الحقيقي b^2-4ac يسمى مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ و نرمز له بالرمز Δ.

مثال: نعتبر المعادلة $(E):3x^2-5x+7=0$

لنحسب مميز المعادلة (E)

لدينا: $a=3$ و $b=-5$ و $c=7$ بما أن: $\Delta=b^2-4ac$

فان: $\Delta=(-5)^2-4\times7\times3=25-84=-59$

ملاحظة : الرمز Δ يقرأ: دلتا delta.

2. خاصية:

نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ و ليكن Δ مميزها.

✓ **إذا كان** $\Delta\prec 0$ **فان** المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

✓ **إذا كان** $\Delta=0$ **فان** المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو: $-\frac{b}{2a}$

✓ **إذا كان** $\Delta\succ 0$ فان المعادلة تقبل حلين مختلفين هما: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S.

مثال1: المعادلة $3x^2+x+2=0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$ لأن $\Delta\prec 0$ $(\Delta=1-4\times3\times2=-23)$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\phi$.

مثال 2: المعادلة $x^2-10x+25=0$ لها حل وحيد مزدوج لأن $\Delta=0$ $(\Delta=10^2-4\times25=0)$.

حل هذه المعادلة هو: $x=\frac{-b}{2a}=5$

و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\{5\}$.

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2-3x+2=0$ لدينا $\Delta=9-4\times2=1$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{3-1}{2}=1$ و $x_2=\frac{3+1}{2}=2$ و منه $S=\{1;2\}$.

تمرين 2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $6x^2-7x-5=0$ $\Delta\succ 0$ 2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ $\Delta=0$

3) $3x^2+x+2=0$ $\Delta\prec 0$ 4) $4x^2-8x+3=0$

5) $x^2-4x+2=0$ 6) $x^2+5x+7=0$

7) $2x^2-4x+6=0$ 8) $x^2-4x-21=0$

9) $3x^2-6x+3=0$

الأجوبة: $6x^2-7x-5=0$ $a=6$ و $b=-7$ و $c=-5$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times6\times(-5)=49+120=169=(13)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times6}=\frac{7+13}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

$x_2=\frac{7-13}{12}=\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{5}{3},-\frac{1}{2}\right\}$

2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ $a=2$ و $b=-2\sqrt{2}$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times1=8-8=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل **حلا وحيدا هو:**

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $3x^2+x+2=0$ $a=3$ و $b=1$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$

بما أن $\Delta\prec 0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

4) $4x^2-8x+3=0$ و $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times3\times(4)=84-8=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times4}$ و $x_2=\frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times4}$

$x_1=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\}$

5) $x^2-4x+2=0$ و $a=1$ و $b=-4$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(1)=16-8=8>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times1}$ و $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=\frac{2(2+\sqrt{2})}{2}=2+\sqrt{2}$

$x_2=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{2}=2-\sqrt{2}$ ومنه: $S=\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\}$

6) $x^2+5x+7=0$ و $a=1$ و $b=5$ و $c=7$

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times1\times7=25-28=-3<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

7) $2x^2-4x+6=0$ و $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times6=16-48=-32<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

8) $x^2-4x-21=0$ و $a=1$ و $b=-4$ و $c=-21$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-21)=16+84=100=(10)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times1}$ و $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+10}{2}=\frac{14}{2}=7$ و $x_2=\frac{4-10}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ ومنه: $S=\{-3,7\}$

9) $3x^2-6x+3=0$ و $a=3$ و $b=-6$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times3\times3=36-36=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو :

$x=\frac{-b}{2a}$ يعني $x=\frac{-(-6)}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$ ومنه: $S=\{1\}$

3. تعميل ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود ax^2+bx+c و ليكن Δ مميزها.

1. إذا كان: $\Delta\succ0$ فان المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2.

و لدينا: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

2. إذا كان: $\Delta=0$ فان: $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

3. إذا كان: $\Delta\prec0$ فان: ax^2+bx+c لا يمكن تعميلها إلى حدوديتين من الدرجة الأولى.

أمثلة : عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $x^2-10x+25$ 2) x^2-3x+2 3) $3x^2+x+2$

أجوبة : 1) $x^2-10x+25$: $a=1$ و $b=-10$ و $c=25$

$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times(25)=100-100=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد **هو:**

$x_1=\frac{-(-10)}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$

ومنه التعميل : $x^2-10x+25=a(x-x_1)^2=1(x-5)^2$

2) x^2-3x+2 و $a=1$ و $b=-3$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1=(1)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times1}$ و $x_2=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times1}$ يعني $x_1=2$ و $x_2=1$

ومنه التعميل :

$x^2-3x-2=a(x-x_1)(x-x_2)=1(x-2)(x-1)$

3) $3x^2+x+2$ لدينا:

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

تمرين 3: عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $2x^2-4x+6$ 2) $4x^2-8x+3$ 3) $3x^2-6x+3$

أجوبة : 1) $2x^2-4x+6=0$: $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(6)=16-48=-32<0$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

2) $4x^2-8x+3=0$ و $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_2=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

ومنه التعميل : $4x^2-8x+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(4x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

3) $3x^2-6x+3$ بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1=\frac{-(-8)}{2\times4}=1$

ومنه التعميل : $3x^2-6x+3=a(x-x_1)^2=3(x-1)^2$

III. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

إشارة الحدانية: $ax+b$ $a\neq0$

ملخص:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

مثال 1: لنحدد إشارة $2x+1$

$2x+1=0$ يكافئ $x=-\frac{1}{2}$

و بما أن $a=2$ و $a\succ0$ جدول إشارة $2x+1$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$

مثال 2: لنحدد إشارة $-x+2$

$-x+2=0$ يكافئ $x=2$

و بما أن: $a=-1$ و $a\prec 0$ فان جدول إشارة $-x+2$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	$-$	0	$+$

مثال 3: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $3x+6\geq 0$

$3x+6=0$ يكافئ $x=-2$

و بما أن: $3x+6\geq 0$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x+6$	$-$	0	$+$

و منه فان

$S=[-2;+\infty[$:

مثال 4: حدد إشارة: $-3x+9$

وحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $-3x+9\prec 0$

تمرين 4: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

1) $-2x+12>0$ 2) $5x-15\leq 0$

أجوبة: 1) $-2x+12>0$ $-2x+12=0$ يكافئ $x=6$

و بما أن: $a=-2$ و $a<0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	$+$	0	$-$

و منه فان : $S=]-\infty;6[$

2) $5x-15\leq 0$ $5x-15=0$ يكافئ $x=3$

و بما أن: $a=5$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15=0$	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=]-\infty;3]$

IV. متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

1) حل متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

مثال 1: أو تمرين 5: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $4x^2-9\geq 0$ 2) $(1-x)(2x+4)>0$

أجوبة: 1) $4x^2-9\geq 0$

$4x^2-9=0$ **يعني** $(2x)^2-3^2=0$ **يعني** $(2x-3)(2x+3)=0$

يعني $2x+3=0$ أو $2x-3=0$ **يعني** $x=\frac{-3}{2}$ أو $x=\frac{3}{2}$

الطريقة: في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax+b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-3)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$ **يعني** $2x+4=0$ أو $1-x=0$ **يعني**

$x=-2$ أو $x=1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(1-x)(2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

و منه فان : $S=]-2;1[$

تمرين 6: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $9x^2-25\prec 0$

2) إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c وحل متراجحات من الدرجة الثانية:

الحالة1: إذا كان $\Delta\succ 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود فان:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	0	عكس اشارة a	0	اشارة a	

الحالة2: إذا كان $\Delta=0$: و x_1 هو الجذر الوحيد المزدوج فان:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	0	اشارة a	

الحالة3: إذا كان $\Delta\prec 0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a فان:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	

مثال1:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=2x^2-3x+1$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2x^2-3x+1\geq 0$

أجوبة: 1) $P(x)=2x^2-3x+1$ $a=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ و $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) حل المتراجحة : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

مثال2:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=-2x^2+4x-2$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $-2x^2+4x-2>0$

أجوبة: 1) $P(x)=-2x^2+4x-2$ $a=-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد **هو:** $x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)=-2x^2+4x-2$		$-$	0	$-$	

2)حل المتراجحة : $S=\mathbb{R}$

مثال3:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=3x^2+6x+5$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $3x^2+6x+5<0$

أجوبة: 1) $P(x)=3x^2+6x+5$ $\quad a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$ ومنه:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$		$+$	

2)حل المتراجحة : $S=\varnothing$

تمرين 7: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $2x^2-4x+6\geq0$ 2) $4x^2-8x+3\leq0$ 3) $x^2-3x-10<0$

أجوبة: 1) $2x^2-4x+6\geq0$ $\quad a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$		$+$	

ومنه: $S=\mathbb{R}$

2) $4x^2-8x+3\leq0$ $\quad a=4$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

3) $x^2-3x-10<0$ $\quad a=4$

$\Delta=b^2-4ac=49>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=5$ و $x_2=-2$ ومنه:

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-2,5[$

V. النظمات:

1. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين:

مثال و أنشطة:

$\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأزواج (x,y) حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$.

مثال: نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

1) تأكد أن الزوج $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة: $2x+3y=2$

2) اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة: $2x+3y=2$

3) حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

أجوبة: 1) $2\times0+3\times\frac{2}{3}=2$ اذن : $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة

2) $x=2$ اذن : $2\times2+3\times y=2$ يعني: $y=-\frac{2}{3}$ اذن : $\left(2,-\frac{2}{3}\right)\in S$

$x=3$ اذن : $2\times3+3\times y=2$ يعني: $y=-\frac{4}{3}$ اذن : $\left(3,-\frac{4}{3}\right)\in S$

$x=4$ اذن : $2\times4+3\times y=2$ يعني: $y=-2$ اذن : $(4,-2)\in S$

3) $2x+3y=2$ يعني $3y=-2x+2$ يعني $y=\frac{-2x+2}{3}$

يعني $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ اذن : $S=\left\{\left(x;\frac{-2}{3}x+\frac{2}{3}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

تمرين 8: حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات التالية :

1) $2x-8y+10=0$ 2) $-3x+12y-2=0$

3) $7x-14y+1=0$

أجوبة: 1) $2x-8y+10=0$ يعني $2y=8x-10$ يعني $y=\frac{8x-10}{2}$

يعني $y=4x-5$ اذن : $S=\{(x;4x-5)/x\in\mathbb{R}\}$

2) $-3x+12y-2=0$ يعني $12y=3x+2$ يعني $y=\frac{3x+2}{12}$

يعني $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}$ اذن : $S=\left\{\left(x;\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

3) $7x-14y+1=0$ يعني $7x=14y-1$ يعني $x=\frac{14y-1}{7}$

يعني $x=2y-\frac{1}{7}$ اذن : $S=\left\{\left(2y-\frac{1}{7};y\right)/y\in\mathbb{R}\right\}$

2. نظمة معادلتين:

نعتبر النظمة: $(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ حيث a و b و a' و b' و c' أعداد حقيقية.

هناك عدة طرق لحل نظمة سبق أن درست طريقتين هما طريقة التعويض و التأليفة الخطية طبعا هناك طريقة أخرى انتبه

a. طريقة التعويض :

مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

الجواب :

نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$4x+y=10$ يعني $y=10-4x$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$-5x+2y=-19$ يعني $-5x+2(10-4x)=-19$

يعني $-5x-8x=-19-20$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y=10-4x$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

b. طريقة التأليفة الخطية

مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

الجواب :

نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل على : $\begin{cases}-8x-2y=-20\\-5x+2y=-19\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$-8x-2y-5x+2y=-20-19$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x+y=10$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

c. طريقة المحددة :

تعريف و خاصية: العدد الحقيقي $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة (S) و نكتب: $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

- إذا كان $\Delta=0$ فان النظمة (S) قد لا يكون لها أي حل, و قد يكون لها عدد لا منته من الحلول.
- إذا كان $\Delta\neq 0$ فان النظمة (S) تسمى نظمة كرامر و تقبل حلا وحيدا هو الزوج (x,y) حيث:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{cb'-c'b}{\Delta} \text{ و } y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{ac'-a'c}{\Delta}.$$

هذه الطريقة تسمى طريقة المحددة.

مثال: طريقة المحددة:

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $(1)\begin{cases} x+2y=4 \\ -x+4y=2 \end{cases}$

الجواب : محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=6\neq 0$ و منه النظمة تقبل

حلا وحيدا: هو $x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{12}{6}=2$ و $y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{6}{6}=1$ و منه: $S=\{(2,1)\}$

تمرين 9: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمات التالية :

1) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ -2x+3y=5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -7x-3y=4 \\ 4x+5y=-2 \end{cases}$

أجوبة :

1) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$ نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$2x-y=-1$ يعني $y=2x+1$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$3x+2(2x+1)=9$ يعني $-5x+2y=-19$

يعني $7x+2=9$ يعني $7x=7$ يعني $x=1$

ونعوض x ب 1 في المعادلة $y=2x+1$ فنجد $y=3$

و منه: $S=\{(1,3)\}$

2) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ -2x+3y=5 \end{cases}$

نضرب المعادلة الأولى في العدد (2) فنحصل على :

$\begin{cases} 2x-4y=-8 \\ -2x+3y=5 \end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$2x-4y-2x+3y=-8+5$ يعني $-y=-3$ يعني $y=3$

ونعوض y ب 3 في المعادلة $x-2y=-4$ فنجد $x=2$

و منه: $S=\{(2,3)\}$

3) محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-35+12=-23\neq 0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{14}{23}$ و $y=\frac{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{2}{23}$ و نه: $S=\left\{\left(-\frac{14}{23},-\frac{2}{23}\right)\right\}$

تمارين للبحث

تمرين 1 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $2x^2-4x+6=0$ 2) $4x^2-8x+3=0$

3) $3x^2-6x+3=0$ 4) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

5) $x^2-4x+2=0$ 6) $x^2+5x+7=0$

تمرين 2 : 1) حل جبريا النظمة التالية : $\begin{cases} x+y=14 \\ 5x+3y=50 \end{cases}$.

2) ملأ شخص أربع عشرة قنينة بخمس لترات من عصير فواكه .
إذا علمت أن القنينات نوعان : قنينات سعة كـل واحدة منها 0,5 لترا و قنينات سعة كـل واحدة منها 0,3 لترا، حدد عدد القنينات من كـل نوع .

تمرين 3 :

1) حـل المعادلة : $(2x-3)(4-3x)=0$.

2) حـل المتراجحة : $5x-2<2(x+5)$.

3) اشترى شخص محسبة و كتابا بثمن 153 درهما.
إذا علمت أن نصف ثمن المحسبة ينقص بثمانية عشر درهما عن ثلثي ثمن الكتاب، أحسب ثمن المحسبة .

تمرين 4 :

1) حـل النظمة : $\begin{cases} x+y=20 \\ 2x+5y=61 \end{cases}$.

2) يتوفر أحمد على 61 درهما موزعة على 20 قطعة نقدية بعضها من فئة درهمين ، والبعض الآخر من فئة خمسة دراهم. أحسب عدد القطع النقدية من كـل فئة

تمرين 5 :

1) أ) حـل المعادلة التالية : $\frac{2x}{3}-\frac{5}{6}=x-\frac{3}{2}$.

ب) حـل المتراجحة التالية : $2-3x>x+7$.

2) أ) حـل النظمة : $\begin{cases} 3x+5y=72 \\ x+y=20 \end{cases}$.

ب) واجب زيارة أحد المتاحف هو 3 دراهم للأطفال و 5 دراهم للكبار.
أدى فوج من 20 زائر مبلغ 72 درهما لزيارة هذا المتحف.
حدد عدد الأطفال و عدد الكبار في هذا الفوج .

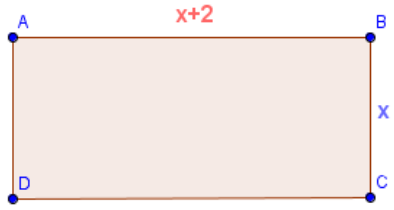
1) $\begin{cases} 2x-5y=-13 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=1 \\ -2x+4y=-2 \end{cases}$

تربيض وضعيات :

نشاط

أحسب طول عرض مستطيل اذا علمت أن طوله يزيد عن عرضه ب $2cm$
وأن مساحته تساوي $15cm^2$

الجواب



ليكن x وعرض مستطيل اذن طوله هو : $x+2$ ومنه مساحته هي :

$$S = x(x+2) = 15$$

ومنه نحصل عن معادلة من الدرجة الثانية :

$x^2+2x-15=0$: $a=1$ و $c=-15$ و $b=2$

$$\Delta = b^2-4ac = (2)^2-4\times1\times(-15) = 64 > 0$$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

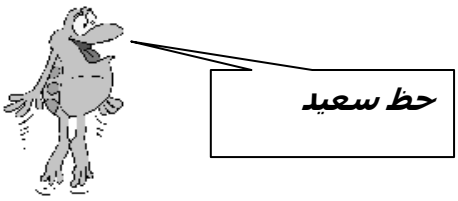
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-2+8}{2\times1} = 3$ و $x_2 = \frac{-2-8}{2\times1} = -5 < 0$

ومنه:بما أن عرض مستطيل لا يمكن أن يكون سالبا :

نأخذ $x = 3$

وبالتالي طوله هو : $5cm$



أكاديمية الجهة الشرقية

مستوى الجدع مشترك أدبي
مذكرة رقم2 : الاحصاء

الأستاذ: نجيب عثماني

محتوى الدرس

- تنظيم جداول إحصائية
الحصيص ، التردد ، النسب المئوية ، الحصيص المتراكمة ن التردد المتراكم
- التمثيلات المبيانية: مبيان بالعصي ، مبيان بالأشرطة ، مبيان بالقطاعات ، المدراج
- وسيطات الوضع :المعدل الحسابي ، المنوال
- وسيطات التشتت :الانحراف المتوسط ، المغايرة ، الانحراف الطرازي .

القدرات المنتظرة

- تنظيم معطيات إحصائية
- قراءة جداول ومبيانات إحصائية.
- حساب وتأويل الوسيطات الإحصائية

تعريف للإحصاء: الإحصاء علم يهتم بجمع و تنظيم ظواهر عديدة قصد التخطيط الجيد بعيدا عن الصدفة.
حيث لدراسة ظاهرة أيا كانت اجتماعية أو اقتصادية أو سياسة تقوم الدولة من فترة زمنية الى أخرى بعملية الاحصاء طبعا احصاء كل شيء عدد السكان (كل الفئات العمرية) مثلا المحاصيل الزراعية عدد النوادي .....
وقد ساهم التطور الهائل في مجال الاعلاميات في تطوير وتقوية هذه العمليات الحسابية .....
اذن لدراسة ظاهرة ما أولا نقوم بتجميع المعلومات وبعد ذلك تنظيمها في جداول احصائية ثم نمثلها لكي تعطينا فكرة واضحة وسريعة عن الظاهرة بحيث يسهل تحليلها والتخطيط المستقبلي لها ولنتائجها .

I. تنظيم المعلومات ومصطلحات احصائية

نشاط 1: ميزة إحصائية متقطعة:

الكشف التالي يعطينا نقط تلاميذ الجذع مشترك علمي في فرض من الفروض:
9–8–10–12–10–8–15–18–16–15–12–12–10–10–9–8–15–12–8–10

الاصطلاح الإحصائي:

- ❖ الساكنة الإحصائية: هي المجموعة " أو العينة " التي تخضع للدراسة. في هذا المثال :هي مجموعة تلاميذ الجذع مشترك علمي
- ❖ الوحدة الإحصائية: كل عنصر من هذه المجموعة يسمى وحدة إحصائية في هذا المثال :هو كل تلميذ من مجموعة تلاميذ الجذع مشترك علمي
- ❖ الميزة الإحصائية: هي الظاهرة المراد دراستها و هي نوعان: كمية أو كيفية. هذا المثال :هي النقطة وهي ميزة كمية
  - ○ الميزة الإحصائية الكمية هي الميزة المعبر عنها بعدد (الطول – العرض - الوزن.....)
  - ○ الميزة الإحصائية الكيفية هي التي لا يمكن التعبير عنها بعدد (اللغة – فصيلة الدم .....)

يمكن تنظيم نتائج الأحصاء في جدول يسمى جدول الحصيصات و الحصيصات المتراكمة:

قيمة الميزة	8	9	10	12	15	16	18
الحصيص	4	2	5	4	3	1	1
الحصيص المتراكم	4	6	11	15	18	19	20

ملاحظة 1: $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = 20$
العدد 20 يسمى الحصيص الإجمالي لهذه المتسلسلة و نرمز إليه ب N

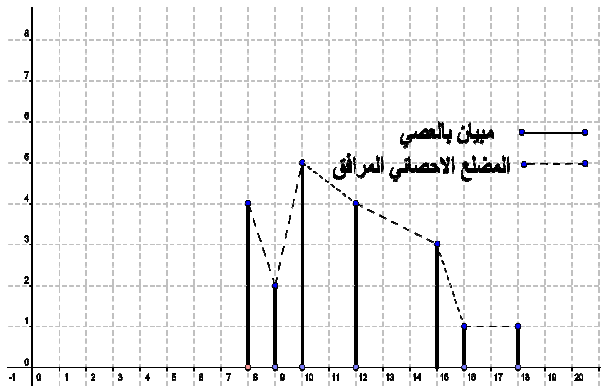
التردد و النسب المائوية : تردد القيمة x_i هو العدد الحقيقي المرموز إليه ب f_i و المعرف ب $f_i = \frac{n_i}{N}$

- النسبة المئوية للقيمة x_i هو العدد المرموز له ب p_i و المعرف ب $p_i = 100 f_i$.
- مثال : التردد الموافق للميزة 12: $f_1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ و
- النسبة المئوية الموافقة للميزة 12هي :

$$p_1 = f_1 \times 100 = \frac{100}{5} = 20\%$$

- **التمثيلات المبيانية:**

هناك عدة أنواع مثلا : (مخطط بالعصي و يمكن أن نرسم المضلع المرافق له)



II. وسيطات الوضع :

1. **المنوال :** كل قيمة للميزة لها أكبر حصيص تسمى منوالا (في المثال : القيمة 10)
2. **القيمة الوسطية :** القيمة الوسطية لمتسلسلة إحصائية هي أصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبرمن أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي.
(في المثال :نصف الحصيص الاجمالي هو 10
و اذن القيمة الوسطية هي 10)
3. **المعدل الحسابي :**

$$m=\frac{8\times4+9\times2+10\times5+12\times4+15\times3+16\times1+18\times1}{20}$$

اذن : $m=\frac{32+18+50+48+45+16+18}{20}=\frac{227}{20}=11.35$

$m=11.35$

III. وسيطات التشتت:

نعتبر المتسلسلة الإحصائية التالية :

الميزة	1	2	7
الحصيص	5	4	1

نحسب المعدل الحسابي:

$$m=\frac{5\times1+4\times2+1\times7}{10}=\frac{20}{10}=2$$

الانحراف المتوسط: e

$$e=\frac{5\times|1-2|+4|2-2|+1\times|7-2|}{10}=\frac{5\times|-1|+4|0|+1\times|5|}{10}$$

$$e=\frac{5\times1+4\times0+1\times5}{10}=\frac{10}{10}=1$$

المغايرة: V

$$V=\frac{5\times|1-2|^2+4|2-2|^2+1\times|7-2|^2}{10}=\frac{5\times|-1|^2+4|0|^2+1\times|5|^2}{10}$$

$$V=\frac{5\times1+4\times0+1\times25}{10}=\frac{30}{10}=3$$

الانحراف الطرازي: $\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{3}$

تمرين4 :

تم إحصاء التغيبات في إحدى الأقسام المكونة من 40 تلميذا خلال الأسدس الأول من هذه السنة الدراسية فكانت النتائج كالتالي :

الميزة (عدد ساعات الغياب)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الحصيص	4	2	1	5	5	5	8	1	3	3	3
الحصيص المتراكم											

1. أنقل الجدول على ورقتك ثم أتممه .
2. حدد عدد و النسبة المئوية للتلاميذ الذين تغيبوا أكثر من أو يساوي 6 ساعات
3. أحسب وسيطات الوضع : أ) المنوال ب) المعدل الحسابي ج) القيمة الوسطية
4. أحسب وسيطات التشتت : أ) الانحراف المتوسط ب) المغايرة ج) الانحراف الطرازي
5. أنشئ مخطط للعصي و المضلع الإحصائي الموافق له.

أجوبة : 1)

الميزة (عدد ساعات الغياب)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الحصيص	4	2	1	5	5	5	8	1	3	3	3
الحصيص المتراكم	4	6	7	12	17	22	30	31	34	37	40

2) عدد التلاميذ الذين تغيبوا أكثر من أو يساوي 6 ساعات هو : 18

و النسبة المئوية هي: $p=f\times100=\frac{18}{40}100=45\%$

3) حساب وسيطات الوضع : أ) المنوال :هو 6س

ب) المعدل الحسابي :

$$m=\frac{0\times4+1\times2+2\times1+3\times5+5\times4+5\times5+6\times8+7\times1+8\times3+9\times3+10\times3}{40}$$

اذن : $m=\frac{0+2+2+15+20+25+48+7+24+27+30}{40}=\frac{200}{40}=5$

ج) القيمة الوسطية: نصف الحصيص الاجمالي هو 20

اذن القيمة الوسطية هي: 5

4) وسيطات التشتت : أ) الانحراف المتوسط:

$$e=\frac{4\times|0-5|+2|1-5|+1\times|2-5|+5\times|3-5|+5|4-5|+5\times|5-5|+8|6-5|+1\times|7-5|+3|8-5|+3\times|9-5|+3\times|10-5|}{40}$$

$$e=\frac{4\times|-5|+2|-4|+1\times|-3|+5\times|-2|+5|-1|+5\times|0|+8|1|+1\times|2|+3|3|+3\times|4|+3\times|5|}{40}$$

$$e=\frac{4\times5+2\times4+1\times3+5\times2+5\times1+5\times0+8\times1+1\times2+3\times3+3\times4+3\times5}{40}$$

$$e=\frac{20+8+3+10+5+0+8+2+9+12+15}{40}=\frac{92}{40}=2,3$$

ب) المغايرة :

$$V=\frac{4|0-5|^2+2|1-5|^2+1\times|2-5|^2+5\times|3-5|^2+5|4-5|^2+5\times|5-5|^2+8|6-5|^2+1\times|7-5|^2+3|8-5|^2+3\times|9-5|^2+3\times|10-5|^2}{40}$$

$$V=\frac{4\times|-5|^2+2|-4|^2+1\times|-3|^2+5\times|-2|^2+5|-1|^2+5\times|0|^2+8|1|^2+1\times|2|^2+3|3|^2+3\times|4|^2+3\times|5|^2}{40}$$

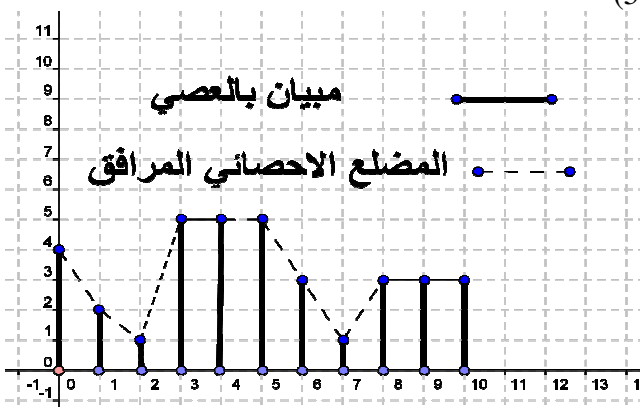
$$V=\frac{4\times25+2\times16+1\times9+5\times4+5\times1+5\times0+8\times1+1\times4+3\times9+3\times16+3\times25}{40}$$

$$V=\frac{100+32+9+20+5+0+8+4+27+48+75}{40}\qquad V=\frac{328}{40}=8,2$$

ج) الانحراف الطرازي:

$\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{8,2}$

(5



نشاط2:ميزة إحصائية متصلة :

مثال :

الكشف التالي يعطينا نقط تلاميذ الجذع مشترك علمي في فرض من الفروض:

14–15–06–08–10–07–14–19–06–08–09–02–10–12–08–06–15–08–12–10

املأ الجدول التالي :

الصنف (النقطة)	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20[
الحصيص				
الحصيص المتراكم				

1. حدد الصنف المنوالي للمتسلسلة الإحصائية
2. أحسب المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية
3. أحسب وسيطات التشتت
4. أنشئ مدراج الحصيصات و المضلع الاحصائي المرافق له

أجوبة : 1) المجالات: $[0,5[$, $[5,10[$, $[10,15[$. $[15,20[$ لها نفس السعة و تسمى أصناف الميزة.

الصنف (النقطة) نحسب منتصفات الأصناف	[0;5[2,5	[5;10[7,5	[10;15[12,5	[15;20[17,5
الحصيص	**1**	**9**	**7**	**3**
الحصيص المتراكم	**1**	**10**	**17**	**20**

2) الصنف المنوالي هو الصنف الذي له أكبر حصيص

(في **المثال:** الصنف المنوالي هو [5;10[ ).

3) المعدل الحسابي :

$$m=\frac{1\times2,5+9\times7,5+7\times12,5+3\times17,5}{20}=\frac{210}{20}=10,5$$

4) حساب وسيطات التشتت:

الانحراف المتوسط: e

$$e=\frac{1\times|2,5-10,5|+9\times|7,5-10,5|+7\times|12,5-10,5|+3\times|17,5-10,5|}{20}$$

$$e=\frac{1\times8+9\times3+7\times2+3\times7}{20}=\frac{70}{20}=3,5$$

المغايرة: V

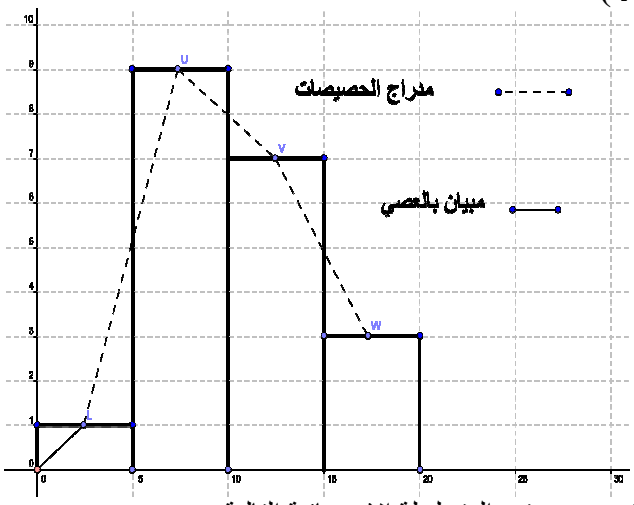
$$V=\frac{1\times|2,5-10,5|^2+9\times|7,5-10,5|^2+7\times|12,5-10,5|^2+3\times|17,5-10,5|^2}{20}$$

$$V=\frac{1\times|-8|^2+9|-3|^2+7\times|2|^2+3\times|7|^2}{10}$$

$$V=\frac{64+81+28+147}{20}=\frac{320}{20}=16$$

الانحراف الطرازي: $\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{16}=4$

(4



تمرين نعتبر المتسلسلة الاحصائية التالية:

الصنف	[0;4[	[4;8[	[8;12[	[12;16[	[16;20[
الحصيص	**1**	**2**	**4**	**2**	**1**

1. **حدد الصنف المنوالي للمتسلسلة الإحصائية**
2. **أحسب المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية**
3. **أحسب وسيطات التشتت**
4. **أنشئ** مدراج الحصيصات و المضلع الاحصائي المرافق له

أجوبة : 1) الصنف المنوالي هو الصنف الذي له أكبر حصيص هو [8;12[

2) المعدل الحسابي :

$$m=\frac{1\times2+2\times6+4\times10+2\times14+1\times18}{10}=\frac{100}{10}=10$$

3) حساب وسيطات التشتت:

الانحراف المتوسط: e

$$e=\frac{1\times|2-10|+2\times|6-10|+4\times|10-10|+2\times|14-10|+1\times|18-10|}{10}$$

$$e=\frac{1\times|-8|+2\times|-4|+4\times|0|+2\times|4|+1\times|8|}{10}=\frac{1\times8+2\times4+4\times0+2\times4+1\times8}{10}$$

$$e=\frac{8+8+0+8+8}{10}=\frac{32}{10}=3,2$$

المغايرة: V

$$V=\frac{1\times|2-10|^2+2\times|6-10|^2+4\times|10-10|^2+2\times|14-10|^2+1\times|18-10|^2}{10}$$

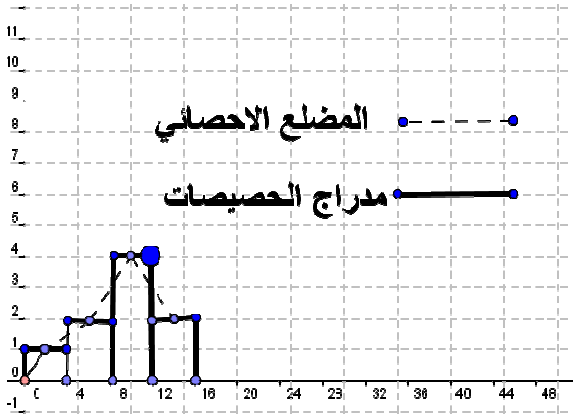
$$V=\frac{1\times|-8|^2+2\times|-4|^2+4\times|0|^2+2\times|4|^2+1\times|8|^2}{10}$$

$$V=\frac{1\times64+2\times16+4\times0+2\times16+1\times64}{10}$$

$$e=\frac{64+32+0+32+64}{10}=\frac{192}{10}=19,2$$

الانحراف الطرازي: $\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{19,2}$

(4



تمارين للبحث

تمرين1

يضم ناد للسباحة 25 منخرطا موزعين حسب أعمارهم وفق الجدول التالي :

العمر (سنة)	12	13	14	15	16	17
الحصيص	2	3	7	1	8	4
الحصيص المتراكم						

1. حدد منوال هذه السلسلة الإحصائية وأعط تفسير لها
2. أحسب معدل سن المنخرطين داخل هذا النادي
3. حدد النسبة المئوية الموافقة للميزة 14
4. حدد التردد الموافق للميزة 14
5. حدد النسبة المئوية للمنخرطين داخل هذا النادي الذي سنهم أكثر من 15 سنة
6. أحسب وسيطات التشتت : أ) الانحراف المتوسط ب) المغايرة ج) الانحراف الطرازي
7. أنشئ مخطط للعصي و المضلع الإحصائي الموافق له.

تمرين2

حصل تلاميذ أحد الأقسام و عددهم 30 في أحد فروض مادة الرياضيات على النقط التالية:

11 – 08 – 10 – 12 – 13 – 11 – 08 – 14 – 08 – 09 – 11 – 12 – 11 -12 – 11–12- 08 – 10– 13 – 14 – 13 – 12 – 11 – 09 - 12 – 16 – 14 – 10 – 11 – 13 – 12 – 11 – 11.

1. كون جدولا للحصيصات و الحصيصات المتراكمة
2. حدد التردد الموافق للميزة 11
3. حدد النسبة المائوية الموافقة للميزة 11
4. أحسب وسيطات الوضع : أ) المنوال ب) المعدل الحسابي
5. أحسب وسيطات التشتت : أ) الانحراف المتوسط ب) المغايرة ج) الانحراف الطرازى
6. أنشئ مخطط للعصي و المضلع الإحصائي الموافق له.

تمرين3

يعطينا الجدول التالي النقط التي حصل عليها تلاميذ أحد الأقسام في مادة الرياضيات

الصنف النقطة	[0,4[	[4,8[	[8,12[	[12,16[	[16,20[
	1	2	4	2	1

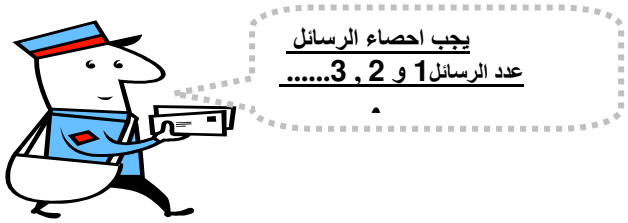
1. حدد التردد الموافق للصنف : [8,12[
2. حدد النسبة المئوية الموافقة للصنف : [8,12[
3. أحسب وسيطات الوضع : أ) المنوال ب) المعدل الحسابي
4. أحسب وسيطات التشتت : أ) الانحراف المتوسط ب) المغايرة ج) الانحراف الطرازي
5. أنشئ مدراج الحصيصات و المضلع الاحصائى المرافق له

تمرين4

أثناء القيام بمراقبة السرعة في طريق رئيسية (حيث السرعة محددة في أقل من 100Km/h و كل تجاوز لها يمثل مخالفة) تم الكشف عن النتائج التالية :

السرعة ب Km/h	[70,80	[80,90[	[90,100[	[100,110[	[110,120[
الحصيص	28	95	77	38	12

1. ما عدد العربات التي مرت أثناء المراقبة .
2. ما الصنف المنوالي لهده المتسلسلة الإحصائية ؟ ما ذا يعني ذالك ؟ . أحسب معدل السرعة في هدا الطريق .
3. ما النسبة المئوية للمخالفات ؟



ثانوية ابن خلدون التأهيلية

المادة: الرياضيات

درس رقم/7

الأستاذ: نجيب عثماني

ملخص لدرس: الدوال العددية

مستوى الجذع مشترك أدبي

I. مفهوم دالة عددية

تعريف: ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$.
نسمي f دالة عددية معرفة على D (أو f دالة من D نحو $\mathbb{R}$), كل علاقة تربط كل عنصر x من D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$, يرمز له بالرمز $f(x)$.

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي: $f(x)=-2x$
أنقل و أتمم الجدول التالي:

x	1			$\frac{5}{2}$		
$f(x)$		-6	-1		$\frac{2}{7}$	13

II. مجموعة تعريف دوال عددية:

تعريف:
لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x .
مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا بالرمز D_f بمعنى: $x\in D_f$ تكافئ $f(x)\in\mathbb{R}$.

ملحوظة: نقول إن f دالة عددية معرفة على A إذا كان A جزءا من D_f .

اصطلاحات: لتكن f دالة عددية معرفة على D نكتب: $f:D\to\mathbb{R}$
$x\to f(x)$

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f .
- ليكن x عنصرا من D, بحيث: $y=f(x)$
  - ← y يسمى صورة x بالدالة f .
  - ← العنصر x يسمى سابق العنصر y .
- الدالة f تسمى كذلك دالة عددية لمتغير حقيقي.

المستوى المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ غالبا يكون متعامدا ممنظما.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\dfrac{2x}{4x^2-1}$
حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

III. التمثيل المبياني لدالة عددية:

تعريف:
لتكن f دالة عددية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.
التمثيل المبياني C_f للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى بحيث:

- الأفصول x يتغير في مجموعة التعريف D .
- الأرتوب y هو صورة x بالدالة f .

بمعنى $x\in D$ و $y=f(x)$.

هذا التعريف يعني: إذا كان $M(x,y)\in C_f$ فان $x\in D$ و $y=f(x)$.

إذا كان $x\in D$ و $y=f(x)$ فان $M(x,y)\in C_f$.

العلاقة $y=f(x)$ تسمى معادلة ديكارتية للمنحنى C_f في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2$

أرسم التمثيل المبياني للدالة f.

IV. الدالة الزوجية- الدالة الفردية:

أ) الدالة الزوجية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان:

- ❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f.
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x)=f(x)$

لكل x من, $-x$ تنتمي إلى D_f يعني أن D_f متماثل بالنسبة للعدد0.

خاصية: (التأويل المبياني لدالة زوجية)

لتكن f دالة عددية لمتغير x حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل المنحنى C_f.

ملاحظة: إذا كانت f دالة زوجية (على التوالي فردية) فانه يكفي إنشاء C_f على $D_f\cap\mathbb{R}^+$ و بالتماثل بالنسبة لمحور الأراتيب (على التوالي بالنسبة لأصل المعلم) نحصل على المنحنى C_f بكامله.

ب) الدالة الفردية:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تعريف:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها

نقول أن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان:

- ❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f.
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x)=-f(x)$

خاصية: (التأويل المبياني لدالة فردية)

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f.

V. تغيرات دالة عددية:

1. تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال I .

❖ نقول إن الدالة f تزايدية قطعا (تناقصية قطعا) على المجال I, إذا و فقط إذا كان لكل, إذا كان $x_1\prec x_2$ فان $f(x_1)\prec f(x_2)$ $(f(x_1)\succ f(x_2))$

❖ نقول إن الدالة f ثابتة على المجال I, إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I لدينا: $f(x_1)=f(x_2)$

2. جدول تغيرات دالة:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

دراسة منحى تغيرات الدالة f , يعني تجزيء المجموعة D_f إلى أكبر مجالات ممكنة تكون فيها الدالة f تزايدية أو تناقصية قطعا أو ثابتة.

و نلخص نتائج هده الدراسة في جدول, يسمى جدول تغيرات الدالة f , بحيث السهم ↗ (تصاعدي) يعني أن f تزايدية قطعا, و السهم ↘ (تنازلي) يعني أن تناقصية f قطعا, و السهم → (أفقي) يعني أن f ثابتة.

3. رتابة دالة f على مجال:

تعريف:

لتكن دالة عددية معرفة على مجال I.

نقول إن f رتيبة قطعا على المجال I إذا كانت تزايدية قطعا على I أو تناقصية قطعا على I.

VI. دراسة بعض الدوال الاعتيادية

الدالة: $x \mapsto ax+b$ $(a \neq 0)$

مثال 1: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x+1$

أرسم التمثيل المبياني للدالة f.

ملاحظة : التمثيل المبياني للدالة f هو مستقيم

مثال 2: $f(x)=4x$

و تحديد جدول التغيرات.

الدالة: $x \mapsto ax^2$ $(a \neq 0)$

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=ax^2$ و (P) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم.

زوجية الدالة f :

ليكن $x \in \mathbb{R}$: لدينا $-x \in \mathbb{R}$: $f(-x)=a(-x)^2$, إذن $f(-x)=f(x)$ و منه f دالة زوجية.

تغيرات f:

خاصية:

- إذا كانت $a \succ 0$: الدالة f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$ و تناقصية قطعا على $]-\infty,0]$.
- إذا كانت $a \prec 0$: الدالة f تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$ و تزايدية قطعا على $]-\infty,0]$.

الحالة: $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$-\infty$
f	↘	0	↗

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$-\infty$
f	↗	0	↘

التمثيل المبياني للدالة f:

بما أن f دالة زوجية فانه يكفي أن نمثلها على $\mathbb{R}^+$.

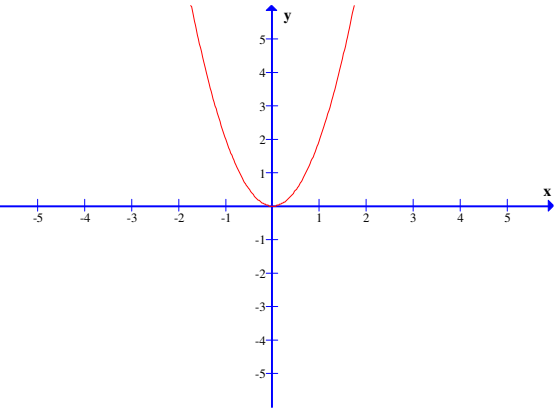
ثم نتمم المنحنى (P) باستعمال التماثل المحوري بالنسبة لمحور الأراتيب.

تعريف: المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto ax^2$ $(a \neq 0)$ يسمى شلجما.

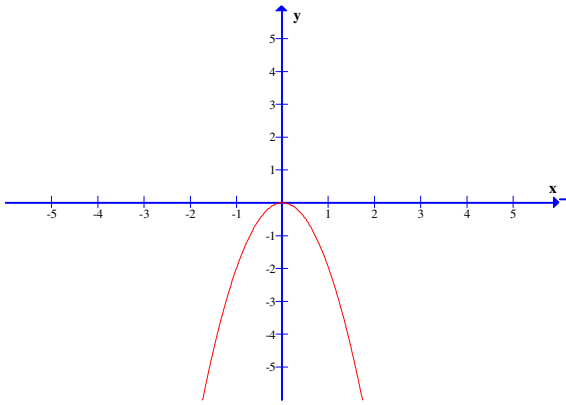
النقطة أصل المعلم تسمى رأس الشلجم.

كل منحنى يقبل معادلة على شكل $Y=aX^2$ حيث $a \neq 0$ في معلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ يسمى شلجما رأسه Ω و محور تماثله هو محور الأراتيب (ΩY).

حالة: $a \succ 0$



حالة: $a \prec 0$



الدالة: $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة بما يلي: $f(x) \mapsto \frac{a}{x}$ و (H) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$.

مجموعة التعريف: مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

زوجية الدالة f : ليكن x من D_f , لدينا $-x \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$ إذن f دالة فردية.

تغيرات f:

خاصية:

- إذا كان $a \succ 0$ فان الدالة f تناقصية قطعا على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.
- إذا كان $a \prec 0$ فان الدالة f تزايدية قطعا على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.

الحالة: $a \succ 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↗	‖	↗	

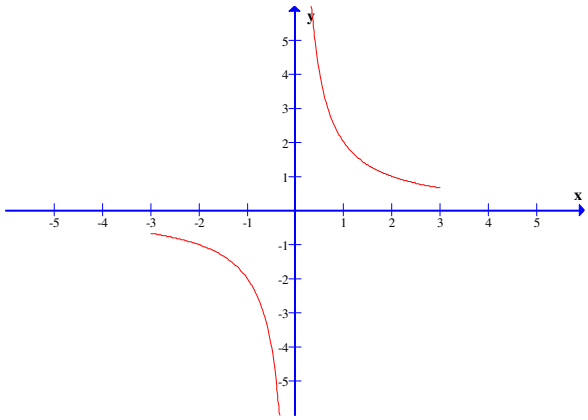
التمثيل المبياني للدالة f :

بما أن f دالة فردية فانه يكفي أن نمثل f على $]0,+\infty[$, ثم نتمم منحنى الدالة f على باستعمال التماثل المركزي الذي مركزه O أصل المعلم.

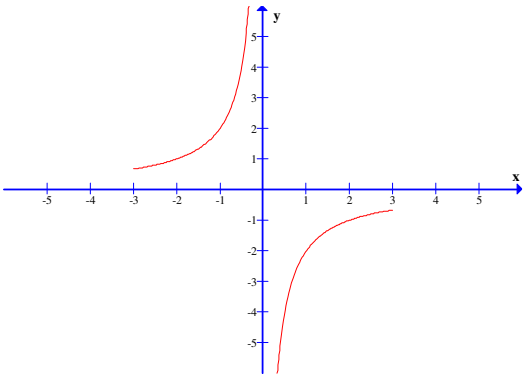
تعريف:

منحنى الدالة $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ يسمى هذلولا مركزه O أصل المعلم و مستقيماه المقاربان هما $x = 0$ و $y = 0$.

حالة: $a \succ 0$



الحالة: $a \prec 0$



مثال 1: دراسة و تمثيل الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \frac{2}{x}$

مثال 2: دراسة و تمثيل الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \frac{-3}{x}$

التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $x \mapsto ax^2 + bx + c$

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي: $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$

1. أنقل و أتمم الجدول التالي:

x	2	1	0	-1	-2	-3	-4
$f(x)$							

2. أرسم التمثيل المبياني للدالة f.

ملاحظة : التمثيل المبياني للدالة f يسمى شلجما رأسه $S(-1;0)$ و محوره $(D): x=-1$.

أكاديمية الجهة الشرقية

مستوى الجدع مشترك أدبي

الدرس الخامس : المعلم في المستوى

الأستاذ: نجيب عثماني

محتوى الدرس

المعلم في المستوى :

إحداثيتا نقطة ، إحداثيتا منتصف قطعة ، المسافة بين نقطتين

المعلم ، المعلم المتعامد ، المعلم المتعامد الممنظم.

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

تمثيل نقطة إحداثيتاها معلومتان

على التلميذ أن يكون قادرا على تحديد إحداثيتا نقطة و متجهة وحساب إحداثيتا منتصف قطعة و المسافة بين نقطتين.

1. المعلم في المستوى:

إذا كانت O و I و J ثلاث نقط غير مستقيمية فان المثلوث $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ يسمى معلما للمستوى.

ترميز: عادة نضع $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$.

فيصبح لدينا: $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوى.

2. إحداثيات نقطة:

نشاط : أرسم في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ النقط التالية : $A(2,3)$ و $B(4,-1)$

حدد باستعمال الشكل احداثيات M منتصف القطعة $[AB]$

تعريف: ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما

لكل نقطة M من المستوى يوجد زوج وحيد (x,y)

بحيث: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$

الزوج (x,y) هو إحداثيتي النقطة M في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و

نكتب $M(x,y)$

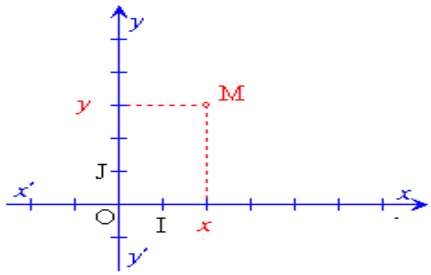
خاصية: ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما. $\overrightarrow{OM}(x,y)$ تكافئ $M(x,y)$.

x يسمى أفصول النقطة M

y يسمى أرتوب النقطة M

(OI) يسمى محور الأفاصيل

(OJ) يسمى محور الأراتيب.



3. إحداثيتا متجهة $\overrightarrow{AB}$:

خاصية: ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما.

إذا كانت $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ فان:

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$

في الكتابة $A(x_A,y_A)$ هو x_A أفصول A. y_A هو أرتوب A.

مثال:

إذا كانت $A(1,-4)$ و $B(-3,7)$.

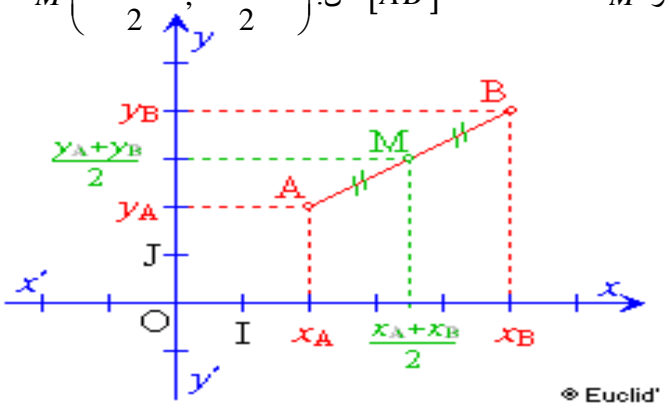
فان $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$ أي

أن $\overrightarrow{AB}(-3-1,7-(-4))$ و بالتالي: $\overrightarrow{AB}(-4,11)$

4. إحداثيتا منتصف قطعة:

خاصية: إذا كانت $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

و M منتصف القطعة $[AB]$ فان: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$



مثال: حدد زوج إحداثيتي M منتصف القطعة $[AB]$

$A(3,1)$ و $B(-1,2)$

الجواب : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I\left(\frac{3-1}{2};\frac{2+1}{2}\right)$ يعني $I\left(1;\frac{3}{2}\right)$

5. المسافة بين نقطتين:

ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما متعامدا ممنظما. إذا كانت $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ فان: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

مثال: المسافة بين النقطتين $A(3,1)$ و $B(-1,2)$ في معلم متعامد ممنظم هي:

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ أي أن $AB=\sqrt{(-1-3)^2+(2-1)^2}$ و بالتالي: $AB=\sqrt{17}$

تمرين1: في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

نعتبر النقط: $C(3,-2)$, $A(1,2)$ $B(-3,-1)$

1. حدد زوج إحداثيتي I منتصف $[AB]$
2. أحسب المسافات التالية: AB و AC و BC

الأجوبة : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I\left(\frac{1-3}{2};\frac{2-1}{2}\right)$ يعني $I\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

2) $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-3-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(3+3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$

تمرين2: نعتبر في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم النقط التالية:

$C(0,1+\sqrt{3})$, $B(1,1)$, $A(-1,1)$

1. حدد $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$
2. احسب : AB , AC , BC
3. استنتج طبيعة المثلث (ABC)
4. حدد إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$

الأجوبة :

1) $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$ أي أن $\overrightarrow{AB}(1+1,1-1)$

و بالتالي: $\overrightarrow{AB}(2,0)$

$\overrightarrow{AC}(x_C-x_A,y_C-y_A)$ أي أن $\overrightarrow{AC}(0+1,1+\sqrt{3}-1)$

و بالتالي: $\overrightarrow{AC}(1,\sqrt{3})$

$\overrightarrow{BC}(x_C-x_B,y_C-y_B)$ أي أن $\overrightarrow{BC}(0-1,1+\sqrt{3}-1)$

و بالتالي: $\overrightarrow{BC}(-1,\sqrt{3})$

2) $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1+1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{4+0}=\sqrt{4}=2$

$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

3) ومنه المثلث ABC متساوي الأضلاع لأن:

$AB=AC=BC$

4) $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I\left(\frac{-1+1}{2};\frac{1+1}{2}\right)$ يعني $I(0;1)$

أكاديمية الجهة الشرقية

مستوى الجدع مشترك أدبي

الدرس السادس : المستقيم في المستوى

الأستاذ: نجيب عثماني

محتوى الدرس

1)معادلات المستقيمات الخاصة (محورا المعلم)

- المستقيمات الموازية لأحد المحورين
- المعادلة الديكارتية لمستقيم .
- المعادلة المختصرة .

2)تقاطع مستقيمين

3)توازي وتعامد مستقيمين

4)تجويه المستوى بمستقيم: الحل المبياني لمتراجحة من الدرجة الأولى بمجهولين ، الحل المبياني لنظمة متراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين ، أنشطة حول البرمجة الخطية.

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

تحديد وإنشاء مستقيم معرف بنقطتين أو بنقطة ومعامله الموجه.

الحل المبياني لنظمة من معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.

التعبير والتعرف على توازي أو تعامد مستقيمين.

التمثيل المبياني لحل نظمة متراجحتين من الدرجة الأولى بمجهولين واستعماله لتجويه المستوى وحل مسائل من البرمجة الخطية.

I. معادلة مستقيم

1. **خاصية:** ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما.

كل مستقيم (D) في المستوى له معادلة على الشكل $ax+by+c=0$ حيث $a\neq 0$ أو $b\neq 0$ تسمى معادلة ديكارتية للمستقيم (D).

2. تحديد معادلة مستقيم يقطع محوري المعلم

ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما و $A(x_A,y_A)$ ، $B(x_B,y_B)$ نقطتين من المستوى بحيث : $x_A\neq x_B$ و $y_A\neq y_B$

معادلة ديكارتية للمستقيم هي : $(AB):\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$

مثال: $(o,\vec{i},\vec{j})$ معلم في المستوى $A(1,3)$ ، $B(2,5)$

حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

الجواب: $(AB):\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$

$\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-3}{5-3}$ يعني $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}$

يعني $2(x-1)=1(y-3)$ يعني $2x-2-y+3=0$

(AB) $2x-y+1=0$

تمرين1 نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ النقط التالية : $A(1,2)$ ، $B(3,7)$

حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

الجواب: $(AB):\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$

$\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-2}{7-2}$ يعني $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{5}$

يعني $5(x-1)=2(y-3)$ يعني $5x-5-2y+6=0$

(AB) $5x-2y+1=0$

تمرين2 نعتبر النقط: $A(1,-1)$ ، $B(3,1)$ ، $C(5,-2)$.

حدد معادلة ديكارتية للمستقيمات (AB) و (BC) و (AC)

الجواب:1) تحديد معادلة للمستقيم (AB)

$(AB):\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$

$\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-(-1)}{1-(-1)}$ يعني $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}$

يعني $2(x-1)=2(y+1)$ يعني $2x-2-2y-2=0$

(AB) $2x-2y-4=0$

2) تحديد معادلة للمستقيم (BC)

$(BC):\dfrac{x-x_B}{x_C-x_B}=\dfrac{y-y_B}{y_C-y_B}$

$\dfrac{x-3}{5-3}=\dfrac{y-1}{-2-1}$ يعني $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}$

يعني $-3(x-3)=2(y-1)$ يعني $-3x-2y+11=0$ (BC)

3) تحديد معادلة للمستقيم (AC)

$(AC): \frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A}$

$\frac{x-1}{5-1}=\frac{y-(-1)}{-2-(-1)}$ يعني $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-1}$

يعني $-(x-1)=4(y+1)$ يعني $-x+1-4y-4=0$

$(AC)\ -x-4y-3=0$ يعني $(AC)\ x+4y+3=0$

3. حالات خاصة

أ)معادلة مستقيم يوازي محور الأفاصيل

خاصية: معادلة ديكارتية للمستقيم الذي يوازي محور الأفاصيل ويمر من النقطة $A(x_A,y_A)$ هي : $y=y_A$

ب)معادلة مستقيم يوازي محور الأراتيب

خاصية: معادلة ديكارتية للمستقيم الذي يوازي محور الأراتيب و ويمر من النقطة $A(x_A,y_A)$ هي : $x=x_A$

تمرين3 في المستوى $(o;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط: $A(-1,2)$ ، $B(4,3)$

1)حدد معادلة ديكارتية للمستقيم الذي يوازي محور الأفاصيل ويمر من النقطة $A(-1,2)$

2)معادلة ديكارتية للمستقيم الذي يوازي محور الأراتيب و ويمر من النقطة $A(-1,2)$

3)حدد معادلة ديكارتية للمستقيم الذي يوازي محور الأفاصيل ويمر من النقطة $B(4,3)$

الجواب:1)المعادلة هي : $y=y_A$ يعني : $y=2$

2)المعادلة هي : $x=x_A$ يعني : $x=-1$

3)المعادلة هي : $y=y_B$ يعني : $y=3$

تمرين4 نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ النقط التالية : $A(1,3)$ ، $B(-2,4)$

1)حدد معادلة للمستقيم (AB) 2)أرسم المستقيم (AB)

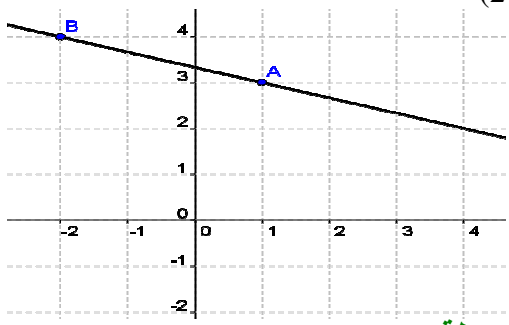
الجواب:1) $(AB): \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$

$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-3}{4-3}$ يعني $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-3}{1}$

يعني $1(x-1)=-3(y-3)$ يعني $x-1+3y-9=0$

$(AB)\ x+3y-10=0$

(2



ملاحظة: كل معادلة تكتب على شكل: $ax+by+c=0$ حيث $(a,b)\neq(0,0)$ هي معادلة مستقيم.

ملاحظة: الكتابة : $y=mx+p$ تسمى المعادله المختصرة للمستقيم (D)

m يسمى ميل المستقيم (D) أو المعامل الموجه للمستقيم (D).

تمرين5 نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (D) الذي معادلته: $(D)-2x+y-1=0$ والنقط التالية :

$A(1,3)$ ، $B(2,5)$ ، $C(3,6)$

1)حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D)

2)حدد المعامل الموجه للمستقيم (D).

3)هل النقط A و B و C تنتمي إلى (D)؟ 4)أرسم لمستقيم (D)

الأجوبة:يعني1) $(D)-2x+y-1=0$ **يعني** $(D)\ y=2x+1$

2) المعامل الموجه للمستقيم (D) هو : $m=2$

3) $A(1,3)$? نعوض في المعادلة: $(D)\ y=2x+1$ $x=1$

$y=2\times1+1=3$ ومنه $A(1,3)\in(D)$

$B(2,5)$? نعوض في المعادلة: $(D)\ y=2x+1$ $x=2$

$y=2\times2+1=5$ ومنه $B(2,5)\in(D)$

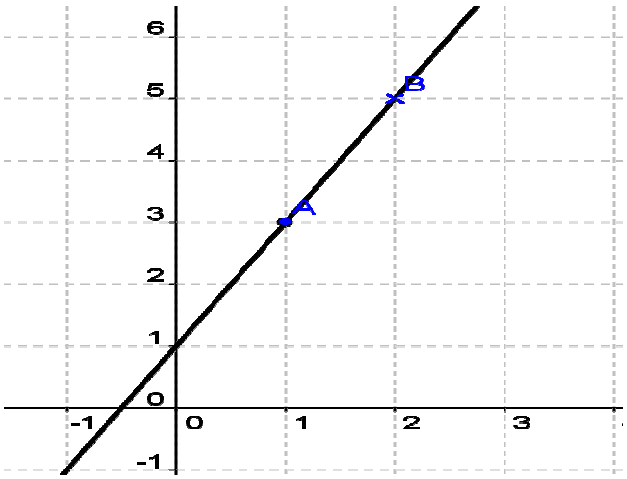
$C(3,6)$? نعوض في المعادلة: $(D)\ y=2x+1$ $x=3$

$y=2\times3+1=7\neq6$ ومنه $C(3,6)\notin(D)$

4رسم لمستقيم (D)

بما أن $A(1,3)\in(D)$ و $B(2,5)\in(D)$

يمكننا رسم (D) برسم النقط A و B



تمرين6 : نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (D) الذي معادلته: $(D)3x+y-2=0$ والنقط التالية :

$A(1,-1)$ ، $B(2,-4)$ ، $C(3,4)$

1)حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D)

2)حدد المعامل الموجه للمستقيم (D).

3)هل النقط A و B و C تنتمي إلى (D)؟ 4)أرسم لمستقيم (D)

الأجوبة:يعني1) $(D)3x+y-2=0$ **يعني** $(D)\ y=-3x+2$

2) المعامل الموجه للمستقيم (D) هو : $m=-3$

3) $A(1,-1)$? نعوض في المعادلة: $(D)\ y=-3x+2$ $x=1$

$y=-3\times1+2=-1$ ومنه $A(1,-1)\in(D)$

$B(2,-4)$? نعوض في المعادلة: $(D)\ y=-3x+2$ $x=2$

$y=-3\times2+2=-4$ ومنه $B(2,-4)\in(D)$

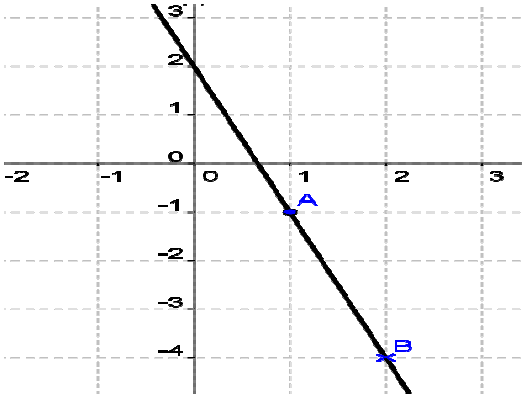
$C(3,4)$? نعوض في المعادلة: $(D)\ y=-3x+2$ $x=3$

$y=-3\times3+2=-7$ ومنه $C(3,4)\notin(D)$

4رسم لمستقيم (D)

بما أن $A(1,-1)\in(D)$ و $B(2,-4)\in(D)$

يمكننا رسم (D) برسم النقط A و B



الأوضاع النسبية لمستقيمين في المستوى

1. المستقيمان المتوازيان

لقد تعرفت في السنة الفارطة على توازي مستقيمين باستعمال صيغتي معادلتيهما المختصرة.

نعتبر المستقيمين $(D):ax+by+c=0$

و $(\Delta):a'x+b'y+c'=0$

خاصية: $(D):y=mx+p$ و $(\Delta):y=m'x+p'$

$(D)\parallel(\Delta)$ يعني أن: $m=m'$

m يسمى ميل المستقيم (D) أو المعامل الموجه للمستقيم (D).

مثال: $(D):3x+y-7=0$ $(D'):6x+2y-3=0$

هل (D) و (D') متوازيان؟

الأجوبة: $(D):3x+y-7=0$ يعني $(D):y=-3x+7$

ومنه المعامل الموجه للمستقيم (D) هو : $m=-3$

$(D'):6x+2y-3=0$ يعني $2y=-6x+3$

يعني $y=\frac{-6x+3}{2}$ يعني $y=-3x+\frac{3}{2}$ ومنه المعامل الموجه للمستقيم (D') هو : $m'=-3$

وجدنا $m=m'$ يعني أن $(D')\parallel(D)$

تمرين7 في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر المستقيمين التاليين:

$(D):2x+3y-1=0$ و $(\Delta):4x+6y+5=0$

هل $(D)\parallel(\Delta)$؟

الأجوبة: $(D):2x+3y-1=0$ يعني $(D):y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

ومنه المعامل الموجه للمستقيم (D) هو : $m=-\frac{2}{3}$

$(\Delta):4x+6y+5=0$ يعني $6y=-4x-5$

يعني $y=\frac{-4x-5}{6}$ يعني $y=-\frac{4}{6}x-\frac{5}{6}$ عني $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}$

ومنه المعامل الموجه للمستقيم (Δ) هو : $m'=-\frac{2}{3}$

وجدنا $m=m'$ يعني أن $(\Delta)\parallel(D)$

تمرين8 نعتبر المستقيمات (D_1) و (D_2) و (D_3) المعرفة كما يلي:

$(D_1):5x+y+2=0$ و $(D_2):2x+y-1=0$

و $(D_3):4x+2y+3=0$.

1. بين أن (D_1) و (D_2) متقاطعان.
2. بين أن (D_3) و (D_2) متوازيان قطعا.

2. المستقيمان المتعامدان

خاصية: $(D):y=mx+p$ و $(\Delta):y=m'x+p'$

$(D)\perp(\Delta)$ يعني أن: $m\times m'=-1$

مثال: $(D'):-x+2y+5=0$ و $(D):4x+2y-1=0$

هل (D) و (D') متعامدان؟

الأجوبة: $(D):4x+2y-1=0$ يعني $2y=-4x+1$ يعني

$y=-\frac{4}{2}x+\frac{1}{2}$ يعني $y=-2x+\frac{1}{2}$

ومنه المعامل الموجه للمستقيم (D) هو : $m=-2$

$(D'):-x+2y+5=0$ يعني $2y=x-5$

يعني $y=\frac{x-5}{2}$ يعني $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ ومنه المعامل الموجه للمستقيم (D') هو : $m'=\frac{1}{2}$

لدينا $m\times m'=-2\times\frac{1}{2}=-1$ يعني أن $(D')\perp(D)$

تمرين9 نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم المستقيم: $(D):-2x+y+3=0$ والنقط :

التالية: $A(0,2)$ و $B(4,0)$ و $C(3,3)$ و $D(-1,-5)$ و $E(2,1)$

1)حدد معادلة المختصرة للمستقيم (AB)

2)هل النقط D و C تنتمي إلى (D)؟

3)أرسم لمستقيم (D) و (AB)

4)هل النقطة E تنتمي إلى (D)؟ 5)هل النقطة E تنتمي إلى (AB)؟

6) تأكد أن (AB) و (D) متعامدان و حدد نقطة تقاطعهما

الجواب:1) $(AB): \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$

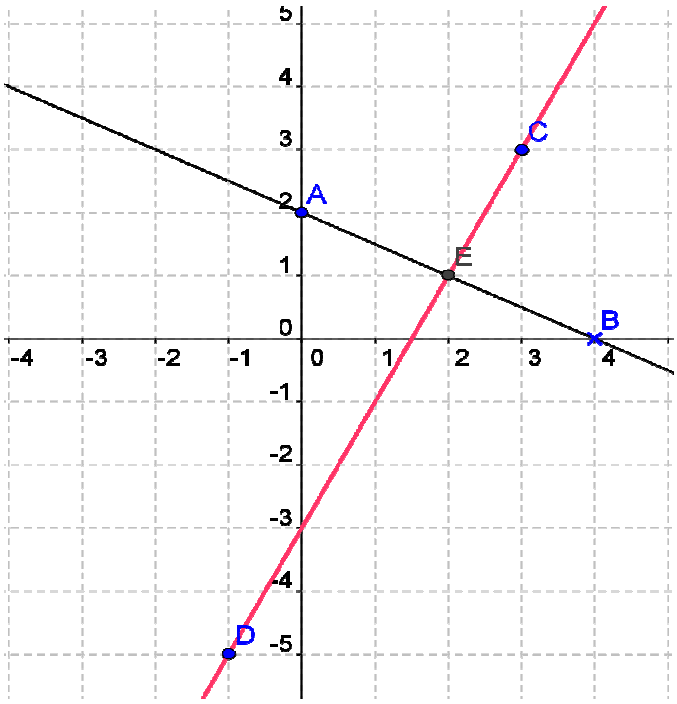
$\frac{x-0}{4-0}=\frac{y-2}{0-2}$ يعني $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{-2}$

يعني $-2x=4(y-2)$ يعني $-2x-4y+8=0$ (AB)

يعني $y=-\frac{1}{2}x+2$ (AB)

2)نعم النقط D و C تنتمي إلى (D)

3)رسم لمستقيم (D) و (AB)



4)نعم النقطة E تنتمي إلى (AB) 5) نعم النقطة E تنتمي إلى (D)

6) المستقيمان (AB) و (D) متعامدان لأن :

$m\times m'=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ ونقطة تقاطعهما هي النقطة E

تمرين10 نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم المستقيم: $(D):-2x+y+1=0$ والنقط التالية: $A(1,2)$ و $B(3,4)$ و $C(3,5)$ و $D(1,1)$ و $E(2,3)$

1)حدد معادلة المختصرة للمستقيم (AB)

2)هل النقط D و C تنتمي إلى (D)؟

3)أرسم لمستقيم (D) و (AB)

4)هل النقطة E تنتمي إلى (D)؟ 5)هل النقطة E تنتمي إلى (AB)؟

6) تأكد أن (AB) و (D) متقاطعان و حدد نقطة تقاطعهما

الجواب:1) $(AB): \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$

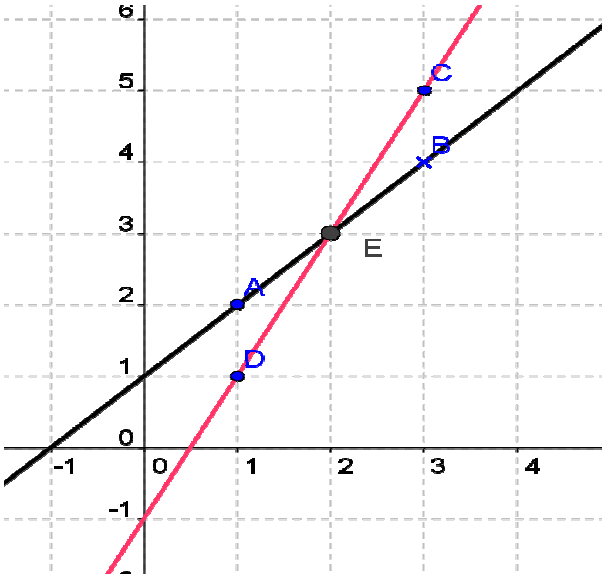
$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{4-2}$ يعني $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}$

يعني $x-1=y-2$ يعني $x-y+1=0$ (AB)

يعني $y=x+1$ (AB)

2)نعم النقط D و C تنتمي إلى (D)

3)رسم لمستقيم (D) و (AB)



4)نعم النقطة E تنتمي إلى (AB) 5) نعم النقطة E تنتمي إلى (D)

6) المستقيمان (AB) و (D) متقاطعان لأن لهما نقطة مشتركة ونقطة تقاطعهما هي النقطة E

تمرين11 نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم المستقيم: $(D):-3x+y+5=0$ والنقط : التالية: $A(1,4)$ و $B(-1,-2)$ و $D(2,1)$ و $C(0,-5)$

1)حدد معادلة المختصرة للمستقيم (AB)

2)هل النقط D و C تنتمي إلى (D)؟

3)أرسم لمستقيم (D) و (AB)

4) تأكد أن (AB) و (D) متوازيان

الجواب:1) $(AB): \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$

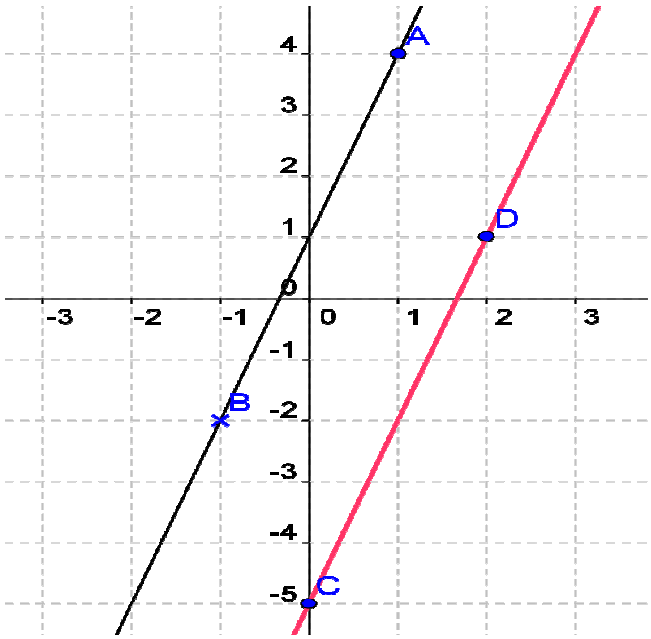
$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-4}{-2-4}$ يعني $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{-6}$

يعني $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{3}$ يعني $3x-3-y+4=0$ (AB)

يعني $y=3x+1$ (AB)

2)نعم النقط D و C تنتمي إلى (D)

3)رسم المستقيم (D) و (AB)



4) نعم (AB) و (D) متوازيان لأن لهما نفس الميل هو : $m = 3$

II. المتراجحات و التجويه

دراسة مثال : في الشكل أسفله نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته: $\frac{1}{2}x - y + 1 = 0$. المستقيم (D) يحدد نصفي مستوى حافتهما (D) أحدهما يحتوي على النقطة O (أصل المعلم) و نرمز له بالرمز (P_2) و للآخر بالرمز (P_1).

← النقطة $A(1,1)$ تنتمي إلى (P_2) و تحقق:

$\frac{1}{2}x_A - y_A + 1 \succ 0$ لأن: $\frac{1}{2} - 1 + 1 \succ 0$

← النقطة $B(-2,1)$ تنتمي إلى (P_1) و تحقق:

$\frac{1}{2}x_B - y_B + 1 \prec 0$ لأن: $\frac{1}{2} \times (-2) - 1 + 1 \prec 0$

إذا أخذنا نقطة أخرى M تنتمي إلى نصف المستوى (P_2).

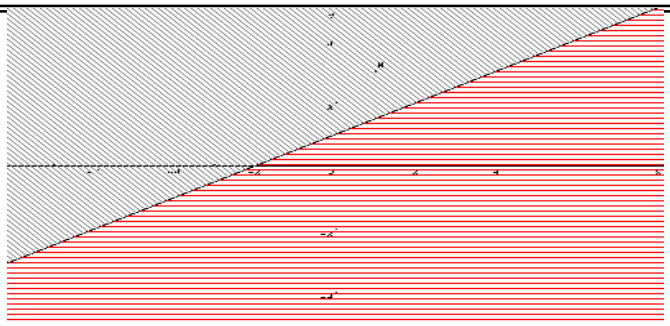
فان المتفاوتة $\frac{1}{2}x_M - y_M + 1 \succ 0$ محققة (يمكنك التحقق من بعض النقط).

و إذا أخذنا نقطة أخرى N تنتمي إلى نصف المستوى (P_1).

فان المتفاوتة $\frac{1}{2}x_N - y_N + 1 \prec 0$ محققة.

و بالتالي كل نقطة $M(x,y)$ من (P_2), تحقق $\frac{1}{2}x - y + 1 \succ 0$.

و كل نقطة $M(x,y)$ من (P_1) تحقق $\frac{1}{2}x - y + 1 \prec 0$.



إشارة $ax + by + c$:

خاصية: نعتبر في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم الذي معادلته $ax + by + c = 0$ المستقيم (D) يحدد نصفي مستوى مفتوحين:

- أحدهما هو مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق المتفاوتة $ax + by + c \succ 0$.
- و الآخر هو مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق $ax + by + c \prec 0$.

كل معادلة تكتب على الشكل $ax + by + c = 0$ حيث $a \neq 0$ أو $b \neq 0$ هي معادلة مستقيم.

تمرين 16 : حل مبيانيا النظمة التالية:

$$(S_1)\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ -x + 2y + 2 < 0 \end{cases}$$

الجواب : نرسم أولآ المستقيمات التالية :

$x + y - 1 = 0; -x + 2y + 2 = 0$

وبعد ذالك يجب الحصول على الشكل التالي و هو الحل المبياني: