مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية و مبادئ في الحسابيات

القدرات المنتظرة

***- توظيف الزوجية وتفكيك عدد إلى جداء عوامل أولية في حل بعض المسائل البسيطة حول الأعداد الصحيحة الطبيعية.**

I) مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

1- مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

نشاط

من بين الأعداد التالية حدد تلك التي تمثل أعدادا صحيحة طبيعية

5 ، $\sqrt{3}$ ، $4+16$ ، $\frac{5}{2}$ ، $12-23$ ، $\frac{15}{3}$ ، $\sqrt{25}$ ، $2,15$

تعريف

الأعداد 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 .....تسمى أعدادا صحيحة طبيعية و تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية نرمز لها بـ $\mathbb{N}$

نكتب $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4;5.....\rightarrow\}$

مصطلحات و ترميز

*- العدد 0 يسمى العدد الصحيح الطبيعي المنعدم

*- مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}^*$

$$\mathbb{N}^*=\{1;2;3;4;5.....\rightarrow\}$$

تمرين

أتمم بأحد الرمزين $\in$ أو $\notin$

$\frac{24}{2}.....\mathbb{N}$; $3.....\mathbb{N}^*$; $-5....\mathbb{N}$; $0....\mathbb{N}^*$; $\sqrt{2}.....\mathbb{N}^*$; $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}.....\mathbb{N}$

2- الأعداد الزوجية – الأعداد الفردية

أنشطة

1- أعط كل الأعداد الزوجية المحصورة بين41 و 65

2- لنرمز لمجموعة الأعداد الزوجية بـ P و مجموعة الأعداد الفردية بـ I ،

أتمم بأحد الرمزين $\in$ أو $\notin$

$5\times13...I$; $0...P$; $0....I$; $4\times17....I$; $4\times17....P$; $2\sqrt{3}....P$

3- ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين زوجيين و c و d عددين صحيحين طبيعيين فرديين

حدد زوجية الأعداد التالية(هل الأعداد زوجية أم فردية) مع تعليل الجواب

$a+b$; $c+d$; $a+c$

تعريف

نقول إن العدد الصحيح الطبيعي a عدد زوجي إذا وفقط كان يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a=2k$

نقول إن العدد الصحيح الطبيعي a عدد فردي إذا وفقط كان يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a=2k+1$

أمثلة

الأعداد 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 ..... أعداد زوجية

الأعداد 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 ..... أعداد فردية

ملاحظات

*- كل عدد صحيح طبيعي هو إما عدد زوجي أو عدد فردي

*- مجموع عددين زوجيين هو عدد زوجي

مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي

مجموع عدد زوجي و عدد فردي هو عدد فردي

تمرين

1- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا

أدرس زوجية كل من $n(n+1)$ و $n+(n+1)+(n+2)$ و $4n^2+4n+1$

2- ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث $m\succ n$

بين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

الحل

1- * n و $n+1$ عددان صحيحان طبيعيان متتاليان ومنه أحدهما زوجي و الآخر فردي
و التالي جداؤهما زوجي إذن $n(n+1)$ زوجي

* لدينا $n+(n+1)+(n+2)=3(n+1)$ و التالي زوجية $n+(n+1)+(n+2)$ هي زوجية $n+1$

إذا كان n زوجيا فان $n+(n+1)+(n+2)$ فرديا

إذا كان n فرديا فان $n+(n+1)+(n+2)$ زوجيا

* لدينا $4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$ و حيث أن $(2n^2+2n)\in\mathbb{N}$ فان $4n^2+4n+1$ فردي

2- n و m عددان صحيحان طبيعيان حيث $m\succ n$

نبين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

العدد $(m-n)$ يمكن أن يكون زوجيا أو فرديا

* إذا كان $(m-n)$ زوجيا فانه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $m-n=2k$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة

نحصل على $m+n=2k+2n=2(k+n)$ وحيث أن $k+n\in\mathbb{N}$ فان $m+n$ زوجي

* إذا كان $(m-n)$ فرديا فانه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $m-n=2k+1$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة

نحصل على $m+n=2k+2n+1=2(k+n)+1$ وحيث أن $k+n\in\mathbb{N}$ فان $m+n$ فرديا

إذن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

II) – مضاعفات عدد – قواسم عدد

A) مضاعفات عدد

1- أنشطة

نشاط1

1- ضع الرمز × في المكان المناسب

	24	50	75	33	121	999	211	2210
مضاعف2								
مضاعف3								
مضاعف5								
مضاعف11								

2- استخرج من بين أعداد السطر الأول المضاعفات المشترك للعددين 2 و3 ثم 3 و11

نشاط2

حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد6 ثم للعدد9

استنتج المضاعفات المشتركة من بين هذه المضاعفات

ماذا تلاحظ

(اصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين 6 و9 هو 18 . المضاعفات المشتركة للعددين 6 و 9 هي مضاعفات العدد 18)

نشاط2

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا

أ- تأكد n^2-1 مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$

ب- بين أن n^2-1 مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n

الحل

ب- ليكن n عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $n=2k+1$

لدينا $n^2-1=(n-1)(n+1)$ ومنه $n^2-1=4k(k+1)$

وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)

فانه يوجد k' من $\mathbb{N}$ حيث $k(k+1)=2k'$ و بالتالي $n^2-1=8k'$

إذن n^2-1 مضاعف للعدد8

2- تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين حيث b غير منعدم نقول إن العدد a مضاعف للعدد b إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a=bk$

أمثلة

الأعداد 0 ، 5 ، 10 ، 15 ، 20، 25 ، 1775 مضاعفات للعدد 5

22 ليس مضاعف للعدد4

3- * ليكن $b\in\mathbb{N}^*$

مضاعفات b هي الأعداد kb حيث $k\in\mathbb{N}$

* $0\times k=0$

خاصية

* لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم ما لنهاية من المضاعفات * للعدد 0 مضاعف وحيد هو0

4- المضاعف المشترك الأصغر

تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين a و b نرمز له بالرمز $PPCM(a;b)$

أمثلة $PPCM(4;9)=36$ ، $PPCM(6;10)=30$

B) قواسم عدد

1- نشاط

حدد قواسم 90 ثم قواسم 126 ثم استنتج أكبر قاسم مشترك للعددين 90 و 126

2- تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين حيث b غير منعدم نقول إن العدد b قاسم للعدد a إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a=bk$

ملاحظة : العدد b قاسم للعدد a إذا وفقط إذا العدد a مضاعف للعدد b

نقول أيضا العدد a قابل للقسمة على b

- كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم مخالفا لـ 1 له على الاقل قاسمان 1 و نفسه
- للعدد 1 قاسم وحيد هو نفسه
- جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة تقسم 0

3- القاسم المشترك الأكبر لعددين

تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو اكبر قاسم مشترك لهما نرمز له بالرمز $PGCD(a;b)$

مثال $PGCD(126;90)=18$ ، $PGCD(4;9)=1$

III) الأعداد الأولية

1- تعريف

نسمي عددا أوليا كل عدد صحيح طبيعي له قاسمان بالضبط

أمثلة (حدد الأعداد الأولية الأصغر من40)

الأعداد الأولية الأصغر من 40 هي 2 ، 3 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 13 ، 29 ، 31 ، 37

2- التفكيك إلى جداء عوامل أولية لعدد غير أولي

مبرهنة (مقبولة)

كل عدد صحيح طبيعي n $(n\geq 2)$ هو عدد أولي أو جداء عوامل أولية

أمثلة

41 عدد أولي

72 عدد غير أولي و $72=8\times 9=2^3\times 3^2$

تعريف

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا غير أولي كتابة a على شكل جداء عوامله أولية تسمى " التفكيك إلى جداء عوامل أولية" للعدد a

أمثلة

فكك الأعداد 24 ، 319 ، 1344 إلى جداء عوامل أولية

$24 = 8\times 3 = 2^3\times 3$ و $319 = 11\times 29$ $\qquad$ $1344 = 4\times 4\times 4\times 21 = 2^6\times 3\times 7$

تقنية للتفكيك (نقبلها)

لتفكيك عدد صحيح طبيعي غير منعدم a نأخذ اصغر عدد أولي يقسم a و ننجز القسمة فنحصل على عدد b خارج القسمة فنأخذ اصغر عدد أولي يقسم b فنحصل على خارج القسمة .....و نتابع على هذا المنوال حتى نحصل على خارج يساوي 1. العدد a سيكون هو جداء جميع الأعداد الأولية التي قسمنا بها	**مثال:** 1344 | 2 672 | 2 336 | 2 168 | 2 84 | 2 42 | 2 21 | 3 7 | 7 1 | إذن $1344 = 2^6\times 3\times 7$

3- خاصيات (نقبلها)

خاصية1

المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة و الغير المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية. المرفوعة إلى أكبر أس.

خاصية1

القاسم المشترك الأكبر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية. المرفوعة إلى أصغر أس.

ملاحظات $PGCD(a;1)=1$ ، $PGCD(a;a)=a$ ، $PPCM(a;1)=a$ $\qquad$ $PPCM(a;a)=a$

تمرين:

حدد $PGCD(84;216)$ ، $PPCM(84;216)$ ، $PGCD(35;121)$ ، $PPCM(35;121)$

إضافات

* طريقة لتحديد المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b حيث $a \geq b$
أحدد مضاعفات a ثم أتأكد بالتتابع ابتداء من أصغر مضاعف غير منعدم للعدد a هل هو مضاعف للعدد b فإذا كان الجواب لا ، أتابع البحث إن كان نعم ، أتوقف و العدد الذي حصلت فيه على هذا الجواب هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b.

* طريقة لتحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b حيث $a \geq b$
أحدد قواسم العدد b ثم أتأكد بالتتابع تناقصيا ابتداء من أكبر قاسم للعدد b هل هو قاسم للعدد a فإذا كان الجواب لا ، أتابع البحث ان كان نعم ، أتوقف و العدد الذي حصلت فيه على هذا الجواب هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

* طريقة لتحديد ما إذا كان العدد a أوليا أم لا
نحدد أولا جميع الأعداد الأولية p حيث $p^2 \leq a$.
إذا كان a يقبل القسمة على أحد هذه الأعداد فان a غير أولي
إذا كان a لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد فان a أولي

مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية ومبادئ في الحسابيات

الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية

- كل عدد صحيح طبيعي من مضاعفات 2 يسمى زوجيا
- كل عدد صحيح طبيعي غير زوجي يسمى فرديا
- الأعداد الزوجية هي الأعداد التي تكتب على شكل $2k$ حيث k عدد صحيح طبيعي
- الأعداد الفردية هي الأعداد التي تكتب على شكل $2k+1$ حيث k عدد صحيح طبيعي

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث $a>b$
- إذا كان a و b زوجيين فإن $a+b$ و $a-b$ زوجيان
- إذا كان a و b فرديين فإن $a+b$ و $a-b$ زوجيان
- إذا كان أحد العددين a و b زوجيا فإن ab زوجي
- إذا كان a و b فرديين فإن ab فردي

جداء عددين صحيحين طبيعيين متتابعين هو عدد زوجي (لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا : $n\times(n+1)$ هو عدد زوجي)

مضاعفات عدد صحيح طبيعي

يكون العدد الصحيح الطبيعي b مضاعفا للعدد a إذا كان $b=a\times k$ حيث k عدد صحيح طبيعي

- إذا كان b مضاعفا ل a و c مضاعفا ل b ، فإن c مضاعفا ل a
- إذا كان b مضاعفا ل a و c مضاعفا ل a فإن $b+c$ و $b-c$ مضاعفان ل a
- إذا كان b مضاعفا ل a فإن bc مضاعفا ل a مع c عدد صحيح طبيعي

قواسم عدد صحيح طبيعي

- ✓ يكون العدد الصحيح الطبيعي a قاسما للعدد الصحيح الطبيعي b إذا كان b مضاعفا ل a
- ✓ إذا كان a قاسما ل b ، نقول بتعبير آخر :
  - a يقسم b
  - b قابل للقسمة على a
  - b مضاعف ل a
  - يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $b=a\times k$

- إذا كان a قاسما ل b و كان a قاسما ل c فإن a قاسما لكل من $b+c$ و $b-c$ ($b\geq c$)
- إذا كان a قاسما ل b فإن a قاسم ل bc مع c عدد صحيح طبيعي

الأعداد الأولية

يكون العدد الصحيح الطبيعي p أوليا إذا كان له قاسمان فقط هما 1 و p.

تفكيك عدد أولي إلى جداء عوامل أولية

كل عدد صحيح طبيعي غير أولي أكبر من 1 يمكن تفكيكه إلى جداء عوامل أولية

مثال : **العدد 360 غير أولي**

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

الكتابة $2^3\times3^2\times5$ هي تفكيك للعدد 360 إلى جداء عوامل أولية

قاسم مشترك لعددين

يكون عدد صحيح طبيعي d قاسما مشتركا لعددين صحيحين طبيعيين a و b إذا كان قاسما لكل منهما

القاسم المشترك الأكبر لعددين

القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين a و b هو أكبر قاسم مشترك ل a و b من بين القواسم المشتركة ل a و b و نرمز له ب : $a\wedge b$ أو $\Delta(a,b)$ أو $p\gcd(a,b)$

القاسم المشترك الأكبر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية مرفوعة إلى أصغر أس

مضاعف مشترك لعددين

يكون عدد صحيح طبيعي m مضاعفا مشتركا لعددين صحيحين طبيعيين a و b إذا كان مضاعفا لكل منهما

المضاعف المشترك الأصغر لعددين

المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين a و b هو أصغر مضاعف مشترك ل a و b من بين المضاعفات المشتركة ل a و b و نرمز له ب : $a \vee b$ أو $M(a,b)$ أو $ppcm(a,b)$

المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة و الغير المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية المرفوعة إلى أكبر أس

i. المجموعة $\mathbb{N}$:

01. تعريف:

الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$

- تكتب بالتفصيل : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- المجموعة : $\{1, 2, 3, ...\}$ يرمز لها ب $\mathbb{N}^*$

02. ملاحظة:

- كل عنصر من $\mathbb{N}^*$ ينتمي إلى $\mathbb{N}$ نقول إن المجموعة $\mathbb{N}^*$ ضمن المجموعة $\mathbb{N}$ لهذا نكتب: $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$
- أما 2 عنصر من $\mathbb{N}$ نكتب $2 \in \mathbb{N}$ نقرأ 2 ينتمي ل $\mathbb{N}$

ii. الأعداد الزوجية – العداد الفردية:

01. نشاط: عرف عدد زوجي ثم عدد فردي

02. تعريف:

a من $\mathbb{N}$.
كل عدد a يقبل القسمة على 2 يسمى عدد زوجي و في الحالة الآخرة يسمى عدد فردي.

03. ملاحظة :

- a زوجي يكافئ يوجد n من $\mathbb{N}$ حيث $a = 2n$.
- a فردي يكافئ يوجد n من $\mathbb{N}$ حيث $a = 2n+1$.

iii. مصاديق قابلية القسمة على 2 و 3 و 4 و5 و9.

01. نشاط:

هل العدد 540 يقبل القسمة على 2و 3 و 4 و5 و9 .(علل جوبك)

02. مصاديق :

يكون عدد صحيح طبيعي قابلا للقسمة على :

- **2** إذا كان رقم وحداته زوجيا.
- **3** إذا كان مجموع أرقامه مضاعف للعدد 3 .
- **4** إذا كان رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب عددا مضاعف للعدد 4 .
- **5** إذا كان رقم وحداته هو 0 أو 5 .
- **9** إذا كان مجموع أرقامه مضاعف للعدد 9 .

iv. الأعداد الأولية:

01. نشاط:

الأعداد التالية نسميها أعداد أولية :1 و3 و5 و7 و.....و41 و ...
استنتج تعريف من خلال ذلك .

02. تعريف:

عدد أولي هو كل عدد صحيح طبيعي a يقبل القسمة على 1 و a

03. ملاحظة:

$a\in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ ($a\in \mathbb{N}^*$ و $a\neq 1$).

a يكتب على شكل جداء عدة عوامل من الأعداد الأولية و يسمى ذلك تفكيك للعدد a.

04. مثال: 1) $30=2\times3\times5$ و 2) $31=1\times31$

v. قواسم عدد ـ القاسم المشترك الأكبر ل a و b تذكير:

01. نشاط: أوجد قواسم العدد 24

02. مفردات:

نقول أن: العدد 3 يسمى قاسم ل 24 أو العدد 3 يقسم العدد 24 . 1) أوجد قواسم 24 و30 .

1) ماذا يمثل القاسم 6 بالنسبة للعددين 24 و30 . 2) أعط تعريف للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b من $\mathbb{N}^*$

03. تعريف:

a و b من $\mathbb{N}^*$.

أكبر قاسم مشترك للعددين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و نرمز له ب : $pgcd(a;b)$ أو $a\wedge b$

04. مثال: أوجد : $pgcd(45;75)$ و $pgcd(13;7)$

05. ملاحظة:

إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو 1 نسمي a و b أوليين فيما بينهما.

06. مثال:

1) هل 45 و 75 أوليين فيما بينهما ؟ 2) هل 7 و 13 أوليين فيما بينهما ؟

vi. مضاعفات عدد ـ المضاعف المشترك الأصغر ل ba تذكير:

01.

1) أوجد مضاعفات 6 و 8 . 2) ماذا يمثل العدد 24 بالنسبة للعددين 6 و 8 . 3) أعط تعريف لذلك ؟

02. تعريف:

a و b من $\mathbb{N}^*$.

أصغر مضاعف مشترك للعددين a و b يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b و نرمز له ب : $ppcm(a;b)$ أو $a\vee b$

03. مثال: أوجد $ppcm(45;75)$

04. خاصية (تقبل):

- القاسم المشترك الأكبر ل a و b هو جداء العوامل الأولية المشتركة المرفوعة إلى أصغر أس في تفكيكهما إلى جداء عوامل أولية.
- المضاعف المشترك الأصغر ل a و b هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة المرفوعة إلى أكبر أس في تفكيكهما إلى جداء عوامل أولية .

مثال: $a=2^3\times3^4\times5^7\times11^2;b=2^2\times3^8\times7^4\times13^3$. 1) أوجد : $ppcm(a;b)$ و 2) $ppcm(a;b)$

أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مـادة الـريـاضيـات	المستوى : الجذع مشترك علمي الأستاذ : عثماني نجيب

مذكرة رقم 1 في مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية و مبادئ أولية في الحسابيات

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

- التعرف على المجموعة $\mathbb{N}$.
- التعرف على مضاعفات و قواسم عدد.
- التمييز بين الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية.
- التعرف على مصاديق قابلية القسمة على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.
- التعرف على عدد أولي.
- استعمال تقنيات تفكيك عدد صحيح طبيعي إلى جداء عوامل أولية.
- توظيف التفكيك في تحديد القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر.
- توظيف خوارزمية إقليدس في تحديد القاسم المشترك الأكبر.
- توظيف الزوجية و تفكيك عدد إلى جذاء عوامل أولية في حل بعض المسائل البسيطة حول الأعداد الصحيحة الطبيعية.

I. مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية $\mathbb{N}$.

تمرين : من بين الأعداد التالية حدد تلك التي تمثل أعدادا صحيحة طبيعية :

2 ,-5 ,11 ,$\frac{11}{4}$,$12-17$,$\sqrt{2}$, $\sqrt{16}$, 5 ,2 .

تعريف: كل الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ و نكتب $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$

مصطلحات ورموز : العدد 0 يسمى العدد الصحيح الطبيعي المنعدم

الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}^*$.

$\mathbb{N}^*=\{1,2,\cdots\}$ تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير منعدمة

7 هو عدد صحيح طبيعي نكتب $7\in\mathbb{N}$

-8 ليس بعدد صحيح طبيعي نكتب $-8\notin\mathbb{N}$

تمرين: باستعمال الرموز: $\in;\notin;\subset;\not\subset$ املأ الفراغات التالية :

$-7\ldots\mathbb{N}$ و $\frac{2}{3}\ldots\ldots\mathbb{N}$ و $\sqrt{2}\ldots\ldots\mathbb{N}$ و $\frac{8}{2}\ldots\ldots\mathbb{N}$ و $-\frac{15}{3}\ldots\mathbb{N}$

و $12-32\ldots\mathbb{N}$ و $\sqrt{25}\ldots\mathbb{N}$ و $\frac{\sqrt{100}}{5}\ldots\ldots\mathbb{N}$ و $2,12\ldots\mathbb{N}$

$\pi\ldots\ldots\mathbb{N}$ و $0\ldots\ldots\mathbb{N}^*$ و $\{1;2;7\}\ldots\mathbb{N}$ و $\{4;-2;12\}\ldots\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}^*\ldots\mathbb{N}$

الجواب: $-7\notin\mathbb{N}$ $\frac{2}{3}\notin\mathbb{N}$ $\sqrt{2}\notin\mathbb{N}$ $\frac{8}{2}\in\mathbb{N}$ $-\frac{15}{3}\notin\mathbb{N}$

$12-32\notin\mathbb{N}$ $\sqrt{25}\in\mathbb{N}$ $\frac{\sqrt{100}}{5}\in\mathbb{N}$ $2.12\notin\mathbb{N}$ $\pi\notin\mathbb{N}$

$0\notin\mathbb{N}^*$ $\{1;2;7\}\subset\mathbb{N}$ $\{4;-2;12\}\not\subset\mathbb{N}$ $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}$

II. الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية:

تعريف: a عدد صحيح طبيعي زوجي اذا وجد عدد صحيح طبيعي k بحيث :

$a=2k$

a عدد صحيح طبيعي فردي اذا وجد عدد صحيح طبيعي k بحيث :

$a=2k+1$

مثال: الأعداد: 0, 108 , 304, 202, 1006 و 12^2 و 15×1731 هي أعداد زوجية. لماذا ؟

الأعداد: 1, 13, 165, 209, 2007 هي أعداد فردية. لماذا ؟

ملاحظات : كل عدد صحيح طبيعي اما هو زوجي أو فردي ولدينا مجموعة من النتائج في الجدول التالي :

الأعداد	a	b	$a+b$	$a-b$	$a\,xb$
زوجية	زوجي	زوجي	زوجي	زوجي	زوجي
الأعداد	فردي	فردي	زوجي	زوجي	فردي
	فردي	زوجي	فردي	فردي	زوجي
	زوجي	فردي	فردي	فردي	زوجي

مثال: أدرس زوجية الأعداد: 12^2 و 15×1731

تمرين: $n\in\mathbb{N}$ أدرس زوجية الأعداد التالية:

4516 $4\times51+1$ $2n+4$ $4n+9$ $4n^2+4n+1$ $6n^2+12n$

الجواب: $4516=2\times2258$ اذن $4516=2\times k$ حيث : $k=2258$

وبالتالي : 4516 عدد زوجي

$4\times571+1=2\times2\times571+1=2\times k+1$ اذن حيث : $k=2\times571$

وبالتالي : $4\times51+1$ عدد فردي

$2n+4=2(n+2)=2\times k$ حيث : $k=n+2$

وبالتالي : $2n+4$ عدد زوجي

$4n+9=2(2n+4)+1=2\times k+1$ حيث : $k=2n+4$

وبالتالي : $4n+9$ عدد فردي

$4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1=2\times k+1$ حيث : $k=2n^2+2n$

وبالتالي : $4n^2+4n+1$ عدد فردي

$6n^2+12n=2(3n^2+6n)=2\times k$ حيث : $k=3n^2+6n$

وبالتالي : $6n^2+12n$ عدد زوجي

تمرين: $a\in\mathbb{N}$ و $b\in\mathbb{N}$

1. بين أنه اذا كان a عددا زوجيا و b عددا زوجيا فان $a+b$ عدد زوجيا
2. بين أنه اذا كان a عددا فرديا و b عددا فرديا فان $a+b$ عدد فرديا
3. بين أنه اذا كان a عددا زوجيا فان a^2 عدد زوجي
4. بين أنه اذا كان a عددا فرديا فان a^2 عدد فرديا
5. استنتج أنه اذا كان a^2 عدد فرديا فان a عددا فردي

الجواب:

1) $a=2\times k$ حيث $k\in\mathbb{N}$

$b=2\times k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$

$a+b=2\times k+2\times k'=2\times(k+k')=2\times k''$ حيث $k''=k+k'$

وبالتالي : $a+b$ عدد زوجي

2) $a=2\times k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$

$b=2\times k'+1$ حيث $k'\in\mathbb{N}$

$a+b=2\times k+1+2\times k'+1=2\times(k+k'+1)=2\times k''$ حيث
$k''=k+k'+1$
وبالتالي : $a+b$ عدد زوجي
3) $a=2\times k$ حيث $k\in\mathbb{N}$
$a^2=(2\times k)^2=4\times k^2=2\times 2\times k^2=2\times k'$ حيث $k'=2k^2$
وبالتالي : a^2 عدد زوجي
4) $a=2\times k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$
$a^2=(2\times k+1)^2=(2\times k)^2+2\times 2\times k\times 1+1^2=4k^2+4k+1$
$a^2=2\times(2k^2+2k)+1=2\times k'+1$ حيث $k'=2k^2+2k$
وبالتالي : a^2 عدد فردي
5) معطيات a^2 عدد فردي
نبين أن a عدد فردي
نفترض أن a عدد زوجي اذن حسب النتيجة السابقة فان a^2 عدد زوجي ولكن
حسب المعطيات a^2 عدد فردي وبالتالي افتراضنا كان خاطئا أي أنه a عدد فردي

III. قواسم عدد و مضاعفات عدد والقاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر:

نشاط :

- حدد المضاعفات العشرة الأولى العدد 6
- حدد المضاعفات العشرة الأولى العدد 9
- حدد أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين6 و 9

الجواب :

- المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6 هي 0 و 6 و 12 و 18 و 24 و 30 و 36 و 42 و 48 و54
- المضاعفات العشرة الأولى للعدد 9هي 0 و9 و 18 و 27 و 36 و 45 و 54 و 63 و 72 و81
- 18هو أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين6 و 9

ويسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين6 و 9 .و نرمز له بالرمز.
$PPCM(6;8)=18$

تعريف1: a و b عنصران من $\mathbb{N}$. نقول ان a مضاعف للعدد b إذا وجد عدد صحيح طبيعي n بحيث $a=bn$,

مثال: ادينا: $145=5\times 29$ اذن : 145 مضاعف للعدد 5 لأنه .....

تعريف2: ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{N}$.أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين a و b يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .و نرمز له بالرمز $PPCM\ (a;b)$.

مثال: مضاعفات العدد 12 هي 0 و 12 و 24 و 36 و 48 و 60 و 72 و.....
مضاعفات العدد 8 هي: 0 و 8 و 16 و 24 و 32 و 40 و 48 و.....إذن:
$PPCM\ (12;8)=24$.

تمرين: حدد مضاعفات العدد 9 المحصورة بين 23 و 59

الجواب: لدينا مضاعفات العدد 9 تكتب على الشكل $9n$ حيث n عنصر من $\mathbb{N}$.
مضاعفات 9 المحصورة بين 23 و 59 هي الأعداد التي تكتب على شكل $9n$ بحيث n من $\mathbb{N}$ و المحصورة بين 23 و 59 الحالات الممكنة هي: 3×9 و 4×9 و 5×9 و 6×9 . أي القيم الممكنة للعدد n هي: 3 و 4 و 5 و 6.
و بالتالي المضاعفات التي نبحث عنها هي: 27 و 36 و 45 و 54.

تعريف2: a و b عنصران من $\mathbb{N}$.
نقول ان b قاسم للعدد a إذا وجد عدد صحيح طبيعي n بحيث $a=bn$,

مثال: ادينا: $145=5\times 29$
إذن: - العدد 145 مضاعف للعددين 5 و 29 .
- العددان 5 و 29 هما قاسمان للعدد 145.

ملحوظة: العدد 0 مضاعف لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.
العدد 1 قاسم لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.

تعريف2: ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين.
أكبر قاسم مشترك للعددين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .و يرمز له بالرمز $PGCD\ (a;b)$.

مثال: قواسم العدد 12 هي: 1 و 2 و 3 و 4 و 6 و 12. و قواسم العدد 15 هي: 1 و 3 و 5 و 15.إذن: $PGCD\ (12;15)=3$

تمرين : نضع: $x=3\times 5\times 7\times 12$ و $y=2\times 5\times 3\times 5$.
دون حساب x و y بين أن:
1. 75 قاسم للعدد y.
2. 105 قاسم للعدد x.

الجواب 1: لدينا $y=2\times 5\times 3\times 5$ أي أن: $y=2\times 75$ و منه فان 75 قاسم للعدد y.
2) لدينا $x=3\times 5\times 7\times 12$ أي أن: $x=105\times 12$
و منه فان 105 قاسم للعدد x.

تمرين : حدد الرقم x لكي يكون العدد : $53\ x\ 2$ قابلا للقسمة على 9

الجواب : $0\le x\le 9$ العدد : $53\ x\ 2$ قابلا للقسمة على 9
اذن : $3+5+x+2$ مضاعف للعدد 9 يعني $x+10$ مضاعف للعدد 9 اذن :
$x=8$

تمرين: ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$
نضع $x=2n+7$ و $y=4n+2$.
1. بين أن x عدد فردي و y عدد ومجي.
2. بين أن $(x+y)$ مضاعف للعدد 3.

الجواب 1: لدينا $x=2n+7$ أي أن: $x=2(n+3)+1$
و بالتالي x عدد فردي لأن: $x=2k+1$ حيث: $k=n+3$
و لدينا $y=4n+2$ أي أن $y=2(2n+1)$
و بالتالي y عدد زوجي لأن: $y=2k$ حيث: $k=2n+1$
2) لدينا $x+y=2n+7+4n+2$ أي أن: $x+y=6n+9$
و بالتالي $x+y=3(2n+3)$ اذن $x+y$ مضاعف للغدد 3.

IV. مصاديق قابلية القسمة على : 2 و 3 و 4 و 5 و 9

خاصية: ليكن n عددا صحيحا طبيعيا. يكون العدد n قابلا للقسمة:
على 2: اذا كان رقم و حداته هو : 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8.
على 3: اذا كان مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 3.
على4: اذا كان رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب عددا مضاعفا للعدد 4.
على 5: اذا كان رقم وحداته هو 0 أو 5.
على 9: اذا كان مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 9.

أمثلة: العدد 4752 يقبل القسمة على 5 لأن رقم وحداته هو 5,
العدد 4725 يقبل القسمة على 3 و 9.لأن العدد (5+2+7+4)=18 مضاعف للعدد 3 و مضاعف للعدد 9.
العدد 1628 مضاعف للعدد 2 لأن رقم وحداته هو 8.
العدد 1628 مضاعف للعدد 4 لأن رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب العدد 28 و هو مضاعف للعدد 4.

تمرين : أدرس قابلية قسمة العدد 3611790 على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.
أدرس قابلية قسمة الأعداد : 120052005 و1001001 و79541 و 19350 و 3140 و3752 و 3333426 و145610 و200070 على 3 و 9.

الجواب: بما أن رقم وحدات العدد 3611790 هو 0, فان 3611690 يقبل القسمة على 2 و 5.
العدد 90 لا يقبل القسمة على 4. وإذن العدد 3611790 لا يقبل القسمة على 4.
مجموع أرقام العدد 3611790 هو 27. (0+9+7+1+1+6+3=27) و 27 مضاعف للعدد 3, إذن 3611790 يقبل القسمة على 3.
و بما أن 27 مضاعف للعدد 9 فان 3611790 يقبل القسمة على 9.
هل العدد : 120052005 قابل للقسمة على 3 ؟ نعم مجموع أرقامه هو 15 اذن يقبل القسم على 3 بالمثل 1001001
هل الأعداد : 79541 و 3140 و 3752 قابلة للقسمة على 3 ؟ لا لأن مجموع الأرقام عدد لا يقبل القسم على 3

V. الأعداد الأولية و التفكيك إلى جداء عوامل أولية

تعريف: عدد أولي هو كل عدد صحيح طبيعي a يقبل قاسمين فقط هما العدد 1 و العدد a.

مثال: الأعداد الأولية الأصغر من 30 هي 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

خاصية: نقبل أن كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم و يخالف 1 يكتب على شكل عوامل جداء عوامل أولية.

مثال: لدينا: $640=64\times 10$ أي $640=8^2\times 2\times 5$ إذن:
$640=(2^3)^2\times 2\times 5$

و منه: $640 = 2^7 \times 5$

العوامل المكونة لهذا الجداء هي الأعداد الأولية 2و 5.

1344	2
672	2
336	2
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

تقنية للتفكيك : لتفكيك a عدد الى جذاءعوامل أولية نأخذ أصغر عدد أولي يقسمه وننجز القسمة فنحصل على خارج b فنأخذ أصغر عدد أولي يقسم b وننجز القسمة فنحصل على خارج c .....فنتابع عملية القسمة حتى نحصل على خارج يساوي 1 و العدد a سيكون هو جداء جميع الأعداد الأولية التي قسمنا عليها

مثال:. فكك العدد 1344 الى جداء عوامل أولية **الجواب :** $1344 = 2^6 \times 3 \times 7$

تمرين : فكك العدد 60 الى جداء عوامل أولية ثم استنتج جميع قواسم العدد 60

الجواب : $60 = 2^2 \times 5 \times 3$ اذن القواسم هم : 1و2و3و4و5و6و10و12و15و30و60

تمرين : حدد جميع قواسم العدد 12 ثم حدد جميع قواسم العدد 15 ثم حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 12 و 15

الجواب : قواسم العدد 9 هم : 1و3و9 **:** قواسم العدد 16 هم : 1و2و4و8و16 اذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 9 و 16 هو 1

و منه فان 9 و 16 أوليين فيما بينهما

تمرين : هل العدد 1004001 عدد أولي؟

لدينا: مجموع أرقام العدد 1004001 هو 6, و العدد 6 مضاعف للعدد 3.

إذن العدد 1004001 يقبل القسمة على 3.

و بالتالي العدد 1004001 ليس عددا أوليا (لأنه يقبل أكثر من قاسمين).

تمرين حدد الأعداد الأولية من بين الأعداد التالية : 0 و 1 و 2 و17 و 21 و 41 و 87 و 105 و 239 و 2787 و 191 و 1004001

الجواب : 0 ليس بعدد أولي لأن كل الأعداد تقسم 0 و **1** ليس بعدد أولي لأن له قاسم وحيد هو 1 و **2** عدد أولي لأن له قاسمين فقط

و **17** عدد أولي لأن له قاسمين فقط و **21** ليس بعدد أولي لأن : $21 = 7 \times 3$ و **41** عدد أولي لأن له قاسمين فقط و **87** ليس بعدد أولي لأن : $87 = 29 \times 3$ و و **105** ليس بعدد أولي لأن : $105 = 5 \times 21$

هل العدد **239** أولي ؟ نستعمل تقنية : نبحث عن الأعداد الأولية p التي تحقق : $p^2 < 239$ وهي : 2 و 3 و 5 و7 و11 و 13 ولا يوجد أي واحد منهم قاسم للعدد 239

اذن العدد 239 أولي

2787 ليس بعدد أولي لأنه يقبل القسمة على 3 (مجموع أرقامه 24)

لدينا: مجموع أرقام العدد 1004001 هو 6, و العدد 6 مضاعف للعدد 3.

إذن العدد 1004001 يقبل القسمة على 3.و بالتالي العدد 1004001 ليس عددا أوليا (لأنه يقبل أكثر من قاسمين).

هل العدد **191** أولي ؟ نستعمل تقنية : نبحث عن الأعداد الأولية p التي تحقق : $p^2 < 191$ وهي : 2 و 3 و 5 و7 و11 و 13 ولا يوجد أي واحد منهم قاسم للعدد 191

اذن العدد 191 أولي

VI. القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر:

خاصية 1 :القاسم المشترك الأكبر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة مرفوعة الى أصغر أس

خاصية 2 :المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة والغير المشتركة مرفوعة الى أكبر أس

تمرين:. فكك الأعداد : و220 و 798 الى جداء عوامل أولية

حدد : $PGCD(220;798)$ و $PPCM(220;798)$ و $PPCM(1650;5292)$

الجواب : $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ $798 = 2 \times 3 \times 7 \times 19$ اذن : $PGCD(220;798) = 2^1 = 2$ و $PPCM(220;798) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 19 = 87780$

المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و ID و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$

القدرات المنتظرة

*- إدراك العلاقات بين الأعداد والتمييز بين مختلف مجموعات الأعداد.

*- تحديد كتابة مناسبة لتعبير جبري حسب الوضعية المدروسة.

I) المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و ID و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$

أنشطة

$a \in E$ تعني a عنصر من E و تقرأ a تنتمي الى E

ضع العلامة × في الخانة المناسبة

	5	$-\frac{250}{3}$	3,14	-4	$\frac{22}{7}$	π	$\sqrt{2}$	$\sqrt{100}$	1,33……
$\in \mathbb{N}$									
$\in \mathbb{Z}$									
$\in ID$									
$\in \mathbb{Q}$									
$\in \mathbb{R}$									

1- مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية

تذكير

*مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية هي $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;5.....\rightarrow\}$

الاعداد الصحيحة الطبيعية و مقابلاتها تكون مجموعة الاعداد الصحيحة النسبية يرمز لها بـ $\mathbb{Z}$

نكتب $\mathbb{Z} = \{\leftarrow .....;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;.....\rightarrow\}$

-5 عدد صحيح نسبي نكتب $-5 \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{3}$ ليس عددا صحيحا نسبيا نكتب $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$

0 العدد الصحيح النسبي المنعدم

* نرمز لمجموعة الاعداد الصحيحة النسبية الغيلر المنعدمة بـ $\mathbb{Z}^*$

$\mathbb{Z}^* = \{\leftarrow .....;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;.....\rightarrow\}$

ملاحظة: كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي

نقول ان المجموعة $\mathbb{N}$ جزء من المجموعة $\mathbb{Z}$ أو المجموعة $\mathbb{N}$ ضمن المجموعة $\mathbb{Z}$

نكتب $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

2- مجموعة الأعداد العشرية النسبية

اكتب الاعداد التالية على شكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$

3,12 ، 7 ، -3 ، -0,256

تعريف

كل عدد له كتابة كسرية على شكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ يسمى عددا عشريا نسبيا.

نرمز لمجموعة الاعداد العشرية النسبية بـ ID

نتائج

أ – العدد العشري له كتابة بعدد منته من الأرقام على يمين الفاصلة.

ب- كل عدد صحيح نسبي a هو عدد عشري نسبي (لأنه يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{10^0}$)

إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID$

3- مجموعة الأعداد الجذرية

تعريف

العدد الجدري هو كل عدد يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{b}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0$

يرمز لمجموعة الاعداد الجذرية بـ $\mathbb{Q}$

$\frac{-3}{7}$ عدد جذري ، 6 عدد جذري $-1,36$ عدد جذري π ليس عددا جدريا

$\sqrt{3}$ ليس عددا جدريا

نتيجة

كل عدد عشري نسبي هو عدد جدري

إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID \subset \mathbb{Q}$

4- مجموعة الأعداد الحقيقية

- بين أن $\sqrt{2}$ عدد لا جذري

أرسم مربع ضلعه 1 و حدد طول قطره

- نصف محيط دائرة شعاعها 1 هو عدد لا جذري يرمز له بـ π

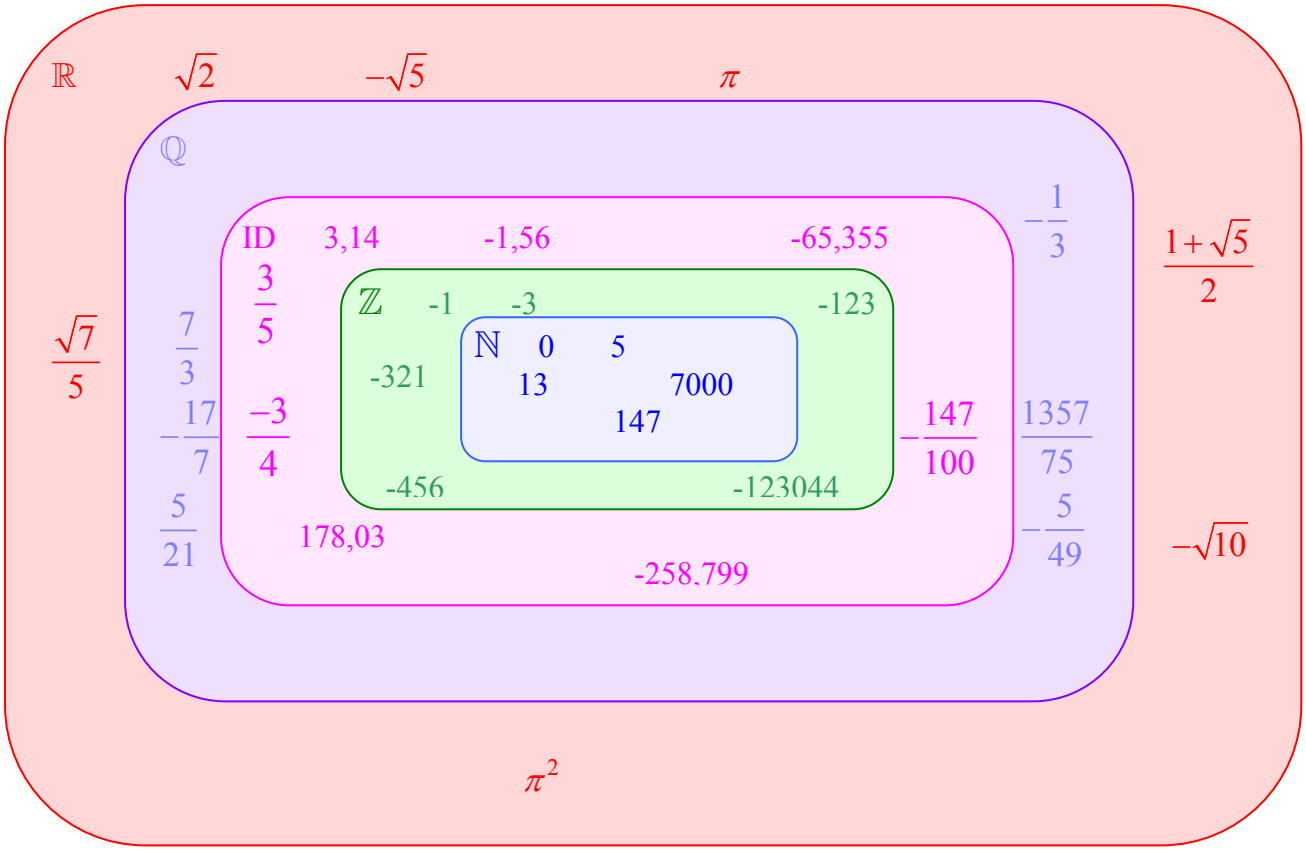
توجد مقادير لا يمكن التعبير عنها بأعداد جذرية ، مثل هذه المقادير نعبر عنها باعداد لا جذرية.

الاعداد الجذرية و الاعداد لا جذرية تكون مجموعة تسمى مجموعة الاعداد الحقيقية

يرمز لها بـ $\mathbb{R}$

نتيجة

كل عدد جذري هو عدد حقيقي إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

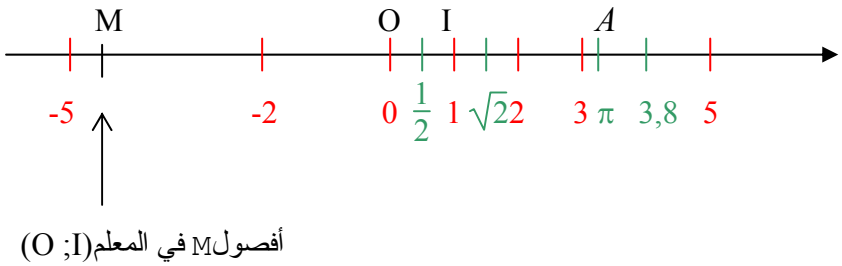


تمثيل المجموعة $\mathbb{R}$

نمثل المجموعة $\mathbb{R}$ على مستقيم مدرج $\Delta(O;I)$

كل نقطة من المستقيم $\Delta(O;I)$ تقبل عددا وحيدا أفصولا لها

كل عدد حقيقي هو افصول لنقطة و حيدة من المستقيم $\Delta(O;I)$



A هي النقطة ذات الافصول π نكتب $A(\pi)$

II) العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ و خاصياتها

1 – أنشطة

نشاط1

1-أحسب $-\frac{2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2$ $\qquad \dfrac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}$

2-لتكن a و b و c أعداد حقيقية

أحسب $-2(a+b-c)-3(a-b+c)+4(5a-b)$

نشاط2

1-أحسب $\sqrt{5^2\times 3^3}+\sqrt{75}-11\sqrt{3}+2\sqrt{243}$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

2-أ- أحسب $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ ثم بسط $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

ب- بسط $\sqrt{21-6\sqrt{6}}$; $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

3- اجعل المقام عددا جذريا للعددين الحقيقيين $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$; $\dfrac{2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

4- بين أن $\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=4$

نشاط3

1- عمل $(x+2)^2+x^2-4$ ، $(2x-1)^2-(3x+2)^2$ ، $27x^3-8$; $x^3+125-5x(x+5)$

2- نضع $a+b=1$; $a^2+b^2=2$ أحسب a^4+b^4 ; a^6+b^6

2- الجمع و الضرب

أ- الجمع

* الجمع تبادلي في $\mathbb{R}$: لكل a و b من $\mathbb{R}$ $\quad a+b=b+a$

* الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $\quad (a+b)+c=a+(b+c)$

* 0 هو العنصر المحايد للجمع في $\mathbb{R}$: لكل a من $\mathbb{R}$ $\quad 0+a=a+0=a$

* لكل عدد حقيقي a مقابل هو $-a$: $\quad -a+a=a+(-a)=0$

ب- الطرح

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ $\quad a-b=a+(-b)$

ج- الضرب

* الضرب تبادلي في $\mathbb{R}$: لكل a و b من $\mathbb{R}$ $\quad a\times b=b\times a$

* الضرب تجميعي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $\quad (a\times b)\times c = a\times(b\times c)$

* 1 هو العنصر المحايد لضرب في $\mathbb{R}$: لكل a من $\mathbb{R}$ $\quad 1\times a = a\times 1 = a$

* لكل عدد حقيقي غير منعدم a مقلوب هو $\frac{1}{a}$ $\left(a^{-1}\right)$: $a^{-1}\times a = a\times a^{-1} = 1$

* الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$

$$(b+c)\cdot a = ba+ca \quad ; \quad a\cdot(b+c) = ab+ac$$

د- الخارج

ليكن a من $\mathbb{R}$ و b من $\mathbb{R}^*$ $\quad \frac{a}{b} = a\times\frac{1}{b}$

ذ- قواعد

* لتكن a و b و c من $\mathbb{R}$: $a=b$ تكافئ $a+c=b+c$

* لتكن a و b من $\mathbb{R}$ و c من $\mathbb{R}^*$: $a=b$ تكافئ $ac=bc$

* لكل a و b و c و d من $\mathbb{R}$

إذا كان $a=b$ و $c=d$ فان $a+c=b+d$

إذا كان $a=b$ و $c=d$ فان $ac=bd$

* $ab=0$ تكافئ $a=0$ أو $b=0$

$ab\neq 0$ تكافئ $a\neq 0$ و $b\neq 0$

* لكل a و b من $\mathbb{R}$ و c و d من $\mathbb{R}^*$

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ تكافئ $ad=bc$

* a و b من $\mathbb{R}$ و c و d من $\mathbb{R}^*$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd} \quad ، \quad \frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$$

* لكل a من $\mathbb{R}$ و b و c و d من $\mathbb{R}^*$ $\quad \frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{c}{b} \quad ، \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

2- الجذور المربعة

أ- تعريف

ليكن x من $\mathbb{R}^+$

العدد الحقيقي الموجب y الذي يحقق $y^2=x$ يسمى لجذر المربع للعدد الموجب x.

نرمز للجذر مربع للعدد x بـ $\sqrt{x}$

$x=y^2 \quad ; \quad y\geq 0$ تكافئ $y=\sqrt{x} \quad ; \quad x\in\mathbb{R}^+$

ب- نتائج

*- ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad ; \quad \sqrt{x^2}=x \quad ; \quad \sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad (y\neq 0)$$

$\sqrt{x}=\sqrt{y}$ تكافئ $x=y$

* إذا كان x سالبا فان $\sqrt{x^2}=-x$

ملاحظة: لكل عدد حقيقي موجب a يوجد عددان حقيقيان مربعهما يساوي a هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

3- القوى

أ- تعريف

* ليكن a من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{N}^*$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n \text{ عاملا}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$$

العدد a^n يسمى قوة العدد a ذات الأس n

العدد a^{-n} يسمى قوة العدد a ذات الأس $-n$

* ليكن a من $\mathbb{R}^*$ $\quad a^0 = 1$

ب- نتائج

*- لكل x و y من $\mathbb{R}^*$ و لكل n و m من $\mathbb{Z}$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \qquad x^n x^m = x^{n+m}$$

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \qquad \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \qquad \left(x^n\right)^m = x^{n \cdot m}$$

* لكل عدد حقيقي موجب x : $\sqrt{x^n} = \sqrt{x}^n$

حالة خاصة لكل x من $\mathbb{R}$ $\quad x^1 = x$

ج- الكتابة العلمية لعدد عشري

خاصية (مقبولة)

كل عدد عشري b موجب يكتب على شكل $a.10^p$ حيث p عدد صحيح نسبي و a عدد عشري يحقق $1 \leq a \leq 10$

هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية للعدد b

أمثلة

الكتابة العلمية للعدد 1740000 هي $1,74 \times 10^6$

الكتابة العلمية للعدد $0,000325$ هي $3,25 \times 10^{-4}$

نتيجة:

كل عدد عشري b سالب يكتب على شكل $-a.10^p$ حيث p عدد صحيح نسبي و a عدد عشري يحقق $1 \leq a \leq 10$

$$-1,74 \times 10^6 = -1740000 \qquad -0,000325 = -3,25 \times 10^{-4}$$

4- متطابقات هامة

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

5- النشر و التعميل

نشر جداء هو تحويله إلى مجموع

تعميل مجموع هو تحويله إلى جداء

الترتيب في IR

القدرات المنتظرة

***- التمكن من مختلف تقنيات مقارنة عددين (أو تعبيرين) واستعمال المناسب منها حسب الوضعية المدروسة.**
***- تمثيل مختلف العلاقات المرتبطة بالترتيب على المستقيم العددي.**
***- إدراك وتحديد تقريب عدد (أو تعبير) بدقة معلومة. إنجاز إكبارات أو إصغارات لتعابير جبرية.**
***- استعمال المحسبة لتحديد قيم مقربة لعدد حقيقي.**

I- الترتيب و العمليات

1- أنشطة

تمرين1

ليكن a عددا حقيقيا قارن a^2+1 و $2a$

تمرين1

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $-2 \le a \le 3$; $-1 \le b \le 4$

بين أن $-41 \le a^2 - b^2 + 3a - 5b + 1 \le 24$

تمرين2

قارن $1+3\sqrt{2}$ و $3\sqrt{3}$

تمرين3

ليكن $x \in \mathbb{R}_+^*$

أ- بين أن $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

ب- قارن $\dfrac{1}{2x}$ و $\sqrt{x^2+1} - x$

تمرين4

ليكن a و b عددين حقيقيين سالبين قطعا حيث $a \ne b$

قارن $\dfrac{a}{b} - 1$ و $1 - \dfrac{b}{a}$

2- تعريف و خاصيات

أ تعريف

ليكن a و b عددين حقيقيين
$a \ge b$ يعني $a - b \ge 0$
$a \le b$ يعني $a - b \le 0$

ب- خاصيات و نتائج

ليكن a و b و c و d أعداد حقيقية
إذا كان $a \ge b$ و $b \ge c$ فان $a \ge c$
إذا كان $a \ge b$ فان $a + c \ge b + c$
إذا كان $a \ge b$ و $c \ge d$ فان $a + c \ge b + d$

إذا كان $a \ge b$ و $c \ge 0$ فان $ac \ge bc$
إذا كان $a \ge b$ و $c \le 0$ فان $ac \le bc$

إذا كان $a \ge b \ge 0$ فان $a^2 \ge b^2$
إذا كان $0 \ge a \ge b$ فان $a^2 \le b^2$

$0 \le a \le b$ تكافئ $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

إذا كان a و b عددين غير منعدمين و لهما نفس لإشارة و كان $a \le b$ فان $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$

نبين نتيجة الأخيرة

a و b عددين غير منعدمين و لهما نفس لإشارة ومنه $ab \succ 0$

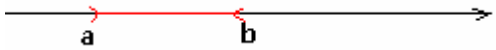
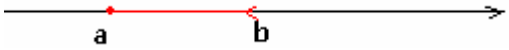
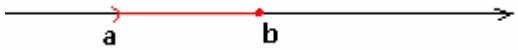
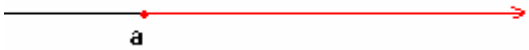
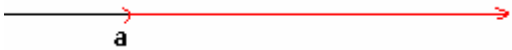
لدينا $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$

و حيث أن $a \le b$ فان $b-a \ge 0$ و بالتالي $\frac{b-a}{ab} \ge 0$ اذن $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

II- المجالات

1- مجالات المجموعة IR

ليكن $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ حيث $a \prec b$

مجموعة الاعداد الحقيقية X حيث:	ترميزها	قراءة و تمثيل على المستقيم
$a \le x \le b$	$[a;b]$	يقرأ المجال المغلق الذي طرفاه a و b 
$a \prec x \prec b$	$]a;b[$	يقرأ المجال المفتوح الذي طرفاه a و b 
$a \le x \prec b$	$[a;b[$	يقرأ المجال المفتوح على اليمين الذي طرفاه a و b 
$a \prec x \le b$	$]a;b]$	يقرأ المجال المفتوح على اليسار الذي طرفاه a و b 
$a \le x$	$[a;+\infty[$	يقرأ المجال a زائد ما لانهاية مغلق في a 
$a \prec x$	$]a;+\infty[$	يقرأ المجال a زائد ما لانهاية مفتوح في a 
$x \le b$	$]-\infty,b]$	يقرأ المجال ناقص لانهاية، b مغلق في b 
$x \prec b$	$]-\infty;b[$	يقرأ المجال ناقص لانهاية، b مفتوح في b 

أمثلة

* $[-1;4]=\{x \in \mathbb{R} / -1 \le x \le 4\}$

$-2 \notin [-1;4]$ $\quad \frac{-1}{2} \in [-1;4]$ $\quad \sqrt{3} \in [-1;4]$

* $]-\infty;2[=\{x \in \mathbb{R} / x \prec 2\}$

$2 \notin]-\infty;2[$ $\quad \pi \notin]-\infty;2[$ $\quad -\sqrt{2} \in]-\infty;2[$

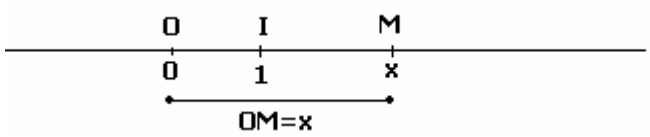
III- القيمة المطلقة

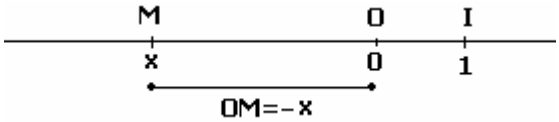
1- القيمة و المطلقة

تعريف

ليكن $\Delta(O;I)$ مستقيما مدرجا

القيمة المطلقة لكل عدد حقيقي x هي المسافة بين النقطة M التي أفصولها x و النقطة O. نرمز للقيمة المطلقة للعدد x بـ $|x|$ نكتب $OM=|x|$





ليكن $x \in \mathbb{R}$

إذا كان $x \geq 0$ فان $|x|=x$

إذا كان $x \leq 0$ فان $|x|=-x$

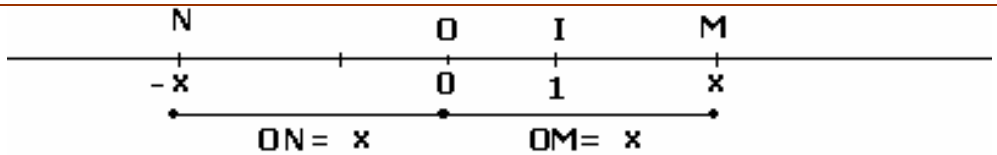
أمثلة

$$|2-\pi|=\pi-2 \quad ; \quad |\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}-1 \quad ; \quad |-12|=12 \quad ; \quad |\sqrt{2}|=\sqrt{2}$$

تمرين

حدد $|1-\sqrt{2}|$ و $\sqrt{(4-\sqrt{15})^2}$ و $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$

c) خاصيات



$OM=ON$ إذن $|x|=|-x|$

*- لكل $x \in \mathbb{R}$ $\quad |x| \geq 0$ ، $x \leq |x|$ ، $-x \leq |x|$ ، $|x|=|-x|$ ، $|x|^2=x^2$

*- ليكن x و y من $\mathbb{R}$ و a من $\mathbb{R}^+$

- ✓ $|x|=0$ تكافئ $x=0$
- ✓ $|x|=a$ تكافئ $x=a$ أو $x=-a$
- ✓ $|x|=|y|$ تكافئ $x=y$ أو $x=-y$.
- ✓ $|xy|=|x||y|$; $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ $\quad y \neq 0$
- ✓ $|x| \leq a$ تكافئ $-a \leq x \leq a$
- ✓ $|x+y| \leq |x|+|y|$

بين نتيجتين الأخيرتين

تمارين

تمرين 1

ليكن $x \in \mathbb{R}$

1- أكتب التعابير التالية بدون استعمال القيمة المطلقة

$|2x-1|$ ، $|3-x|$ ، $|x-2|+|x+3|$

2- بين بدون حدف رمز القيمة المطلقة أن $|x-5|+|x+1| \neq 4$ لكل x من $\mathbb{R}$

تمرين 2

ليكن $x \in \mathbb{R}$

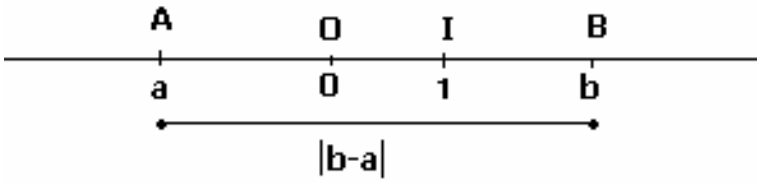
بين إذا كان $|x-1| \prec 10^{-3}$ فان $|x^2-1| \prec 10^{-2}$

2- المسافة بين نقطتين و القيمة المطلقة

خاصية

ليكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين على مستقيم مدرج $\Delta(O;I)$

$AB = |b-a|$



تعريف

المسافة $|b-a|$ لنقطتين $A(a)$ و $B(b)$ على مستقيم مدرج ، تسمى أيضا المسافة بين العددين a و b

أمثلة

* لنحدد الأعداد x التي مسافتها عن 3 هي 5

* حدد هندسيا على المستقيم المدرج $\Delta(O;I)$ النقطة $M(x)$ حيث $|x-2|=|x+5|$

3- مركز و سعة وشعاع مجال

ليكن $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

على المستقيم المدرج $\Delta(O;I)$ نعتبر $A(a)$; $B(b)$

طول $[A;B]$ هو $|b-a|$

أفصول I منتصف $[A;B]$ هو $\frac{a+b}{2}$

$IA = IB = \frac{|b-a|}{2}$

تعريف

ليكن $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

مركز مجال طرفاه a و b هو $\frac{a+b}{2}$

سعة مجال طرفاه a و b هو $|b-a|$

شعاع مجال طرفاه a و b هو $\frac{|b-a|}{2}$

تمرين

1- حدد مركز وشعاع $]-3;5]$

2- حدد مجالا مفتوحا مركزه 2- وشعاعه 3

3- حدد مجالا مغلقا مركزه 1 و أحد طرفيه $\frac{-3}{2}$

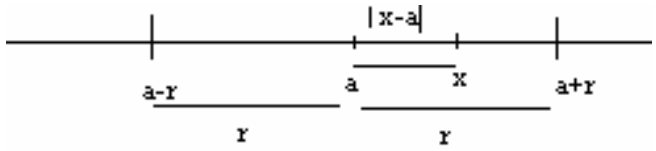
4- القيمة المطلقة والمجالات

مبرهنة

ليكن x و a من $\mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{R}_+^*$

$|x-a| \le r$ تكافئ $a-r \le x \le a+r$

$[a-r;a+r] = \{x \in \mathbb{R} / |x-a| \le r\}$



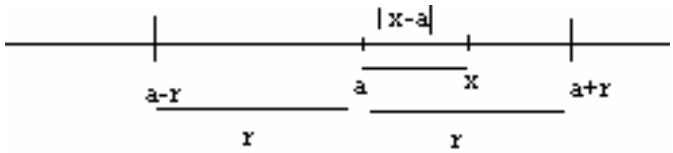
مجال مغلق مركزه a و شعاعه r

نتيجة

ليكن x و a من $\mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{R}_+^*$

$|x-a| \prec r$ تكافئ $a-r \prec x \prec a+r$

$]a-r;a+r[= \{x \in \mathbb{R} / |x-a| \prec r\}$



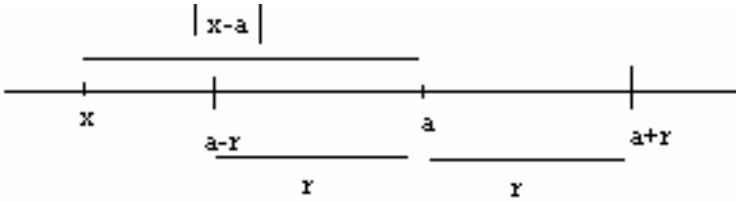
مجال مفتوح مركزه a و شعاعه r

نتيجة

ليكن x و a من $\mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{R}_+^*$

$|x-a| \ge r$ تكافئ $x \ge a+r$ أو $x \le a-r$

$\{x \in \mathbb{R} / |x-a| \ge r\} =]-\infty;a-r] \cup [a+r;+\infty[$



تمرين

حدد المجموعات التالية

$A = \{x \in \mathbb{R} / |x-3| \le 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} / |x+4| \prec 7\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} / |x-1| \ge 2\}$

IV- التأطير و التقريب

A) التأطير

1- أنشطة

أ- حدد مجالا مفتوحا سعته 10^{-2} يحتوي على $\frac{2}{3}$

ب- علما أن $1,41 \prec \sqrt{2} \prec 1,42$

حدد مجالا مغلقا يحتوي على $-3\sqrt{2}$ سعته $7 \cdot 10^{-2}$

2- تعريف

ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ حيث $a\prec b$

كل متفاوتة من المتفاوتات المزدوجة $a\le x\le b$ و $a\prec x\le b$ و $a\le x\prec b$ و $a\prec x\prec b$ تسمى تأطيرا للعدد x سعته $b-a$

أمثلة

$0\prec\frac{2}{3}\prec 1$ تأطير للعدد $\frac{2}{3}$ سعته 1

$0,666\prec\frac{2}{3}\prec 0,667$ تأطير للعدد $\frac{2}{3}$ سعته 10^{-3}

تمارين

تمرين1

1- ليكن $-3\prec x\prec 5$; $2\prec y\prec 4$ أطر $x^2+3x-\frac{1}{y}-5$

2- ليكن $|y|\prec 1$; $|x|\prec 1$

أ- أطر $\frac{1}{x+y+xy+4}$

ب- أطر $(x+1)(y+1)$. أنشر $(x+1)(y+1)$

استنتج تأطيرا للعدد $\frac{1}{x+y+xy+4}$

تمرين2

1- لنحدد تأطيرا للعدد $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ سعته $7\cdot 10^{-3}$ علما أن $1,41\prec\sqrt{2}\prec 1,42$

2- نعتبر $-0,01\prec y\prec 0,02$, $1,53\prec x\prec 1,54$

حدد تأطيرا للعدد xy سعته $6\cdot 10^{-2}$

تمرين3

ليكن $0,2\prec y\prec 0,4$, $1,2\prec x\prec 1,4$

حدد تأطيرا للعدد $\frac{y}{x}$ سعته $0,20$

B)التقريب

1- تعريف

ليكن $a\le x\le b$ أو $a\prec x\le b$ أو $a\le x\prec b$ أو $a\prec x\prec b$ تأطيرا للعدد x سعته $b-a$

العدد a يسمى تقريب للعدد x إلى $b-a$ بتفريط

العدد b يسمى تقريب للعدد x إلى $b-a$ بإفراط

أمثلة

لدينا $3,14\prec\pi\prec 3,15$

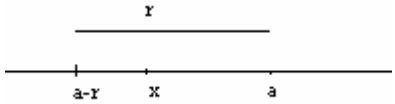
العدد $3,14$ تقريب للعدد π إلى 10^{-2} بتفريط

العدد $3,15$ تقريب للعدد π إلى 10^{-2} بإفراط

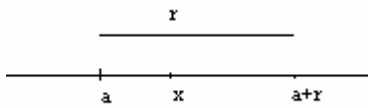
خاصية

ليكن a و x عددين حقيقين و a عددا حقيقيا موجب قطعا

العدد a تقريب للعدد x إلى r بإفراط إذا وفقط إذا كان $a-r \le x \le a$



العدد a تقريب للعدد x إلى r بتفريط إذا وفقط إذا كان $a \le x \le a+r$



تمرين لنحدد تقريبات للعدد $\frac{22}{3}$ إلى 10^{-3} بإفراط

تمرين ليكن $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

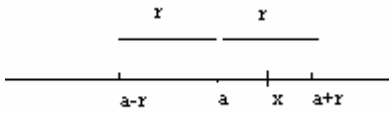
إذا علمت أن $2,236$ تقريب للعدد $\sqrt{5}$ إلى 10^{-3} بتفريط فأعط تقريب للعدد x إلى 10^{-3} بتفريط ثم بإفراط

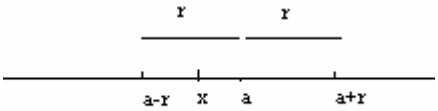
2- قيمة مقربة

تعريف

ليكن x عددا حقيقيا و r عددا حقيقيا موجبا

كل عدد حقيقي a يحقق $|x-a| \le r$ يسمى قيمة مقربة (أو تقريبا) للعدد x إلى r (أو بالدقة r)





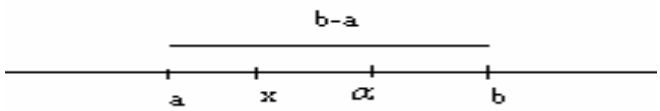
أمثلة

$\left|\frac{22}{7} - 3,14\right| \le 0,003$ إذن $3,14$ تقريب للعدد $\frac{22}{7}$ إلى $3 \cdot 10^{-3}$

خاصية

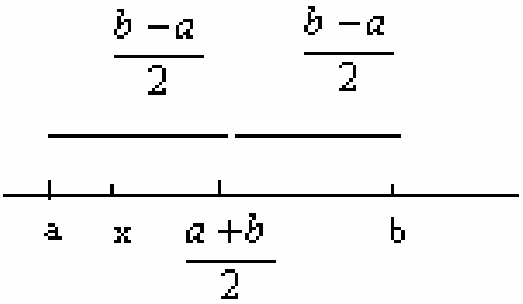
ليكن $x \in [a,b]$

كل عدد α من $[a,b]$ تقريب للعدد x إلى $b-a$



ملاحظة

إذا كان $x \in [a,b]$ فان $\frac{a+b}{2}$ تقريب للعدد x إلى $\frac{b-a}{2}$



مثال

$1,41 \prec \sqrt{2} \prec 1,42$

العدد $1,415$ تقريب للعدد $\sqrt{2}$ الى $0,005$

تمرين

لنبين أن $-0,14$ تقريب للعدد $\frac{-1}{7}$ بالدقة $5 \cdot 10^{-3}$

3- التقريبات العشرية

أ- استعمال المحسبة لتحديد تقريبات عشرية

.....

ب-التقريب العشري

ليكن x عددا حقيقيا و n عددا صحيحا طبيعيا

نقبل انه يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p حيث $10^{-n}p \leq x \prec 10^{-n}(p+1)$

العدد $10^{-n}p$ **تقريب العشري** للعدد x بتفريط إلى 10^{-n} (أو من الرتبة n)

العدد $10^{-n}(p+1)$ **تقريب العشري** للعدد x بإفراط إلى 10^{-n} (أو من الرتبة n)

اصطلاح:

التقريب العشري من الرتبة n الأكثر قربا من العدد x يسمى الجبر $(arrondi)$ من الرتبة n للعدد x

مثال لدينا $666 \cdot 10^{-3} \prec \frac{2}{3} \prec 667 \cdot 10^{-3}$

العدد $0,666$ تقريب العشري للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة 3 بتفريط

العدد $0,667$ تقريب العشري للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة 3 بإفراط

نلاحظ أن $0,667 - \frac{2}{3} = \frac{0,001}{3}$; $\frac{2}{3} - 0,666 = \frac{0,002}{3}$

$0,667$ الجبر للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة 3

تمرين

$1,24$ التقريب العشري للعدد x من الرتبة 2 بتفريط و $-0,31 \prec y \prec -0,25$

أطر $\frac{y}{x}$ تأطيرا سعته $0,05$

الثانوية التأهيلية: وادي الذهب الأستاذ : رشيد بلمو	درس الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية	مستوى الدراسي: TCS - TCT

I. الترتيب و العمليات:

تعار يف : ليكن a و b عددين حقيقيين.

1. نقول إن a أصغر من أو يساوي b , و نكتب $a \leq b$, إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^+$
2. نقول إن a أكبر من أو يساوي b , و نكتب $a \geq b$, إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^+$
3. نقول إن a أصغر قطعا من b , و نكتب $a \prec b$, إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}_+^*$
4. نقول إن a أكبر قطعا من b , و نكتب $a \succ b$, إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$

ملحوظة : a و b عددان حقيقيان.

- $a \leq b$ يكافئ $a \prec b$ أو $a = b$
- إذا كان $a \prec b$ فان $a \leq b$
- مقارنة a و b يعني البحث عن التعبير الصحيح من بين التعابير التالية: $a \prec b$, $a \succ b$, $a = b$

أمثلة: $\sqrt{5} \prec 3$, $-7 \prec -\frac{1}{3}$, $\pi \succ 2,14$

مثال 1 : قارن بين $\frac{101}{102}$ و $\frac{100}{101}$

مثال 2 : قارن : a و b و نضع $a = 2+\sqrt{3}$ و $b = 2\sqrt{3}$

لدينا $a-b = 2-\sqrt{3}$, و بما أن $2-\sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعا أي: $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$ فان: $a \succ b$

مثال 3 : $a \in \mathbb{R}$ قارن : $2a$ و a^2+1

خاصيات : لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

خاصية 1: إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فان $a \leq c$

ملحوظة : إذا كان $a \leq b$ و $b \prec c$ فان $a \prec c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنة و مع نقس العدد b.

مثال : لدينا : $\frac{30}{31} \prec 1$ و $1 \prec \frac{114,01}{114}$ و منه فان: $\frac{30}{31} \prec \frac{114,01}{114}$

خاصية الترتيب و الجمع:

$a \le b$ يكافئ $a+c \le b+c$

- إذا كان $a \le b$ و $c \le d$ فان $a+c \le b+d$
- إذا كان $a \ge 0$ و $b \ge 0$ فان $a+b \ge 0$ و $ab \ge 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

- إذا كان $c \succ 0$, فان: $a \le b$ يكافئ $ac \le bc$
- إذا كان $c \prec 0$ فان: $a \le b$ يكافئ $ac \ge bc$
- إذا كان $0 \le a \le b$ و $0 \le c \le d$ فان $0 \le ac \le bd$
- إذا كان $a \le 0$ و $b \le 0$ فان $a+b \le 0$ و $ab \ge 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب: a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة $(ab \succ 0)$ $a \le b$ يكافئ $\frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$

إذا كان $a \le b$ و $c \prec d$ فان $a+c \prec b+d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عددان حقيقيان موجبان.

$a \le b$ يكافئ $a^2 \le b^2$ و $a \le b$ يكافئ $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$ و لكل a من $\mathbb{R}$: $a^2 \ge 0$

ملحوظة: جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز $\le$ بأحد الر موز: $\ge$ أو $\prec$ أو $\succ$.

إذا كان $a \le 0$ و $b \le 0$ $a \le b$ يكافئ $a^2 \ge b^2$

II. المجالات و التأطير:

المجالات: ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \prec b$. ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات و تمثيلها على المستقيم العددي.

المجالات المحدودة

المجال	المتفاوتة
$[a,b]$	$a \le x \le b$
$]a,b]$	$a \prec x \le b$
$[a,b[$	$a \le x \prec b$
$]a,b[$	$a \prec x \prec b$

المجالات غير المحدودة:

لمجال	المتفاوتة
$]b,+\infty[$	$x \succ b$
$[b,+\infty[$	$x \ge b$
$]-\infty,a]$	$x \le a$
$]-\infty,a[$	$x \prec a$

مصطلحات:

الرمزان $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a,b]$ يقرأ:"المجال المغلق a , b " أو " القطعة a , b "
- $]a,b[$ يقرأ " المجال المفتوح a , b "
- $]a,+\infty[$ يقرأ " المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a "

ملحوظة: $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ و $\mathbb{R}^- =]-\infty,0]$ و $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ و $\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0[$

تأطير عدد حقيقي: تعريف: ليكن x عددا حقيقيا.

تأطير العدد x يعني إيجاد عددين حقيقيين a و b مع $a \prec b$ بحيث: $a \le x \le b$ أو $a \le x \prec b$ أو $a \prec x \le b$ أو $a \prec x \prec b$.

العدد الحقيقي الموجب قطعا $b-a$ يسمى سعة التأطير و العددان a و b هما محدات التأطير.

مثال: نضع $x \in [1;2]$ و $y \in [2;5]$ اعط تأطيرا للعددين التاليين وحدد سعتهما : $A = x^2+y^2+2x-3y$ و $A = \frac{2x-1}{x+1}$

III. القيمة المطلقة و خاصياتها:

القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

تعريف: ليكن x عددا حقيقيا و M نقطة ذات الأفصول x من المستقيم العددي.

القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM . و نكتب: $OM = |x|$

العلاقة بين إشارة x و القيمة المطلقة:

1. إذا كان $x \ge 0$ فان $OM = x$ و منه فان: $|x| = x$
2. إذا كان $x \le 0$ فان $OM = -x$ و منه فان: $|x| = -x$

مثال: $|3| = 3$ و $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ و $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$ و $|3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$

ملحوظة: لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $|x| \geq 0$ و $|x^2| = |x|^2 = x^2$ و $-|x| \leq x \leq |x|$.

خاصيات: لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |-x|$ و $\sqrt{x^2} = |x|$.

- لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|xy| = |x||y|$, $|x+y| \leq |x| + |y|$
- إذا كان $y \neq 0$ فان: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- لكل a من $\mathbb{R}^*$ $|x| = a$ يكافئ $x = a$ أو $x = -a$.
- لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |y|$ يكافئ $x = y$ أو $x = -y$.

تطبيقات في القيمة المطلقة (حل المعادلات)

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : $|x-1| = 5$ و $|x+2| = -1$ و $|2x+1| = |x-3|$

IV. المسافة و القيمة المطلقة:

تعريف : ليكن x و y عددين حقيقين و المسافة بين العددين x و y هي العدد الحقيقي $|x-y|$.

خاصية : ليكن x من $\mathbb{R}$ و r من $\mathbb{R}_+^*$.

$|x| \leq r$ يكافئ $-r \leq x \leq r$ و $|x| \geq r$ يكافئ $x \geq r$ أو $x \leq -r$

تطبيقات في القيمة المطلقة (حل المتراجحات)

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : $|x-1| \leq 2$ و $|x+2| \geq 3$ و $|2x+1| < 6$

استنتاج : ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}$ بحيث: $a \prec b$

المسافة بين العددين a و b أي $|b-a| = b-a$ تسمى طول أو سعة المجال $[a,b]$.

العدد $c = \frac{a+b}{2}$ يسمى مركز المجال $[a,b]$ و العدد $c = \frac{b-a}{2}$ يسمى شعاع المجال $[a,b]$.

و منه $x \in [a,b]$ يكافئ $|x-c| \leq r$ يكافئ $c-r \leq x \leq c+r$.

مثال: من أجل المجال $[-2,10]$ لدينا: العدد $10-(-2) = 12$ هو طوله و العدد $c = \frac{10-2}{2} = 4$ هو مركزه و العدد $r = \frac{12}{2} = 6$ هو شعاعه

إذن: $x \in [-2;10]$ يكافئ $|x-4| \leq 6$.

V. التقريبات والتقريبات العشرية:

التقريبات: تعاريف: ليكن a و x عنصرين من $\mathbb{R}$ و r عددا حقيقيا موجبا قطعا.

1. إذا كان $a \leq x \leq a+r$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بتفريط.
2. إذا كان $a-r \leq x \leq a$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بإفراط.
3. إذا كان $|x-a| \leq r$, نقول إن a قيمة مقربة (أو بالتقريب) للعدد x بالدقة r.

خاصية: إذا كان $a \leq x \leq b$ تأطيرا للعدد x فان:

- العدد a قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بتفريط. و العدد b قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بإفراط.
- العدد $\frac{a+b}{2}$ قيمة مقربة للعدد x بالدقة $\frac{b-a}{2}$.

مثال1: من التأطير $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$ نستنتج أن:

- العدد $2,645$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط. و العدد $2,646$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.
- العدد $2,6455$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتفريط.

مثال2: لدينا $3,1415926.....$ سؤال :حدد قيمة مقربة للعدد π بالدقة 10^{-2} بتفريط و بإفراط

التقريب العشري لعدد حقيقي:

الجزء الصحيح لعدد حقيقي:

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p بحيث:

$p \leq x \leq p+1$, p يسمى الجزء الصحيح للعدد x و نكتب: $E(x) = p$

مثال : لدينا: $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ و منه فان $E(\sqrt{2}) = 1$

مثال : لدينا: $1,732 \leq \sqrt{3} \prec 1,733$ أي $(1732) \cdot 10^{-3} \leq \sqrt{3} \prec (1732+1) \cdot 10^{-3}$

إذن: $1,732$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط. و $1,733$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

الترتيب في المجموعة $\mathbb{R}$

الترتيب في المجموعة $\mathbb{R}$

ليكن a و b عددين حقيقيين
نقول إن a أصغر من أو يساوي b و نكتب : $a \leq b$ إذا كان $a-b \leq 0$

الترتيب و العمليات

لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

- إذا كان $a \leq b$ فإن $a+c \leq b+c$
- إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن $a+c \leq b+d$
- إذا كان $a \leq b$ و $c \geq 0$ فإن $ac \leq bc$
- إذا كان $a \leq b$ و $c \leq 0$ فإن $ac \geq bc$
- إذا كان $ac \leq bc$ و $c > 0$ فإن $a \leq b$
- إذا كان $ac \leq bc$ و $c < 0$ فإن $a \geq b$
- إذا كان $0 \leq a \leq b$ و $0 \leq c \leq d$ فإن $ac \leq bd$

ليكن a و b عددين حقيقيين.

- $0 < a \leq b$ تعني $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$
- $a \leq b < 0$ تعني $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$

القيمة المطلقة

على محور ممنظم ، x هو أفصول نقطة M
القيمة المطلقة ل x هي المسافة الفاصلة بين أصل المعلم و النقطة M و يرمز لها ب : $|x|$
و لدينا : $OM = |x|$ حيث O هو أصل المعلم

المسافة بين عددين حقيقيين

إذا كان a و b على التوالي أفصولي نقطتين A و B على محور ممنظم ، فإن المسافة بين a و b هي المسافة بين A و B
و لدينا : $AB = |b-a|$

خاصيات القيمة المطلقة

ليكن x و y عددين حقيقيين ، لدينا :	
$\lvert x-y\rvert=\lvert y-x\rvert$	$\lvert x+y\rvert\leq\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$
$\lvert xy\rvert=\lvert x\rvert\lvert y\rvert$	$\lvert x-y\rvert\geq\lvert x\rvert-\lvert y\rvert$
$\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert=\frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$ $(y\neq 0)$	$\lvert x\rvert=\lvert y\rvert$ تعني $x=y$ أو $x=-y$

المجالات

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a\leq b$

مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق	الترميز
$a\leq x\leq b$	$[a,b]$
$a\leq x<b$	$[a,b[$
$a<x\leq b$	$]a,b]$
$a<x<b$	$]a,b[$
$x\leq a$	$]-\infty,a]$
$x<a$	$]-\infty,a[$
$x\geq b$	$[b,+\infty[$
$x>b$	$]b,+\infty[$
$x\in\mathbb{R}$	$]-\infty,+\infty[$

المجالات و القيمة المطلقة

ليكن $x\in\mathbb{R}$ و $r>0$

الكتابة باستعمال القيمة المطلقة	الكتابة باستعمال المجالات
$\lvert x\rvert\leq r$	$x\in[-r,r]$
$\lvert x\rvert\geq r$	$x\in]-\infty,-r]\cup[r,+\infty[$
$\lvert x-a\rvert\leq r$	$x\in[a-r,a+r]$
$\lvert x-a\rvert\geq r$	$x\in]-\infty,a-r]\cup[a+r,+\infty[$
$\lvert x\rvert<r$	$x\in]-r,r[$
$\lvert x\rvert>r$	$x\in]-\infty,-r[\cup]r,+\infty[$
$\lvert x-a\rvert<r$	$x\in]a-r,a+r[$

$x \in]-\infty, a-r[\cup]a+r, +\infty[$	$\lvert x-a \rvert > r$

التأطير

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a<b$
كل متفاوتة من المتفاوتات المزدوجة :
$a<x<b$ و $a<x\leq b$ و $a\leq x<b$ و $a\leq x\leq b$ تسمى تأطيرا للعدد x سعته $b-a$

التأطير و العمليات

إذا كان $a\leq x\leq b$ و $c\leq y\leq d$ تأطيرين للعددين x و y على التوالي.
فإن $\begin{cases} a+c\leq x+y\leq b+d \\ a-d\leq x-y\leq b-c \end{cases}$ تأطيران للعددين $x+y$ و $x-y$.

لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية موجبة .
إذا كان $a\leq x\leq b$ و $c\leq y\leq d$ تأطيرين للعددين x و y على التوالي
فإن $ac\leq xy\leq bd$ هو تأطير للعدد xy

لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية موجبة قطعا .
إذا كان $a\leq x\leq b$ و $c\leq y\leq d$ تأطيرين للعددين x و y على التوالي
فإن : $\frac{1}{c}\leq\frac{1}{y}\leq\frac{1}{d}$ و $\frac{a}{d}\leq\frac{x}{y}\leq\frac{b}{c}$ هما تأطيران للعددين $\frac{1}{y}$ و $\frac{x}{y}$

التقريبات

ليكن $a<x<b$ أو $a<x\leq b$ أو $a\leq x<b$ أو $a\leq x\leq b$ تأطيرا للعدد x سعته $b-a$
- العدد a يسمى تقريبا للعدد x إلى $b-a$ بتفريط
- العدد b يسمى تقريبا للعدد x إلى $b-a$ بإفراط

قيمة مقربة

ليكن x عددا حقيقيا و r عددا حقيقيا موجبا قطعا.
كل عدد حقيقي a يحقق إحدى العلاقتين $\lvert x-a \rvert\leq r$ أو $\lvert x-a \rvert<r$ يسمى قيمة مقربة للعدد x بالدقة r

التقريبات العشرية

ليكن x عددا حقيقيا بحيث : $N\times10^{-p}\leq x<(N+1)\times10^{-p}$ (مع $p\in\mathbb{N}$ و $N\in\mathbb{Z}$)
- العدد $N\times10^{-p}$ يسمى التقريب العشري للعدد x إلى 10^{-p} بتفريط
- العدد $(N+1)\times10^{-p}$ يسمى التقريب العشري للعدد x إلى 10^{-p} بإفراط

الجبر

مذكرة رقم 5 : الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- الترتيب والعمليات؛ - القيمة المطلقة وخاصياتها؛ - المجالات؛ - التأطير والتقريب، التقريبات العشرية.	- التمكن من مختلف تقنيات مقارنة عددين (أو تعبيرين) واستعمال المناسب منها حسب الوضعية المدروسة؛ - تمثيل مختلف العلاقات المرتبطة بالترتيب على المستقيم العددي؛ - إدراك وتحديد تقريب عدد (أو تعبير) بدقة معلومة. إنجاز إكبارات أو إصغارات لتعابير جبرية؛ - استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة لعدد حقيقي.	- إن توظيف الترتيب في مقارنة بعض الأعداد وفي إثبات بعض العلاقات يعتبر من المهارات التي ينبغي الحرص على تنميتها وتثبيتها، كما أن تأويل علاقات من الشكل $\lvert x-a\rvert \le r$ وإنجاز بعض الإكبارات باستعمال المتفاوتات المثلثية وخاصيات القيمة المطلقة، من التقنيات الأساسية التي ينبغي تمرين التلاميذ على استعمالها بشكل تدريجي. - ينبغي ربط مفهوم القيمة المطلقة بالمسافة بين نقطتين على مستقيم مدرج. - يمكن تقديم الخصائص المتعلقة بتأطير وتقريب مجموع عددين أو فرق عددين في الحالة العامة أما تأطير وتقريب جداء وخارج عددين حقيقيين فينبغي دراستها من خلال أمثلة عددية مختارة تبين للتلاميذ الاحتياطات التي ينبغي اتخاذها وشروط صحة الاستدلالات. - تعتبر الآلة الحاسبة أداة مساعدة في تناول المفاهيم السابقة (التأطير والتقريب...) غير أنه ينبغي التحقق من أن التلاميذ ملمون بالكتابة العلمية لعدد ومدركون أن الآلة الحاسبة تعطي في أغلب الأحيان تقريبا عشريا للنتيجة، لذا ينبغي إكساب التلاميذ التقنيات الخاصة بالآلة الحاسبة العلمية (الأولويات في العمليات، وظائف الملامس...)

I.الترتيب و العمليات:

1)تعاريف :

ليكن a و b عددين حقيقيين.

1. نقول إن a أصغر من أو يساوي b و نكتب $a \le b$ إذا كان $(b-a)\in \mathbb{R}^+$
2. نقول إن a أكبر من أو يساوي b و نكتب $a \ge b$ إذا كان $(a-b)\in \mathbb{R}^+$
3. نقول إن a أصغر قطعا من b و نكتب $a \prec b$ إذا كان $(b-a)\in \mathbb{R}_+^*$
4. نقول إن a أكبر قطعا من b و نكتب $a \succ b$ إذا كان $(a-b)\in \mathbb{R}_+^*$

ملحوظة : a و b عددان حقيقيان.

- $a \le b$ يكافئ $a \prec b$ أو $a=b$
- مقارنة a و b يعني البحث عن التعبير الصحيح من بين التعابير التالية: $a \prec b$, $a \succ b$, $a=b$

أمثلة: $\sqrt{5} \prec 3$, $-7 \prec -\frac{1}{3}$, $\pi \succ 2,14$

مثال : قارن بين $\frac{101}{102}$ و $\frac{100}{101}$

الجواب:

نحسب الفرق : $\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{101\times101-100\times102}{101\times102}=\frac{10201-10200}{101\times102}$

اذن : $\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{1}{101\times102}\in\mathbb{R}^+$ ومنه $\frac{101}{102}\ge\frac{100}{101}$

تمرين1 : قارن : a و b و نضع $a=2+\sqrt{3}$ و $b=2\sqrt{3}$

الجواب:

لدينا $a-b=2-\sqrt{3}$, و بما أن $2-\sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعا

أي: $(a-b)\in\mathbb{R}_+^*$ فان: $a \succ b$

تمرين2: $a\in\mathbb{R}$ قارن : $2a$ و a^2+1

الجواب : $(a^2+1)-2a=a^2-2a+1=(a-1)^2\ge 0$

ومنه $a^2+1\ge 2a$ مهما يكن : $a\in\mathbb{R}$

2)خاصيات :

لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

خاصية: إذا كان $a\le b$ و $b\le c$ فان $a\le c$

ملحوظة : إذا كان $a\le b$ و $b\prec c$ فان $a\prec c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنة و مع نفس العدد b.

مثال : لدينا : $\frac{30}{31}\prec 1$ و $1\prec\frac{114,01}{114}$ و منه فان: $\frac{30}{31}\prec\frac{114,01}{114}$

خاصية الترتيب و الجمع:

$a\le b$ يكافئ $a+c\le b+c$

- إذا كان $a\le b$ و $c\le d$ فان $a+c\le b+d$
- إذا كان $a\ge 0$ و $b\ge 0$ فان $a+b\ge 0$ و $ab\ge 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

- إذا كان $c\succ 0$, فان: $a\le b$ يكافئ $ac\le bc$
- إذا كان $c\prec 0$ فان: $a\le b$ يكافئ $ac\ge bc$
- إذا كان $0\le a\le b$ و $0\le c\le d$ فان $0\le ac\le bd$
- إذا كان $a\le 0$ و $b\le 0$ فان $a+b\le 0$ و $ab\ge 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب:

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة $(ab\succ 0)$

$a\le b$ يكافئ $\frac{1}{b}\le\frac{1}{a}$

إذا كان $a\le b$ و $c\prec d$ فان $a+c\prec b+d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عددان حقيقيان موجبان.

$a\le b$ يكافئ $a^2\le b^2$ و $a\le b$ يكافئ $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$

لكل a من $\mathbb{R}$: $a^2\ge 0$

ملحوظة: جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز $\le$ بأحد الر موز: $\ge$ أو $\prec$ أو $\succ$.

إذا كان $a\le 0$ و $b\le 0$ $a\le b$ يكافئ $a^2\ge b^2$

تمرين3 : قارن العددين: $a=\sqrt{6}$ و $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$

الجواب: نحسب الفرق :

$$a-b=\sqrt{6}-(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)=\sqrt{3\times2}-(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$$

الأستاذ : عثماني نجيب

$a-b=\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1=\sqrt{3}\times(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)$ التعميل ب $\sqrt{3}$

$a-b=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)$ التعميل ب $(\sqrt{2}-1)$

لدينا : $\sqrt{2}>1$ لأن : $(\sqrt{2})^2=2$ و $(1)^2=1$ ومنه $(\sqrt{2}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا : $\sqrt{3}>1$ لأن : $(\sqrt{3})^2=3$ و $(1)^2=1$ ومنه $(\sqrt{3}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $a-b=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي: $a>b$

تمرين4 : قارن العددين: $a=\sqrt{10}$ و $b=\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$

الجواب: نحسب الفرق :

$a-b=\sqrt{10}-(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1)=\sqrt{5\times2}-(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1)$

$a-b=\sqrt{5}\times\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+1=\sqrt{5}\times(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)$ التعميل ب $\sqrt{5}$

$a-b=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}-1)$ التعميل ب $(\sqrt{2}-1)$

لدينا : $\sqrt{2}>1$ لأن : $(\sqrt{2})^2=2$ و $(1)^2=1$ ومنه $(\sqrt{2}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا : $\sqrt{5}>1$ لأن : $(\sqrt{5})^2=5$ و $(1)^2=1$ ومنه $(\sqrt{5}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $a-b=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي: $a>b$

تمرين5 : قارن العددين: $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ و $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

الجواب: نحسب الفرق : $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(2\sqrt{3}+2-(\sqrt{3})^2-\sqrt{3})-((\sqrt{3})^2-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1^2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2-1^2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{3\sqrt{3}-5}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}-5}{2}$$

لدينا : $3\sqrt{3}>5$ لأن : $(3\sqrt{3})^2=27$ و $(5)^2=25$ ومنه

$3\sqrt{3}-5\in\mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $\frac{3\sqrt{3}-5}{2}\in\mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي : $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}>\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

تمرين6 : ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}_+^*$.

نضع: $x=\frac{7a+2b}{7a}$ و $y=\frac{8b}{7a+2b}$ قارن العددين x و y.

الجواب: نحسب الفرق : $x-y=\frac{7a+2b}{7a}-\frac{8b}{7a+2b}$

$$x-y=\frac{(7a+2b)^2-7a\times8b}{7a(7a+2b)}=\frac{49a^2+14ab+14ab+4b^2-56a\times b}{7a(7a+2b)}$$

$$x-y=\frac{49a^2-28a\times b+4b^2}{7a(7a+2b)}=\frac{(7a)^2-2\times7a\times2b+(2b)^2}{7a(7a+2b)}$$

$x-y=\frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)}\in\mathbb{R}^+$ لأن : $(7a-2b)^2\in\mathbb{R}^+$ و $7a(7a+2b)\in\mathbb{R}^+$

وبالتالي : $x\geq y$

تمرين7 : ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^+$.

1. قارن العددين: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ و $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}$

2. استنتج مقارنة العددين: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ و $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$.

الجواب:1) x عنصرا من $\mathbb{R}^+$ يعني $x\geq0$

لدينا $x+2\geq x$ لأن : $(x+2)-x\geq0$

اذن : $\sqrt{x+2}\geq\sqrt{x}$ واضافة $\sqrt{x+1}$ نجد النتيجة المطلوبة:

أي أن : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

2)الاستنتاج :

بضربنا في المرافق نجد المتساوية التالية :

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$$

أي أن :

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$$

ولدينا أيضا : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

أي أن : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

وبما أن : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ فان :

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

اذن نستنتج أن : : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\leq\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

تمرين8 : ليكن x عددا حقيقيا موجبا.

قارن العددين: x و $2\sqrt{x}-1$.

الجواب: $x-(2\sqrt{x}-1)=x-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\times1+1^2=(\sqrt{x}-1)^2\geq0$

ومنه $x\geq(2\sqrt{x}-1)$ مهما يكن : $x\in\mathbb{R}^+$

تمرين9 : ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

نضع: $a=\sqrt{4n^2+1}$ و $b=2n+1$ قارن العددين a و b.

الجواب: لمقارنة عددين موجبين نقارن مربعيهما

$a^2=(\sqrt{4n^2+1})^2=4n^2+1$

$b^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$

$b^2-a^2=4n^2+4n+1-(4n^2+1)=4n^2+4n+1-4n^2-1$

$b^2-a^2=4n\geq0$

ومنه $b^2\geq a^2$ اذن نستنتج أن $b\geq a$ مهما يكن : $x\in\mathbb{N}$

تمرين10 : ليكن x و y عددين حقيقي بحيث: $x<y<3$

1. بين أن: $x+y-6\prec0$

2. قارن العددين $a=x^2-6x+1$ و $b=y^2-6y+1$.

الجواب:

1)لدينا $x<y<3$ اذن $x<3$ و $y<3$ ومنه $x+y<6$

وبالتالي: $x+y-6<0$

2): نحسب الفرق : $a-b=(x^2-6x+1)-(y^2-6y+1)$

$a-b=x^2-6x+1-y^2+6y-1=x^2-y^2-6x+6y$

$a-b=(x-y)(x+y)-6(x-y)=(x-y)(x+y-6)$

لدينا $x<y$ اذن $x-y\in\mathbb{R}^-$ وسبق أن وجدنا أن $x+y-6\in\mathbb{R}^-$

ومنه $(x-y)(x+y-6)\in\mathbb{R}^+$ أي : $a-b\in\mathbb{R}^+$ وبالتالي: $a\geq b$

II.المجالات و التأطير:

1)المجالات: ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \prec b$.
ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات و تمثيلها على المستقيم العددي.

المجالات المحدودة

المجال	المتفاوتة
$[a,b]$	$a \le x \le b$
$]a,b]$	$a \prec x \le b$
$[a,b[$	$a \le x \prec b$
$]a,b[$	$a \prec x \prec b$

المجالات غير المحدودة:

لمجال	المتفاوتة
$]b,+\infty[$	$x \succ b$
$[b,+\infty[$	$x \ge b$
$]-\infty,a]$	$x \le a$
$]-\infty,a[$	$x \prec a$

مصطلحات: الرمزان $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين
- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a,b]$ يقرأ:"المجال المغلق a , b " أو " القطعة a , b "
- $]a,b[$ يقرأ " المجال المفتوح a , b "
- $]a,+\infty[$ يقرأ " المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a "

ملحوظة: $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ و $\mathbb{R}^- =]-\infty,0]$ و $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ و $\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0[$

تمرين11: بعد التمثيل على مستقيم للمجالين I و J
حدد اتحاد وتقاطع المجالين I و J في الحالات الآتية
1) $J = [-1,+\infty[$ و $I =]-3,7]$
2) $J = [4;10]$ و $I =]-\infty,5[$
3) $J = [-5;-1]$ و $I = [0,10[$
4) $J = \left]-1,\frac{3}{2}\right[$ و $I = \left[\frac{-2}{3},2\right]$

الجواب:
1) $I \cap J =]-1,7]$ $I \cup J =]-3;+\infty[$
2) $I \cap J = [4,5[$ $I \cup J =]-\infty;10]$
3) $I \cap J = \varnothing$ $I \cup J = [-5;10]$
4) $I \cap J = \left[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right[$ $I \cup J =]-1,2]$

تمرين12 : حل في IR النظمات الآتية
1) $\begin{cases} x\rangle 5 \\ x \le 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \ge -3 \\ x\rangle 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x\rangle 7 \\ x \ge 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -3 \le x \le 0 \\ -7\langle x\langle 10 \end{cases}$

الجواب: الرمز $\begin{cases} \\ \end{cases}$ يعني التقاطع

1) $x\rangle 5$ يعني $x \in]5,+\infty[$
$x \le 4$ يعني $x \in]-\infty,4]$
$S =]5,+\infty[\cap]-\infty,4] = \varnothing$

2) $x \ge -3$ يعني $x \in [-3,+\infty[$
$x > 2$ يعني $x \in]2,+\infty[$
$S =]2,+\infty[\cap [-3,+\infty[=]2,+\infty[$

3) $x > 7$ يعني $x \in]7,+\infty[$
$x \ge 0$ يعني $x \in [0,+\infty[$
$S =]7,+\infty[\cap [0,+\infty[=]7,+\infty[$

4) $-7\langle x\langle 10$ يعني $x \in]-7;10[$
$-3 \le x \le 0$ يعني $x \in [-3;0]$
$S =]-7,10[\cap [-3;0] = [-3;0]$

2)تأطير عدد حقيقي: تعريف: ليكن x عددا حقيقيا.
تأطير العدد x يعني إيجاد عددين حقيقيين a و b مع $a \prec b$
بحيث: $a \le x \le b$ أو $a \le x \prec b$ أو $a \prec x \le b$ أو $a \prec x \prec b$.
العدد الحقيقي الموجب قطعا $b-a$ يسمى سعة التأطير و العددان a و b هما محدات التأطير.

تمرين13: نضع $x \in [1;3]$ و $y \in [2;4]$ اعط تأطيرا للأعداد التالية
1)اعط تأطيرا للأعداد التالية : x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$ و $-x$ و $-y$
و $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{x}{y}$
2)حدد سعة التأطير لكل من A و B : $A=x^2+y^2+2x-3y$ و $B=\frac{2x-1}{x+1}$

الجواب:1) $x \in [1;3]$ يعني $1 \le x \le 3$
$y \in [2;4]$ يعني $2 \le y \le 4$
$1 \le x \le 3$ يعني $1^2 \le x^2 \le 3^2$ يعني $1 \le x^2 \le 9$
$2 \le y \le 4$ يعني $2^2 \le y^2 \le 4^2$ يعني $4 \le y^2 \le 16$
$1 \le x \le 3$ يعني $2\times1 \le 2x \le 2\times3$ يعني $2 \le 2x \le 6$
$2 \le y \le 4$ يعني $3\times2 \le 3\times y \le 3\times4$ يعني $6 \le 3y \le 12$
$1 \le x \le 3$ يعني $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{1}$ يعني $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le 1$
$2 \le y \le 4$ يعني يعني $\frac{1}{4} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$
لدينا $\frac{x}{y} = x\times\frac{1}{y}$ اذن : $1\times\frac{1}{4} \le x\times\frac{1}{y} \le 3\times\frac{1}{2}$ اذن : $\frac{1}{4} \le \frac{x}{y} \le \frac{3}{2}$
2)تأطير A : $6 \le 3y \le 12$ يعني $-12 \le -3y \le -6$
وحسب النتائج السابقة وبجمع المتفاوتات طرف لطرف نجد:
$1+4+2-12 \le x^2+y^2+2x-3y \le 9+16+6-6$
وبالتالي : $-5 \le A \le 25$
وسعة التأطير هي : $r = 25-(-5) = 30$
تأطير B : $B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1)\times\frac{1}{x+1}$
لدينا $1 \le x \le 3$ يعني $2 \le 2x \le 6$ يعني $2-1 \le 2x-1 \le 6-1$
يعني $1 \le 2x-1 \le 5$
لدينا $1 \le x \le 3$ يعني $2 \le x+1 \le 4$ يعني $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{2}$
وبضرب المتفاوتتين التاليتين $1 \le 2x-1 \le 5$ و $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{2}$ طرف لطرف نجد
$1\times\frac{1}{4} \le (2x-1)\times\frac{1}{x+1} \le 5\times\frac{1}{2}$ يعني $\frac{1}{4} \le B \le \frac{5}{2}$
وسعة التأطير هي : $r = \frac{5}{2}-\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

تمرين14 : التأطير و العمليات

1. تحقق من أن: $14^2 < 200 < 15^2$

ثم استنتج أن: $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2. بنفس الطريقة أوجد تأطيرا للعدد $\sqrt{5}$.

3. استنتج تأطيرا للعددين $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$.

الجواب:

1) لدينا $14^2 = 196$ و $15^2 = 225$ ومنه $14^2 < 200 < 15^2$

لدينا $14^2 < 200 < 15^2$ اذن نستنتج أن : $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$

اذن : $\sqrt{14^2} < \sqrt{2\times100} < \sqrt{15^2}$ أي : $14 < \sqrt{2}\times10 < 15$

أي : $14\times\frac{1}{10} < \sqrt{2}\times10\times\frac{1}{10} < 15\times\frac{1}{10}$

اذن نستنتج أن : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) لدينا $22^2 = 484$ و $23^2 = 529$ ومنه $22^2 < 500 < 23^2$

لدينا $22^2 < 500 < 23^2$ اذن نستنتج أن : $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$

اذن : $\sqrt{14^2} < \sqrt{2\times100} < \sqrt{15^2}$ أي : $22 < \sqrt{5}\times10 < 23$

أي : $22\times\frac{1}{10} < \sqrt{5}\times10\times\frac{1}{10} < 23\times\frac{1}{10}$

اذن نستنتج أن : $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

3) لدينا $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ و $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

اذن : $1,4+2,2 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 1,5+2,3$ أي :

$3,6 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 3,8$

و أيضا بضرب طرف لطرف نجد: $1,4\times2,2 < \sqrt{2}\times\sqrt{5} < 1,5\times2,3$

أي : $3,08 < \sqrt{10} < 3,45$

III.القيمة المطلقة و خاصياتها:

1)القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

1. إذا كان $x \geq 0$ فان: $|x| = x$

2. إذا كان $x \leq 0$ فان: $|x| = -x$

أمثلة : $|3| = 3$ و $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ و $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$

$|3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$ و $|\pi-4| = -(\pi-4) = -\pi+4$

تمرين15: القيمة المطلقة لعدد حقيقي

أكتب بدون رمز القيمة المطلقة الأعداد التالية:

1) $|\sqrt{2}-2|$ 2) $|3-2\sqrt{3}|$ 3) $|\sqrt{5}-\sqrt{2}|$

4) $A = |4-2\sqrt{3}| - |5-3\sqrt{3}| + |9-5\sqrt{3}|$

الجواب:

1) لدينا $\sqrt{2} < 2$ اذن : $\sqrt{2}-2 \in \mathbb{R}^-$ ومنه

$|\sqrt{2}-2| = -(\sqrt{2}-2) = -\sqrt{2}+2$

2) لدينا $3 < 2\sqrt{3}$ لأن : $3^2 < (2\sqrt{3})^2$

اذن : $3-2\sqrt{3} \in \mathbb{R}^-$ ومنه $|3-2\sqrt{3}| = -(3-2\sqrt{3}) = -3+2\sqrt{3}$

3) لدينا $\sqrt{5} > \sqrt{2}$ اذن : $\sqrt{5}-\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$ ومنه

$|\sqrt{5}-\sqrt{2}| = \sqrt{5}-\sqrt{2}$

4) $A = |4-2\sqrt{3}| - |5-3\sqrt{3}| + |9-5\sqrt{3}|$

$A = 4-2\sqrt{3} - -(5-3\sqrt{3}) + (5\sqrt{3}-9)$

$A = 4-2\sqrt{3}+5-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-9 = 0$

2)خاصيات:

- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $|x| \geq 0$ و $|x^2| = |x|^2 = x^2$ و $-|x| \leq x \leq |x|$.
- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |-x|$ و $\sqrt{x^2} = |x|$.
- لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|xy| = |x||y|$, $|x+y| \leq |x|+|y|$
- إذا كان $y \neq 0$ فان: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- لكل a من $\mathbb{R}^*$ $|x| = a$ يكافئ $x = a$ أو $x = -a$.
- لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |y|$ يكافئ $x = y$ أو $x = -y$.

تمرين16 :

1. أحسب : $(3\sqrt{2}-5)^2$

2. قارن العددين: $3\sqrt{2}$ و 5

3. بسط : $\sqrt{43-30\sqrt{2}}$

الجواب: 1) $(3\sqrt{2}-5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2\times3\sqrt{2}\times5 + (5)^2 = 18-30\sqrt{2}\times5+25$

$(3\sqrt{2}-5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2\times3\sqrt{2}\times5 + (5)^2 = 43-30\sqrt{2}$

2) لمقارنة العددين نقارن مربعيهما : $(3\sqrt{2})^2 = 18$ و $(5)^2 = 25$

اذن $3\sqrt{2} < 5$ ومنه $3\sqrt{2}-5 \in \mathbb{R}^-$

3) $\sqrt{43-30\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2} = |3\sqrt{2}-5|$

$= -(3\sqrt{2}-5)$ لأن : $3\sqrt{2}-5 \in \mathbb{R}^-$

وبالتالي: $\sqrt{43-30\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}+5$

خاصية : ليكن x من $\mathbb{R}$ و r من $\mathbb{R}_+^*$.

- $|x| \leq r$ يكافئ $-r \leq x \leq r$
- $|x| \geq r$ يكافئ $x \geq r$ أو $x \leq -r$

تطبيقات :(حل المعادلات)

تمرين17 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : 1) $|x-1| = 5$

2) $|x+2| = -1$ 3) $|2x+1| = |x-3|$

الجواب:1) $|x-1| = 5$ يعني $x-1 = 5$ أو $x-1 = -5$

يعني $x = 6$ أو $x = -4$ اذن : $S = \{-4;6\}$

2)المعادلة : $|x+2| = -1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$ لأن القيمة المطلقة دائما موجبة

اذن : $S = \varnothing$

3) $|2x+1| = |x-3|$ يعني $2x+1 = x-3$ أو $2x+1 = -(x-3)$

يعني $x = -4$ أو $2x+1 = -x+3$ يعني $x = -4$ أو $x = \frac{2}{3}$

اذن : $S = \left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

تطبيقات :(حل المتراجحات)

تمرين18: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية: 1) $|x-1| \leq 2$

2) $|x+2| \geq 3$ 3) $|2x+1| < 6$

الجواب:1) $|x-1| \leq 2$ يعني $-2 \leq x-1 \leq 2$ يعني

$-2+1 \leq x-1+1 \leq 2+1$ يعني $-1 \leq x \leq 3$

اذن : $S = [-1;3]$

2) $|x+2| \geq 3$ يعني $x+2 \geq 3$ أو $x+2 \leq -3$

يعني $x \geq 1$ أو $x \leq -5$ يعني $x \in [1;+\infty[$ أو $x \in]-\infty;-5]$

اذن : $S =]-\infty;-5] \cup [1;+\infty[$

3) $|2x+1| < 6$ يعني $-6 < 2x+1 < 6$ يعني $-6-1 < 2x+1-1 < 6-1$

يعني $-7<2x<5$ يعني $-7\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<5\times\frac{1}{2}$

يعني $\frac{-7}{2}<x<\frac{5}{2}$ اذن : $S=\left]-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right[$

تمرين19 :توظيف القيمة المطلقة

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث: $x\geq\frac{1}{2}$ و $y\leq1$ و $x-y=3$.

1. أحسب قيمة العدد E حيث: $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$
2. بين أن: $\frac{1}{2}\leq x\leq4$ و أن $-\frac{5}{2}\leq y\leq1$
3. أحسب قيمة العدد F حيث: $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

الجواب: 1) $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}=|2x-1|+|2y-2|$

لدينا $x\geq\frac{1}{2}$ يعني $2x\geq1$ يعني $2x-1\geq0$

ولدينا $y\leq1$ يعني $2y\leq2$ يعني $2y-2\leq0$

ومنه : $E=|2x-1|+|2y-2|=2x-1-(2y-2)$

$E=2x-2y+1=2(x-y)+1$ ونعلم أن : $x-y=3$

ومنه : $E=2\times3+1=7$

2)- نبين أن: $-\frac{5}{2}\leq y\leq1$

نعلم أن : $x-y=3$ اذن : $x=y+3$

ولدينا $x\geq\frac{1}{2}$ اذن : $y+3\geq\frac{1}{2}$ اذن : $y\geq\frac{1}{2}-3$

اذن : $y\geq\frac{-5}{2}$ وبما أن $y\leq1$ فان : $-\frac{5}{2}\leq y\leq1$

- نبين أن: $\frac{1}{2}\leq x\leq4$

نعلم أن : $x-y=3$ اذن : $y=x-3$

ووجنا سابقا أن : $-\frac{5}{2}\leq y\leq1$

اذن : $-\frac{5}{2}\leq x-3\leq1$ يعني $-\frac{5}{2}+3\leq x-3+3\leq1+3$

ومنه : $\frac{1}{2}\leq x\leq4$

3)حساب قيمة العدد F حيث: $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

نبحث عن اشارة $x+y-5$

ووجنا سابقا أن : $-\frac{5}{2}\leq y\leq1$ و أن $\frac{1}{2}\leq x\leq4$

اذن : $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\leq x+y\leq1+4$ يعني $-2\leq x+y\leq5$

يعني $-2-5\leq x+y-5\leq5-5$ يعني $-7\leq x+y-5\leq0$

أي أن : $x+y-5$ سالب

نبحث عن اشارة $x+y+2$

وجنا سابقا أن : $-2\leq x+y\leq5$

يعني $-2+2\leq x+y+2\leq5+2$ يعني $0\leq x+y+2\leq7$

أي أن : $x+y+2$ موجب

اذن : $F=|x+y-5|+|x+y+2|=-(x+y-5)+x+y+2$

اذن : $F=-x-y+5+x+y+2=-x-y+5+x+y+2=7$

تعاريف أخرى : ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}$ بحيث: $a\prec b$

$b-a$ تسمى طول أو سعة المجال $[a,b]$.

العدد $c=\frac{a+b}{2}$ يسمى مركز المجال $[a,b]$ و العدد $c=\frac{b-a}{2}$ يسمى شعاع المجال $[a,b]$.

و منه $x\in[a,b]$ يكافئ $|x-c|\leq r$ يكافئ $c-r\leq x\leq c+r$.

مثال: من أجل المجال $[-2,10]$ لدينا: العدد $10-(-2)=12$ هو طوله

والعدد $c=\frac{10-2}{2}=4$ هو مركزه و العدد $r=\frac{12}{2}=6$ هو شعاعه

إذن: $x\in[-2;10]$ يكافئ $|x-4|\leq6$.

IV.التقريبات والتقريبات العشرية:

1)التقريبات: تعاريف: ليكن a و x عنصرين من $\mathbb{R}$ و r عددا حقيقيا موجبا قطعا.

1. إذا كان $a\leq x\leq a+r$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بتفريط.
2. إذا كان $a-r\leq x\leq a$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بإفراط.
3. إذا كان $|x-a|\leq r$, نقول إن a قيمة مقربة (أو بالتقريب) للعدد x بالدقة r.

خاصية: إذا كان $a\leq x\leq b$ تأطيرا للعدد x فان:

- العدد a قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بتفريط. و العدد b قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بإفراط .
- العدد $\frac{a+b}{2}$ قيمة مقربة للعدد x بالدقة $\frac{b-a}{2}$.

مثال1: من التأطير $2,645\leq\sqrt{7}\leq2,646$ نستنتج أن:

- العدد $2,645$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.
- العدد $2,646$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.
- العدد $2,6455$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتفريط.

مثال2: لدينا $\pi=3,1415926.....$

سؤال :حدد قيمة مقربة للعدد π بالدقة 10^{-2} بتفريط و بإفراط

تمرين20: التقريب العشري لعدد

أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{10}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط (استعمل المحسبة).

$(\sqrt{10}\simeq3.16227766)$

الجواب: $3.162<\sqrt{10}<3.163$

ولدينا : $3.163-3.162=0.001=10^{-3}$ اذن

- العدد 3.162 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.
- العدد 3.163 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

2)التقريب العشري لعدد حقيقي:

الجزء الصحيح لعدد حقيقي:

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p بحيث:

$p\leq x\leq p+1$, p يسمى الجزء الصحيح للعدد x و نكتب: $E(x)=p$

مثال : لدينا: $1\leq\sqrt{2}\leq2$ و منه فان $E(\sqrt{2})=1$

تمرين21 أو مثال: أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-4} بتفريط (استعمل المحسبة).علما أن : $(\sqrt{3}\simeq1.732050808...)$

الجواب : لدينا: $1,732\leq\sqrt{3}\prec1,733$

أي $(1732)\cdot10^{-3}\leq\sqrt{3}\prec(1732+1)\cdot10^{-3}$

إذن: $1,732$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.

و $1,733$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

الحدوديـــــــــــــات

القدرات المنتظرة

-* التمكن من تقنية القسمة الإقليدية على $x-a$ وإدراك قابلية القسمة على $x-a$.

I – الحدودية:كتابة و مصطلحات – تساوي حدوديتين

1- أنشطة

نشاط1

لتكن الأعداد x و $x+3$ و $x+5$ أبعاد متوازي المستطيلات و $V(x)$ حجمه

حدد $V(x)$

$$V(x)=x(x+3)(x+5)=x^3+8x^2+15x$$

التعبير x^3+8x^2+15x يسمى تعبيرا حدوديا أو حدودية

x^3 هو الحد الذي له أكبر أس(هذا الأس هو 3) نقول إن درجة الحدودية $V(x)$ هو 3

نكتب $d^\circ(V(x))=3$

نشاط2

حدد من بين التعابير التالية تلك التي تمثل حدوديات وحدد درجتها

$$P(x)=\frac{1}{3}x^5-3x^3+4x-1 \quad ; \quad Q(x)=x^2-\sqrt{2}x+3 \quad ; \quad H(x)=-6$$

$$T(x)=3x^2+2|x| \quad ; \quad G(x)=2\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x} \quad ; \quad K(x)=2x^4-2\sqrt{x}+2 \quad ; \quad N(x)=0$$

-* كل تعبير على شكل ax^n حيث x متغير حقيقي و a عدد حقيقي و n عدد صحيح طبيعي يسمى حدية
إذا كان $a\neq 0$ درجة الحدية ax^n هو n و درجة الحدية a هو 0 .
الحدية المنعدمة لا درجة لها
-* الحدودية هي كل تعبير على شكل مجموع تكون جميع حدوده حديات

* $P(x)$ حدودية تتكون من أربعة حدود هي: 1- و $4x$ و $-3x^3$ و $\frac{1}{3}x^5$

العدد 3 هو درجة الحد $-3x^3$ و 3- معامل الحد $-3x^3$

العدد 5 هو درجة الحد $\frac{1}{3}x^5$ و $\frac{1}{3}$ معامل الحد $\frac{1}{3}x^5$

درجة الحدودية $P(x)$ هو 5 نكتب $d^\circ(P(x))=5$

* $Q(x)$ حدودية تتكون من 3 حدود . $d^\circ(Q(x))=2$

* $H(x)$ حدودية تتكون من حد واحد. $d^\circ(H(x))=0$

* كل تعبير من التعابير $T(x)$ و $G(x)$ و $K(x)$ ليس حدودية

* $N(x)$ حدودية منعدمة ليست لها درجة

الحدودية المنعدمة هي كل حدودية معاملاتها منعدمة.

نشاط3

اختصر الحدودية $P(x)=-2x^5+3x^3-4x^4+x^3+x+x^2-x^4$

اختصار حدودية هو كتابتها على شكل مجموع حدود درجتها مختلفة مثنى مثنى

الشكل المختصر للحدودية $P(x)$ هو $P(x)=-2x^5-5x^4+4x^3+x^2+x$

نشاط2

1- هل الحدوديتين P و Q متساويتان في كل الحالات

* $P(x)=4x^3+3x^2-4x+1$ $\quad$ $Q(x)=3x^2+x^3-4x+1+3x^3$

* $P(x)=(\sqrt{2}-1)x^2-4x+1$ $\quad$ $Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2}+1}x^2-4x+1+$

* $P(x)=-3x^3+x^2-x$ $\quad$ $Q(x)=x^2-3x^3+x$

2- لتكن $P(x)=(a+b)x^3+(b-c)x^2+(a-c+1)x$

حدد a و b و c لكي تكون $P(x)$ حدودية منعدمة.

2- تعاريف

تعريف1

لتكن $P(x)$ حدودية مختصرة و غير منعدمة. درجة $P(x)$ هي درجة الحد الذي له أكبر درجة

نرمز لها بالرمز $d^\circ(P(x))$

ملاحظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة

تعريف2

تكون حدوديتان ،مختصرتان غير منعدمتين ، متساويتين إذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات حدودها من نفس الدرجة متساوية مثنى مثنى

3- حالات خاصة

*- كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و تكتب على شكل $ax+b$

حيث $a\in\mathbb{R}^*$; $b\in\mathbb{R}$

*- الحدودية من الدرجة الثانية تسمى ثلاثية الحدود و تكتب على شكل ax^2+bx+c

حيث $a\in\mathbb{R}^*$ $(b;c)\in\mathbb{R}^2$

II- مجموع و جداء

1- أنشطة

أ- أحسب $P(x)+Q(x)$ و $P(x)-Q(x)$ مع مقارنة $d^\circ(P+Q)$ و $d^\circ(P)+d^\circ(Q)$

* $P(x)=4x^3+3x^2-4x+1$ $\quad$ $Q(x)=3x^5-3x^3-6x-3$

* $P(x)=-4x^6+2x^3-6x^2+1$ $\quad$ $Q(x)=4x^6-3x^3-4x^2-6$

ب- أحسب $P(x)\times Q(x)$ مع مقارنة $d^\circ(P\times Q)$ و $d^\circ(P)\times d^\circ(Q)$

* $P(x)=-3x+2$ $\quad$ $Q(x)=2x^2-6x-3$

* $P(x)=3x^2-4x+1$ $\quad$ $Q(x)=x^3-x^2-3$

ج – عمل

$P(x)=(x-3)^2-(5x+6)^2$ $\quad$ $Q(x)=(x+1)^3-27(x-1)^3$

2- خاصيات

*- مجموع حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P+Q$

ملاحظة $d^\circ(P+Q)\le\sup(d^\circ(P);d^\circ(Q))$

*- فرق حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P-Q$

ملاحظة $d^\circ(P-Q)\le\sup(d^\circ(P);d^\circ(Q))$

*- جداء حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P\times Q$

ملاحظة $d^\circ(P\times Q)=d^\circ(P)+d^\circ(Q)$

III- جذر حدودية - القسمة على x-a

1) جذر حدودية

تعريف

لتكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا

نقول إن العدد α جدر للحدودية $P(x)$ إذا كان $P(\alpha)=0$

أمثلة

$P(x)=x^3+4x^2+x-6$

حدد من بين الأعداد التالية 1 و1- و 2 و 3-. تلك التي تمثل جدرا لـ $P(x)$

2) القسمة على x-a

أنشطة

أ- نعتبر $P(x)=x^3+x+1$

- أحسب $P(3)$

- حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x)-P(3)=(x-3)Q(x)$

ب- نعتبر $P(x)=2x^4-3x^2-x-2$

- حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x)-P(1)=(x-1)Q(x)$

- حدد حدودية $Q'(x)$ حيث $P(x)-P(2)=(x-2)Q'(x)$

أ- خاصية

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n\geq 1$ و α عدداحقيقيا .

توجد حدودية وحيدة $Q(x)$ درجتها $n-1$ حيث $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+P(\alpha)$

$Q(x)$ خارج القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-\alpha$

$P(\alpha)$ باقي القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-\alpha$

ب- تقنية لحساب الخارج و الباقي

لنحدد خارج و باقي القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x-3$

حيث $P(x)=-3x^4+2x^3-x^2-5x+1$

$-3x^4+2x^3-x^2-5x+1$	$x-3$
$3x^4-9x^3$	$-3x^3-7x^2-22x-71$
$-7x^3-x^2$	
$7x^3-21x^2$	
$-22x^2-5x$	
$22x^2-66x$	
$-71x+1$	
$71x-213$	
-212	

ملاحظة $P(3)=-212$

* $P(x)=-2x^5-x^2+3x-2$

حدد خارج و باقي القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x-2$

ج- قابلية القسمة على على x-a

تعريف

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا
نقول إن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$
حيث $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$
ملاحظة: $P(\alpha)=0$

تمرين نعتبر $P(x)=x^3-x-6$

حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x)=(x-2)Q(x)$ نلاحظ أن $P(2)=0$

نتيجة

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا
نقول إن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا و فقط إذا كان α جدرا للحدودية $P(x)$.

تمرين نعتبر $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1- تأكد أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-3$
2- بإنجاز القسمة الاقليدية حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x)=(x-3)Q(x)$
3- بين أن 1- جدرا للحدودية $Q(x)$. عمل $Q(x)$.
استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$.

تمرين $P(x)=2x^3+3x^2-3x-2$

1- أحسب $P(-2)$ و $P(1)$ و $P(3)$
2- أنجز القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x+2$
3- بين إذا كان α جدرا غير منعدم لـ $P(x)$ فان $\frac{1}{\alpha}$ جدر لـ $P(x)$. استنتج الجذور الثلاث.

تمرين $P(x)=2x^3+mx^2-11x-6$

1- حدد m حيث $P(x)$ تقبل القسمة على $x-2$
2- نضع $m=3$. أحسب $P(-3)$
استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$.

الجبر

مذكرة رقم 7 : الحدوديات مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- تقديم حدودية، تساوي حدوديتين؛ - جمع وضرب حدوديتين؛ - جذر حدودية، القسمة على $x-a$؛ - تعميل حدودية.	- التمكن من تقنية القسمة الإقليدية على $x-a$ وإدراك قابلية القسمة على $x-a$.	- ينبغي تجنب إعطاء أي بناء نظري لمفهوم الحدودية ويمكن تقديمها، مع الإشارة إلى العناصر المميزة لها (الحد، الدرجة، المعامل)، من خلال أمثلة بسيطة؛ - إذا كانت تقنية القسمة لحدودية على $x-a$ تلعب دورا في تعميل حدودية أحد جذورها هو a فإنه ينبغي الاهتمام بباقي التقنيات التي تؤدي إلى هذا التعميل.

I تقديم حدودية و تساوي حدوديتين:

1) تقديم حدودية :أمثلة و تعاريف: مثال 1:

التعبير $P(x)=\frac{1}{2}x^3-\sqrt{2}x^2+x-\frac{1}{3}$ يسمى حدودية

$\frac{1}{2}x^3$ يسمى حد الحدودية من الدرجة3.

$-\sqrt{2}x^2$ يسمى حد الحدودية من الدرجة2.

x يسمى حد الحدودية من الدرجة 1. $-\frac{1}{3}$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 0

الحد الأكبر درجة هو $\frac{1}{2}x^3$, العدد 3 يسمى درجة الحدودية. و نكتب

$d^0P=3$

مثال 2: كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و تكتب على شكل: $ax+b$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$.

مثال 3: التعبير $x^2+2\sqrt{x}+5$ ليس بحدودية لأنها تحتوي على $\sqrt{x}$.

مثال 4: الحدودية: $P(x)=3x^4+x^3-7x+\sqrt{3}$ درجتها4.

3 هو معامل الحد من الدرجة 4 . 1 هو معامل الحد من الدرجة 3 , 0 هو معامل الحد من الدرجة 2.

-7 هو معامل الحد من الدرجة 1 , $\sqrt{3}$ هو معامل الحد من الدرجة 0.

نرمز عادة لحدودية بأحد الرموز: $P(x)$ أو $Q(x)$ أو $R(x)$ أو $S(x)$ .....

نعتبر الحدودية: $P(x)=4x^2-x^3+x^4+3+x$.

يمكن كتابة الحدودية $P(x)$:على شكل:

$$P(x)=x^4-x^3+4x^2+x+3$$

نقول إننا رتبنا $P(x)$ تبعا للقوى التزايدية.

تمرين1 : حدد من بين التعابير التالية الحد وديات و درجتها ان أمكن :حيث $a\in\mathbb{R}$

$P(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{3}$ و $Q(x)=2x^2-x-\sqrt{x}$

$R(x)=5|x^2|+4|x|-5$ و $M(x)=\frac{5}{3}x^2+x+2-7x^4$

$N(x)=x^2+\frac{1}{x}+3$ و $O(x)=4$ و $E(x)=(a-1)x^4+x^2+x+1$

الجواب : $P(x)$ حدودية.و $d^\circ P=3$ و $Q(x)$ ليست بحدودية.

و $R(x)$ ليست بحدودية.

$M(x)$ حدودية. و $d^\circ P=4$

$O(x)$ حدودية. و $d^\circ P=0$

$E(x)$ حدودية.

الحالة1 : $a=1$ $d^\circ P=2$ **الحالة2 :** $a-1\neq0$ يعني $a\neq1$

$d^\circ P=4$

2) تعريف: الحدودية المنعدمة هي الحدودية التي جميع معاملاتها تساوي صفرا.

أي $P(x)=0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ملحوظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة.

3) تساوي حدوديتين:

نشاط : نعتبر الحدوديتين التاليتين :

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ و $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$

1. حدد درجة الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$
2. ماذا تلاحظ ؟

الجواب على النشاط 1:) $d^\circ P=3$

لايمكن تحديد درجة الحدودية $Q(x)$ الا بعد النشر والتبسيط

$Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)=2x^3-4x^2+2x^2+3x-2x-3$

$Q(x)=2x^3-2x^2+x-3$ ومنه $d^\circ Q=3$

2) نلاحظ أيضا أن معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية

نقول ان : $Q(x)=P(x)$

خاصية: تكون حدوديتان متساويتين اذا و فقط اذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

تمرين2 : نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث:

$$P(x)=(a-1)x^3+2ax^2+5x+6$$

و $Q(x)=2x^3+4x^2+(3+a)x+3a$.

حيث a عدد حقيقي يخالف 1. لنحدد قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون $P(x)$ و $Q(x)$ متساويتين.

الجواب :

$a\neq1$ اذن : $a-1\neq0$ ومنه : $d^\circ P=3$ ولدينا أيضا $d^\circ Q=3$

إذن: $d^\circ P=d^\circ Q$

$Q(x)=P(x)$ يعني أن : $\begin{cases}a-1=1\\2a=4\\3+a=5\\3a=6\end{cases}$ يعني $a=2$

تمرين3 : أدرس تساوي الحدوديتين في الحالات التالية:

1. $P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x$ و $Q(x)=x^2(3x-2)+x$
2. $P(x)=(x-1)^3$ و $Q(x)=x^3-3x^2-3x+1$

الجواب : 1)

$P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x=x^3+2x^3-2x^2+x=3x^3-2x^2+x$

$Q(x)=x^2(3x-2)+x=3x^3-2x^2+x=P(x)$

2) $P(x)=(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

إذن: $Q(x)\neq P(x)$ لأن معاملات الحد من الدرجة 1 غير متساوية $(3\neq -3)$

II. جمع و ضرب حدوديتين:

نشاط1 : أحسب مجموع الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث:

$P(x)=x^2+x+1$ و $Q(x)=x^3-x^2+2$

ثم قارن : $d^0(P+Q).....d^0P+d^0Q$

الجواب : لدينا: $P(x)+Q(x)=(x^2+x+1)+(x^3-x^2+2)=x^3+x+3$

اذن : $d^0(P+Q)\leq d^0P+d^0Q$

خاصية 1: مجموع حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز $P(x)+Q(x)$.

خاصية 2: لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا:

$d^0(P+Q)\leq d^0P+d^0Q$ في حالة $P(x)+Q(x)$ حدودية غير منعدمة.

تمرين4: نعتبر الحدوديتين التاليتين :

$P(x)=5x^3-2x^2+3x+1$ و $Q(x)=-2x^3+5x^2-2x-1$

حدد : $P(x)+Q(x)$ و $P(x)-Q(x)$

الجواب : $P(x)+Q(x)=5x^3-2x^2+3x+1-2x^3+5x^2-2x-1$

$P(x)+Q(x)=3x^3+3x^2+x$

$P(x)-Q(x)=(5x^3-2x^2+3x+1)-(-2x^3+5x^2-2x-1)$

$P(x)-Q(x)=5x^3-2x^2+3x+1+2x^3-5x^2+2x+1$

$P(x)-Q(x)=7x^3-7x^2+5x+2$

نشاط2 : أحسب جذاء الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث:

$P(x)=x^2+x+1$ و $Q(x)=x^3-x^2+2$

ثم قارن : $d^0(P\times Q).....d^0P+d^0Q$

الجواب: لدينا: $P(x)\times Q(x)=(x^2+x+1)\times(x^3-x^2+2)$

$=x^5-x^4+2x^2+x^4-x^3+2x+x^3-x^2+2$

$=x^5+x^2+2x+2$

اذن : $d^0(P(x)\times Q(x))=d^0P(x)+d^0Q(x)$

خاصية 3: جذاء حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز $P(x)\times Q(x)$.

خاصية 4: لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا:

$d^0(P(x)\times Q(x))=d^0P(x)+d^0Q(x)$

III. القسمة الاقليدية لحدودية على $x-\alpha$:

نشاط : نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

أحسب : $P(1)$ و $P(2)$ و $P(3)$ و $P(-2)$

الجواب: $P(1)=1^3-2\times1^2-5\times1+6=1-2-5+6=0$

$P(2)=2^3-2\times2^2-5\times2+6=8-8-10+6=-4\neq0$

$P(3)=3^3-2\times3^2-5\times3+6=27-18-15+6=0$

$P(2)=(-2)^3-2\times(-2)^2-5\times(-2)+6=-8-8+10+6=0$

نقول 1 جذر للحدودية $P(x)$ (نفس الجواب بالنسبة ل 3 و -2)

1) جذر حدودية:

تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا.

نقول أن α جذر للحدودية $P(x)$ إذا كان: $P(\alpha)=0$.

α يسمى أيضا صفرا للحدودية $P(x)$.

نشاط : نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=2x^2-x-1$

1. بين أن 1 جذر للحدودية $P(x)$

2. تأكد أن : $P(x)=(x-1)(2x+1)$

الجواب : 1) $P(1)=2\times1^2-1-1=0$ اذن 1 جذر للحدودية $P(x)$

2) $(x-1)(2x+1)=2x\times x+x-2x-1=2x^2-x-1=P(x)$

اذن $P(x)=(x-1)(2x+1)$

نقول $P(x)$ تقبل القسمة على $x-1$

2) قابلية القسمة على $x-\alpha$:

تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n\geq1$ و α عددا حقيقيا.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$ بحيث: $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$

خاصية: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n\geq1$ و α عددا حقيقيا.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا و فقط إذا كان α جذرا للحدودية $P(x)$.

مثال: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

1. بين أن -3 جذر للحدودية $P(x)$

2. حدد حدودية $Q(x)$ بحيث: $P(x)=(x+3)Q(x)$

الجواب : 1) -3 جذر للحدودية: لأن $P(-3)=0$

2) إذن $P(x)$ تقبل القسمة على $x+3$, و منه توجد حدودية $Q(x)$ بحيث:

$P(x)=(x+3)Q(x)$ لدينا $P(x)$ درجتها 3.و $R(x)=x+3$ درجتها 1

إذن $Q(x)$ درجتها 2 و بالتالي $Q(x)$ تكتب على شكل:

$Q(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq0)$

تحديد $Q(x)$:

الطريقة 1: لدينا: $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

$P(x)=(x+3)(ax^2+bx+c)$

يعني أن: $x^3+3x^2-2x-6=(x+3)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+(b+3a)x^2+(c+3b)x+3c$

$=ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c$

حسب خاصية تساوي حدوديتين لدينا: $a=1$ و $b+3a=3$ و $c+3b=-2$ و $3c=-6$

يعني أن: $a=1$ و $b=0$ و $c=-2$ اذن: $Q(x)=x^2-2$.

الطريقة 2: $=(x+3)(x^2-2)$

$P(x)=x^3+3x^2-2x-6=x^2(x+3)-2(x+3)$

و منه $Q(x)=x^2-2$

الطريقة 3: انجاز القسمة الاقليدية

مراحل انجاز القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2-2x-6 & x+3 \\ \hline -x^3-3x^2 & x^2-2 \\ \quad -2x-6 & \\ \quad 2x+6 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

تمرين5 : نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1. بين أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-3$
2. حدد حدودية $Q(x)$ بحيث: $P(x)=(x-3)\times Q(x)$

الجواب :1) 3 جذر للحدودية: لأن $P(3)=0$ ومنه $P(x)$ تقبل القسمة على $x-3$

2) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-3$ فنجد :

$P(x)=(x-3)\times(2x^2+x-1)$

تمرين6 : نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=2x^2+x-3$

1. بين أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-1$
2. عمل الحدودية $P(x)$

الجواب :

1) 1 جذر للحدودية: لأن $P(1)=0$ ومنه $P(x)$ تقبل القسمة على $x-1$

2) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-1$ فنجد :

$P(x)=(x-1)\times(2x+3)$ ومنه نجد تعميلا للحدودية $P(x)$

تمرين7 : نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث:

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

و $Q(x)=x^2-4x+3$.

1. أنجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x+2$.
2. وبين أن $Q(x)$ تقبل القسمة على $x-3$.
3. استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$ إلى جذاء حدوديات من الدرجة الأولى.

الجواب :1)

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2-5x+6 & x+2 \\ \hline -x^3-2x^2 & x^2-4x+3 \\ \quad -4x^2-5x+6 & \\ \quad 4x^2+8x & \\ \hline \quad 3x+6 & \\ \quad -3x-6 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

2) 3 جذر للحدودية $Q(x)$: لأن $Q(3)=0$ ومنه $Q(x)$ تقبل القسمة على $x-3$

3) وجدنا حسب السؤال1 $P(x)=(x+2)\times(x^2-4x+3)$

وجدنا حسب السؤال2 $Q(x)$ تقبل القسمة على $x-3$

ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $Q(x)$ على $x-3$

فنجد : $Q(x)=(x-3)\times(x-1)$

ومنه: $P(x)=(x+2)\times(x-3)\times(x-1)$

تمرين2 : نعتبر الحدودية $P(x)$ المعرفة بما يلي:

$P(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$

1. تحقق من أن 0 ليس جذرا للحدودية $P(x)$.
2. بين أنه إذا كانت α جذرا للحدودية $P(x)$ فان $\frac{1}{\alpha}$ هو أيضا جذر للحدودية $P(x)$.
3. بين أن العدد 2 جذر للحدودية $P(x)$.
4. بانجاز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-2$, حدد الحدودية $Q(x)$ حيث: $P(x)=(x-2)Q(x)$
5. استنتج أن: $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$
6. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث يكون: $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(ax^2+bx+c)$
7. استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$ إلى جذاء حدوديات من الدرجة الأولى.

الجواب :1) $P(0)=2\neq 0$ ومنه 0 ليس جذرا للحدودية $P(x)$.

2) α جذر للحدودية $P(x)$ يعني $P(\alpha)=0$ يعني :

$2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$

نحسب : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=$؟

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+14\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\frac{1}{\alpha^4}\right)-9\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)+14\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{2}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{-9\alpha}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{14\alpha^2}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{-9\alpha^3}{\alpha^4}\right)+2\frac{\alpha^4}{\alpha^4}$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{2-9\alpha+14\alpha^2-9\alpha^3+2\alpha^4}{\alpha^4}$$

وبما أنه لدينا : $2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$

فان : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{0}{\alpha^4}=0$

ومه $\frac{1}{\alpha}$ هو أيضا جذر للحدودية $P(x)$.

3) $P(2)=2\times2^4-9\times2^3+14\times2^2-9\times2+2=32-72+56-18+2$

$P(2)=2\times2^4-9\times2^3+14\times2^2-9\times2+2=32-72+56-18+2=0$

ومه العدد 2 جذر للحدودية $P(x)$.

4) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-2$

فنجد : $P(x)=(x-2)\times(2x^3-5x^2+4x-1)$

5) وجدنا حسب سؤال سابق أن 2 جذر للحدودية $P(x)$. اذن حسب السؤال السؤال

2) فان $\frac{1}{2}$ هو أيضا جذر للحدودية $P(x)$. يعني : $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$

يعني : $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$ وحيث أنه لدينا : $P(x)=(x-2)Q(x)$

فان : $\left(\frac{1}{2}-2\right)\times Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$ أي $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$ لأن : $\left(\frac{1}{2}-2\right)\neq 0$

6) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $Q(x)$ على $x-\frac{1}{2}$ فنجد:

$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)$ أي: $a=2$ و $b=-4$ و $c=2$

7) لدينا $P(x)=(x-2)Q(x)$ و $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)$

اذن: $P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)$

يجب أيضا تعميل : $2x^2-4x+2$

بملاحظة أن 1 جذر للحدودية $2x^2-4x+2$

وبقسمة $2x^2-4x+2$ على $(x-1)$ نجد

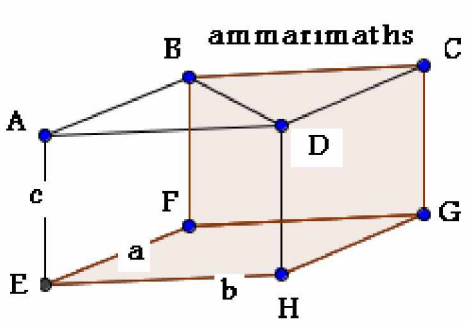
أن: $2x^2-4x+2=(x-1)(2x-2)$ وبالتالي:

$$P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(2x-2)=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1)$$

الحدوديات

I. الحد وديات أو الدوال الحدودية:

1) أمثلة وتعاريف:



نعتبر متوازي المستطيلات قائم كما في الشكل حيث أبعاده هي $l(x)$ و $L(x)$ و $h(x)$.

ليكن x عدد حقيقي نعتبر أن الأبعاد $l(x)$ و $L(x)$ و $h(x)$ تتغير تبعا لتغير العدد x بحيث:

$$h(x) = 2x - 3 \quad ; \quad L(x) = 3x + 2 \quad ; \quad l(x) = x - 1$$

a) نلاحظ أن الأعداد $h(x)$; $L(x)$; $l(x)$ هي دوال على شكل $f(x) = ax + b$ نقول أن f حدودية من الدرجة الأولى.

ونذكر أن تمثيلها المبياني يكون على شكل مستقيم حيث b هو الأرتوب عند الأصل و a هو المعامل الموجه.

b) لتكن $S(x)$ هي مساحة قاعدة متوازي المستطيلات القائم و $V(x)$ هو حجمه ، لدينا إذن :

$$V(x) = S(x) = l(x) \times L(x) \quad ; \quad S(x) = l(x) \times L(x)$$

وهكذا نجد بعد إجراء الحساب أن:

$$\begin{cases} S(x) = (x-1)\times(3x+2) = 3x^2 - x - 2 \\ V(x) = (3x^2 - x - 2)\times(2x-3) = 6x^3 - 11x^2 - x + 6 \end{cases}$$

نلاحظ أن الأعداد $S(x)$ هي دالة على شكل $f(x) = ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$ ، نقول أن f حدودية من الدرجة الثانية.

ونلاحظ أن الأعداد $V(x)$ هي دالة على شكل $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ مع $a \neq 0$ ، نقول أن f حدودية من الدرجة الثالثة.

c) **أتمم الجدول التالي:**

Valeurs de x	2	3	...	...
$l(x)$	$l(2) = 1$	$l(3) = ...$	$l(...) = 3$	$l(...) = ...$
$L(x)$	$L(2) = 8$	$L(3) = ...$	$L(...) = ...$	$L(...) = ...$
$h(x)$	$h(2) = 1$	$h(3) = ...$	$h(...) = ...$	$h(...) = 4$
$S(x)$	$S(2) = 8$	$S(3) = ...$	$S(...) = ...$	$S(...) = ...$
$V(x)$	$V(2) = 8$	$V(3) = ...$	$V(...) = ...$	$V(...) = ...$

d) **تعريف عام:**

الحدودية (أو الدالة الحدودية) هي كل صيغة جبرية على شكل :

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + ... + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

الأعداد : a_0 ; a_1 ; a_2 ; ... ; a_{n-2} ; a_{n-1} ; a_n تسمى معاملات الحدودية.

تكون الحدودية منعدمة إذا كانت جميع معاملاتها منعدمة وبالتالي فإن $P(X) = 0$ مهما تكن قيمة المتغير X .

e) **درجة حدودية غير منعدمة:**

الحدودية (أو الدالة الحدودية) هي كل صيغة جبرية على شكل :

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + ... + a_2X^2 + a_1X + a_0$$ مع $a_n \neq 0$

العدد : a_n يسمى آخر معامل غير منعدم. في هذه الحالة نقول أن درجة الحدودية هي n ونكتب : $d^0P = n$

ملاحظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة لأنها لا تتوفر على آخر معامل غير منعدم.

الحد وديات الثابتة و غير المنعدمة درجتها 0 .

الحدوديات

2) تساوي حدوديتين :

تكون الحدوديتان غير المنعدمتان $P(X)$ و $Q(X)$ متساويتان إذا كانت لهما نفس الدرجة وكانت معملاتها متساوية على التوالي ، أي أن:

$$P(X) = Q(X)$$

يعني أن

$$d^0P = d^0Q = n \quad \text{و} \quad a_n = b_n \ \text{et}\ a_{n-1} = b_{n-1} \ \text{et} \ \dots \ \text{et} \ a_2 = b_2 \ \text{et} \ a_1 = b_1 \ \text{et} \ a_0 = b_0$$

3) عمليات حول الحدوديات :

نعتبر الحد وديات التالية بحيث:

$$Q(x) = 3x^2 + 2x - 3 \quad ; \quad P(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

a) حدد درجة كل حدودية من الحدوديتين $P(x)$; $Q(x)$.

لدينا $d^0P = \dots$; $d^0Q = \dots$

b) أحسب $s(x) = Q(x) + P(x)$ و حدد درجة الحدودية $s(x)$. ماذا تلاحظ ؟

لدينا نلاحظ

$$s(x) = Q(x) + P(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$s(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

نلاحظ أن : $d^0(P+Q) \le \sup(d^0P, d^0Q)$

c) أحسب $p(x) = Q(x) \times P(x)$ و حدد درجة الحدودية $p(x)$. ماذا تلاحظ ؟

لدينا نلاحظ

$$p(x) = Q(x) \times P(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

نلاحظ أن : $d^0(P \times Q) = d^0P \times d^0Q$

بصفة عامة: $P(X)$ و $Q(X)$ حدوديتان غير منعدمتان ، لدينا:

$$d^0(P \times Q) = d^0P \times d^0Q$$

$$d^0(P + Q) \le \sup(d^0P, d^0Q)$$

d) القسمة الأقليدية :

نعتبر الحد وديات التالية بحيث:

$$B(x) = x^2 + 2x - 3 \quad ; \quad A(x) = 7x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

$P(x) = 7x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$	$B(x) = x^2 + 2x - 3$
.....	$Q(x) = \dots\dots\dots\dots$
.....	
.....	
.....	
.....	
$R(x) = \dots\dots\dots\dots$	

الحدوديات

لدينا $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$ مع $0 \le d^0(R) \le d^0Q$

بصفة عامة: مهما تكن الحدوديتان $A(X)$ و $B(X)$ مع $B(X) \neq 0$ توجد حدوديتان $Q(x)$ et $R(x)$ بحيث:

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x) \quad \text{مع} \quad 0 \le d^0(R) \le d^0B$$

4) جدر حدودية :

لتكن $P(X)$ حدودية بحيث $d^0P \ge 1$ ، العدد a هو جدر للحدودية يعني أن $P(a) = 0$
أي أن a هو حل للمعادلة $P(x) = 0$.

a) تمرين تطبيقي: (انظر التصحيح في دفتر التماؤين)

نعتبر الحدوديتان: **On considère les expressions algébriques suivantes:**

$$g(x) = f(x) + (x^2 - 1) - 3(x - 1) \quad ; \quad f(x) = (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{4}{9}$$

1) أحسب $f(\frac{1}{3})$ و $f(1)$ ، ثم استنتج $g(\frac{1}{3})$ و $g(1)$

2) أنشر $f(x)$ و $g(x)$ حدد درجة كل من الحدوديتن f و g .

3) عمل الحدودية $f(x)$ و استنتج تعميلا للحدودية $g(x)$

4) حل المعادلة $f(x) = 0$ واستنتج جدور الحدودية $f(x)$

5) حدد جدور الحدودية $g(x)$

6) لاحظ بشير " ضيفنا الكريم" أن هناك علاقة تجسد الكلام التالي :
a عدد حقيقي و h دالة حدودية : " $h(a) = 0$ يعني أن الحدودية $h(x)$ تقبل القسمة على $x - a$ "
وضح صحة هذا الكلام بثلاثة أمثلة من التمرين.

5) خاصية استكشافية :

لتكن $P(x)$ دالة حدودية و a عدد حقيقي :
الحدودية $P(x)$ تقبل القسمة على $x - a$ يعني أن $P(a) = 0$

ما تحدث به بشير كان صحيحا سنحاول أن نبرهن على ذالك: حسب مبرهنة القسمة الأقليدية توجد حدوديتان $Q(x)$ et $R(x)$
بحيث: $P(x) = (x - a) \times Q(x) + R(x)$ مع $0 \le d^0(R) ® d^0(x - a) = 1$ ، نستنتج أن $d^0(R) = 0$
وبالتالي فإن الحدودية $R(x)$ ثابتة نعوض x بالعدد a في العلاقة $P(x) = (x - a) \times Q(x) + R(x)$ نجد:
$P(a) = (a - a) \times Q(a) + R(a) = R(a)$ وبما أن الحدودية $R(x)$ ثابتة فإن $R(x) = P(a)$
نستنتج أن: $P(x) = (x - a) \times Q(x) + P(a)$. نحن جاهزون لإتمام البرهنةز

نفترض أن الحدودية $P(x)$ تقبل القسمة على $x - a$ ، إذن $P(x) = (x - a) \times Q(x)$ وهذا يعني أن : $P(a) = 0$
نفترض أن $P(a) = 0$ ، إذن $P(x) = (x - a) \times Q(x)$ وهذا يعني أن : $P(a) = 0$ نعوض في العلاقة
$P(x) = (x - a) \times Q(x) + P(a)$ نجد: $P(x) = (x - a) \times Q(x)$ نستنتج أن: الحدودية $P(x)$ تقبل القسمة على $x - a$.

المعادلات و المتراجحات من الدرجة الاولى والثانية بمجهول واحد

القدرات المنتظرة

***- حل معادلات أو متراجحات تؤول في حلها إلى معادلات أو متراجحات من الدرجة 1 أو 2 بمجهول واحد.**

***- ترييض وضعيات تتضمن مقادير متغيرة باستعمال تعابير أو معادلات أو متراجحات.**

I) تعاريف

أنشطة

1- حل المعادلتن التاليتين $x \in \mathbb{R} \quad 2x+4=5x-\frac{1}{2}$ $\quad K \quad$ $x \in \mathbb{N} \quad 2x+4=5x-\frac{1}{2}$

2- حل المتراجحة $x \in \mathbb{R} \quad 5x-7 \leq \frac{11}{2}x+4$

تعريف1

جميع حلول معادلة (أو متراجحة) تكون مجموعة تسمى مجموعة حلول المعادلة (أو المتراجحة) نرمز لها بـ S أو S' او.....

تعريف2

نقول ان معادلتين (أو متراجحين) متكافئتان إذا كانت للمعادلتين (أو للمتراجحتين) نفس مجموعة الحلول.

II) المعادلة التالفية

1- مفهوم معادلة تالفية

تعريف

كل معادلة يمكن كتابتها على شكل $ax+b=0 \quad x \in \mathbb{R}$ تسمى معادلة تالفية.

و تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان $a \neq 0$

2- حل معادلة تالفية

نحل المعادلة $ax+b=0 \quad x \in \mathbb{R}$

إذا كان $a=b=0$ فان $S=\mathbb{R}$

إذا كان $a=0$ و $b \neq 0$ فان $S=\varnothing$

إذا كان $a \neq 0$ فان $ax+b=0$ تكافئ $x=-\frac{b}{a}$ أي أن $S=\left\{\frac{-b}{a}\right\}$

3- حل المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0 \quad x \in \mathbb{R}$ حيث $a \neq 0$ و $c \neq 0$

$(ax+b)(cx+d)=0$ تكافئ $ax+b=0$ أو $cx+d=0$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0 \quad x \in \mathbb{R}$ هي اتحاد مجموعة حلول المعادلة

$ax+b=0 \quad x \in \mathbb{R}$ و $cx+d=0 \quad x \in \mathbb{R}$

تمرين: حل المعادلة $(2x+1)(-3x-5)=0 \quad x \in \mathbb{R}$

III) المتراجحات التالفية بمجهول واحد

1- تعريف

كل متراجحة يمكن كتابتها على شكل $ax+b \prec 0 \quad x \in \mathbb{R}$ أو $ax+b \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}$ أو $ax+b \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$ أو $ax+b \succ 0 \quad x \in \mathbb{R}$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$، تسمى متراجحة تالفية.

و تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان $a \neq 0$

2- حل متراجحة تالفية بمجهول واحد

أ- إشارة الحدانية $ax+b$

*- إذا كان $a=0$ فان إشارة $ax+b$ هي إشارة b

*- إذا كان $a \neq 0$ فان $ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$ و بالتالي إشارة $ax+b$ مرتبطة بإشارة a و $x+\frac{b}{a}$

$x+\frac{b}{a} \succ 0$ تكافئ $x \succ -\frac{b}{a}$

$x+\frac{b}{a} \prec 0$ تكافئ $x \prec -\frac{b}{a}$

نلخص هذه الدراسة في جدول يسمى جدول إشارة $ax+b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

تمرين

حل المتراجحتين: $2x+3 \prec 0$ $x \in \mathbb{R}$; $-3x+4 \leq 0$ $x \in \mathbb{R}$ بطريقتين مختلفتين.

3- حل المتراجحة $(ax+b)(cx+d) \leq 0$ $x \in \mathbb{R}$ أو من نوع $(ax+b)(cx+d) \succ 0$ $x \in \mathbb{R}$

حل هذا النوع من المتراجحات يعتمد على دراسة إشارة $(ax+b)(cx+d)$ بتوظيف إشارة كل من $(ax+b)$ و $(cx+d)$

تمرين

حل المتراجحتين: $(2x+1)(-3x+1) \prec 0$ $x \in \mathbb{R}$; $(-2x-1)(-5x+1) \geq 0$ $x \in \mathbb{R}$

IV) المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

1- تعريف

نسمي معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{R}$ كل معادلة على الشكل $ax^2+bx+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم.

2- أمثلة

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$3x^2-\sqrt{3}x=0$ ، $x^2-5=0$ ، $2x^2+1=0$ ، $x^2-6x-7=0$ ، $x^2-2x+3=0$

3- صفة عامة

a) نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $x \in \mathbb{R}$ حيث $a \neq 0$

لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

الكتابة $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ **يسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود** ax^2+bx+c

لنحل المعادلة

$ax^2+bx+c=0$ تكافئ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$

من خلال هذا يتبين أن حل المعادلة يتوقف على إشارة العدد b^2-4ac الذي يسمى **مميز المعادلة** $ax^2+bx+c=0$ نرمز له بـ Δ نكتب $\Delta=b^2-4ac$

* إذا كان $\Delta \prec 0$ فان $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} \succ 0$ و بالتالي المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$

* اذا كان $\Delta=0$ فان $x+\frac{b}{2a}=0$ أي $x=-\frac{b}{2a}$

* اذا كان $\Delta \succ 0$ فان $ax^2+bx+c=0$ تكافئ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$

$$\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$ تكافئ

$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ تكافئ $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ أو

مبرهنة

نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$ و S مجموعة حلولها في $\mathbb{R}$.

العدد b^2-4ac يسمى مميز المعادلة أو ثلاثية الحدود ax^2+bx+c نرمز له بـ Δ

إذا كان $\Delta \prec 0$ فان $S=\varnothing$

إذا كان $\Delta=0$ فان $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta \succ 0$ فان $S=\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

اصطلاح

إذا كان $\Delta=0$ فان $x=-\frac{b}{2a}$ في هذه الحالة نقول إن $-\frac{b}{2a}$ حل مزدوج للمعادلة

ملاحظة إذا كان a و c لهما إشارتين مختلفتين فان للمعادلة حلين.

تمرين

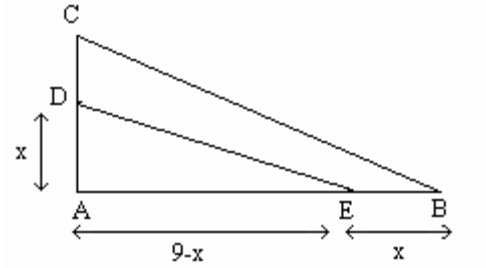
حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$$5x^2-4x+2=0 \qquad x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$4x^2+3x-1=0 \qquad x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}=0$$

تمرين

نعتبر ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث $AB=9$ و $AC=4$ حدد موضع نقطتين E و D تنتميان على التوالي لـ$[AB]$ و $[AC]$ بحيث $AD=BE$ و مساحة ADE تساوي مساحة الرباعي $BCDE$



اختيار المجهول نضع $AD=BE=x$

مساحة ADE هي $\frac{x(9-x)}{2}$

مساحة الرباعي $BCDE$ هي $\frac{4\times 9}{2}-\frac{x(9-x)}{2}$

لدينا $\frac{4\times 9}{2}-\frac{x(9-x)}{2}=\frac{x(9-x)}{2}$

ومنه $.....18-9x+x^2=0$

b) نتيجة

نعتبر معادلة من شكل $ax^2+2b'x+c=0$ و $a\neq 0$

لدينا $\Delta=4(b'^2-ac)$ نضع $\Delta'=b'^2-ac$

اشارة Δ هي اشارة Δ'

إذا كان $\Delta' \prec 0$ فان $S=\varnothing$

إذا كان $\Delta'=0$ فان $S=\left\{-\frac{b'}{a}\right\}$

إذا كان $\Delta' \succ 0$ فان $S=\left\{\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a};\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\right\}$

العدد Δ' يسمى المميز المختصر للمعادلة

تمرين

حل $6x^2-2\sqrt{3}x-1=0$ $\quad x\in\mathbb{R}$

4- تعميل ثلاثية الحدود

نعتبر ثلاثية الحدود $T(x)=ax^2+bx+c$ / $a\neq 0$

ليكن Δ مميزها

* إذا كان $\Delta\prec 0$ فان $T(x)$ لا تقبل جدرا و بالتالي $T(x)$ لا يمكن تعميلها في $\mathbb{R}$

* إذا كان $\Delta=0$ فان $T(x)$ لها جدر وحيد $\frac{-b}{2a}$ وبالتالي $T(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

* إذا كان $\Delta\succ 0$ فان $T(x)$ لها خدرين مختلفين x_1 و x_2

وبالتالي $T(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

تمرين

عمل $P(x)=3x^2-4x-4$ $\qquad Q(x)=x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

5- معادلات تؤول في حلها الى معادلات من الدرجة الثانية

مثال1 حل $x^4-7x^2+12=0$ $\quad x\in\mathbb{R}$

مثال2 حل $2x-7\sqrt{x}-4=0$ $\quad x\in\mathbb{R}$

مثال3 نعتبر $P(x)=2x^3-3x^2-x+1$

أحسب $P\left(\frac{1}{2}\right)$

حل المعادلة $P(x)=0$

6- مجموع و جداء جدرى ثلاثية الحدود

نعتبر $ax^2+bx+c=0$ $\quad x\in\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$

لنفترض أن $\Delta\succ 0$ و أن جذريها هما x_1 و x_2

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$$

إذن $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$; $x_1x_2=\frac{c}{a}$

خاصية

إذا كان للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ $\quad x\in\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$ حلان x_1 و x_2 فانهما يحققان العلاقتين

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}\ ;\ x_1x_2=\frac{c}{a}$$

تمرين

تأكد أن للمعادلة $4x^2-7x+5=0$ جدران x_1 و x_2 ثم أحسب $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ دون حساب x_1 و x_2

VI- المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

1- اشارة ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية

نعتبر ثلاثية الحدود $T(x)=ax^2+bx+c$ / $a\neq 0$

ليكن Δ مميزها

الشكل القانوني $T(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

إذا كان $\Delta\prec 0$ فان إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a

إذا كان $\Delta = 0$ فان ax^2+bx+c يكون منعدما من أجل $x=\frac{-b}{2a}$ و إشارتها إشارة a لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta \prec 0$ فان $T(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث x_1 و x_2 جدري ax^2+bx+c

نفترض أن $x_1 \prec x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$T(x)$		إشارة a	0	عكس اشارة a	0	إشارة a	

خلاصة

إذا كان $\Delta \prec 0$ فان إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a

إذا كان $\Delta = 0$ فان إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta \prec 0$ و x_1 و x_2 جدري ax^2+bx+c حيث $x_1 \prec x_2$ فان

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$T(x)$		إشارة a	0	عكس اشارة a	0	إشارة a	

2- المتراجحات

أ- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات

$$-2x^2+5x-3 \le 0 \qquad 3x^2-2x-8 \prec 0$$

$$-3x^2+\sqrt{3}x-1 \ge 0 \qquad 4x^2-2x+1 \succ 0$$

ب- متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات من الدرجة الثانية

مثال1

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين

$$2x^4-9x^2+4 \succ 0$$

$$\frac{x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}}{x^2-x-2} \ge 0$$

مثال2

نعتبر $p(x)=6x^3-13x^2+4$

1- تأكد أن 2 جدر للحدودية $p(x)$

2- حل في $\mathbb{R}$ $p(x) \le 0$

3- حل في $\mathbb{R}$ $p(x) \le 3x^2(x-2)$

تمرين

نعتبر $p(x)=-x^3+(3+a)x^2-(2+3a)x+2a$

1- بين أن a جدر للحدودية $p(x)$

2- حدد حدودية $Q(x)$ حيث $p(x)=(x-a)Q(x)$

3- أ- أدرس إشارة $-x^2+3x-2$

4- ب- حل في $\mathbb{R}$ $p(x) \succ 0$ حيث $Q(a) \succ 0$

النظمـــــات

***- حل نظمات من الدرجة الأولى بمجهولين باستعمال مختلف الطرق (التأليفة الخطية، التعويض، المحددة).**
***- التمثيل المبياني لحلول متراجحات أو نظمات متراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين، واستعماله في تجويه المستوى وحل مسائل بسيطة حول البرمجة الخطية.**

I- معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

1- أنشطة

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ المعادلة $3x-2y+1=0$

هل الأزواج $(1;2)$ و $(2;-1)$ و $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ حلول للمعادلة

لنحدد جميع حلول المعادلة

لتكن S مجموعة الحلول

نضع $x=a$ ومنه $y=\frac{3a+1}{2}$ إذن $S=\left\{\left(a;\frac{3a+1}{2}\right)/a\in\mathbb{R}\right\}$

2- تعريف

كل معادلة على شكل $ax+by+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية معلومة هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حل المعادلة $ax+by+c=0$ هو إيجاد جميع الأزواج التي تحققها

تمرين

حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات $2x+y-1=0$ $\quad 3x-1=0 \;;\; 2y+4=0$

II – النظمات

1- أنشطة

أ- بين أن النظمة $\begin{cases}2x-3y=1\\4x+5y=-2\end{cases}$ تقبل حلا وحيدا بدون حساب المجهولين ثم حل النظمة بطريقتين مختلفتين (التعويضية و التألفية الخطية)

ب- بين أن النظمة $\begin{cases}2x-3y=3\\\frac{-2}{3}x+y=-2\end{cases}$ لا تقبل حلا

2- دراسة نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

أ- تعريف

نسمي نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين كل نظمة من شكل: $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

حيث a و b و a' و b' أعداد حقيقية.

ب- دراسة عامة

لنحل في $\mathbb{R}^2$ النظمة $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$ و $(a';b')\neq(0;0)$

$$\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b'(ax+by)-b(a'x+b'y)=b'c-bc'\\a(a'x+b'y)-a'(ax+by)=ac'-a'c\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(ab'-ba')x=b'c-bc'\\(ab'-a'b)y=ac'-a'c\end{cases}$$

و منه حل النظمة يتوقف على العدد $ab'-a'b$

العدد $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة نرمز له ب $\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}$

* إذا كان $ab'-a'b\neq0$ فان النظمة تقبل حلا وحيدا

$$x=\frac{b'c-bc}{ab'-ba'} \quad \text{و} \quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

* إذا كان $ab'-a'b=0$ فان $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b'c-bc'=0 \\ ac'-a'c=0 \end{cases}$

- إذا كان $ac'-a'c=0$ و $b'c-bc'=0$ فان S هي مجموعة حلول المعادلة $ax+by=c$
- إذا كان $ac'-a'c\neq 0$ أو $b'c-bc'\neq 0$ فان $S=\varnothing$

تعريف و خاصية

نعتبر a و b و a' و b' أعداد حقيقية حيث $(a;b)\neq(0;0)$ و $(a';b')\neq(0;0)$

* العدد $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ نرمز له ب $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

نكتب $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$

* للنظمة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c \end{cases}$ حل وحيد إذا وفقط إذا كان $ab'-a'b\neq 0$

في هذه الحالة تسمى النظمة نظمة كرامر و حل النظمة هو:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}$$

حيث $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

* للنظمة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c \end{cases}$ ما لانهاية من الحلول أو ليس لها حلا إذا وفقط إذا كان $ab'-a'b=0$

في هذه الحالة: - إذا كان $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=0$ فان S هي مجموعة حلول المعادلة $ax+by=c$

- إذا كان $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}\neq 0$ فان $S=\varnothing$

تمرين

1- حل في $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}x-y=2 \\ 3x+\sqrt{3}y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{2}x-y=2 \\ x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y=-2 \\ -3x-\frac{3}{2}y=3 \end{cases}$$

2- حل و ناقش وفق البارامتر m النظمة $\begin{cases} mx+4y=m+2 \\ x+my=2 \end{cases}$

3- نظمات تالفية أخرى

أ- نظمة ثلاث معادلات بمجهولين

حل في $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} 2x-5y=1 \\ x+2y=-4 \\ 3x-4y=-2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x+5y=1 \\ x-y=4 \\ 3x+y=5 \end{cases}$$

ب- نظمة معادلات من الدرجة الأولى بعدة مجاهيل

حل في $\mathbb{R}^3$

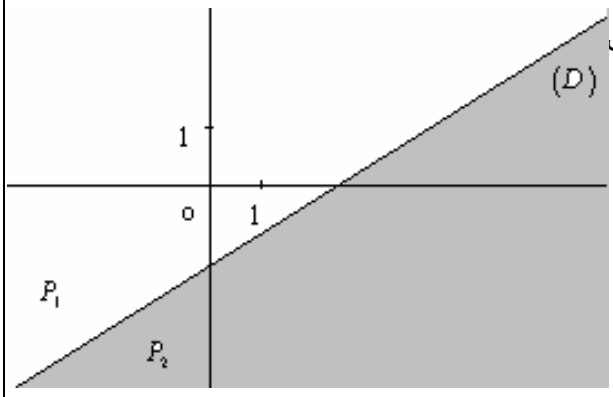
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ x-2y+2z=5 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x-y+3z=2 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$$

III- المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين

1- إشارة $ax+by+c$

خاصية : نقباها

كل مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$ يحدد في المستوى نصفي مستوى مفتوحين P_1 و P_2 (لايتضمنان (D))
أحدهما هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $ax+by+c\prec 0$
و الأخرهو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $ax+by+c\succ 0$



ملاحظة

لتحديد إشارة $ax+by+c$ يكفي تحديدها من أجل زوج $(x_0;y_0)$ إحداثيتي نقطة A من المستوى لا تنتمي إلى (D) نصف المستوى الذي يحتوي على A و حافته (D) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تكون فيه إشارة $ax+by+c$ هي إشارة ax_0+by_0+c. و نصف المستوى الآخر هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي كون فيه إشارة $ax+by+c$ هي عكس إشارة ax_0+by_0+c

أمثلة

أدرس في $\mathbb{R}^2$ إشارة كل من $-2x+3y-2$ و $2y-1\succ$

تمرين

حل في $\mathbb{R}^2$ مبيانيا

$$\begin{cases}2x+y\prec 0\\3x+y\leq 2\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}3x+y\prec 0\\x-y+4\succ 0\\2x+5y+8\succ 0\end{cases}$$

2- البرمجة الخطية

تمرين

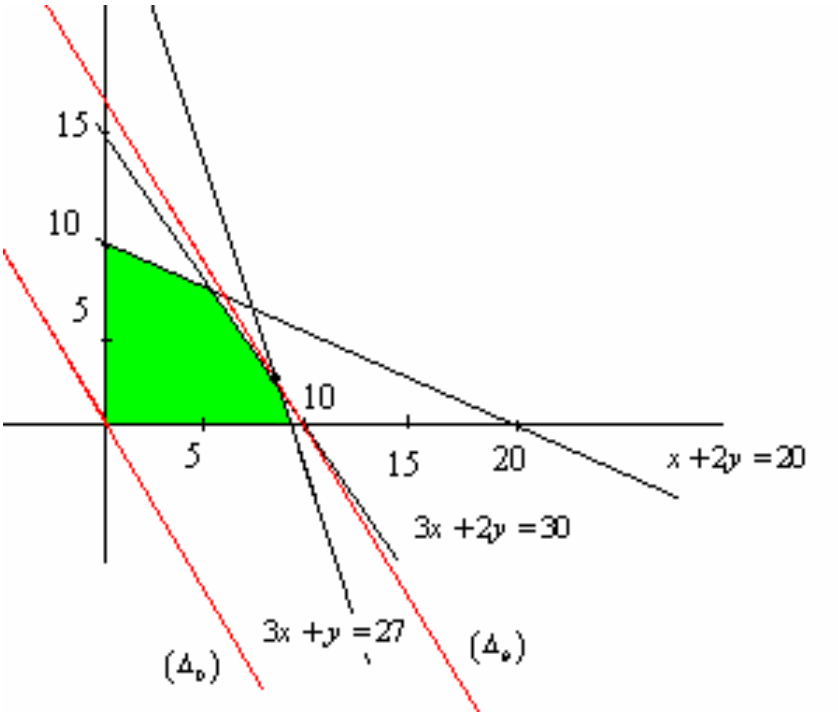
يصنع صانع منتوجين A و B بواسطة مواد أولية M_1 و M_2 و M_3 .
يتطلب صنع وحدة من المنتوج A: 1 كيلو من M_1 و 3 كيلو من M_2 و3 كيلو من M_3 .
يتطلب صنع وحدة من المنتوج B: 2 كيلو من M_1 و 2 كيلو من M_2 و كيلو واحد من M_3 .
المواد المتوفرة في اليوم الواحد هو 2 0 كيلو من M_1 و 30 كيلو من M_2 و27 كيلو من M_3.
إذا علمت أن بيع وحدة من نوع A يحقق ربحا قدره 40 درهما و بيع وحدة من نوع B يحقق ربحا قدره 20 درهما. فما هو عدد وحدات منتوج A و عدد وحدات منتوج B اللذانيحققان أكبر ربح؟
لتكن x عدد وحدات منتوج A و y عدد وحدات منتوج B
لإنتاج A و B يتطلب $(x+2y)Kg$ من M_1 حيث $x+2y\prec 20$ و $(3x+2y)Kg$ من M_2 حيث $3x+2y\prec 30$ و $(3x+y)Kg$ من M_3 حيث $3x+y\prec 27$
الزوج $(x;y)$ الذي يمثل إنتاج ينتمي إلى مجموعة حلول

$$\begin{cases}x\geq 0\\y\geq 0\\x+2y-20\prec 0\\3x+2y-30\prec 0\\3x+y-27\prec 0\end{cases}$$

الربح هو $40x+20y$
نعتبر $(\Delta_0):40x+20y=0$ و $(\Delta_b):40x+20y=b$ حيث b ربح عند إنتاج x وحدة من منتوج A و y عدد وحدة من منتوج B و حيث (Δ_b) يحتوي على الأقل على نقطة من الجزء الملون
b تأخذ أكبر قيمة عند زوج إحداثيتي تقاطع المستقيمين ذا المعادلتين $3x+y=27$; $3x+2y=30$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 3x + y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow (x\,;y) = (8;3)$$

الربح القصوي هو $40 \times 8 + 20 \times 3 = 380DH$



مذكرة رقم 8 : درس: المعادلات و المتراجحات و النظمات مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد؛ - المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد؛ . الشكل القانوني لثلاثية الحدود؛ . المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد؛ - إشارة ثلاثية الحدود؛ - المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد؛ - النظمات؛ . المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين؛ . نظمة معادلتين من الدرجة الأولى	- حل معادلات ومتراجحات تؤول في حلها إلى معادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى أو الثانية بمجهول واحد. - حل نظمات من الدرجة الأولى بمجهولين باستعمال مختلف الطرائق (التأليفة الخطية، التعويض، المحددة). - ترييض وضعيات تتضمن مقادير متغيرة باستعمال تعابير أو معادلات أو متراجحات أو متفاوتات أو نظمات. - التمثيل المبياني لحلول متراجحات أو نظمات متراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين واستعماله في تجويه المستوى وحل مسائل بسيطة حول البرمجة الخطية.	- إن تقنيات حل المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد قد سبقت دراستها بالتعليم الثانوي الإعدادي لذا فإنه ينبغي تدعيم هذه الممارسة بحل ومناقشة أمثلة بسيطة توظف القيمة المطلقة أو معادلات بارامترية بسيطة وهادفة لتنمية قدرة التلاميذ على الاستدلال بفصل الحالات. - ينبغي تعويد التلاميذ على حل بعض المعادلات من الدرجة الثانية دون اللجوء إلى المميز (جذور بديهية، استعمال إحدى تقنيات التعميل، ...). - تعتبر المعادلات والمتراجحات البارامترية من الدرجة الثانية خارج المقرر. - ينبغي إدراج مسائل مستقاة من الحياة المعاشة أو من مواد دراسية أخرى بهدف تعويد التلاميذ على ترييض

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير)

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.
كل معادلة على الشكل $ax+b=0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد, حيث x هو المجهول.

أمثلة : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $-2x+22=0$ 2) $3(2x+5)=6x-1$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ 4) $9x^2-16=0$

5) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$

الأجوبة: 1) $-2x+22=0$ يعني $-2x+22-22=-22$

يعني $-2x=-22$

يعني $-2x\times\left(\frac{1}{-2}\right)=-22\times\left(\frac{1}{-2}\right)$

يعني $x=11$ ومنه: $S=\{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

2) $3(2x+5)=6x-1$ **يعني** $6x+15=6x-1$

يعني $6x-6x=-1-15$ **يعني** $0x=-16$ **يعني** $0=-16$

وهذا غيرممكن ومنه : $S=\varnothing$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ **يعني** $4x-8=6x-2x-8$

يعني $4x-4x+8-8=0$ **يعني** $0=0$

ومنه :كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي : $S=\mathbb{R}$

4)أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

طريقة 1: (التعميل) $9x^2-16=0$ **يعني** $(3x)^2-4^2=0$

يعني $(3x-4)(3x+4)=0$ **يعني** $3x+4=0$ أو $3x-4=0$

يعني $3x=-4$ أو $3x=4$ **يعني** $x=\frac{-4}{3}$ أو $x=\frac{4}{3}$

ومنه : $S=\left\{-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}$

طريقة 2: $9x^2-16=0$ **يعني** $9x^2=16$ **يعني** $x^2=\frac{16}{9}$

يعني $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ أو $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ **يعني** $x=\frac{4}{3}$ أو $x=-\frac{4}{3}$

5) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$ هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة1:نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

المعادلة لها معنى يعني $x^2-9\neq 0$

$x^2-9=0$ **يعني** $x^2-3^2=0$ **يعني** $(x-3)(x+3)=0$

يعني $x+3=0$ أو $x-3=0$ **يعني** $x=-3$ أو $x=3$

ومنه: $D_E=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

المرحلة2: الحل الفعلي للمعادلة : $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$ **يعني**

$(x-7)(x+3)=0$ **يعني** $x-7=0$ أو $x+3=0$

يعني $x=7\in D_E$ أو $x=-3\notin D_E$ ومنه : $S=\{7\}$

تمرين 1 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$

2) $x^3-7x=0$

3) $(5x-7)^2-(5x-7)(2x+3)=0$

4) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16}=0$

5) $\frac{x+1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$

الجواب: 1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$ (نوحد المقامات)

يعني $\frac{5x+5}{10}+\frac{40}{10}=\frac{2x-5}{10}+\frac{4x+40}{10}$

يعني $\frac{5x+5+40}{10}=\frac{2x-5+4x+40}{10}$

يعني $5x+5+40=2x-5+4x+40$ **يعني** $-x=-10$

يعني $x=10$ ومنه: $S=\{10\}$

2) $x^3-7x=0$ **يعني** $x(x^2-7)=0$ (التعميل)

يعني $x=0$ أو $x^2-7=0$ **يعني** $x=0$ أو $x^2=7$

يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{7}$ أو $x=-\sqrt{7}$ ومنه: $S=\{-\sqrt{7},0,\sqrt{7}\}$

3) $(5x-7)^2-(5x-7)(2x+3)=0$

يعني $(5x-7)[(5x-7)-(2x+3)]=0$

يعني $(5x-7)(3x-10)=0$ **يعني** $5x-7=0$ أو $3x-10=0$

يعني $x=\frac{7}{5}$ أو $x=\frac{10}{3}$ ومنه: $S=\left\{\frac{7}{5},\frac{10}{3}\right\}$

4) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16}=0$

هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة1:نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

المعادلة لها معنى يعني $x^2-16\neq 0$

$x^2-16=0$ **يعني** $x^2-4^2=0$ **يعني** $(x-4)(x+4)=0$

يعني $x+4=0$ أو $x-4=0$ **يعني** $x=-4$ أو $x=4$

ومنه: $D_E=\mathbb{R}-\{-4,4\}$

المرحلة2: الحل الفعلي للمعادلة

$\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16}=0$ **يعني** $(x-1)(x+2)=0$ **يعني** $x-1=0$ أو $x+2=0$

يعني $x=1\in D_E$ أو $x=-2\in D_E$ ومنه : $S=\{-2,1\}$

5) $\frac{x+1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$

هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة1:نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

المعادلة لها معنى يعني $x-2\neq 0$ و $x+2\neq 0$

يعني $x\neq 2$ و $x\neq -2$

ومنه: $D_E=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

المرحلة2: الحل الفعلي للمعادلة : $\frac{x+1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$ **يعني**

$(x+1)(x-2)=(x-5)(x+2)$

يعني $x^2-2x+x-2=x^2-5x+2x-10$

يعني $-x+3x=-10+2$ **يعني** $2x=-8$ **يعني** $x=-4\in D_E$

ومنه : $S=\{-4\}$

II.المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير):

1. **تعريف:** ليكن a و b عددين حقيقيين كل متراجحة على الشكل $ax+b\geq 0$ أو $ax+b\succ 0$ أو $ax+b\leq 0$ أو $ax+b\prec 0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث x هو المجهول.
2. **إشارة الحدانية** $ax+b$:

نلخص الجدولين في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	إشارة a عكس إشارة a	0	

مثال 1: لنحدد إشارة $2x+1$

$2x+1=0$ يكافئ $x=-\frac{1}{2}$

و بما أن $a=2$ و $a\succ 0$ جدول إشارة $2x+1$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$

مثال 2: لنحدد إشارة $-x+2$

$-x+2=0$ يكافئ $x=2$

و بما أن: $a=-1$ و $a\prec 0$ فان جدول إشارة $-x+2$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	$-$	0	$+$

مثال 3: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $3x+6\geq 0$

$3x+6=0$ يكافئ $x=-2$

و بما أن: $3x+6\geq 0$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x+6$	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=[-2;+\infty[$

تمرين 2 : حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

1) $-2x+12>0$ 2) $5x-15\leq 0$

3) $4x^2-9\geq 0$ 4) $(1-x)(2x+4)>0$

5) $\frac{5x-2}{1+3x}\geq 0$ 6) $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\leq 0$

الأجوبة: 1) $-2x+12>0$

$-2x+12=0$ يكافئ $x=6$

و بما أن: $a=-2$ و $a<0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	$+$	0	$-$

و منه فان : $S=]-\infty;6[$

2) $5x-15\leq 0$

$5x-15=0$ يكافئ $x=3$

و بما أن: $a=5$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15=0$	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=]-\infty;3[$

3) $4x^2-9\geq 0$

$4x^2-9=0$ **يعني** $(2x)^2-3^2=0$ **يعني** $(2x-3)(2x+3)=0$

يعني $2x+3=0$ أو $2x-3=0$ **يعني** $x=\frac{-3}{2}$ أو $x=\frac{3}{2}$

الطريقة: في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax+b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$(2x-3)(2x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

4) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$ **يعني** $2x+4=0$ أو $1-x=0$ **يعني**

$x=-2$ أو $x=1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$2x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$		$+$		$+$ 0	$-$
$(1-x)(2x+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

و منه فان : $S=]-2;1[$

5) $\frac{5x-2}{1+3x}\geq 0$ المرحلة1:نحدد أولا مجموعة تعريف المتراجحة

المتراجحة لها معنى يعني $1+3x\neq 0$ **يعني** $x\neq -\frac{1}{3}$

ومنه: $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

المرحلة2: الحل الفعلي للمتراجحة

$5x-2=0$ يعني $x=\frac{2}{5}$

$1+3x=0$ يعني $x=-\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$1+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{5x-2}{1+3x}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left[\frac{2}{5};+\infty\right[$

6) $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\leq 0$

المرحلة1:نحدد أولا مجموعة تعريف المتراجحة

المتراجحة لها معنى يعني $2x-6\neq 0$ يعني $x\neq 3$

ومنه: $D_I=\mathbb{R}-\{3\}$

المرحلة2: الحل الفعلي للمتراجحة

$5x-10=0$ يعني يعني $x=2$

$2x+1=0$ يعني $x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5x-10$		$-$		0	$-$	$+$		$+$	
$2x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[2;3[$

III. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

1. **تعريف:** المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث x هو المجهول أعداد حقيقية معلومة $(a\neq 0)$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

مثال 1: العدد 1- حل للمعادلة $3x^2+5x+2=0$

لأن: $3(-1)^2+5(-1)+2=0$

مثال 2: العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

لأن: $\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}-\sqrt{3}=3+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}=0$

ملاحظة : كل عدد حقيقي x_0 يحقق المتساوية $ax^2+bx+c=0$ هو حل للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ و يسمى جذر للحدودية ax^2+bx+c.

2. **الشكل القانوني لثلاثية الحدود** ax^2+bx+c.

خاصية: a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية, و a غير منعدم.

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b^2}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

الكتابة $a\left(\left(x+\frac{b^2}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ تسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c.

مثال : نعتبر الحدودية $P(x)=2x^2+5x+2$.

لدينا $P(x)=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right)$ و بالتالي $2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right)$ هو الشكل القانوني لثلاثية الحدود $2x^2+5x+2$.

3)حل معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

تعريف: لتكن ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$.

العدد الحقيقي b^2-4ac يسمى مميز ثلاثية الحدود أو مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ و نرمز له بالرمز Δ.

مثال: نعتبر المعادلة لنحسب مميز المعادلة (E)

لدينا: $a=3$ و $b=-5$ و $c=7$ بما أن: $\Delta=b^2-4ac$

فان: $\Delta=(-5)^2-4\times7\times3=25-84=-59$

ملاحظة : الرمز Δ يقرأ: دلتا delta.

تمرين 3 : الشكل القانوني لثلاثية الحدود:

لنحدد الشكل القانوني لثلاثية الحدود : $2x^2+6x+15$

لدينا: $2x^2+6x+15=2\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{-21}{4}\right)$

$=2\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{21}{4}\right)$

خاصية: نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ و ليكن Δ مميزها.

✓ **إذا كان** $\Delta\prec 0$ **فان** المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

✓ **إذا كان** $\Delta=0$ **فان** المعادلة تقبل حلا وحيدا هو: $-\frac{b}{2a}$

✓ **إذا كان** $\Delta\succ 0$ فان المعادلة تقبل حلين مختلفين هما

: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S.

مثال1: المعادلة $3x^2+x+2=0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$

لأن $\Delta\prec 0$ $(\Delta=1-4\times3\times2=-23)$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\phi$.

مثال 2: المعادلة $x^2-10x+25=0$ لها حل وحيد

لأن $\Delta=0$ $(\Delta=10^2-4\times25=0)$.

حل هذه المعادلة هو: $-\frac{b}{2a}=5$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\{5\}$.

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2-3x+2=0$ لدينا $\Delta=9-4\times2=1$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{3-1}{2}=1$ و $x_2=\frac{3+1}{2}=2$ و منه $S=\{1;2\}$.

تمرين 4 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $6x^2-7x-5=0$ 2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

3) $3x^2+x+2=0$ 4) $4x^2-8x+3=0$

5) $x^2-4x+2=0$ 6) $x^2+5x+7=0$

7) $2x^2-4x+6=0$ 8) $x^2-4x-21=0$

9) $3x^2-6x+3=0$

الأجوبة: 1) $6x^2-7x-5=0$ $a=6$ و $b=-7$ و $c=-5$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times6\times(-5)=49+120=169=(13)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ يعني $x_1=\frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times6}=\frac{7+13}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

$x_2=\frac{7-13}{12}=\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{5}{3},-\frac{1}{2}\right\}$

2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ $a=2$ و $b=-2\sqrt{2}$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times1=8-8=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل **حلا وجيدا هو:**

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $3x^2+x+2=0$ $a=3$ و $b=1$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان** المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

4) $4x^2-8x+3=0$ $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times3\times(4)=84-8=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times4}$ **و** $x_2=\frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times4}$

$x_1=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ **و** $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\}$

5) $x^2-4x+2=0$ $a=1$ و $b=-4$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(1)=16-8=8>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times1}$ **و** $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times1}$ ومنه: $x_1=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}=2+\sqrt{2}$

$x_2=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=2-\sqrt{2}$ ومنه: $S=\left\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right\}$

6) $x^2+5x+7=0$ $a=1$ و $b=5$ و $c=7$

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times1\times7=25-28=-3<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

7) $2x^2-4x+6=0$ $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times6=16-48=-32<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

8) $x^2-4x-21=0$ $a=1$ و $b=-4$ و $c=-21$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-21)=16+84=100=(10)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times1}$ و $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+10}{2}=\frac{14}{2}=7$ و $x_2=\frac{4-10}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ ومنه: $S=\{-3,7\}$

9) $3x^2-6x+3=0$ $a=3$ و $b=-6$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times3\times3=36-36=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو :

$x=\frac{-b}{2a}$ يعني $x=\frac{-(-6)}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$ ومنه: $S=\{1\}$

4)مجموع و جذاء حلي معادلة من الدرجة الثانية:

نشاط: نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $(a\neq0)$ و $\Delta>0$

x_1 و x_2 حلي المعادلة بين أن: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$

خاصية: إذا كان للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ حلان x_1 و x_2 فإنهما يحققان المتساويتين $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$.

مثال : نعتبر المعادلة $(E)\,20015x^2-2016x+1=0$

بين أن العدد 1 حل للمعادلة (E) ثم حدد الحل الثاني.

الأجوبة: نعوض x ب 1 في المعادلة (E) فنجد :

$2015\times1^2-2016\times1+1=2016-2016=0$ ومنه 1 حل ل (E)

حسب الخاصية السابقة لدينا : $x_1\times x_2=\frac{1}{2015}$ ولدينا $x_1=1$

اذن : $1\times x_2=\frac{1}{2015}$ يعني $x_2=\frac{1}{2015}$

تمرين 5 :نعتبر المعادلة : (E) : $-2x^2+\sqrt{2}x+2=0$

1. بين أن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين α و β بدون حسابهما

2. استنتج قيم ما يلي: $\alpha+\beta$ و $\alpha\times\beta$ و $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ و $\alpha^2+\beta^2$

و $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ و $\alpha^3+\beta^3$

الأجوبة: 1) $-2x^2+\sqrt{2}x+2=0$ اذن: $a=-2$ و $b=\sqrt{2}$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times(-2)=2+16=18>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين : α و β

2)حسب خاصية لدينا : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ و $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$

ومنه : $\alpha+\beta=-\frac{\sqrt{2}}{-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\alpha\times\beta=\frac{2}{-2}=-1$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

و لدينا : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ يعني

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

يعني $\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2(-1)$ يعني $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

ولدينا : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$ اذن : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{-1}=-\frac{5}{2}$

ونعلم أن : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

يعني $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

يعني $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

اذن : $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

يعني $\alpha^3+\beta^3=\frac{\sqrt{2}^3}{2^3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{8}=\frac{14\sqrt{2}}{8}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$

IV. تعميل و إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

1. تعميل ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود ax^2+bx+c و ليكن Δ مميزها.

1. إذا كان: $\Delta\succ0$ فان المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 و لدينا: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

2. إذا كان: $\Delta=0$ فان: $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

3. إذا كان: $\Delta \prec 0$ فان: ax^2+bx+c لا يمكن تعميلها إلى حدوديتين من الدرجة الأولى.

مثال: نعتبر الحدودية $R(x)=6x^2-x-1$ مميز الحدودية $R(x)$ هو $\Delta=1+24=25$.

إذن جذرا الحدودية: هما $x_1=\frac{1+5}{12}=\frac{1}{2}$ و $x_2=\frac{1-5}{12}=-\frac{1}{3}$

و بالتالي: $R(x)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

تمرين 6 : عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $x^2-10x+25$ 2) x^2-3x+2 3) $3x^2+x+2$

أجوبة : 1) $x^2-10x+25$: $a=1$ و $b=-10$ و $c=25$

$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times(25)=100-100=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد **هو:**

$x_1=\frac{-(-10)}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$

ومنه التعميل : $x^2-10x+25=a(x-x_1)^2=1(x-5)^2$

2) x^2-3x+2 $a=1$ و $b=-3$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1=(1)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times1}$ و $x_1=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times1}$ يعني $x_1=2$ و $x_2=1$

ومنه التعميل :

$x^2-3x-2=a(x-x_1)(x-x_2)=1(x-2)(x-1)$

3) $3x^2+x+2$ لدينا:

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

تمرين 7 : عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $2x^2-4x+6$ 2) $4x^2-8x+3$ 3) $3x^2-6x+3$

أجوبة : 1) $2x^2-4x+6=0$: $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(6)=16-48=32<0$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

2) $4x^2-8x+3=0$ $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_1=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

ومنه التعميل : $4x^2-8x+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(4x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

3) $3x^2-6x+3$ بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1=\frac{-(-8)}{2\times4}=1$

ومنه التعميل : $3x^2-6x+3=a(x-x_1)^2=3(x-1)^2$

2. إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

الحالة1: إذا كان $\Delta\succ0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود فان:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	0	عكس اشارة a	0	اشارة a	

الحالة2: إذا كان $\Delta=0$: و x_1 هو الجذر الوحيد المزدوج فان:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	0	اشارة a	

الحالة3: إذا كان $\Delta\prec0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a *فان:*

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		*اشارة a*	

مثال1:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=2x^2-3x+1$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2x^2-3x+1\geq0$

أجوبة: 1) $P(x)=2x^2-3x+1$ $a=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ و $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P(x)$		+	0	−	0	+	

2) حل المتراجحة : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

مثال2:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=-2x^2+4x-2$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $-2x^2+4x-2>0$

أجوبة: 1) $P(x)=-2x^2+4x-2$ $a=-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد **هو:**

$x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)=-2x^2+4x-2$		−	0	−	

2) حل المتراجحة : $S=\mathbb{R}$

مثال3:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=3x^2+6x+5$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $3x^2+6x+5<0$

أجوبة: 1) $P(x)=3x^2+6x+5$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$ ومنه:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$		+	

2) **حل** المتراجحة : $S=\varnothing$

تمرين 8 : حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $2x^2-4x+6\geq0$ 2) $4x^2-8x+3\leq0$ 3) $x^2-3x-10<0$

أجوبة: 1) $2x^2-4x+6\geq0$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$		+	

ومنه: $S=\mathbb{R}$

2) $4x^2-8x+3\le 0$ $\quad a=4$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_1=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

3) $x^2-3x-10<0$ $\quad a=4$

$\Delta=b^2-4ac=49>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=5$ و $x_2=-2$ ومنه:

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-2,5[$

V. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين:

$\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأزواج (x,y) حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$.

مثال: نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

1) تأكد أن الزوج $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة: $2x+3y=2$

2) اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة: $2x+3y=2$

3) حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

أجوبة: 1) $2\times0+3\times\frac{2}{3}=2$ اذن : $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة

2) $x=2$ اذن : $2\times2+3\times y=2$ يعني : $y=-\frac{2}{3}$ اذن : $\left(2,-\frac{2}{3}\right)\in S$

$x=3$ اذن : $2\times3+3\times y=2$ يعني : $y=-\frac{4}{3}$ اذن : $\left(3,-\frac{4}{3}\right)\in S$

$x=4$ اذن : $2\times4+3\times y=2$ يعني : $y=-2$ اذن : $(4,-2)\in S$

3) $2x+3y=2$ يعني $3y=-2x+2$ يعني $y=\frac{-2x+2}{3}$

يعني $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ اذن : $S=\left\{\left(x;\frac{-2}{3}x+\frac{2}{3}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

تمرين 9 : حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات التالية :

1) $2x-8y+10=0$ $\quad$ 2) $-3x+12y-2=0$

3) $7x-14y+1=0$

أجوبة: 1) $2x-8y+10=0$ يعني $2y=8x-10$ يعني $y=\frac{8x-10}{2}$

يعني $y=4x-5$ اذن : $S=\{(x;4x-5)/x\in\mathbb{R}\}$

2) $-3x+12y-2=0$ يعني $12y=3x+2$ يعني $y=\frac{3x+2}{12}$

يعني $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}$ اذن : $S=\left\{\left(x;\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

3) $7x-14y+1=0$ يعني $7x=14y-1$ يعني $x=\frac{14y-1}{7}$

يعني $x=2y-\frac{1}{7}$ اذن : $S=\left\{\left(2y-\frac{1}{7};y\right)/y\in\mathbb{R}\right\}$

تمرين 10 : نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث :

$P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1. بين أن -1 هو جدر للحدودية $P(x)$
2. بين أن : $P(x)=(x+1)\left(x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}\right)$

نضع : $Q(x)=x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$

3. Δ هو مميز ثلاثية الحدود $Q(x)$ تأكد أن $\Delta=(\sqrt{2}-1)^2$
4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x)=0$
5. استنتج حلول المعادلة : $x-(\sqrt{2}+1)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$
6. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$
7. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $P(x)\le 0$

أجوبة: 1) $P(-1)=(-1)^3-\sqrt{2}(-1)^2-(-1)+\sqrt{2}$

$P(-1)=-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=0$

اذن -1 هو جدر للحدودية $P(x)$

2) $(x+1)\left(x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}\right)=x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+\sqrt{2}x+x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$

$=x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+\sqrt{2}x+x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$

$=x^3-\sqrt{2}x^2-x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}$

$=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

3) $\Delta=b^2-4ac=(\sqrt{2}+1)^2-4\times1\times\sqrt{2}$

$\Delta=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\times1+(1)^2=(\sqrt{2}-1)^2$

4) $Q(x)=x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$x_1=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ $\quad S=\{\sqrt{2},1\}$

5) $x-(\sqrt{2}+1)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

يمكن كتابتها على الشكل : $(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2}+1)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

نضع: $X=\sqrt{x}$ والمعادلة تصبح على الشكل :

$X^2-(\sqrt{2}+1)X+\sqrt{2}=0$ حسب السؤال السابق : $X_1=\sqrt{2}$ أو $X_2=1$

يعني $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ أو $\sqrt{x_2}=1$

يعني $(\sqrt{x_1})^2=(\sqrt{2})^2$ أو $(\sqrt{x_2})^2=(1)^2$

يعني $x_1=2$ أو $x_2=1$ $\quad S=\{2,1\}$

6) $P(x)=0$ يعني $x+1=0$ أو $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$

يعني $x=-1$ أو $x_1=\sqrt{2}$ أو $x_1=1$ **ومنه:** $S=\{-1,1,\sqrt{2}\}$

7) $P(x)\le 0$ يعني $(x+1)\left(x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}\right)\le 0$

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-\infty,-1]\cup[1,\sqrt{2}]$

تمرين 11 : نعتبر المعادلة : $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

1. نضع :

Δ هو مميز ثلاثية الحدود $P(x)$ تأكد أن $\Delta=14+4\sqrt{6}$

2. املأ الفراغات التالية : $14+4\sqrt{6}=(\ldots+\ldots)^2$

3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$

4. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $P(x)>0$

5. استنتج حلول المعادلة : $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

أجوبة: (1 $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$ أي $\Delta=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+8\sqrt{6}$

(2 $14+4\sqrt{6}=14+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

(3 $P(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

بما أن $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ فان للمعادلة حلين هما:

$$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$$

$$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$$

$S=\left\{\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

(4

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]-\infty,-2\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$

(5 $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

يمكن كتابتها على الشكل : $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

نضع : $X=\sqrt{x}$ والمعادلة تصبح على الشكل :

$X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

حسب السؤال السابق : $X_1=\sqrt{2}$ أو $X_2=-2\sqrt{3}$

يعني $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ أو $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$

نلاحظ أن المعادلة : $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ ليس لها حل لأن الجذر دائما موجب

ومنه $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ يعني $x_1=2$ ومنه $S=\{2\}$

VI. نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

نعتبر النظمة: $(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ حيث a و b و a' و b' و c' أعداد حقيقية.هناك عدة طرق لحل نظمة سبق أن درست طريقتين هما طريقة التعويض و التأليفة الخطية طبعا هناك طريقة أخرى انتبه

1. طريقة التعويض :

مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

الجواب :نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$4x+y=10$ يعني $y=10-4x$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$-5x+2y=-19$ يعني $-5x+2(10-4x)=-19$

يعني $-5x-8x=-19-20$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y=10-4x$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

2. طريقة التأليفة الخطية

مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

الجواب :نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل على :

$\begin{cases}-8x-2y=-20\\-5x+2y=-19\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$-8x-2y-5x+2y=-20-19$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x+y=10$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

3. طريقة المحددة :

تعريف و خاصية: العدد الحقيقي $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة (S) و نكتب: $\Delta=\begin{vmatrix}a&b\\a'&b'\end{vmatrix}$

- إذا كان $\Delta=0$ فان النظمة (S) قد لا يكون لها أي حل, و قد يكون لها عدد لا منته من الحلول.
- إذا كان $\Delta\neq0$ فان النظمة (S) تسمى نظمة كرامر و تقبل حلا وحيدا هو الزوج (x,y) حيث:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c&b\\c'&b'\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{cb'-c'b}{\Delta} \text{ و } y=\frac{\begin{vmatrix}a&c\\a'&c'\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{ac'-a'c}{\Delta}.$$

هذه الطريقة تسمى طريقة المحددة.

مثال: طريقة المحددة:

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $(1)\begin{cases}x+2y=4\\-x+4y=2\end{cases}$

محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}1&2\\-1&4\end{vmatrix}=6\neq0$ و منه النظمة تقبل حلا

وحيدا:هو $x=\frac{\begin{vmatrix}4&2\\2&4\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{12}{6}=2$ و $y=\frac{\begin{vmatrix}1&4\\-1&2\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{6}{6}=1$ و منه: $S=\{(2,1)\}$

تمرين 12 : (1 $\begin{cases}x-2y=1\\-2x+4y=-2\end{cases}$ (2 $\begin{cases}3x-4y=2\\-x+\frac{4}{3}y=-\frac{1}{3}\end{cases}$

(3 $\begin{cases}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)x+\left(\sqrt{2}-1\right)y=0\\\left(\sqrt{2}+1\right)x+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)y=1\end{cases}$ (4 $\begin{cases}x+y=11\\x^2-y^2=44\end{cases}$

أجوبة: (1محددة النظمة هي: $\Delta=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&4\end{vmatrix}=0$

$$\begin{cases}x-2y=1\\-2x+4y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\-2(x-2y)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\x-2y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x-2y=1\Leftrightarrow -2y=1-x\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x$$

ومنه النظمة (S) لها عدد لا منته من الحلولاذن :

$$S=\left\{\left(x;\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$$

(2 $\begin{cases}3x-4y=2\\3x-4y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y=2\\-x+\frac{4}{3}y=-\frac{1}{3}\end{cases}$ بضرب المعادلة الثانية في -3

وهذا غير ممكن ومنه $S=\varnothing$

3) $\begin{cases}(\sqrt{5}-\sqrt{3})x+(\sqrt{2}-1)y=0\\(\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{5}+\sqrt{3})y=1\end{cases}$

محددة النظمة هي:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3} & \sqrt{2}-1\\ \sqrt{2}+1 & \sqrt{5}+\sqrt{3}\end{vmatrix}=(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$$

$\Delta=\left((\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2\right)-\left((\sqrt{2})^2-(1)^2\right)$ اذن $\Delta=(5-3)-(2-1)=1\neq 0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & \sqrt{2}-1\\ 1 & \sqrt{5}+\sqrt{3}\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-(\sqrt{2}-1)}{1}=-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2}$

و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3} & 0\\ \sqrt{2}+1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{1}=-\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$

و منه: $S=\left\{(1-\sqrt{2},\sqrt{3}-\sqrt{5})\right\}$

تمرين 13 : 1) حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

2) استنتج حلول النظمة التالية : $\begin{cases}-7x-3y=4\\4x+5y=-2\end{cases}$

أجوبة: 1) محددة النظمة (1) هي: $\begin{cases}\dfrac{-7}{x}-\dfrac{3}{y}=4\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=-2\end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix}-7 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-35+12=-23\neq 0$ و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix}4 & -3\\ -2 & 5\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{14}{23}$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}-7 & 4\\ 4 & -2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{2}{23}$ ومنه: $S=\left\{\left(-\dfrac{14}{23},-\dfrac{2}{23}\right)\right\}$

2) لكي تكون للنظمة معنى يجب أن يكون لدينا : $x\neq 0$ و $y\neq 0$

$\begin{cases}\dfrac{-7}{x}-\dfrac{3}{y}=4\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7\dfrac{1}{x}-3\dfrac{1}{y}=4\\ 4\dfrac{1}{x}+5\dfrac{1}{y}=-2\end{cases}$ نضع: $X=\dfrac{1}{x}$ و $Y=\dfrac{1}{y}$

$x\neq 0$ و $y\neq 0$ فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}-7X-3Y=4\\4X+5Y=-2\end{cases}$

وسبق أن قمنا بحل هذه النظمة : $X=-\dfrac{14}{23}$ و $Y=-\dfrac{2}{23}$

و منه : $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{14}{23}$ و $\dfrac{1}{y}=-\dfrac{2}{23}$ يعني: $x=-\dfrac{23}{14}$ و $y=-\dfrac{23}{2}$

و بالتالي: $S=\left\{\left(-\dfrac{23}{14},-\dfrac{23}{2}\right)\right\}$

تمرين 14 : حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$\begin{cases}\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{3}{y-2}=4\\ \dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{1}{y-2}=1\end{cases}$ **أجوبة:** نضع: $X=\dfrac{1}{x-1}$ و $Y=\dfrac{1}{y-2}$

$x\neq 1$ و $y\neq 1$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}5X+3Y=4\\-2X+Y=1\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد : $X=\dfrac{1}{11}$ و $Y=\dfrac{13}{11}$

و منه : $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{11}$ و $\dfrac{1}{y-2}=\dfrac{13}{11}$

يعني: $x-1=11$ و $y-2=\dfrac{11}{13}$ يعني: $x=12$ و $y=\dfrac{37}{13}$

و بالتالي: $S=\left\{\left(12,\dfrac{37}{13}\right)\right\}$

تمرين 15 : حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$\begin{cases}2\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\-3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=17\end{cases}$ **أجوبة:** نضع: $X=\sqrt{x}$ و $Y=\sqrt{y}$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}2X+Y=6\\-3X+5Y=17\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد : $X=1$ و $Y=4$

و منه : $\sqrt{x}=1$ و $\sqrt{y}=4$ يعني: $(\sqrt{x})^2=(1)^2$ و $(\sqrt{y})^2=4^2$

يعني: $x=1$ و $y=16$ و بالتالي: $S=\{(1,16)\}$

تمرين 16: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$\begin{cases}2x^2-5y^2=1\\4x^2+3y^2=15\end{cases}$ **أجوبة:** نضع: $X=x^2$ و $Y=y^2$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}2X-5Y=1\\4X+3Y=15\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد : $X=3$ و $Y=1$

و منه : $x^2=3$ و $y^2=4$

يعني: $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ و : $y=\sqrt{1}$ او $y=-\sqrt{1}$

يعني: $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ و : $y=1$ او $y=-1$

و بالتالي: $S=\left\{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1),(-\sqrt{3},1),(-\sqrt{3},-1)\right\}$

تمرين 17 : حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases}(x^2-3x+1)+(y^2-5x+4)=-3\\2(x^2-3x+1)-3(y^2-5x+4)=4\end{cases}$$

أجوبة: نضع: $X=x^2-3x+1$ و $Y=y^2-5x+4$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}X+Y=-3\\2X-3Y=4\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد : $X=-1$ و $Y=-2$

و منه : $x^2-3x+1=-1$ و $y^2-5x+4=-2$

يعني: $x^2-3x+2=0$ و $y^2-5x+6=0$

نحل المعادلة : $x^2-3x+2=0$ باستعمال المميز فنجد :

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(2)=1>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1}=2$ و $x_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1}=\dfrac{3}{2}$

نحل المعادلة : $y^2-5x+6=0$ باستعمال المميز فنجد :

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=1>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$y_1=\dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1}=3$ و $y_2=\dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1}=2$

و بالتالي: $S=\{(1,3),(1,2),(2,3),(2,2)\}$

VII. المتراجحات و التجويه

دراسة مثال: في الشكل أسفله نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته: $\frac{1}{2}x - y + 1 = 0$. المستقيم (D) يحدد نصفي مستوى حافتهما (D) أحدهما يحتوي على النقطة O (أصل المعلم) و نرمز له بالرمز (P_2) و للآخر بالرمز (P_1).

← النقطة $A(1,1)$ تنتمي إلى (P_2) و تحقق:

$\frac{1}{2}x_A - y_A + 1 \succ 0$ لأن: $\frac{1}{2} - 1 + 1 \succ 0$

← النقطة $B(-2,1)$ تنتمي إلى (P_1) و تحقق:

$\frac{1}{2}x_B - y_B + 1 \prec 0$ لأن: $\frac{1}{2} \times (-2) - 1 + 1 \prec 0$

إذا أخذنا نقطة أخرى M تنتمي إلى نصف المستوى (P_2).

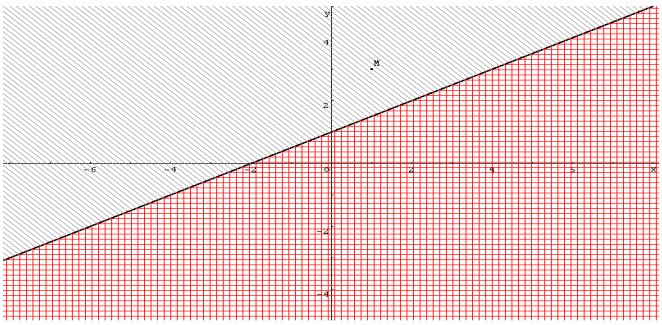
فان المتفاوتة $\frac{1}{2}x_M - y_M + 1 \succ 0$ محققة (يمكنك التحقق من بعض النقط).

و إذا أخذنا نقطة أخرى N تنتمي إلى نصف المستوى (P_1).

فان المتفاوتة $\frac{1}{2}x_N - y_N + 1 \prec 0$ محققة.

و بالتالي كل نقطة $M(x,y)$ من (P_2), تحقق $\frac{1}{2}x - y + 1 \succ 0$.

و كل نقطة $M(x,y)$ من (P_1) تحقق $\frac{1}{2}x - y + 1 \prec 0$.



إشارة $ax + by + c$:

خاصية: نعتبر في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم الذي معادلته $ax + by + c = 0$ المستقيم (D) يحدد نضفي مستوى مفتوحين:

- أحدهما هو مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق المتفاوتة $ax + by + c \succ 0$.
- و الآخر هو مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق $ax + by + c \prec 0$.

كل معادلة تكتب على الشكل $ax + by + c = 0$ حيث $a \neq 0$ أو $b \neq 0$ هي معادلة مستقيم.

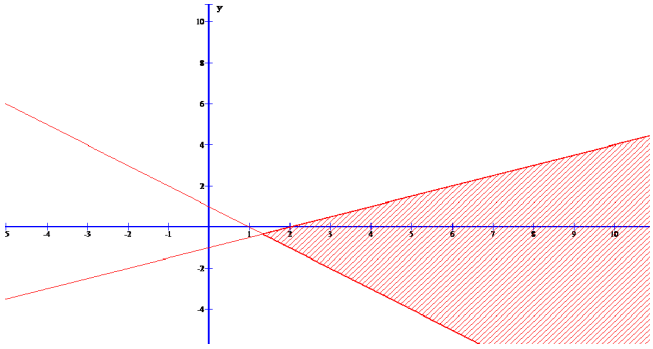
تمرين 18 : حل مبيانيا النظمة التالية:

$$(S_1)\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ -x + 2y + 2 < 0 \end{cases}$$

الجواب : نرسم أولآ المستقيمات التالية :

$x + y - 1 = 0; -x + 2y + 2 = 0$

وبعد ذالك يجب الحصول على الشكل التالي و هو الحل المبياني:



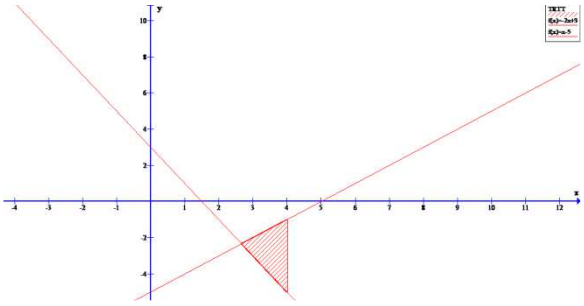
تمرين 19 : حل مبيانيا النظمة التالية:

$$(S)\begin{cases} 2x + y - 3 > 0 \\ -x + y + 5 < 0 \\ x < 4 \end{cases}$$

الجواب : نرسم أولآ المستقيمات التالية :

$2x + y - 3 = 0; -x + y + 5 = 0; x = 4$

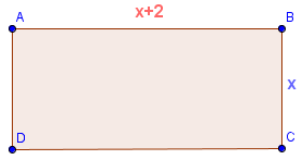
وبعد ذالك يجب الحصول على الشكل التالي و هو الحل المبياني:



ترييض وضعيات :

تمرين 20 : أحسب طول عرض مستطيل اذا علمت أن طوله يزيد عن عرضه ب $2cm$ وأن مساحته تساوي $15cm^2$

الجواب



ليكن x **وعرض مستطيل اذن طوله هو :** $x+2$ ومنه مساحته هي :

$$S = x(x+2) = 15$$

ومنه نحصل عن معادلة من الدرجة الثانية :

$x^2+2x-15=0$: $a=1$ و $c=-15$ و $b=2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4\times1\times(-15) = 64 > 0$$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-2+8}{2\times1} = 3$ **و** $x_2 = \frac{-2-8}{2\times1} = -5 < 0$

ومنه:بما أن عرض مستطيل لا يمكن أن يكون سالبا :

نأخذ $x=3$

وبالتالي طوله هو : $5cm$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

الثانوية التأهيلية: وادي الذهب الأستاذ : رشيد بلمو	درس المعادلات و المتراجحات و النظمات	مستوى الدراسي: TCS - TCT

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير)

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.
كل معادلة على الشكل $ax+b=0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد, حيث x هو المجهول.

مثال1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E):-2x+22=0$ (يجب التأكيد على كتابة مجموعة الحلول)

مثال2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E):3(2x+5)=6x-1$

مثال3: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E):4(x-2)=6x-2(x+4)$

II. معادلات تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

معادلات من النوع : $(ax+b)(cx+d)=0$

مثال1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E):(2x-1)(3+x)=0$

مثال2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E)\ \dfrac{3x-2}{x+1}=0$

مثال3: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: $|x-2|=0$, $|3x+1|=4$, $|2x-5|=-1$

III. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير):

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين كل متراجحة على الشكل $ax+b\geq 0$ أو $ax+b\succ 0$ أو $ax+b\leq 0$ أو $ax+b\prec 0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث x هو المجهول.

إشارة الحدانية $ax+b$:
حسب إشارة العدد a , لدينا الجدولان الآتيان:

إذا كان $a\succ 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

إذا كان $a\prec 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

نلخص الجدولين في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	إشارة a	0	عكس إشارة a

مثال 1: لنحدد إشارة $2x+1$

مثال 2: لنحدد إشارة $-x+2$

تمرين : حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : $2x+1\geq 0$ و $-3x+6\geq 0$ و $2x+8\leq 0$ و $-2x+16>0$

مثال 3: أعط جدول إشارة التعابير التالية: $p(x)=(1-x)(2x+3)$ و $q(x)=\dfrac{5x-2}{1+3x}$ و $R(x)=(x+1)^2(x+2)(-x+3)$

الطريقة : في جدول تعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax+b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

IV. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

تعريف: المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث x هو المجهول أعداد حقيقية معلومة $(a\neq 0)$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

مثال 1: العدد -1 حل للمعادلة $3x^2+5x+2=0$ لأن: $3(-1)^2+5(-1)+2=0$

مثال 2: العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$

لأن: $(\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})\sqrt{3}-\sqrt{3}=3+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}=0$

ملاحظة : كل عدد حقيقي x_0 يحقق المتساوية $ax^2+bx+c=0$ هو حل للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ و يسمى جذر للحدودية ax^2+bx+c.

الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c.

خاصية: a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية, و a غير منعدم.

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b^2}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

الكتابة $a\left(\left(x+\frac{b^2}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$, تسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c.

مثال : نعتبر الحدودية $P(x)=2x^2+5x+2$.

حل معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

تعريف: لتكن ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$.

العدد الحقيقي b^2-4ac يسمى مميز ثلاثية الحدود أو مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ و نرمز له بالرمز Δ.

مثال: نعتبر المعادلة $(E):3x^2-5x+7=0$ لنحسب مميز المعادلة (E)

ملاحظة : الرمز Δ يقرأ: دلتا delta.

مثال 1 : الشكل القانوني لثلاثية الحدود: لنحدد الشكل القانوني لثلاثية الحدود : $2x^2+6x+15$

مثال2: لنحدد الشكل القانوني لثلاثية الحدود: $2x^2+5x$

تحديد مجموعة حلول معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

نعتبر المعادلة: $(E)\ ax^2+bx+c=0$ لدينا: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ و بما أن: $\Delta=b^2-4ac$ و $4a^2=(2a)^2$

فان: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$

- إذا كان $\Delta\prec 0$ فان: $-\frac{\Delta}{(2a)^2}\succ 0$ و بالتالي المعادلة (E) ليس لها حل في $\mathbb{R}$.
- إذا كان $\Delta=0$ فان المعادلة (E) تكتب $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$

و بما أن $\Delta\prec 0$ فان حل المعادلة (E) هو $x=-\frac{b}{2a}$.

- إذا كان $\Delta\succ 0$ فان المعادلة (E) تكتب $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\Delta}{2a}\right)^2=0$ أي $\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$

و بالتالي المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

في حالة $\Delta=0$ نقول إن المعادلة (E) تقبل حلا مزدوجا.

خاصية: نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ و ليكن Δ مميزها.

- ✓ إذا كان $\Delta\prec 0$ فان المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.
- ✓ إذا كان $\Delta=0$ فان المعادلة تقبل حلا وحيدا هو: $-\frac{b}{2a}$
- ✓ إذا كان $\Delta\succ 0$ فان المعادلة تقبل حلين مختلفين هما: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S.

مثال1: المعادلة $3x^2+x+2=0$

مثال 2: المعادلة $x^2-10x+25=0$

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2-3x+2=0$

مجموع و جذاء حلي معادلة من الدرجة الثانية:

خاصية: إذا كان للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ حلان x_1 و x_2 فإنهما يحققان المتساويتين $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$

V. تعميل و إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

تعميل ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود ax^2+bx+c و ليكن Δ مميزها.

1. إذا كان: $\Delta\succ 0$ فان المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2.
و لدينا: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
2. إذا كان: $\Delta=0$ فان: $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
3. إذا كان: $\Delta\prec 0$ فان: ax^2+bx+c لا يمكن تعميلها إلى حدوديتين من الدرجة الأولى.

مثال: نعتبر الحدودية $R(x)=6x^2-x-1$

إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$ و ليكن Δ مميزها.

1. إذا كان $\Delta\prec 0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a.
2. إذا كان $\Delta=0$: فان إشارة $P(x)$ هي إشارة a لكل x من $\mathbb{R}$ يخالف $-\frac{b}{2a}$ و $P\left(-\frac{b}{2a}\right)=0$.
3. إذا كان $\Delta\succ 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود $P(x)$ فان: $P(x)$ لها إشارة العدد a خارج الجذرين x_1 و x_2 لها عكس إشارة العدد a داخل الجذرين و $P(x_1)=P(x_2)=0$.

مثال: لنحدد إشارة الحدودية $P(x)=6x^2-x-1$

ملحوظة: لحل متراجحة من الدرجة الثانية بمجهول واحد نعتمد على دراسة إشارة ثلاثية الحدود المرتبطة بها.

نتيجه :

- إذا كان $\Delta\prec 0$ فان: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]$

و بما أن: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\succ 0$ فان إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c هي إشارة a.

- إذا كان: $\Delta=0$ فان: $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)$. و بالتالي إذا كان $x\neq -\frac{b}{2a}$ فان إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a	إشارة a	إشارة a	إشارة a	
$x-x_1$	$-$	$+$	$+$	
$x-x_2$	$-$	$-$	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$	$-$	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$	إشارة a	إشارة $(-a)$	إشارة a	

- اكان $\Delta\succ 0$ فان: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث x_1 و x_2 هما حلي المعادلة ax^2+bx+c

لنضع جدول إشارة الجداء: نفترض أن $x_1\prec x_2$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	إشارة $(-a)$	إشارة a	

VI. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين:

$\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأزواج (x,y) حيث $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$.

مثال: نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

1. تأكد أن الزوج $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة: $2x+3y=2$
2. اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة: $2x+3y=2$
3. حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

تعريف و خاصية: كل معادلة على شكل $(1)\ ax+by=c$ حيث a و b و c أعداد حقيقية هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين x و y.

يكون الزوج (x_0,y_0) حلا للمعادلة (1) إذا و فقط إذا كان $ax_0+by_0=c$.

حل المعادلة (1) يعني تحديد جميع الأزواج $(\alpha;\beta)$ التي تحقق $a\alpha+b\beta=c$.

إذا كان $a\neq 0$ أو $b\neq 0$ فان المعادلة $ax+by=c$ تقبل ما لا نهاية من الحلول.

مثال: الزوج $(3,2)$ حل للمعادلة: $3x-y=7$ لأن $3\times 3-2=7$ و كذلك الزوج $(2,-1)$.

VII. نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

اعتمادا على النشاط رقم 9 لدينا التعريف و الخاصية الآتيتان:

نعتبر النظمة: $(S):\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث a و b و a' و b' و c' أعداد حقيقية.

هناك عدة طرق لحل نظمة سبق أن درست طريقتين هما طريقة التعويض و التأليفة الخطية طبعا هناك طريقة أخرى انتبه

تعريف و خاصية: العدد الحقيقي $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة (S) و نكتب: $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

إذا كان $D=0$ فان النظمة (S) قد لا يكون لها أي حل, و قد يكون لها عدد لا منته من الحلول.

إذا كان $D\neq 0$ فان النظمة (S) تسمى نظمة كرامر و تقبل حلا وحيدا هو الزوج (x,y) حيث:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D}=\frac{cb'-bc'}{D} \text{ و } x=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}=\frac{ac'-ac'}{D}.$$

هذه الطريقة تسمى طريقة المحددة.

مثال: طريقة المحددة:

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $(1)\begin{cases} x+2y=4 \\ -x+4y=2 \end{cases}$

الحساب المتجهي

القدرات المنتظرة

*- إنشاء متجهة من شكل $a\vec{u}+b\vec{v}$.

*- التعبير عن مفاهيم وخاصيات الهندسة التآلفية باستعمال الأداة المتجهية، والعكس.

*- حل مسائل هندسية باستعمال الأداة الهندسية.

I)- تساوي متجهتين – جمع المتجهات

1- أنشطة

1- ليكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى

أنشئ M و N حيث $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ قارن $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{BD}$

2- ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع مركزه O

أنشئ M حيث $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ و أنشئ I حيث $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{BC}$

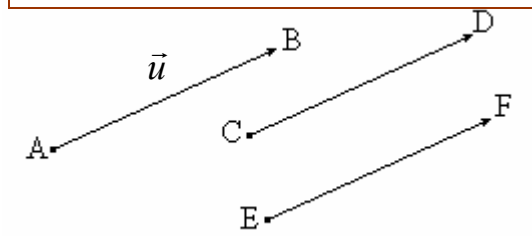
أثبت أن $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AO}$

3- ليكن A و B و C و D و E نقطا اختصر $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$

2- تساوي متجهتين

ب- تعريف

تكون متجهتان متساويتان اذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم



نكتب $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$

ج- المتجهة المنعدمة

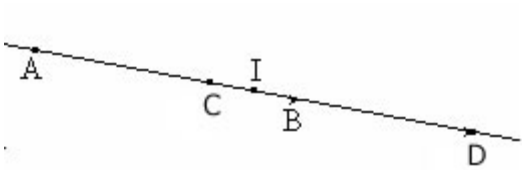
*- المتجهة المنعدمة $\vec{0}$: $\vec{0}=\overrightarrow{MM}$ لكل نقطة نقطة M من المستوى

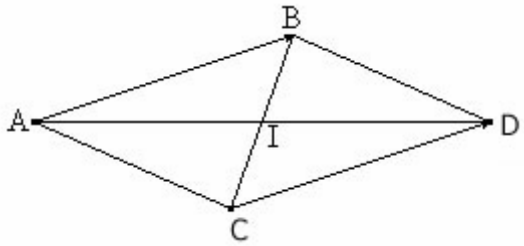
د – خاصيات

خاصية1

A و B و C و D أربع نقط من المستوى

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان للقطعتين $[AD]$ و $[BC]$ نفس المنتصف





I منتصف القطعتين $[AD]$ و $[BC]$

خاصية2

إذا كانت A و B و C و D أربع نقط غير مستقيمية في المستوى فان :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $ABDC$ متوازي الأضلاع

نتيجة

لتكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ (تبديل الوسطين)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CA}$ (تبديل الطرفين)

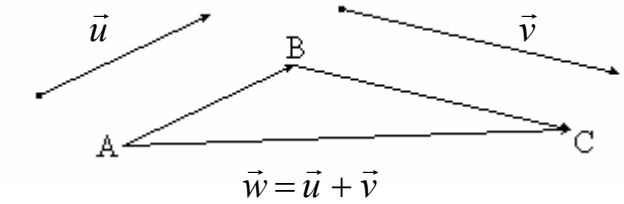
3- مجموع متجهتين –علاقة شال

أ- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان في المستوى

لتكن A نقطة من المستوى، توجد نقطة وحيدة B حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

توجد نقطة وحيدة C حيث $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.

النقطتان A و C تحددان متجهة وحيدة $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$



المتجهة $\vec{w}$ هي مجموع المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نكتب $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ $\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

ب- علاقة شال

مهما كانت النقط A و B و C من المستوى

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

ب- نتيجة

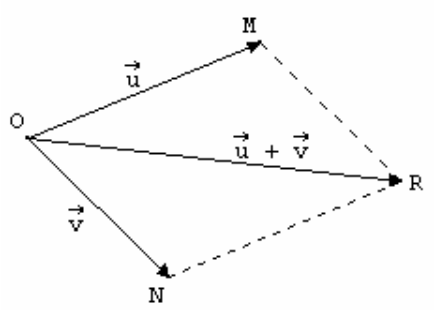
لتكن O و MوN و R أربع نقط من المستوى

$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OR}$ إذا وفقط إذا كان $OMRN$ متوازي الأضلاع

ملاحظة

اذا كانت $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{ON}$ فان

$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OR}$ حيث $OMRN$ متوازي الأضلاع



ج- خاصيات

*- لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

*- لكل ثلاث متجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ $\quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

*- لكل متجهة $\vec{u}$ $\quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

4- مقابل متجهة - فرق متجهتين

أ- مقابل متجهة

تذكير لتكن $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ المسافة AB تسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ نكتب $\|\vec{u}\|=AB$

تعريف

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحاها مضاد

لمنحى المتجهة $\vec{u}$ نرمز لها بالرمز $-\vec{u}$

*- لكل متجهة $\vec{u}$: $\quad \vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

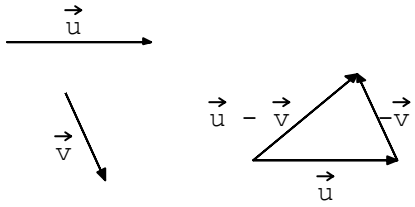
* لكل نقطتين A و B من المستوى لدينا $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متقابلتان نكتب $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

ب- فرق متجهتين

تعريف

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\quad \vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$



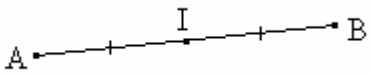
خاصية

لكل ثلاث نقط A و B و C $\quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

5- منتصف قطعة

تعريف

I منتصف $[AB]$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$



خاصية

I منتصف $[AB]$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

تمرين

ليكن ABC مثلثا و E و F نقطتين حيث $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

1- أنشئ الشكل

2- أثبت أن B منتصف $[EF]$

II)ضرب متجهة في عدد حقيقي

أنشطة

نشاط 1

ليكن ABC مثلثا حيث $AB=6$ و M نقطة من $[AB]$ حيث $AM=2$

الموازي للمستقيم (BC) و المار من M يقطع $[AC]$ في N

1- عبر عن MN بدلالة BC

2- عبر عن $\overrightarrow{MN}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$

نشاط 2

ليكن ABC مثلثا نضع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

أنشئ $3\vec{u}$ و $-2\vec{v}$ و $3\vec{u}-2\vec{v}$

1 - تعريف

$\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي غير منعدم

جداء المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي k هي المتجهة $k\vec{u}$ حيث :

* $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه

* $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$

* منحى $k\vec{u}$ هو
  - منحى $\vec{u}$ إذا كان $k\succ 0$
  - عكس منحى $\vec{u}$ إذا كان $k\prec 0$

$k\prec 0$ $\qquad$ $k\succ 0$

2 - نتائج (نقبلها)

مهما تكن المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و مهما يكن العددان الحقيقيان α و β فان

$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ $\qquad$ $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

$1\cdot\vec{u}=\vec{u}$ $\qquad$ $(\alpha\beta)\vec{u}=\alpha(\beta\vec{u})$

$\alpha\vec{u}=\vec{0}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$

تمارين

1- بسط $\vec{A}=5(2\vec{u}-\vec{v})-\frac{3}{2}(\vec{u}+2\vec{v})-(\vec{u}-\vec{v})$

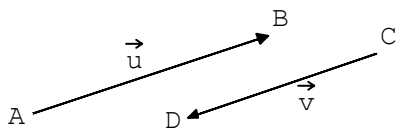
2- حدد x حيث $2x\cdot\vec{u}-\vec{u}=\vec{0}$ علما أن $\vec{u}\neq\vec{0}$

II) الاستقامية

1- استقامية متجهتين

أ- تعريف

تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين اذا و فقط كانت احداهما جداء الأخرى في عدد حقيقي



ملاحظة

$\vec{0}$ مستقيمية مع أية متجهة

ب- خاصية و تعريف

لتكن A و B و C نقطا من المستوى حيث $A\neq B$

المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α حيث

$\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$

العدد الحقيقي α يسمى أفصول C في المعلم $(A;B)$

مثال

$\overrightarrow{AE}=-3\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ -3 أفصول E في المعلم $(A;B)$

$\overrightarrow{CF}=\sqrt{2}\cdot\overrightarrow{CD}$ $\qquad$ $\sqrt{2}$ أفصول F في المعلم $(C;D)$

تمرين

لتكن A و B و C و M أربع نقط و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين حيث $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

و $\vec{v}=2\overrightarrow{BA}-6\overrightarrow{BC}$

1- بين أن $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

2- بين أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

ج- خاصية

I منتصف $[AB]$ تكافئ $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ (و تكافئ أيضا $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{IB}$)

2- استقامية ثلاث نقط

تعريف

لتكن A و B و C نقطا من المستوى حيث $A\neq B$

تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α حيث

$\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$

تمرين

ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع و P و Q نقطتين حيث $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AD}$

1- انشئ الشكل
2- عبر عن $\overrightarrow{CP}$ و $\overrightarrow{CQ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$
3- استنتج أن النقط P و Q و C مستقيمية

3- توازي مستقيمين

خاصية

لتكن A و B و C و D نقطا من المستوى حيث $A\neq B$ و $C\neq D$
$(AB)//(CD)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين

تمرين

ليكن ABC مثلثا و I و J نقطتين حيث $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$

1- عبر عن $\overrightarrow{IC}$ و $\overrightarrow{BJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$
2- استنتج أن $(IC)//(BJ)$

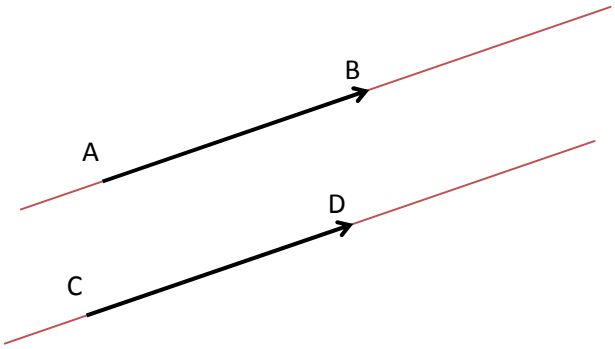
تساوي متجهتين:

تعريف

ليكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتين غير منعدمتين.

نقول أن المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متساويتان إذا كان :

- لهما نفس الاتجاه (أي $(AB)//(CD)$)
- لهما نفس المنحى (أي المنحى $A \mapsto B$ هو نفس المنحى $C \mapsto D$)
- لهما نفس المنظم (أي $AB = CD$)



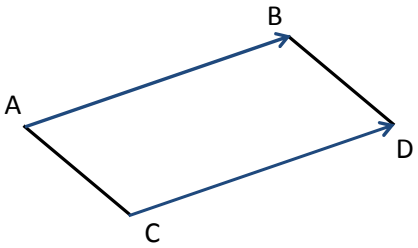
ملاحظة: المتجهة $\overrightarrow{AA}$ تسمى المتجهة المنعدمة و ليس لها اتجاه و منظمها منعدم، نكتب: $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

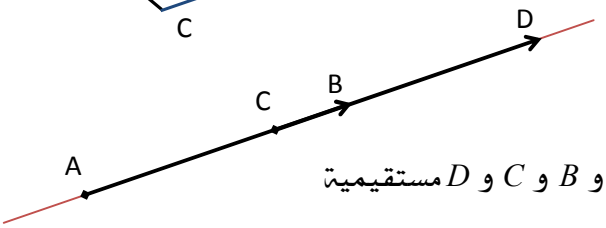
تساوي متجهتين و متوازي الأضلاع

خاصية

لتكن A و B و C و D نقطا من المستوى (P) حيث $A \neq D$.

يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$



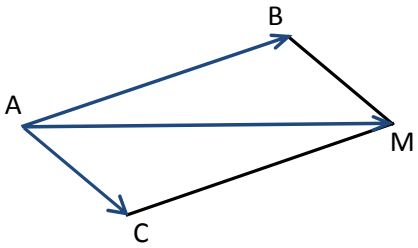


ملاحظة: يمكن أن تكون المتساوية $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ صحيحة و النقط A و B و C و D مستقيمية في هذه الحالة تظل الخاصية صحيحة و يسمى $ABCD$ متوازي أضلاع مبطح

مجموع متجهتين

تعريف

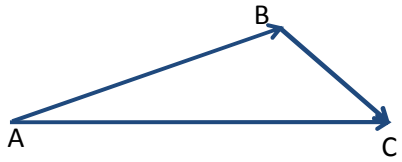
مجموع المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو المتجهة $\overrightarrow{AM}$ حيث يكون الرباعي $ABMC$ متوازي أضلاع



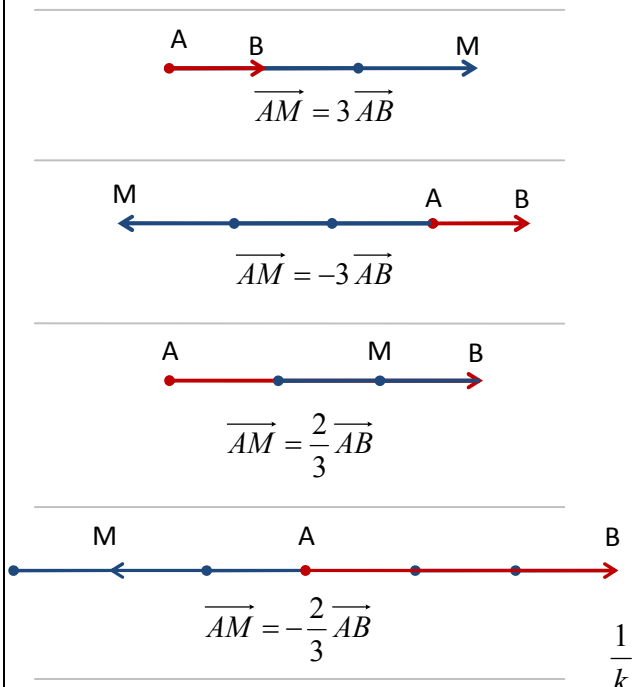
علاقة شال

كيفما كانت النقط A و B و C

فإن : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



ضرب متجهة في عدد حقيقي



تعريف

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي.

جداء المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في العدد k هي المتجهة $\overrightarrow{AM}$ حيث M نقطة تحقق :

- A و B و M نقط مستقيمية
- $AM = k\,AB$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ لهما نفس المنحى في حالة $k > 0$
- $AM = -k\,AB$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ مختلفتا المنحى في حالة $k < 0$

ملاحظات:

$0\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ، $1.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ ، $-1.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

لا يصح مطلقا: كتابة: $\overrightarrow{AB}.k$ ولا $\frac{\overrightarrow{AB}}{k}$ ، بل نكتب: $k.\overrightarrow{AB}$ و $\frac{1}{k}\overrightarrow{AB}$

خصائص

مهما تكن المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ومهما يكن العددان الحقيقيان a و b، لدينا :

- $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+b\vec{v}$ ، $(a+b)\vec{u} = a\vec{u}+b\vec{u}$ $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$
- إذا كان : $a\vec{u} = \vec{0}$ فإن : $a = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$

استقامية متجهتين

تعريف

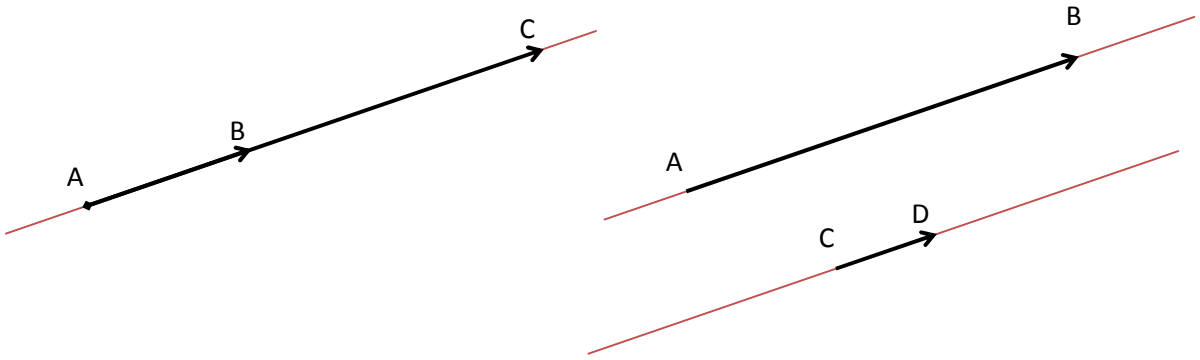
- نقول أن المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث: $\vec{v} = k\vec{u}$ أو $\vec{u} = k\vec{v}$

نتيجة 1

نقول تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ أو $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$

نتيجة 2

يكون لدينا $(AB)//(CD)$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث: $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$ أو $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$



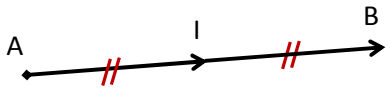
منتصف قطعة

نتيجة 1

I منتصف القطعة $[AB]$ يعني $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

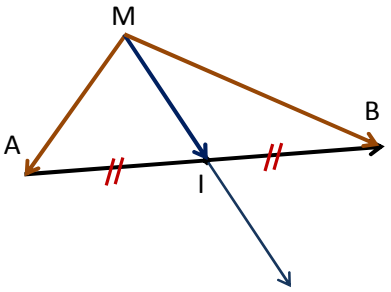
I منتصف القطعة $[AB]$ يعني $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

I منتصف القطعة $[AB]$ يعني $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



نتيجة 2

إذا كانت I منتصف القطعة $[AB]$ وكانت M نقطة من المستوى فإن: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$



الهندسة

مذكرة رقم 2 : ملخص لدرس: الحساب المتجهي في المستوى مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- تساوي متجهتين، جمع متجهتين، علاقة شال؛ - ضرب متجهة في عدد حقيقي؛ - استقامية متجهتين، استقامية ثلاث نقط؛ - تحديد متجهي لمنتصف قطعة.	- إنشاء متجهة من الشكل $a\vec{u}+b\vec{v}$. - التعبير عن مفاهيم وخاصيات الهندسة التآلفية باستعمال الأداة المتجهية، والعكس. - حل مسائل هندسية باستعمال الأداة المتجهية.	- يتم التذكير بمفهومي جمع متجهتين وضرب متجهة في عدد حقيقي ثم تقديم الخاصيات $(a+b).\vec{u} = a.\vec{u}+b.\vec{u}$ و $a.(\vec{u}+\vec{v}) = a.\vec{u}+a.\vec{v}$ و $a.(b.\vec{u}) = (ab).\vec{u}$ من خلال أنشطة بسيطة. كما ينبغي ربط ضرب متجهة $\overrightarrow{AB}$ في عدد حقيقي x بالنقطة M من المستقيم (AB) التي أفصولها x في المعلم (A,B) أي أن $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB}$ وبالتأويل المتجهي لاستقامية ثلاث نقط.

I. متجهات المستوى: (تذكير)

1. عناصر متجهة:

A و B نقطتان مختلفتان. إذا رمزنا لمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان:

1. اتجاه $\vec{u}$ هو المستقيم (AB).
2. منحى $\vec{u}$ هو المنحى من A إلى B.
3. منظم $\vec{u}$ هو المسافة AB , و نكتب: $\|\vec{u}\| = AB$

حالة خاصة: المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم و تسمى المتجهة المنعدم, و تكتب $\overrightarrow{AA} = \vec{O}$.

خاصية: $\vec{u}$ متجهة و A نقطة من المستوى, توجد نقطة وحيدة M بحيث $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

2. تساوي متجهتين:

تعريف: نقول إن متجهتين متساويتين إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم.

3. مقابل متجهة:

تعريف: لتكن $\vec{u}$ متجهة عير منعدمة. مقابلة المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحناها عكس منحى المتجهة $\vec{u}$, و يرمز لها بالرمز $-\vec{u}$. ولدينا $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

خاصية: ليكن $ABCD$ رباعيا. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ تكافئ $ABCD$ متوازي أضلاع.

4. مجموع متجهتين: علاقة شال:

A و B نقطتان من المستوى. لكل نقطة C من المستوى. لدينا: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

مثال: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=0$

تمرين 1: نعتبر المتجهتين $\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$ و $\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$

بسط المتجهتين $\vec{U}$ و $\vec{V}$

الجواب: $\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$

$\vec{U}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$

$\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}$

$\vec{V}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EF}$

قاعدة متوازي الأضلاع لإنشاء مجموع متجهتين:

O و A و B ثلاث نقط غير مستقيمية.

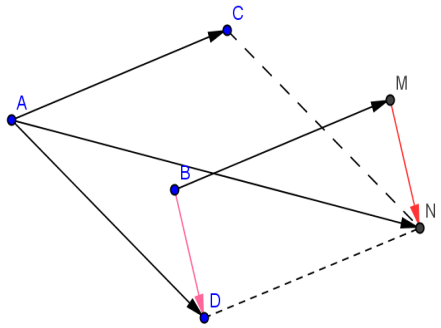
مجموع المتجهتين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ هو المتجهة $\overrightarrow{OC}$ بحيث يكون الرباعي $OACB$ متوازي الأضلاع.

تمرين 2: لتكن A و B و C و D ثلاث نقط من المستوى

1) أنشئ النقط M و N بحيث: $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

2) قارن المتجهتين : $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{MN}$

الجواب:1)



1) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$ ومنه:

$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

تمرين 3 : ABC مثلث و M نقطة من المستوى

نعتبر النقط D و E بحيث: $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$

ماهي طبيعة الرباعيين $ABCD$ و $ACBE$ ؟

الجواب:1) $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$ يعني $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$

يعني $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ومنه $ABCD$ متوازي الأضلاع

2) $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$ يعني $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$

يعني $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ يعني $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$

ومنه $ACBE$ متوازي الأضلاع

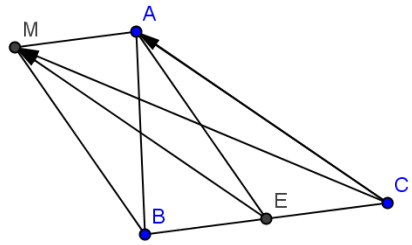
تمرين 4: ليكن ABC مثلث و لتكن E منتصف القطعة $[BC]$ و M نقطة من المستوى حيث: $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$

1) أرسم شكلا. 2) بين أن: $ACEM$ متوازي الأضلاع

3) بين أن: $AEBM$ متوازي الأضلاع

الجواب:1)

أنظر الشكل



2)مثلا يكفي ان نبين أن: $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AC}$ ؟؟؟؟؟؟

لدينا : $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$ يعني $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$

يعني $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{CA}$ يعني $-\overrightarrow{ME}=-\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AC}$

ومنه $ACEM$ متوازي الأضلاع

3)مثلا يكفي ان نبين أن: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MB}$ ؟؟؟؟؟؟

لدينا : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{ME}$ يعني $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BE}$

ونعلم أن : E منتصف القطعة $[BC]$ اذن : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$

ومنه $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MB}$ وبالتالي : $AEBM$ متوازي الأضلاع

II.ضرب متجهة في عدد حقيقي:

1. **تعريف:** لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عددا حقيقيا غير منعدم.

ضرب المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي k هي المتجهة التي نرمز لها بالرمز: $k\vec{u}$ و المعرفة كما يلي:

- لها نفس اتجاه المتجهة $\vec{u}$.
- لها نفس منحى المتجهة $\vec{u}$ في حالة: $k\succ 0$ و لها منحى معاكس للمتجهة $\vec{u}$ في حالة: $k\prec 0$
- منظمها يساوي $|k|\times\|\vec{u}\|$.

مثال: A و B نقطتان من المستوى بحيث : $AB=1cm$

1) أرسم النقطتين C و D بحيث : $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{AB}$

2)أحسب المسافتين : AC و AD

الأجوبة : 1)

2) لدينا $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ اذن : $\|\overrightarrow{AC}\|=\|2\overrightarrow{AB}\|$

اذن : $AC=|2|AB$ اذن : $AC=2AB$ اذن : $AC=2cm$

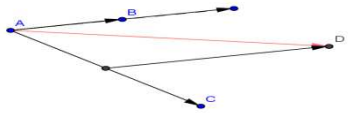
لدينا $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{AB}$ اذن : $\|\overrightarrow{AD}\|=\|-3\overrightarrow{AB}\|$

اذن : $Ad=|-3|AB$ اذن : $AD=3AB$ اذن : $AD=3cm$

تمرين5 : لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية.

أنشئ النقطة D بحيث $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

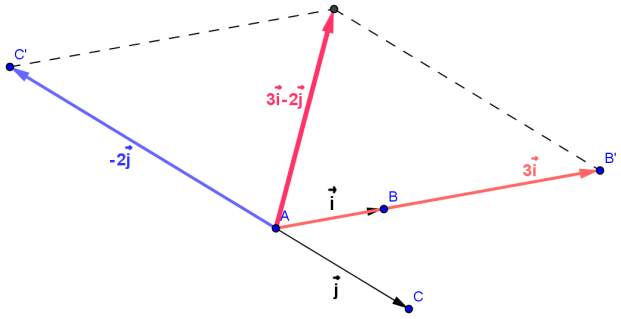
الجواب :



تمرين6 : ABC مثلث و نضع : : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$

أنشئ المتجهات التالية : $3\vec{i}$ و $-2\vec{j}$ و $3\vec{i}-2\vec{j}$

الجواب :



2. **خاصيات:** لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و لكل عددين حقيقيين k و k'

لدينا: $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$ و $k\left(k'\vec{u}\right)=(kk')\vec{u}$

و $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=k\vec{u}+k\vec{v}$ و $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$

$k\vec{u}=\vec{0}$ تكافئ $k=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$.

$0\cdot\vec{u}=\vec{0}$ و $k\cdot\vec{0}=\vec{0}$

أمثلة: $5\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\left(5-\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{7}{2}\overrightarrow{AB}$

$2\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\left(2\times\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$

$2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ تكافئ أن $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ أي أن: $A=B$

تمرين7 : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان. نضع: $\vec{w}=\frac{3}{5}\left(5\vec{u}-\frac{7}{2}\vec{v}\right)-6\left(\vec{u}+\frac{1}{10}\vec{v}\right)$

أوجد عددين حقيقيين x و y بحيث: $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

الجواب : $\vec{w}=\frac{3}{5}\left(5\vec{u}-\frac{7}{2}\vec{v}\right)-6\left(\vec{u}+\frac{1}{10}\vec{v}\right)=3\vec{u}-\frac{21}{10}\vec{v}-6\vec{u}-\frac{3}{5}\vec{v}$

$\vec{w}=-3\vec{u}-\frac{27}{10}\vec{v}$ ومنه $x=-3$ و $y=-\frac{27}{10}$

3. **استقامية متجهتين-استقامية ثلاث نقط:**

تعريف: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا وجد عدد حقيقي k غير منعدم حيث: $\vec{v}=k\vec{u}$

المتجهة المنعدمة مستقيمية مع جميع المتجهات.

تمرين8 : ليكن ABC مثلثا. ولتكن النقطة D حيث $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$.

1.بين أن: $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيمتين

2.أنشئ النقطة D

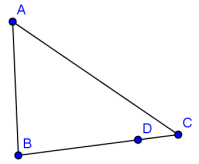
الجواب : 1) لدينا $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$ تكافئ $\overrightarrow{BD}=3\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\right)$

تكافئ $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BC}$ تكافئ $\overrightarrow{BD}-3\overrightarrow{DB}=3\overrightarrow{BC}$

تكافئ $\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$ تكافئ $4\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$ تكافئ $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

وبالتالي : $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيمتين

2) $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ ومنه الانشاء



خاصية: لتكن A و B و C و D أربع نقط حيث $A\neq B$ و $C\neq D$.

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان إذا و فقط إذا كان (AB) و (CD) متوازيين

خاصية: تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين.

مثال: في كل شبه منحرف $ABCD$ قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$.

لدينا المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان.

تمرين9 : نعتبر النقط A و B و M

بحيث: $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

1. بين أن: $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$ ماذا تستنتج بالنسبة للمتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$

2. استنتج أن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB).

الجواب :1) $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني

$2\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

يعني $5\overrightarrow{MA}=-6\overrightarrow{AB}$ يعني $-5\overrightarrow{AM}=-6\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$

اذن المتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتين

2) $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$ تعنى أن النقط A و B و M مستقيمية وأن M تنتمي إلى المستقيم (AB).

III. منتصف قطعة:

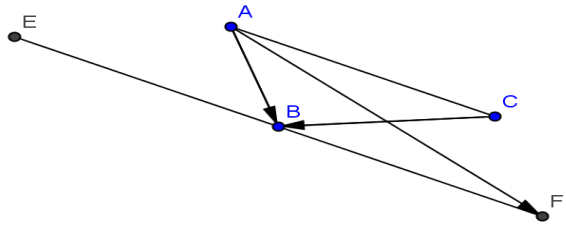
خاصية1: I منتصف القطعة $[AB]$ إذا و فقط إذا كانت I تحقق إحدى المتساويتين: (1) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ أو (2) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ أو $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

تمرين10 : ABC مثلث و E و F نقطتين بحيث : : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

1) أنشئ شكلا تقريبيا

2) بين أن B منتصف القطعة $[EF]$.

أجوبة :1)



2) يكفي مثلا أن نبين أن : $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ ؟؟؟؟؟

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ حسب علاقة شال

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ باستعمال المعطيات

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ لأن : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

ودائما حسب علاقة شال نجد $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$

وبالتالي B منتصف القطعة $[EF]$.

خاصية2: (الخاصية المميزة لمنتصف قطعة): I منتصف القطعة $[AB]$ لكل نقطة M من المستوى لدينا: $2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$. **برهان:**

. لتكن M نقطة من المستوى,

لدينا: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$

(لأن $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$)

و منه لكل نقطة M من المستوى لدينا: $2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$

خاصية3(خاصية منتصفي ضلعي مثلث)

لبكن ABC مثلثا. إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف القطعة $[AC]$ فان: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

برهان: ليكن ABC مثلثا. I و J هما على التوالي منتصفي القطعتين $[AB]$ و $[AC]$.

لدينا: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

ملاحظة : $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ **تعني أن المتجهتين** $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيميتين

ومنه : $(IJ)\parallel(BC)$

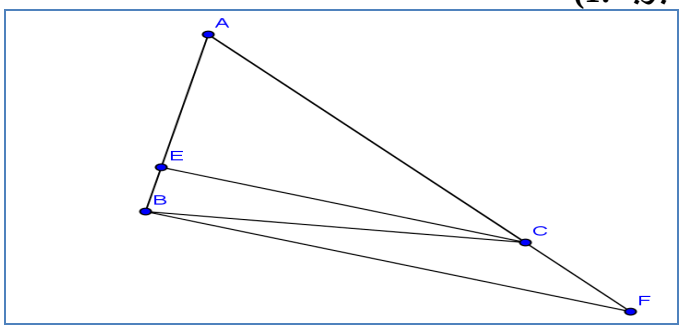
تمرين11 : ABC مثلث و E و F نقطتان حيث: $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

1) أنشئ الشكل.

2) أكتب كلا من المتجهتين $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{BF}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

3) استنتج أن المستقيمين (BF) و (EC) متوازيان.

أجوبة :1)



2) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$ حسب علاقة شال اذن : $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ و هي النتيجة المطلوبة

ولدينا $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ حسب علاقة شال اذن

: $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ و هي النتيجة المطلوبة

3) وجدنا $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ اذن : $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

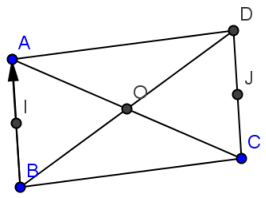
اذن : $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ يعني $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$

اذن :المستقيمين (BF) و (EC) متوازيان.

تمرين 12: ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. I و J هما على التوالي منتصفي القطعتين $[AB]$ و $[CD]$.

1) بين أن: $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

2) استنتج أن O هو منتصف القطعة $[IJ]$.



أجوبة :1)

نعتبر المثلث ABC لدينا I منتصف القطعة $[AB]$ و O منتصف القطعة $[AC]$ اذن حسب خاصية لدينا : $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

ونعتبر المثلث ACD لدينا J منتصف القطعة $[DC]$ و O منتصف القطعة $[AC]$ اذن حسب خاصية لدينا : $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

2)لكي نبين أن : O هو منتصف القطعة $[IJ]$ يكفي أن نبين أن : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$ ؟؟؟؟؟؟؟

$\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فان : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

ومنه : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\vec{O}$

وبالتالي : O هو منتصف القطعة $[IJ]$.

تمرين 13: ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و E و F نقطتان حيث:

$\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

1)بين أن: $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

2)بين أن: $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$

ماذا تستنتج بالنسبة للنقط F و B و E ؟

أجوبة :1)أ) حسب علاقة شال $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فان : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

ونعلم أن : $\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

اذن : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{DA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$

ب) حسب علاقة شال $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$ اذن : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

2) $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=2\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right)$

$=3\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{DC}$ وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع

فان : $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

اذن : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

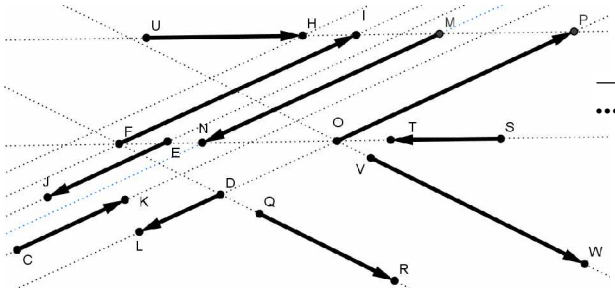
الاستنتاج: $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ يعني $\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$

ومنه النقط F و B و E مستقيمية

ملاحظات عامة حول الدرس :

الحساب المتجهي: تساوي متجهتين/ استقامية متجهتين

1. خصائص المتجهة تساوي متجهتين:



المتجهات التي لها نفس اتجاه المتجهة $\overrightarrow{MN}$ هي :

$\overrightarrow{FI}$ ؛ $\overrightarrow{.....}$ ؛ $\overrightarrow{.....}$ ؛ $\overrightarrow{.....}$ ؛ $\overrightarrow{.....}$ ؛ $\overrightarrow{.....}$

المتجهات التي لها نفس اتجاه ومنحى المتجهة $\overrightarrow{MN}$ هي :

$\overrightarrow{.....}$ ؛ $\overrightarrow{.....}$ ؛ $\overrightarrow{.....}$

المتجهات التي لها نفس اتجاه $\overrightarrow{MN}$ ومنحى معاكس لمنحى المتجهة $\overrightarrow{MN}$ هي : $\overrightarrow{.....}$ ؛ $\overrightarrow{.....}$ ؛ $\overrightarrow{.....}$

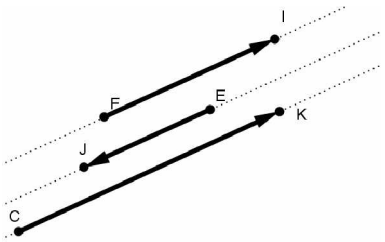
المتجهات التي لها نفس منظم المتجهة $\overrightarrow{MN}$ هي : $\overrightarrow{.....}$ ؛ $\overrightarrow{.....}$ ؛ $\overrightarrow{.....}$

المتجهة التي لها نفسخصاءص المتجهة $\overrightarrow{MN}$ هي : $\overrightarrow{.....}$ نستنتج أن : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{.....}$

المتجهتين المستقيميتين	المتجهتين المتقابلتين	المتجهتين المتساويتين
$\vec{U}$ و $\vec{V}$ مستقيميتان يعني أن لهما نفس الإتجاه ويعني كذلك أن: $\vec{V} = k.\vec{U}$ أو $\vec{U} = k'.\vec{V}$	$\vec{U}$ و $\vec{V}$ متقابلتان يعني أن لهما نفس الإتجاه و منحيان متعاكسان ويعني كذلك أن: $\vec{U} = -\vec{V}$ أو $\vec{V} = -\vec{U}$	$\vec{U}$ و $\vec{V}$ متساويتان يعني أن لهما نفس الإتجاه و نفس المنحى ونفس المنظم ويعني كذلك أن: $\vec{U} = \vec{V}$

2. خصائص المتجهتين المستقيميتين:

- $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{V} = \overrightarrow{EF}$ مستقيميتان غير منعدمتان يعني أن لهما نفس الإتجاه وهذا يعني أن المستقيمان (AB) و (EF) متوازيان.
- $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{V} = \overrightarrow{EF}$ مستقيميتان غير منعدمتان يعني أن $\vec{V} = k.\vec{U}$ لدينا:

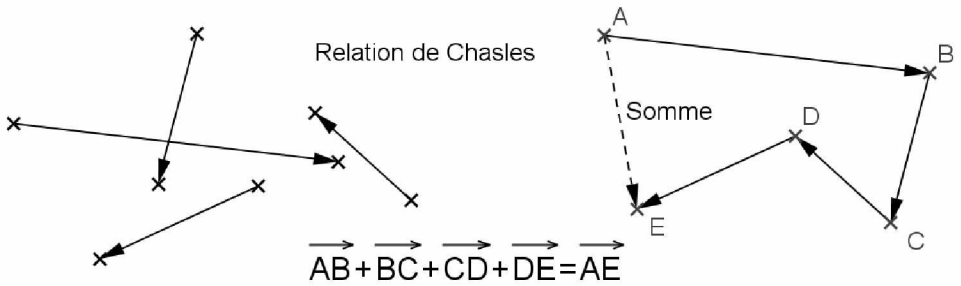


a) $\|\vec{V}\| = |k|.\|\vec{U}\|$ أي أن $EF = |k|.AB$

b) إذا كان $k \neq 0$ فإن $\vec{U}$ و $\vec{V}$ لهما نفس المنحى

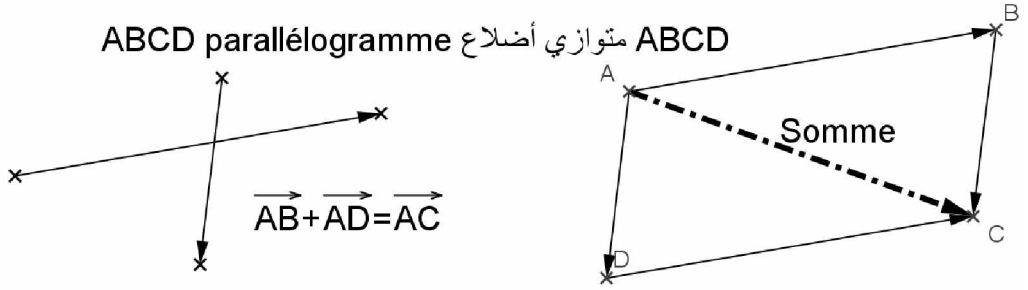
و إذا كان $k \neq 0$ فإن $\vec{U}$ و $\vec{V}$ لهما منحيان متعاكسان

3. جمع المتجهات / علاقة شال:

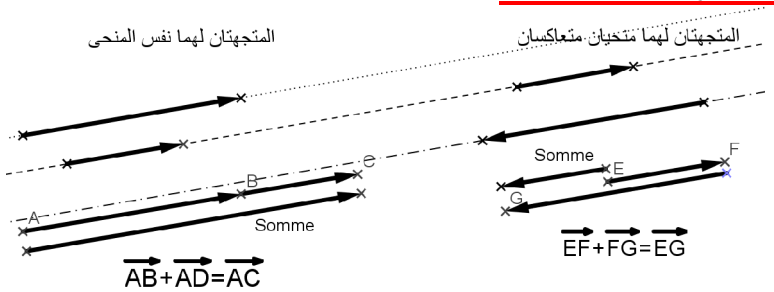


4. حالة متجهتين غير مستقيميتن:

الحساب المتجهي: تساوي متجهتين/ استقامية متجهتين

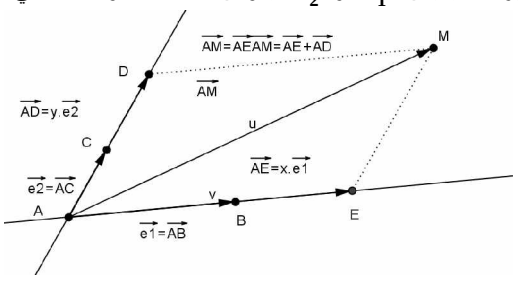


5. حالة متجهتين غير مستقيميتن :



6. المعلم في المستوى :

كل متجهتان غير منعدمتان و غير مستقيميتان $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ يكونان أساسا للمستوى المتجهي باختيارنا لنقطة ثابتة A من المستوى نحصل على



معلم للمستوي النقطي نرمز له $(A\ ,\ \vec{e}_1\ ,\vec{e}_2)$

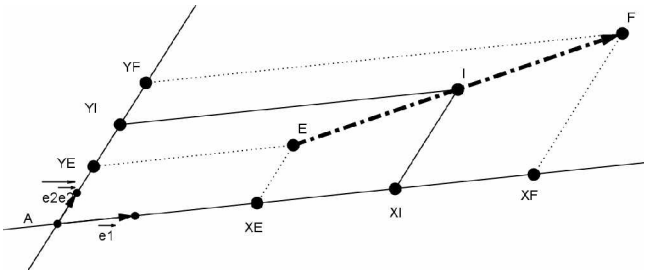
نقول أن (x,y) **هو زوج إحداثيتي النتقطة** M ونكتب $M(x,y)$ أو $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ في المعلم $(A\ ,\ \vec{e}_1\ ,\vec{e}_2)$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$\overrightarrow{AM} = x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2$$

7. إحداثيات متجهة / إحداثيات المنتصف :

في المعلم $(A\ ,\ \vec{e}_1\ ,\vec{e}_2)$ نعتبر النقط $E\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix}$ و $F\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix}$. لدينا :

الحساب المتجهي: تساوي متجهتين/ استقامية متجهتين



$$\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = \left(x_F.\vec{e_1} + y_F.\vec{e_2}\right) - \left(x_E.\vec{e_1} + y_E.\vec{e_2}\right) = (x_F - x_E).\vec{e_1} + (y_F - y_E).\vec{e_1}$$

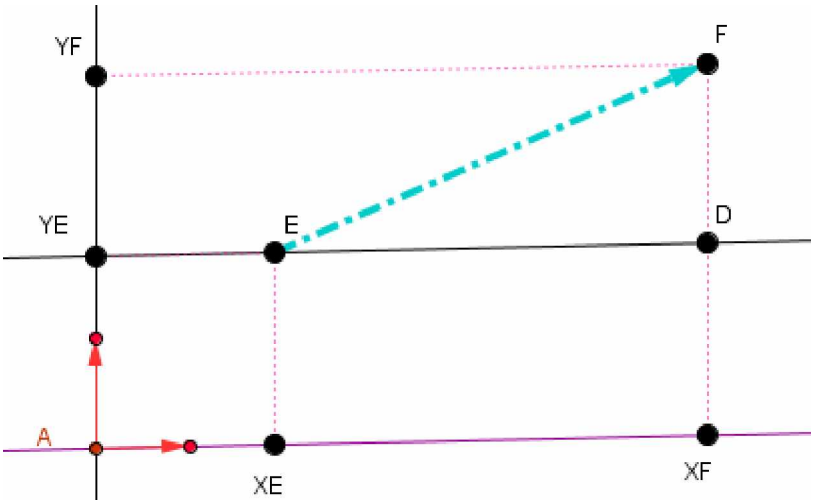
نستنتج إحداثياتي المتجهة : $\vec{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$

من جهة أخرى نعتبر $I\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix}$ هو منتصف القطعة $[EF]$ لدينا: $\vec{EI} = \vec{IF}$ ومنه نستنتج أن :

$\begin{pmatrix} x_I - x_E \\ y_I - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_F - x_I \\ y_F - y_I \end{pmatrix}$ وبالتالي: $\begin{cases} x_I - x_E = x_F - x_I \\ y_I - y_E = y_F - y_I \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_E + x_F}{2} \\ y_I = \dfrac{y_E + y_F}{2} \end{cases}$ ، نستنتج

إحداثياتي منتصف القطعة $[EF]$: $I\begin{pmatrix} \dfrac{x_E + x_F}{2} \\ \dfrac{y_E + y_F}{2} \end{pmatrix}$

8. منظم متجهة في معلم متعامد ممنظم:



حسب مبرهنة فيثاغورس نجد على التوالي :

$$EF^2 = ED^2 + DF^2$$

$$EF^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2$$

$$EF^2 = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$$

9. شرط استقامية متجهتين /المحددة:

في المعلم $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ نعتبر المتجهتين $\vec{U}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ و $\vec{V}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. نضع $\det(\vec{U}, \vec{V}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

الحساب المتجهي: تساوي متجهتين/ استقامية متجهتين

$\det(\vec{U},\vec{V})$ يسمى محددة المتجهتين $\vec{U}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ و $\vec{V}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ في الأساس $(\vec{e_1},\vec{e_2})$.

$\vec{U}$ و $\vec{V}$ مستقيميتان يعني أن $\vec{V}=k.\vec{U}$

a) أي $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=k.\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ وبالتالي $\begin{cases}c=k.a\\d=k.b\end{cases}$ أي $\begin{cases}bc=k.ab\\ad=k.ab\end{cases}$ ومنه $bc-ad=0$ نستنتج في النهاية شرط استقامية متجهتين كالتالي :

$\vec{U}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ و $\vec{V}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ مستقيميتان يعني أن $\det(\vec{U},\vec{V})=\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=ad-bc=0$

10. توازي مستقيمين / استقامية ثلاث نقط :

b) في الأساس $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ نعتبر النقط $A\begin{pmatrix}x_A\\y_B\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ و $C\begin{pmatrix}x_C\\y_C\end{pmatrix}$ و $F\begin{pmatrix}x_D\\y_D\end{pmatrix}$.

لدينا $\det(\vec{U},\vec{V})=\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=ad-bc$

$\vec{U}$ و $\vec{V}$ مستقيميتان يعني أن $\vec{V}=k.\vec{U}$

أي $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=k.\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ وبالتالي $\begin{cases}c=k.a\\d=k.b\end{cases}$ أي $\begin{cases}bc=k.ab\\ad=k.ab\end{cases}$ ومنه $bc-ad=0$ نستنتج في النهاية شرط استقامية متجهتين كالتالي :

$\vec{U}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ و $\vec{V}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ مستقيميتان يعني أن $\det(\vec{U},\vec{V})=\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=ad-bc=0$

الإسقاط

القدرات المنتظرة

-* الترجمة المتجهية لمبرهنة طاليس.

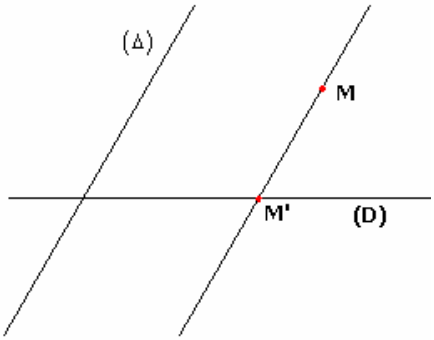
1- مسقط نقطة على مستقيم

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و M نقطة من المستـ

يوجد مستقيم وحيد مار من M و يوازي (Δ).

هذا المستقيم يقطع (D) في نقطة وحيدة M'

النقطة M' تسمى مسقط M على (D) بتواز مع (Δ)



تعريف

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و M نقطة من المستوى

مسقط النقطة M على (D) بتواز مع (Δ) هو نقطة تقاطع (D) مع المستقيم الموازي للمستقيم (Δ) و المار من M

ملاحظة: إذا كانت $M \in (D)$ فان مسقط M على (D) بتواز مع (Δ) هو نفسها.

2- الإسقاط على مستقيم بتواز مع آخر

أ- تعريف

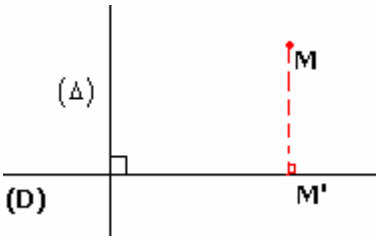
(D) و (D') مستقيمان متقاطعان

الطريقة التي تربط كل نقطة M من المستوى بمسقطها M' على المستقيم (D) بتواز مع المستقيم (Δ) تسمى الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ).

ب- الإسقاط العمودي على مستقيم

تعريف1

الإسقاط على مستقيم (D) بتواز مع مستقيم عمودي عليه يسمى الإسقاط العمودي على (D)

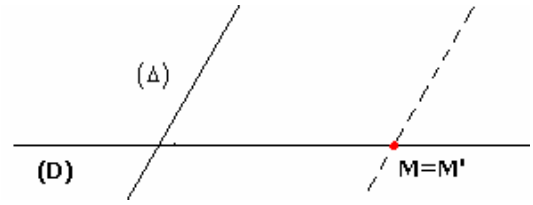


تعريف2

مسقط النقطة M على المستقيم (D) بتواز مع مستقيم عمودي عليه يسمى المسقط العمودي للنقطة M على (D)

3- خاصيات أولية

أ- خاصية1



- كل نقطة من (D) منطبقة مع مسقطها على (D) بتواز مع (Δ).
- كل نقطة منطبقة مع مسقطها على (D) بتواز مع (Δ) تنتمي إلى (D)

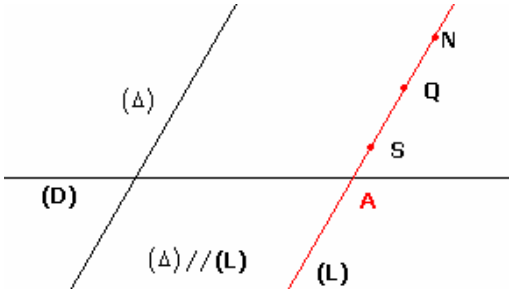
مفردات

- إذا كان مسقط النقطة M هي نفسها على (D) بتواز مع (Δ) نقول إن M **صامدة** بالإسقاط على (D) بتواز مع (Δ).
- المستقيم (D) **صامدة** بالإسقاط على (D) بتواز مع (Δ).

نعبر عن الخاصية 1 بالتعبير التالي:

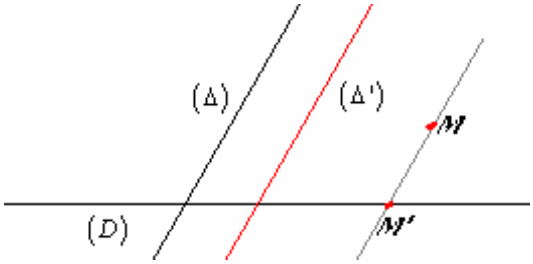
مجموعة النقط الصامدة بالاسقاط على (D) بتواز مع (Δ) هي المستقيم (D)

ب- خاصية2



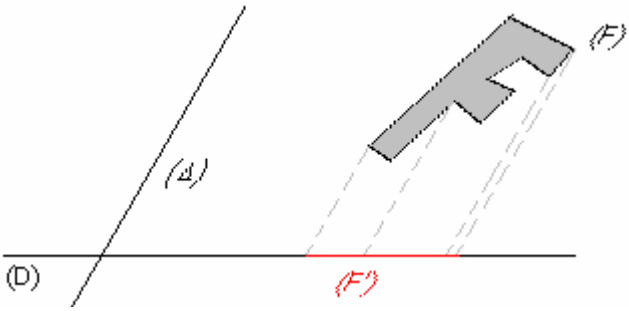
لتكن A نقط من مستقيم (D). مجموعة النقط التي لها نفس المسقط A على (D) بتواز مع (Δ) هي المستقيم المار من A و الموازي للمستقيم (Δ)

ج- خاصية3



إذا كان مستقيم (Δ') يوازي (Δ) فان الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ) هو الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ') نقول إن الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ) لا يتغير بتعويض (Δ) بمستقيم له نفس الاتجاه.

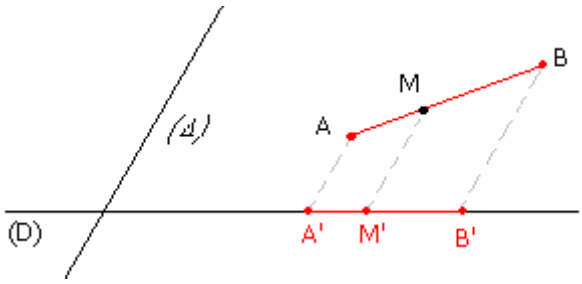
4- مسقط شكل



أ- تعريف

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و (F) شكلا من المستوى و (F') جزء من المستقيم (D) نقول إن (F') مسقط الشكل (F) إذا وفقط إذا تحقق: - مسقط كل نقطة من (F) على (D) بتواز مع (Δ) ينتمي إلى (F'). - كل نقطة من (F') هي مسقط نقطة على الأقل من (F) على (D) بتواز مع (Δ) .

ب- مسقط قطعة



خاصية (مقبولة)

لتكن A و B نقطتين مختلفتين و A' و B' مسقطيهما على مستقيم (D) بتواز مع مستقيم (Δ) بالتوالي. مسقط $[AB]$ هو $[A'B']$

ملاحظة:

إذا كان $(AB)//(\Delta)$ فان $A'=B'$ ومنه مسقط $[AB]$ هي القطعة المنعدمة $[A'A']$.

ج- مسقط منتصف قطعة

خاصية

إذا كان A' و B' مسقطي النقطتين A و B على مستقيم (D) بتواز مع مستقيم (Δ) بالتوالي فان:
مسقط منتصف القطعة $[AB]$ هو منتصف $[A'B']$.
نعبر عن هذا بقولنا: الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ) يحافظ على المنتصف.

5- مبرهن طاليس المباشرة و العكسية متجهيا – الإسقاط ومعامل الاستقامية لمتجهتين

أ- نشاط1

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين

A ; B ; C ; D نقط من المستوى حيث $A \neq B$.

A' ; B' ; C' ; D' مساقطها على (D) بتواز مع (Δ) .

1- لنفترض أن A ; B ; C نقط مستقيمية حيث $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$

بين أن $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$ و أن $\overrightarrow{A'C'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

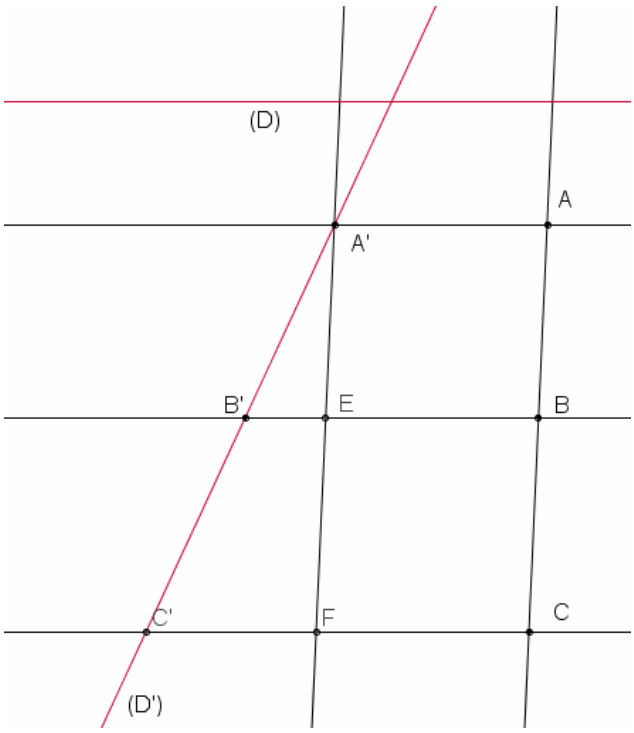
2- لنفترض أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ بين أن $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$

3- لنفترض أن $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ بين أن $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

تذكير لمبرهنة طاليس المباشرة في المثلث

ليكن ABC مثلثا و M و N نقطتين من (AB) و (AC) على التوالي

إذا كان $(BC)//(MN')$ فان $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$



<u>تصحيح النشاط</u>

1- نبين أن $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$ و $\overrightarrow{A'C'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

نعتبر المستقيم المار من A' و الموازي لـ (AB) ويقطع (BB') و (CC') عل التوالي في E و F

باعتبار المثلث $A'BE$ و التوازي (BE) مع (CF)

وتطبيق خاصية طاليس نحصل على $\frac{A'F}{A'E}=\frac{A'C'}{A'B'}$

$ABEA'$ و $ACFA'$ متوازيا الأضلاع

و منه $A'F=AC$; $A'E=AB$

حسب طاليس فان $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$

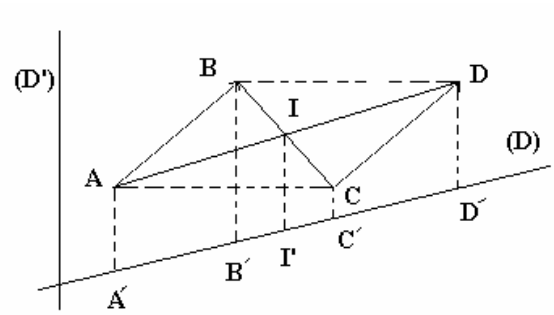
وحيث أن $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ فان $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}=|\lambda|$

ومنه $A'C'=|\lambda|A'B'$

و حيث أن النقط A ; B ; C و النقط A' ; B' ; C' في نفس الترتيب و $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$

فان $\overrightarrow{A'C'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

2- نبين أن $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ تكافئ $ABDC$ متوازي الأضلاع

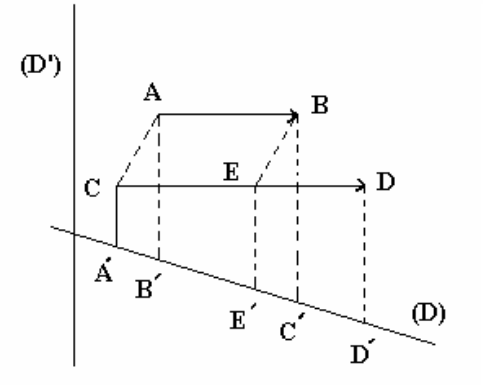
ليكن I مركز $ABDC$ و I' مسقطها على (D) بتواز (D')

لدينا $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{ID}$; $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IC}$

ومنه حسب (1) $\overrightarrow{I'A'}=-\overrightarrow{I'D'}$; $\overrightarrow{I'B'}=-\overrightarrow{I'C'}$

إذن $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$

3- نبين أن $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$



لدينا $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ نعتبر E حيث $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}$

ومنه $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{CE}$

وبالتالي حسب (1) و(2) نستنتج $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'E'}$

و $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{C'E'}$

إذن $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

ب- مبرهنة طاليس المباشرة متجهيا

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و A ; B ; C نقط مستقيمية حيث $A\neq B$

إذا كان A' ; B' ; C' مساقط A ; B ; C بالتوالي على (D) بتواز مع (Δ) و كان

$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{A'C'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

ج- الإسقاط و تساوي متجهتين

مبرهنة

A ; B ; C ; D نقط من المستوى و A' ; B' ; C' ; D' مساقطها بالتوالي

إذا كان $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{A'B'}$

د- الإسقاط ومعامل الاستقامية لمتجهتين

مبرهنة

A ; B ; C ; D نقط من المستوى و A' ; B' ; C' ; D' مساقطها بالتوالي

على مستقيم (D) بتواز مع مستقيم (Δ)

إذا كان $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

نعبر عن هذا بقولنا الإسقاط يحافظ على معامل استقامية متجهتين

تمرين

ليكن ABC مثلثا و E و F نقطتين حيث $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ نعتبر (Δ) مستقيم يقطع (AC) و لا يوازي (BC) لتكن E' و F' و B' و C' المساقط العمودية بالتوالي E و F و B و C على (Δ)

بين أن $\overrightarrow{E'F'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{B'C'}$

تمرين

ليكن ABC مثلثا و I منتصف $[BC]$ و E و F نقطتين حيث $\overrightarrow{AE}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

نعتبر J تقاطع (AI) و (EF) و B' و C' مسقطا B و C على (AI) بتواز مع (EF)

1- بين أن I منتصف $[B'C']$

2- بين أن $\overrightarrow{AJ}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC'}$

3- بين أن $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}$ و استنتج $\overrightarrow{AI}$ بدلالة $\overrightarrow{AJ}$

ذ- نتائج

الإسقاط و المسافة

نتيجة

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و A ; B ; C نقط مستقيمية حيث $A\neq B$ و (AB) لا يوازي (Δ)

إذا كان A' ; B' ; C' مساقط A ; B ; C بالتوالي على (D) بتواز مع (Δ)

فان $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$

ملاحظة يمكن أن يكون $AB\neq A'B'$ نعبر عن هذا بقولنا الإسقاط لا يحافظ على المسافة

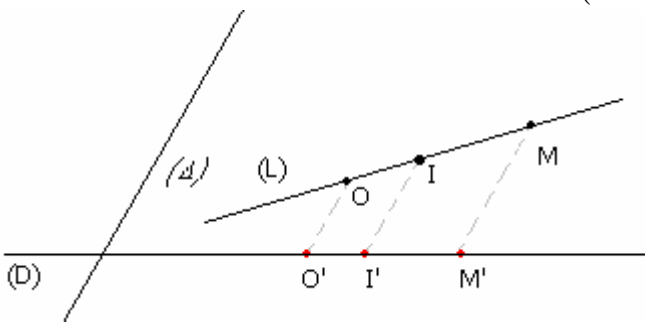
الإسقاط و المحور

نشاط

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و $L(O;I)$ محور حيث (L) و (Δ) غير متوازيين و O' و I' مسقطي O و I بالتوالي على (D) بتواز مع (Δ)

x أفصول نقطة M في المحور $L(O;I)$ و M' مسقطها على (D) بتواز مع (Δ)

حدد M' في المحور $\Delta(O';I')$



نتيجة

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و $L(O;I)$ محور حيث (L) و (Δ) غير متوازيين و O' و I' مسقطي O و I بالتوالي على (D) بتواز مع (Δ) .

M نقطة من (L) و M' مسقطها على (D) بتواز مع (Δ) .

إذا كان x أفصول M في المحور $L(O;I)$ فان x هو أفصول النقطة M' في المحور $\Delta(O';I')$

ر- مبرهنة طاليس العكسية متجهيا

نشاط

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و A ; B ; C نقط من مستقيم (L)

حيث $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ و A' ; B' مسقطي A و B بالتوالي على (D) بتواز مع (Δ)

و $\overrightarrow{A'C'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

لتكن C_1 مسقط C على (D) بتواز مع (Δ).

بين أن $C_1 = C'$

المبرهنة العكسية

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و A ; B ; C نقط مستقيمية حيث $A \neq B$
إذا كان A' ; B' مسقطي A و B بالتوالي على (D) بتواز مع (Δ) و كان $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ و
$\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ فإن C' مسقط C على (D') بتواز مع (Δ)

6- الإسقاط و مجموع متجهتين

نشاط

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين

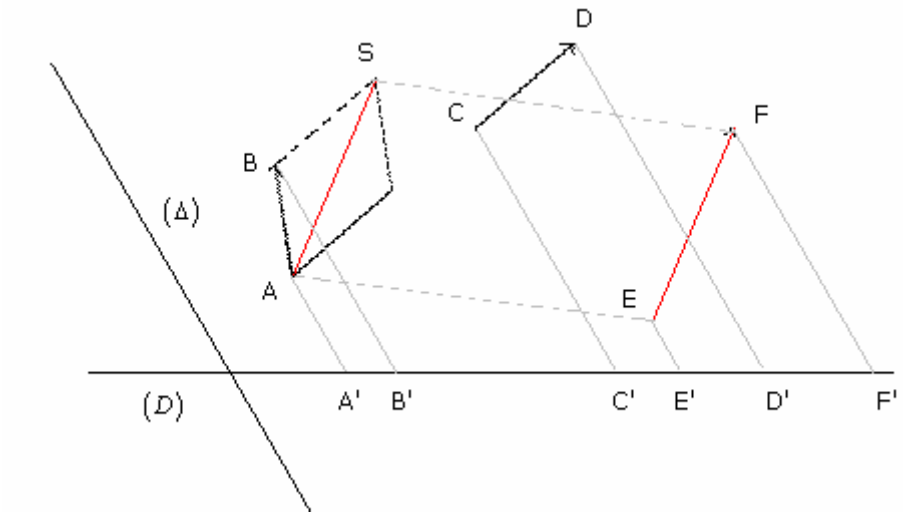
A ; B ; C ; D ; E ; F نقط من المستوى حيث $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

A' ; B' ; C' ; D' ; E' ; F' مساقطها على (D) بتواز مع (Δ)

لتكن S نقطة حيث $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BS}$ و S' مسقطها على (D) بتواز مع (Δ)

1- بين أن $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{B'S'}$ و $\overrightarrow{E'F'} = \overrightarrow{A'S'}$

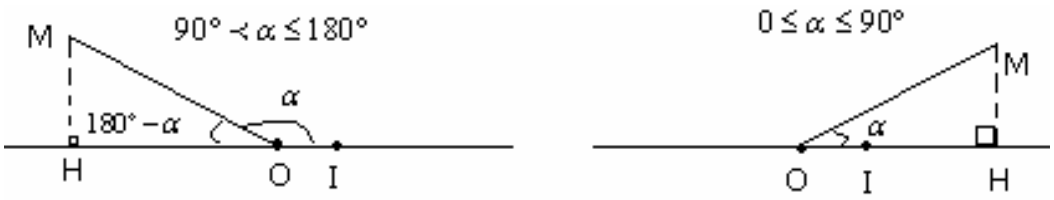
2- استنتج أن $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{E'F'}$



مبرهنة

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين و A ; B ; C ; D ; E ; F نقط من
المستوى و A' ; B' ; C' ; D' ; E' ; F' مساقطها على (D) بتواز مع (Δ)
إذا كان $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ فان $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{E'F'}$

7- أفصول المسقط العمودي لنقطة على محور



خاصية

إذا كان H المسقط العمودي لنقطة M على المحور $D(O;I)$ حيث $(OI=1)$ و α قياس الزاوية $(\widehat{IOM})$ فان أفصول H هو:

-* $OM\cos\alpha$ إذا كان $0 \leq \alpha \leq 90°$

-* $-OM\cos(180° - \alpha)$ إذا كان $90° \prec \alpha \leq 180°$

تمارين

تمرين1

ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع ($\left[\widehat{DAB}\right]$ زاوية منفرجة) و E و F نقطتين

حيث $\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

ليكن K تقاطع (AC) و(EF). نعتبر B' وD' مسقطا B و D على (AC) بتواز مع (EF)

1- بين أن $[AC]$ و $[B'D']$ لهما نفس المنتصف

2- بين أن $\overrightarrow{AK}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB'}$ $\quad$ $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD'}$

3- عبر عن $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\overrightarrow{AK}$

تمرين2

ليكن $ABCD$ شبه منحرف قاعدتيه $[AB]$ و$[CD]$ حيث $CD=2AB$ و I تقاطع قطريه.

نعتبر E مسقط I على (CD) بتواز مع (BC) و F مسقط I على (CD) بتواز مع (AD)

1- بين أن $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

2- بين أن $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{DF}$ استنتج أن $[EF]$ و $[CD]$ لهما نفس المنتصف

تمرين3

ليكن ABC مثلثا و M نقطة بحيث $\overrightarrow{AM}=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\alpha\in\mathbb{R}^*-\{1\}$. نعتبر N مسقط M على (AC) بتواز مع (BC) و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

ليكن I تقاطع (MN) و (AH)

1- بين أن $\overrightarrow{MN}=\alpha\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AI}=\alpha\cdot\overrightarrow{AH}$

2- بين أن $\frac{S}{S'}=\alpha^2$ حيث S و S' مساحتا المثلثين AMN و ABC على التوالي

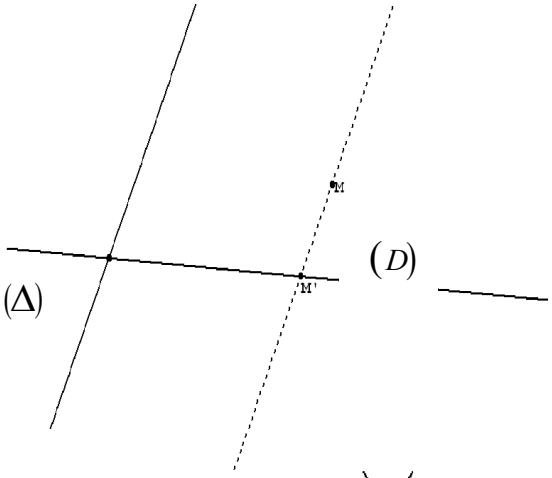
الثانوية التأهيلية: وادي الذهب الأستاذ : رشيد بلمو	درس الإسقاط	مستوى الدراسي: TCS - TCT عدد الساعات : 05

I.الإسقاط على مستقيم بتواز مع مستقيم:

I-1 تعريف: ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين في المستوى و M نقطة من المستوى.
مسقط النقطة M على (D) بتواز مع (Δ) هو النقطة M' تقاطع المستقيمين (D) و المستقيم المار من M و الموازي للمستقيم (Δ).
العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى بمسقطها M' على (D) بتواز مع (Δ) تسمى الإسقاط على المستقيم (D) بتواز مع (Δ).

ملحوظة: نعتبر الإسقاط على (D) بتواز مع (Δ).

- M' مسقط M يعني أن $M' \in (D)$ و $(MM') \parallel (\Delta)$.
- المسقط M' للنقطة M لا تتغير إذا عوضنا المستقيم (Δ) بأي مستقيم يوازيه.
- إذا كانت M تنتمي إلى (D) فان مسقطها على (D) بتواز مع مستقيم (Δ) هي نفسها (نقول ان نقطة صامدة).

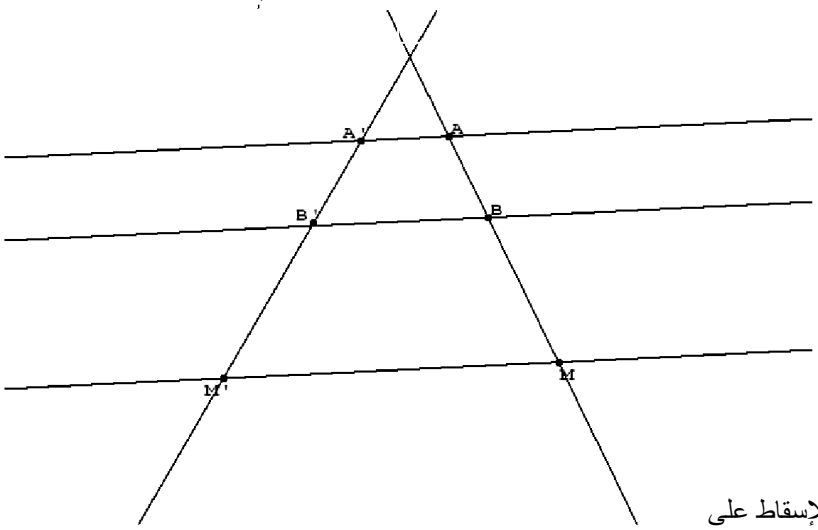


مثال:
ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O و (Δ) مستقيما يوازي (AB).
- بما أن $B \in (BC)$ و $(AB) \parallel (\Delta)$ فان B هي مسقط A على (BC) بتواز مع (Δ).

**** تمرين تطبيقي : (01 - س)**

I-2 الإسقاط العمودي:

تعريف: ليكن (D) مستقيما و M نقطة من لمستوى.
- المسقط العمودي للنقطة M على (D) هي النقطة M' تقاطع المستقيم (D) و المستقيم المار من M و العمودي على (D).
- العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى بمسقطها العمودي على (D) تسمى الإسقاط العمودي على (D).

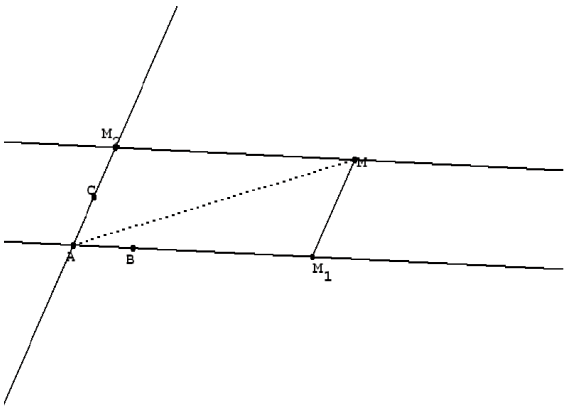


ملحوظة: الإسقاط العمودي على (D) هو حالة خاصة للإسقاط على المستقيم (D) بتواز مع مستقيم (Δ) عمودي على (D).

**** تمرين تطبيقي : (03 - س)**

I-3 الإسقاط على محور:

نعتبر مستقيمين (D) و (Δ) منسوبين إلى معلمين (A,B) و (A,C) على التوالي و لتكن M نقطة من المستوى.
إذا كانت M_1 هي مسقط M على (D) بتواز مع (Δ) و M_2 هي مسقط M على (Δ) بتواز مع (D) فان $\overrightarrow{AM_1} = x\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM_2} = y\overrightarrow{AC}$ حيث x هو أفضول M_1 في المعلم (A,B) و y هو أفصول M_2 في المعلم (A,C). لدينا: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2}$ أي أن $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.



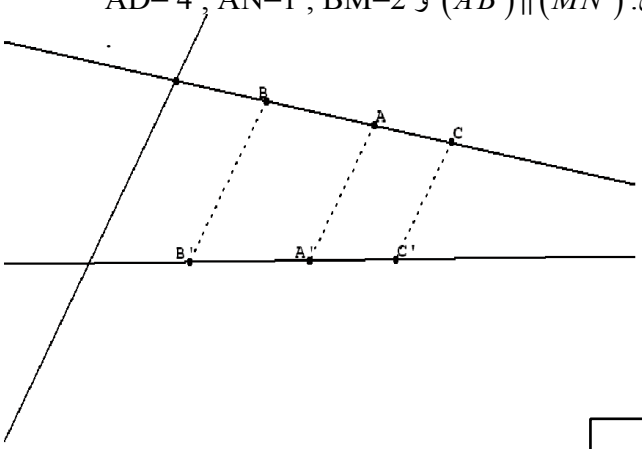
**** تمرين تطبيقي : (02 - س)**

II. مبرهنة طاليس و مبرهنتها العكسية:

II-1 مبرهنة طاليس المباشرة:

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان متوازيان و مختلفان و (D_1) و (D_2) مستقيمان حيث: يقطع و في و على التوالي.
(Δ_1) يقطع (D_1) و (D_2) في A و A' على التوالي. (Δ_2) يقطع (D_1) و (D_2) في B و B' على التوالي.
ذا كان مستقيم (Δ_1) يوازى (Δ_1) و (Δ_2) و يقطع (D_1) و (D_2) في M و M' على التوالي فان: $\frac{AM}{AB}=\frac{A'M'}{A'B'}$

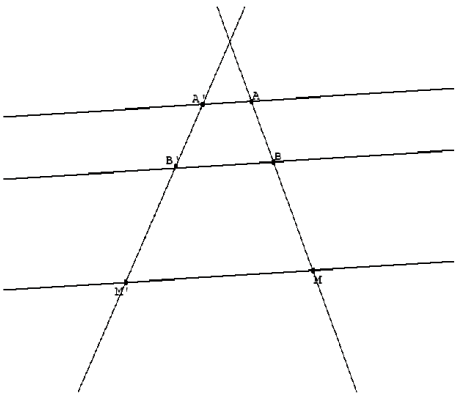
مثال: $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$. احسب BC علما أن: $(AB)\parallel(MN)$ و AD= 4 ; AN=1 ; BM=2



بتعبير لخر: ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين
A و B و C ثلاث نقط مستقيمية حيث: (AB) لا يوازي (Δ)
إذا كانت A' و B' و C' على التوالي مساقط النقط A و B و C على (D) بتواز مع (Δ) فان $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$.

II-2 مبرهنة طاليس العكسية:

(D_1) و (D_2) مستقيمان متوازيان قطعا.
(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان بحيث (Δ_1)
يقطع (D_1) و (D_2) في A و B على التوالي و (Δ_2) يقطع
(D_1) و (D_2) في A' و B' على التوالي.
إذا كانت M نقطة من (Δ_1) و M' نقطة من (Δ_2)
بحيث: $\frac{A'M'}{A'B'}=\frac{AM}{AB}$
A و M و B مرتبة على المستقيم (Δ_1) بنفس ترتيب النقط A' و M' و B' على (Δ_2) فان $(MM')\parallel(D_1)$ $(MM')\parallel(D_2)$;.



بتعبير لخر: ليكن (D) و (D') مستقيمين غير موازيين لمستقيم ثالث (Δ). A و B نقطتان مختلفتان من (D) و A' و B' مسقطيهما على (D') بتواز مع (Δ). إذا كانت C نقطة من (D) و C' نقطة من (D') بحيث: $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$ و A و B و C مرتبة على المستقيم (D) بنفس ترتيب النقط A' و B' و C' على (D') فان C' هي مسقط C على (D') بتواز مع (Δ).

** تمرين تطبيقي : (04 - س)

III. الحفاظ على معامل استقامية متجهتين:

خاصية: ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين A و B و C و D نقطا من المستوى و A' و B' و C' و D' هي على التوالي مساقطها على (D) بتواز مع (Δ). إذا كانت $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC}$ فان $\overrightarrow{A'B'}=k\,\overrightarrow{A'C'}$. إذا كانت $\overrightarrow{CD}=k\,\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=k\,\overrightarrow{A'B'}$.

** تمرين تطبيقي : (05 - س)

المستقيم في المستوى

القدرات المنتظرة

***- ترجمة مفاهيم و خاصيات الهندسة التالفية و الهندسة المتجهية بواسطة الاحداثيات**

***- استعمال الأداة التحليلية في حل مسائل هندسية.**

I- معلم مستوى – احداثيتا نقطة – تساوي متجهتين – شرط استقامية متجهتين

1- معلم – احداثيتا نقطة

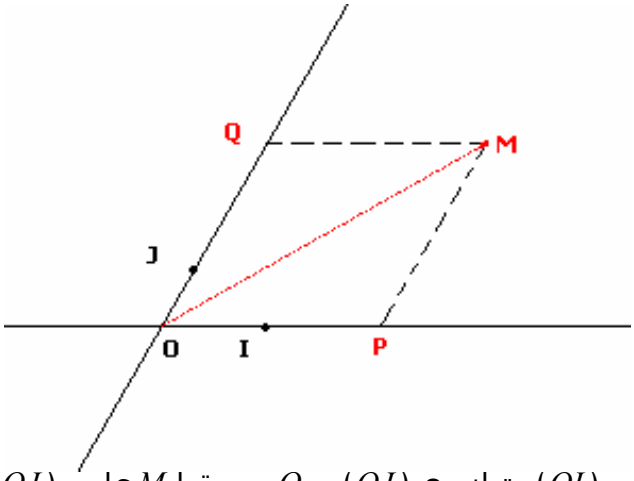
نشاط لتكن I و J و O ثلاث نقط غير مستقيمية و M نقطة من المستوى و P مسقطها على (OI) بتواز مع (OJ) و Q مسقطها على (OJ) بتواز مع (OI)

1- أنشئ الشكل

2- باعتبار x أفصول P بالنسبة للمعلم $(O;I)$ و y أفصول Q بالنسبة للمعلم $(O;J)$

أكتب $\overrightarrow{OM}$ بدلالة x و y و $\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OJ}$

1- الشكل



2- لدينا P مسقط M على (OI) بتواز مع (OJ) و Q مسقط M على (OJ) بتواز مع (OI)

ومنه $(OPMQ)$ متوازي الأضلاع و بالتالي $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$

و حيث أن x أفصول P بالنسبة للمعلم $(O;I)$ و y أفصول Q بالنسبة للمعلم $(O;J)$

فان $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OQ}=y\overrightarrow{OJ}$

ومنه $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$

و بما أن I و J و O ثلاث نقط غير مستقيمية فاننا نقول ان الزوج $(x;y)$ زوج احداثيتي M بالنسبة للمعلم $(O;I;J)$ أو المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ نكتب $M(x;y)$

تعريف1

* كل ثلاث نقط غير مستقيمية I و J و O تحدد معلما في المستوى نرمز له بـ $(O;I;J)$ أو $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$

ترميز و مصطلحات

- المستقيم (OI) يسمى محور الأفاصيل
- المستقيم (OJ) يسمى محور الأراتيب
- إذا كان $(OI)\perp(OJ)$ فان $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى معلما متعامدا
- إذا كان $(OI)\perp(OJ)$ و $OI=OJ$ فان $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى معلما متعامدا ممنظما.

تعريف2

نقول ان الزوج $(x;y)$ زوج إحداثيتي النقط M في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$ نكتب $M(x;y)$

العدد x يسمى أفصول M

العدد y يسمى أرتوب M

2- احداثيتا متجهة – تساوي متجهتين

أ- احداثيتا متجهة

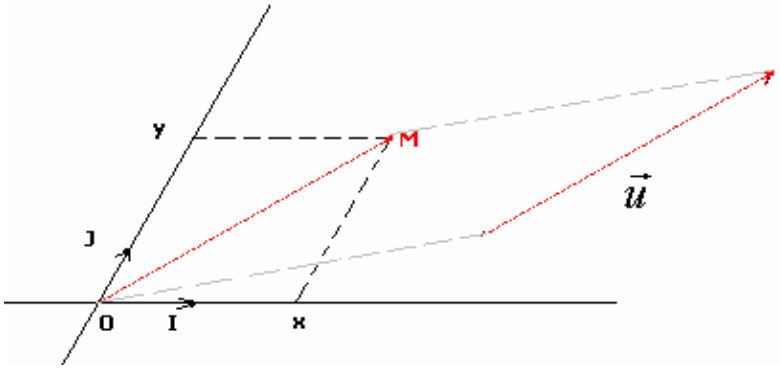
نشاط

نعتبر المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ و $\vec{u}$ متجهة معلومة .

أنشئ M حيث $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$

باعتبار $M(x;y)$ بالنسبة للمعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ أكتب $\vec{u}$ بدلالة x و y

---



لدينا $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$ ومنه $\vec{u}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$

الزوج $(x;y)$ زوج احداثيتي $\vec{u}$ نكتب $\vec{u}(x;y)$

تعريف

زوج احداثيتي $\vec{u}$ في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ هو زوج إحداثيتي النقط M في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$

حيث $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ نكتب $\vec{u}(x;y)$

اذا كان $M(x;y)$ في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ فان زوج احداثيتي $\vec{u}$ هو $(x;y)$ نكتب $\vec{u}(x;y)$

خاصية

المستوى منسوب إلى معلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.

$\vec{u}(x;y)$ و $\vec{u}'(x';y')$ متجهتان و α و β عددان حقيقيان

زوج إحداثيتي المتجهة $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ هو $(\alpha x+\beta x';\alpha y+\beta y')$

ب- تساوي متجهتين

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$،نعتبر $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{u}'(x';y')$ متجهتين

$\vec{u}=\vec{u}'$ اذا وفقط اذا كان $x=x'$ و $y=y'$

د- احداثيتا $\overrightarrow{AB}$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$،إذا كان $A(x;y)$ و $B(x';y')$ فان $\overrightarrow{AB}(x'-x;y'-y)$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر النقط $A(1;2)$ و $B(-3;-1)$ و $C(3;-2)$ ومتجهتين $\vec{u}(-2;3)$ و $\vec{v}(2;4)$.

1- أنشئ النقط A و B و C و المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2- حدد زوج إحداثيتي كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $2\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$

3- حدد زوج إحداثيتي D حيث $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$

4- حدد زوج إحداثيتي I منتصف $[AB]$

تمرين

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقميتين و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجهتين غير مستقميتين حيث $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$ و $\vec{v}=-4i+3\vec{j}$

حدد إحداثيتي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الأساس $(\vec{i};\vec{j})$

حدد إحداثيتي $\vec{i}$ و $\vec{j}$ في الأساس $(\vec{u};\vec{v})$

3- شرط استقامية متجهتين

أ- محددة متجهتين

تعريف

لتكن $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x';y')$ متجهتين

العدد $xy'-x'y$ يسمى محددة المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (في هذا الترتيب) نرمز له بـ $\det(\vec{u};\vec{v})$ أو $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

نكتب $\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y$

مثال نعتبر $\vec{u}(-2;3)$ و $\vec{v}(2;4)$ و $\vec{w}(-5;0)$

حدد $\det(\vec{u};\vec{v})$ و $\det(\vec{u};\vec{w})$

ب- لتكن $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x';y')$ غير منعدمتين

* $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان تكافئ $\vec{u}=k\vec{v}$

تكافئ $x=kx'$ و $y=ky'$

ومنه $xy'-x'y=kx'y'-kx'y'=0$

نفترض $xy'-x'y=0$ و $x'\neq 0$

* نضع $\frac{x}{x'}=k$ ومنه $x=kx'$

و بالتالي $xy'-x'y=0$ تكافئ $y=ky'$

إذن $\vec{u}=k\vec{v}$

إذا كان $\vec{u}$ أو $\vec{v}$ منعدما فان $xy'-x'y=0$

خاصية

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v})=0$

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$

مثال

لتكن $\vec{u}(\sqrt{2}+1;1)$ و $\vec{v}(1;\sqrt{2}-1)$ و $\vec{w}(-1;\sqrt{2})$

أدرس استقامية $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ثم $\vec{u}$ و $\vec{w}$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر النقط $A\left(\frac{1}{2};3\right)$ و $B(-2;-2)$ و $C(1;4)$ ومتجهة $\vec{u}(1;3)$

1- أنشئ النقط A و B و C و المتجهة $\vec{u}$

2- حدد x حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}(x-2;5)$ مستقيميتان

3- بين أن النقط A و B و C مستقيمية

4- منظم متجهة

في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم

- إذا كان $\vec{u}(x;y)$ فان $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

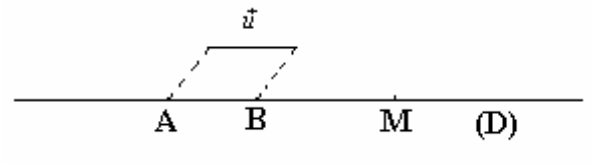
- إذا كان $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ فان $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

II- المستقيم في المستوى

1- مستقيم معرف بنقطة ومتجهة

لتكن A نقطة و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

نحدد (D) مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$; $t\in\mathbb{R}$



لنضع $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

* $(D)\neq\varnothing$ لان $B\in(D)$

* نعلم أن $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$; $t\in\mathbb{R}$ تكافئ $M\in(AB)$

$(D)=(AB)$

(D) يسمى المستقيم المار من A و الموجه بـ $\vec{u}$

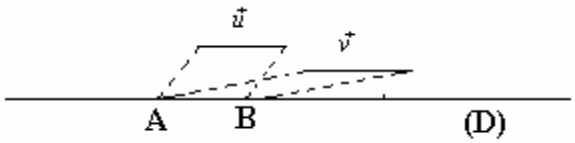
تعريف

لتكن A نقطة و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$; $t\in\mathbb{R}$ هي المستقيم المار من A و الموجه بـ $\vec{u}$ نرمز له بـ $D(A;\vec{u})$

ملاحظة

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمتين



* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان $D(A;\vec{u})=D(A;\vec{v})$

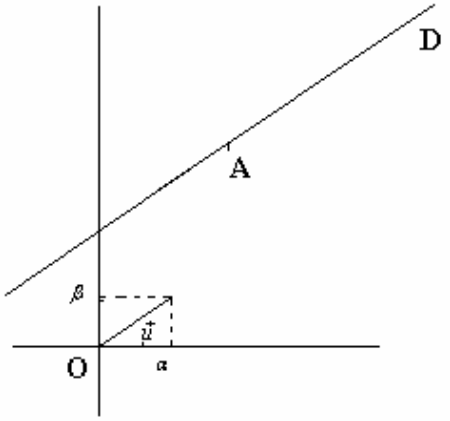
* إذا كان $B\in D(A;\vec{u})$ فان $D(A;\vec{u})=D(B;\vec{u})$

* $\overrightarrow{AB}$ موجهة للمستقيم (AB)

2- تمثيل بارامتري لمستقيم

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر (D) مستقيم

مار من النقطة $A(x_0;y_0)$ و $\vec{u}(\alpha;\beta)$ موجهة له



$M\in(D)$ تكافئ توجد t من $\mathbb{R}$ حيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

تكافئ $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=x_0+t\alpha\\ y=y_0+t\beta\end{cases}$

النظمة $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=x_0+t\alpha\\ y=y_0+t\beta\end{cases}$ تسمى تمثيل بارامتري

للمستقيم (D) المار من $A(x_0;y_0)$ والموجه بـ $\vec{u}(\alpha;\beta)$

مبرهنة وتعريف

المستوى منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $\vec{u}(\alpha;\beta)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة.

كل مستقيم (D) مار من $A(x_0;y_0)$ وموجه بـ $\vec{u}(\alpha;\beta)$ له نظمة على شكل $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=x_0+t\alpha\\ y=y_0+t\beta\end{cases}$

النظمة $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=x_0+t\alpha\\ y=y_0+t\beta\end{cases}$ تسمى تمثيل بارامتري للمستقيم (D) المار من $A(x_0;y_0)$ والموجه بـ $\vec{u}(\alpha;\beta)$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر النقط $A(-2;1)$ و $B(0;-2)$ و $C(1;4)$ ومتجهتين $\vec{u}(-2;3)$ و $\vec{v}(4;-6)$.

لتكن $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \end{cases}$ تمثيلا بارامتريا لمستقيم (Δ)

1- أنشئ المستقيم (D) المار من A و الموجه بـ $\vec{u}$ و المستقيم (Δ)

2- أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

ب- أعط ثلاث نقط تنتمي إلى المستقيم (D)

ج- هل النقطتين B و C تنتميان الى المستقيم (D)

3- أ- بين أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

ب- حدد تمثيلا بارامتريا لـ $D(C;\vec{v})$. ماذا تلاحظ

4- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (AC)

ملاحظة

كل مستقيم يقبل ما لا نهاية من التمثيلات البارامترية

3- معادلة ديكارتية لمستقيم

أ- مستقيم معرف بنقطة و متجهة

في مستوى (P) منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر (D) مستقيم مار من النقطة $A(x_0;y_0)$ و $\vec{u}(\alpha;\beta)$ موجهة له.

لتكن $M(x;y)$ نقطة من (P)

$M\in(D)$ تكافئ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان

تكافئ $\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha \\ y-y_0 & \beta \end{vmatrix}=0$

تكافئ $\beta x-\alpha y+\alpha y_0-\beta x_0=0$

نضع $-\alpha=b$; $\beta=a$; $c=\alpha y_0-\beta x_0$

$M\in(D)$ تكافئ $ax+by+c=0$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$

مبرهنة

في مستوى منسوب إلى معلم

كل مستقيم (D) له معادلة على شكل $ax+by+c=0$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$.

* العكس

لتكن a و b و c اعداد حقيقية حيث $(a;b)\neq(0;0)$

لنحدد (D) مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $ax+by+c=0$

لنفرض أن $a\neq 0$

(D) غير فارغة لأن $C\left(\frac{-c}{a};0\right)\in(D)$

لتكن $A(x_0;y_0)$ تنتمي الى (D) ومنه $ax_0+by_0+c=0$

وبالتالي $c=-ax_0-by_0$

$M(x;y)\in(D)$ تكافئ $ax+by+c=0$

تكافئ $ax+by-ax_0-by_0=0$

تكافئ $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

تكافئ $\begin{vmatrix} x-x_0 & -b \\ y-y_0 & a \end{vmatrix}=0$

تكافئ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}(-b;a)$ مستقيميتان

تكافئ $M \in D(A;\vec{u})$

مبرهنة

في مستوى منسوب إلى معلم مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $ax+by+c=0$ و $(a;b)\neq(0;0)$ هي المستقيم (D) الموجه بـ $\vec{u}(-b;a)$

المعادلة $ax+by+c=0$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$ تسمى معادلة ديكارتية للمستقيم (D) الموجه بـ $\vec{u}(-b;a)$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر النقطة $A(-2;1)$ و $\vec{u}(1;2)$.

لتكن $2x-3y+1=0$ معادلة ديكارتية لمستقيم (D) و $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=1+5t \\ y=2-2t \end{cases}$ تمثيل بارامتري لمستقيم (D')

1- حدد معادلة ديكارتية لمستقيم (Δ) مار من A و موجه بـ $\vec{u}$

2- أعط ثلاث نقط من المستقيم (D) و متجهة موجهة له.

3- حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D'). أنشئ الشكل.

ملاحظة

* لكل عدد حقيقي غير منعدم k ، المعادلتان $ax+by+c=0$ و $akx+bky+kc=0$ متكافئين، فهما معادلتان لنفس المستقيم

* للمستقيم مالا نهاية من المعادلات المتكافئة.

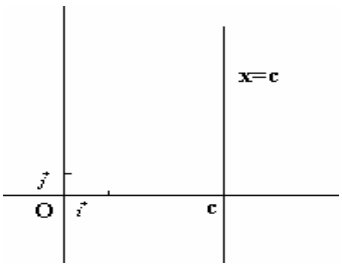
ب- حالات خاصة

*** المستقيم القاطع لمحوري المعلم**

يقطع مستقيم (D) محوري معلم في نقطتين مختلفتين $A(a;0)$ و $B(0;b)$ إذا و فقط إذا كان للمستقيم (D) معادلة ديكارتية على شكل $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$

*** المستقيم الموازي لمحور الأراتيب خاصة**

يكون مستقيم مواز لمحور الأراتيب اذا و فقط كان له معادلة من نوع $x=c$

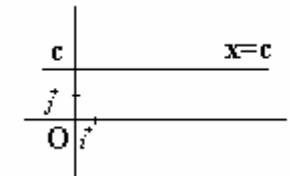


ملاحظة ليكن $(a;b)\neq(0;0)$

تكون $ax+by+c=0$ معادلة مستقيم مواز لمحور الأراتيب إذا و فقط إذا كان $b=0$

*** المستقيم الموازي لمحور الأفاصيل خاصة**

يكون مستقيم مواز لمحور الأراتيب اذا و فقط كان له معادلة من نوع $y=c$.



* **المستقيم غير الموازي لمحور الأراتيب**

(P) مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

$(D): ax+by+c=0$

(D) غير مواز لمحور الأراتيب تكافئ $b\neq 0$

إذن معادلة (D) تصبح $y=\frac{-b}{a}x-\frac{c}{a}$

نضع $m=\frac{-a}{b}$; $p=\frac{-c}{b}$ إذن معادلة (D) تكتب $y=mx+p$

بالعكس نعتبر $y=mx+p$ معادلة (D)

ومنه $\vec{u}(1;m)$ موجهة لـ (D) و لدينا $\det(\vec{u};\vec{j})\neq 0$

إذن (D) لا يوازي محور الأراتيب.

خاصية

(P) مستوى منسوب إلى معلم

يكون المستقيم (D) غير مواز لمحور الأراتيب إذا وفقط إذا كانت معادلة (D) على شكل $y=mx+p$

العدد m يسمى المعامل الموجه للمستقيم (D)

المتجهة $\vec{u}(1;m)$ موجهة للمستقيم (D)

المعادلة $y=mx+p$ تسمى المعادلة المختزلة للمستقيم (D)

ملاحظة

اذا كان $\vec{u}(\alpha;\beta)$ موجهة لمستقيم غير مواز لمحور الأراتيب فان المعامل الموجه له هو العدد $\frac{\beta}{\alpha}$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر النقطة $A(-2;1)$ و $t\in\mathbb{R}$ $(\Delta):\begin{cases}x=1+3t\\ y=-2+t\end{cases}$.

1- حدد المعادلة المختزلة للمستقيم (D) المار من A و معامله الموجه $\frac{-1}{2}$.

2- حدد المعامل الموجه للمستقيم (Δ) ثم معادلته المختزلة.

III - الأوضاع النسبية لمستقيم

1- التوازي

$(D_1): ax+by+c=0$; $(D_2): a'x+b'y+c'=0$

$\vec{u}(-b;a)$ موجهة لـ (D_1) و $\vec{u}'(-b';a')$ موجهة لـ (D_2)

$(D_1)//(D_2)$ تكافئ $\det(\vec{u};\vec{u}')=0$

تكافئ $ab'-a'b=0$

مبرهنة1

ليكن (P) مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $(a;b)\neq(0;0)$ و $(a';b')\neq(0;0)$.

نعتبر $(D_1): ax+by+c=0$; $(D_2): a'x+b'y+c'=0$

$(D_1)//(D_2)$ اذا و فقط اذا كان $ab'-a'b=0$

مبرهنة2

ليكن (P) مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $(D_1): y=mx+p$; $(D_2): y=m'x+p'$

$(D_1)//(D_2)$ اذا و فقط اذا كان $m=m'$

مثال

$(D_1): 2x-3y+4=0 \quad ; \quad (D_2): -4x+6y+1=0$

هل (D_1) و (D_2) منفصلا أم منطبقان

2- التقاطع

مبرهنة1

ليكن (P) مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $(a;b)\neq(0;0)$ و $(a';b')\neq(0;0)$.

نعتبر $(D_1): ax+by+c=0 \quad ; \quad (D_2): a'x+b'y+c'=0$

(D_1) و (D_2) متقاطعان اذا و فقط اذا كان $ab'-a'b\neq 0$

و زوج إحداثيتي تقاطعهما هو حل النظمة $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

مبرهنة2

ليكن (P) مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $(D_1): y=mx+p \quad ; \quad (D_2): y=m'x+p'$

(D_1) و (D_2) متقاطعان اذا و فقط اذا كان $m\neq m'$

و زوج إحداثيتي تقاطعهما هو حل النظمة $\begin{cases} y=mx+p \\ y=m'x+p' \end{cases}$

مثال $(D_1): x+3y-5=0 \quad ; \quad (D_2): 2x+y-1=0$

تأكد أن (D_1) و (D_2) متقاطعان وحدد تقاطعهما

3- التعامد

نشاط

ليكن (P) مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $(a;b)\neq(0;0)$ و $(a';b')\neq(0;0)$.

نعتبر $(D_1): ax+by+c=0 \quad ; \quad (D_2): a'x+b'y+c'=0$

ليكن (Δ_1) الموازي لـ (D_1) و المار من O و (Δ_2) الموازي لـ (D_2) و المار من O

1- حدد معادلة ديكارتية لكل من (Δ_1) و (Δ_2) ثم تأكد أن $A(-b;a)\in(\Delta_1)$ و $A'(-b';a')\in(\Delta_2)$

2- اذا كان $(D_1)\perp(D_2)$ ، ما طبيعة المثلث OAA'

3- بين أن $(D_1)\perp(D_2)$ إذا وفقط إذا كان $aa'+bb'=0$

تذكير * $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

* ABC مثلث

ABC قائم الزاوية في A اذا وفقط اذا كان $BC^2=AB^2+AC^2$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم م.م نعتبر

$(D'): a'x+b'y+c'=0 \quad (D): ax+by+c=0$ حيث $(a';b')\neq(0;0) \quad ; \quad (a;b)\neq(0;0)$

$(D)\perp(D')$ إذا و فقط إذا كان $aa'+bb'=0$

نتيجة

$(D'): y=m'x+p' \quad mm'=-1 \quad (D): y=mx+p$

$(D)\perp(D')$ إذا و فقط إذا كان

مثال نعتبر $(D'): 3x+2y+5=0 \quad (D): -2x+3y-1=0$

بين أن $(D)\perp(D')$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر $A(2;1)$ و $B(-1;3)$

و (D) مستقيم مار من A و موجه بـ $\vec{u}(2;3)$

بين أن $(D)\perp(AB)$

تمرين

ليكن ABC مثلثا و I و J و K نقط حيث I منتصف $[BC]$ و $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CK}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

ننسب المستوى إلى معلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

1- حدد إحداثيات النقط I و J و K

2- بين أن النقط I و J و K مستقيمية

3- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (IJ) ثم حدد معادلة ديكارتية له.

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر النقطتين $A(-2;1)$ و $B(2;4)$ و $\vec{u}(5;2)$

و $(D):2x-3y+1=0$ و $(D_m):(m-1)x-2my+3=0$

1- حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$

2- تأكد أن (D) و (Δ) متقاطعان و حدد تقاطعهما.

3- أ- حدد m حيث $(D)//(D_m)$

ب- حدد m حيث $(D)\perp(D_m)$

4- أ- أنشئ المستقيمات (D_0) ; (D_1) ; (D_2)

ب – بين أن جميع المستقيمات تمر من النقطة $C\left(3;\frac{3}{2}\right)$

تمرين

نعتبر $A(10;3)$; $B(6.7)$; $C(0;2)$

حدد معادلة ديكارتية لكل متوسط للمثلث ABC

حدد زوج إحداثيتي G مركز ثقل ABC.

تمرين

ليكن $ABCD$ و $EFGH$ متوازيي الأضلاع حيث $E\in[AB)$ و $G\in[AD)$

أثبت أن المستقيمات (BG) و (ED) و (CF) اما متوازية إما متقاطعة (يمكن اعتبار المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$)

تعريف: لتكن A نقطة من المستوى و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة.
مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.
هي المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$ و نكتب $D\left(A;\vec{u}\right)$.

2. تمثيل بارامتري لمستقيم:

تعريف: ليكن $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ معلما للمستوى (P) و لتكن $A\left(x_0;y_0\right)$ نقطة من (P) و $\vec{u}\left(a;b\right)$ متجهة غير منعدمة.
النظمة $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ تسمى بارا متريا للمستقيم (D) المار من $A\left(x_0;y_0\right)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}\left(a;b\right)$.

مثال: نعتبر النقطة $A\left(3;-5\right)$ و المتجهة $\vec{u}\left(-2;3\right)$
تمثيل بارامتري للمستقيم $D\left(A;\vec{u}\right)$ هو: $\begin{cases}x=3-2t\\ y=-5+3t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$

ملحوظة: كل مستقيم (D) يقبل ما لا نهاية من التمثيلات البارامترية.

** تمرين تطبيقي : (07 - س)

III. معادلة ديكارتية لمستقيم في المستوى:

خاصية: ليكن $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ معلما.كل مستقيم (D) في المستوى له معادلة على الشكل $ax+by+c=0$ حيث $a\neq0$ أو $b\neq0$ تسمى معادلة ديكارتية للمستقيم (D).

برهان: .....

** تمرين تطبيقي : (08 - س)

** تمرين تطبيقي : (09 - س)

خاصية: ليكن $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ معلما و a و b و c أعدادا حقيقية حيث $a\neq0$ أو $b\neq0$.
مجموعة النقط $M\left(x;y\right)$ بحيث $ax+by+c=0$ هي موجه بالمتجهة $\vec{u}\left(-b;a\right)$.

برهان: .....

** تمرين تطبيقي : (10 - س)

IV. الأوضاع النسبية لمستقيمين:

لقد تعرفت في السنة الفارطة على توازي مستقيمين باستعمال صيغتي معادلتيهما المختصرة.

خاصية: نعتبر المستقيمين $(D):ax+by+c=0$ و $(\Delta):a'x+b'y+c'=0$
(D) و (Δ) متوازيان إذا و فقط إذا كان: $ab'-a'b=0$.

برهان: .....

خاصية: $(D):y=mx+p$ و $(\Delta):y=m'x+p'$
$(D)\parallel(\Delta)$ يعني أن: $m=m'$
m يسمى ميل المستقيم (D) أو المعامل الموجه للمستقيم (D).

مثال: نعتبر في المعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ المستقيمين (D) و (Δ) :
$(D):2x+3y+1=0$ و $(\Delta):4x+6y+7=0$

1. حدد المعامل المجه لكل من المستقيمين (D) و (Δ)
2. هل $(D)\parallel(\Delta)$ ؟

** تمرين تطبيقي : (11 - س)

الهندسة

مذكرة رقم 6 : ملخص لدرس: المستقيم في المستوى مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- المعلم: إحداثيتا نقطة، إحداثيتا متجهة؛ - شرط استقامية متجهتين؛ - تحديد مستقيم بنقطة ومتجهة موجهة؛ - تمثيل بارامتري لمستقيم؛ - معادلة ديكارتية لمستقيم؛ - الوضع النسبي لمستقيمين.	- ترجمة مفاهيم وخاصيات الهندسة التآلفية والهندسة المتجهية بواسطة الإحداثيات. - استعمال الأداة التحليلية في حل مسائل هندسية.	- ينبغي تعويد التلاميذ على مختلف الطرائق للتعبير عن استقامية متجهتين.

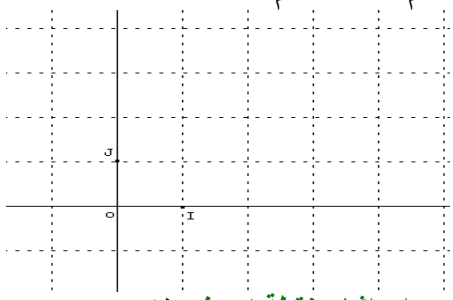
I. إحداثيات متجهة-إحداثيات نقطة:

1. أساس مستوى-معلم مستوى:

تعريف1: إذا كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجهتين غير مستقيميتين فان الزوج $(\vec{i},\vec{j})$ يسمى أساسا للمستوى.

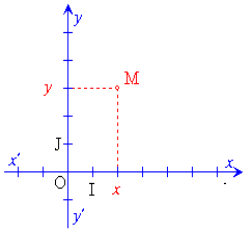
تعريف2: إذا كانت O نقطة من المستوى و $(\vec{i},\vec{j})$ أساس للمستوى فان $(O,\vec{i},\vec{j})$ هو معلم في المستوى.

معلم متعامد ممنظم



2. إحداثيات نقطة:تعريف:

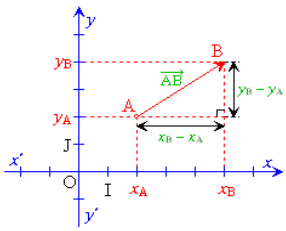
ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما بحيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$. لكل نقطة M من المستوى يوجد زوج وحيد (x,y) بحيث: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و الزوج (x,y) هو إحداثيتي النقطة M في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و نكتب $M(x,y)$



مثال: في مثلث ABC إذا كانت $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ فان زوج إحداثيتي النقطة M في المعلم $(\vec{A},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ هو $(3,-2)$.

3. إحداثيتا متجهة:

خاصية و تعريف: ليكن $(\vec{i},\vec{j})$ أساسا للمستوى. لكل متجهة $\vec{u}$ يوجد زوج وحيد (x,y) بحيث $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ والزوج (x,y) يسمى زوج إحداثيتي المتجهة $\vec{u}$ و نكتب $\vec{u}(x,y)$ إذا كان $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{u'}(x',y')$ فان: $\vec{u}=\vec{u'}$ تكافئ $x=x'$ و $y=y'$.



4. إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{AB}$:

خاصية: ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما. إذا كانت $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ فان: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$

مثال: إذا كانت $A(1,-4)$ و $B(-3,7)$ فان $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$ أي أن $\overrightarrow{AB}(-3-1,7-(-4))$ و بالتالي $\overrightarrow{AB}(-4,11)$

ومنه: $\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}+11\vec{j}$

5. إحداثيات مجموع متجهتين-إحداثيات ضرب متجهة في عدد حقيقي:

مثال: نعتبر في الأساس $(\vec{i},\vec{j})$ المتجهتين $\vec{u}(3,-2)$ و $\vec{v}(-5,1)$

حدد زوج إحداثيتي المتجهات التالية : $\vec{u}+\vec{v}$ و $5\vec{u}$ و $3\vec{u}-2\vec{v}$

الأجوبة : $\vec{u}(3,-2)$ يعني $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$

$\vec{v}(-5,1)$ يعني $\vec{v}=-5\vec{i}+\vec{j}$

ومنه : $\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{i}+\vec{j}=-2\vec{i}-\vec{j}$ أي : $\vec{u}+\vec{v}(-2,-1)$

زوج إحداثيتي المتجهة $5\vec{u}$ هو $(5\times3,5(-2))$ أي $5\vec{u}(15,-10)$

$3\vec{u}-2\vec{v}=9\vec{i}-6\vec{j}+10\vec{i}-2\vec{j}=19\vec{i}-8\vec{j}$ أي : $3\vec{u}-2\vec{v}(19,-8)$

6. إحداثيتا منتصف قطعة:

خاصية: إذا كانت $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و M منتصف القطعة $[AB]$ فان: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

مثال: حدد زوج إحداثيتي M منتصف القطعة $[AB]$

$A(3,1)$ و $B(-1,2)$

الجواب : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I\left(\frac{3-1}{2};\frac{2+1}{2}\right)$ يعني $I\left(1;\frac{3}{2}\right)$

7. المسافة بين نقطتين:

خاصية: ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما متعامدا ممنظما. إذا كانت: $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ فان: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

مثال: المسافة بين النقطتين $A(3,1)$ و $B(-1,2)$ في معلم متعامد ممنظم هي: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ أي أن $AB=\sqrt{(-1-3)^2+(2-1)^2}$

و بالتالي: $AB=\sqrt{17}$

تمرين1: في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

نعتبر النقط: $A(1,2)$, $B(-3,-1)$, $C(3,-2)$ والمتجهتين $\vec{u}(-2,3)$ و $\vec{v}(2,4)$

1. حدد زوج إحداثيتي النقطة D حيث $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$
2. حدد زوج إحداثيتي I منتصف $[AB]$
3. أحسب المسافات التالية: AB و AC و BC

الأجوبة : 1) لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$ و لدينا : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$

$\overrightarrow{AB}(-3-1;-1-2)$ يعني $\overrightarrow{AB}(-4;-3)$

$\overrightarrow{BD}(x_D-x_B;y_D-y_B)$ يعني $\overrightarrow{BD}(x_D+3;y_D+1)$

ولدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$ اذن : $\begin{cases}x_D+3=-4\\ y_D+1=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D=-7\\ y_D=-4\end{cases}$

2) $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I\left(\frac{1-3}{2};\frac{2-1}{2}\right)$ يعني $I\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

3) $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-3-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(3+3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$

II. شرط استقامية متجهتين:

خاصية و تعريف: لتكن $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ متجهتين من المستوى المنسوب إلى الأساس $(\vec{i},\vec{j})$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا و فقط إذا كان: $xy'-x'y=0$

العدد $xy'-x'y$ يسمى محددة المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i},\vec{j})$

و نكتب: $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y$

مثال: نعتبر في الأساس $(\vec{i},\vec{j})$ المتجهتين $\vec{u}(3,-2)$ و $\vec{v}(-6,4)$

هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتن ؟

الجواب : طريقة 1 : نحسب المحددة :

$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}3 & -6\\ -2 & 4\end{vmatrix}=3\times4-(-6)\times(-2)=12-12=0$

ومنه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتن

طريقة 2 : $\vec{u}(3,-2)$ يعني $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$

$\vec{v}(-6,4)$ يعني $\vec{v}=-6\vec{i}+4\vec{j}$

$\vec{v}=-6\vec{i}+4\vec{j}=-2(3\vec{i}-2\vec{j})=-2\vec{u}$ ومنه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتن

تمرين2: في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

نعتبر النقط: $A\left(\frac{1}{2},3\right)$, $B(-2,-2)$, $C(1,4)$ و المتجهة $\vec{u}(1,3)$

1. حدد x بحيث $\vec{u}$ و $\vec{v}(x-2,5)$ مستقيميتان
2. بين أن النقط A و B و C مستقيمية

الجواب :1) $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتن يعني : $\det(\vec{u};\vec{v})=0$

يعني : $\begin{vmatrix}1 & x-2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=0$ يعني : $5\times1-3(x-2)=0$

يعني : $5-3x+6=0$ يعني : $x=\frac{11}{3}$

2) $\overrightarrow{AB}\left(-2-\frac{1}{2};-2-3\right)$ يعني $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{5}{2};-5\right)$

$\overrightarrow{AC}\left(1-\frac{1}{2};4-3\right)$ يعني $\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{2};1\right)$

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ -5 & 1\end{vmatrix}=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=0$

ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتن وبالتالي :

النقط A و B و C مستقيمية

III. مستقيم معرف بنقطة و متجهة:

1. متجهة موجهة لمستقيم:

تعريف: ليكن (D) مستقيما يمر من نقطتين مختلفتين A و B.

كل متجهة $\vec{u}$ غير منعدمة و مستقيمية مع المتجهة $\overrightarrow{AB}$ تسمى متجهة موجهة للمستقيم (D).

نقول كذلك أن (D) يمر من A و موجه بالمتجهة $\vec{u}$ ولدينا كذلك $\overrightarrow{AB}$ متجهة موجهة للمستقيم (AB).

مثال: نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$

حدد متجهة موجهة ل (D)

الجواب: النقطتان $A(1;0)$ و $B(0;-1)$ تنتميان إلى (D).

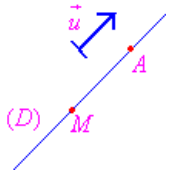
إذن: $\overrightarrow{AB}(-1;-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (D).

تعريف: لتكن A نقطة من المستوى و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة.

مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

هي المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$. و نكتب $D(A;\vec{u})$

2. تمثيل بارامتري لمستقيم:



مثال: نعتبر النقطة $A(3;-5)$ و المتجهة $\vec{u}(-2;3)$

حدد تمثيلاً بارامتري للمستقيم $D(A;\vec{u})$

الجواب : $\begin{cases}x=3-2t\\ y=-5+3t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$

ملحوظة: كل مستقيم (D) يقبل ما لا نهاية من التمثيلات البارامترية.

تمرين3: في المستوى $(o;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط: $A(-2,1)$, $B(3,7)$

1. حدد تمثيلا باراميتريا للمستقيم (AB)
2. حدد نقط تقاطع المستقيم (AB) مع محوري المعلم

الجواب :1) $\overrightarrow{AB}(3+2;7-1)$ يعني : $\overrightarrow{AB}(5;6)$

المستقيم يمر من النقطة $A(-2,1)$ و $\overrightarrow{AB}$ موجهة له

اذن : $(AB)\begin{cases}x=-2+5t\\ y=1+6t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

2) أ) التقاطع مع محور الأفاصيل: $y=6t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{6}$

$x=5t-2$ يعني $x=-\frac{17}{6}$ ومنه نقطة التقاطع هي : $C\left(-\frac{17}{6},0\right)$

أ) التقاطع مع محور الأراتيب : $x=5t-2=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{5}$

$y=6t+1$ يعني $y=6\times\frac{2}{5}+1=\frac{17}{5}$ ومنه نقطة التقاطع هي : $D\left(0,\frac{17}{5}\right)$

IV. معادلة ديكارتية لمستقيم في المستوى:

خاصية: ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما. كل مستقيم (D) في المستوى له معادلة على الشكل $ax+by+c=0$ حيث $a\neq0$ أو $b\neq0$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (D). $\vec{u}(-b;a)$ متجهة موجهة ل (D)

تمرين4: مثال1: نعتبر في المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ النقط $A(2;4)$ و $B(5;-1)$ حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

الجواب: طريقة1

$M(x,y)\in(AB)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتين

يعني $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0$ يعني $\begin{vmatrix}x-2 & 3\\ y-4 & -5\end{vmatrix}=0$ لأن: $\overrightarrow{AM}(x-2,y-4)$ و $\overrightarrow{AB}(3,-5)$

يعني $-5(x-2)-3(y-4)=0$ يعني $-5x+10-3y+12=0$

يعني (AB) $-5x-3y+22=0$

طريقة2: نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل : (AB) $ax+by+c=0$

ونعلم أن : $\overrightarrow{AB}(3,-5)$ متجهة موجهة له : $\overrightarrow{AB}(-b,a)$

اذن : $-b=3$ و $a=-5$ اذن : $b=-3$ و $a=-5$

ومنه: $(AB)\ -5x-3y+c=0$

يجب الآن البحث عن c نعلم أن: $A\in(AB)$ اذن احداثياته تحقق

المعادلة : $(AB)\ -5\times2-3\times4+c=0$ يعني: $c=22$

ومنه: $(AB)\ -5x-3y+22=0$

تمرين5:مثال2: نعتبر في المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ النقطة $A(1;2)$ و المتجهة $\vec{u}(-2;1)$

1. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من النقطة : $A(1;2)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$
2. هل النقطة $B(0;5)$ تنتمي للمستقيم (D)؟
3. حدد نقطة أخرى تنتمي ل (D)

الجواب :1) طريقة1: $M(x,y)\in(D)$: يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين

يعني $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$ يعني $\begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix}=0$ لأن: $\overrightarrow{AM}(x-1,y-2)$

يعني $1(x-1)+2(y-2)=0$ يعني $x-1+2y-4=0$

يعني $(D)\ x+2y-5=0$

طريقة2:نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)\ ax+by+c=0$ ونعلم أن : $\vec{u}(-2,1)$ متجهة موجهة له : $\vec{u}(-b,a)$

اذن : $-b=-2$ و $a=1$ اذن : $b=2$ و $a=1$

ومنه: $1x+2y+c=0$ يجب الآن البحث عن c

نعلم أن: $A\in(AB)$ اذن احداثياته تحقق المعادلة : $2+4+c=0$

يعني: $c=-5$ ومنه: $(D)\ x+2y-5=0$

2) $B(0,5)$???

نعوض باحداثيات النقطة B في معادلة المستقيم (D)

$0+2\times5-5=10-5=5\neq0$ اذن : $B\notin(D)$

3)نعطي للمتغير x قيمة ونبحث عن y في معادلة (D) أو العكس

مثلا : نضع $x=1$ يعني $2y=4$ يعني $y=2$ ومنه: $C(1;2)\in(D)$

خاصية: ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما و a و b و c أعدادا حقيقية حيث $a\neq0$ أو $b\neq0$. مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث $ax+by+c=0$ هي مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{u}(-b;a)$.

تمرين6:مثال: نعتبر في المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (D) الذي معادلته : $2x-5y+4=0$

1. حدد متجهة موجهة بالمتجهة للمستقيم (D)
2. أرسم المستقيم (D)

الجواب: 1) $ax+by+c=0$ $\qquad 2x-5y+4=0$

اذن: $a=2$ و $a=-5$ ومنه : $\vec{u}(5,2)\Leftrightarrow\vec{u}(-b,a)$ موجهه ل (D)

2)لرسم المستقيم يكفي البحث عن نقطتين مختلفتين تنتميان ل (D)

V. الأوضاع النسبية لمستقيمين:

لقد تعرفت في السنة الفارطة على توازي مستقيمين باستعمال صيغتي معادلتيهما المختصرة.

خاصية: نعتبر المستقيمين $(D):ax+by+c=0$ و $(\Delta):a'x+b'y+c'=0$

(D) و (Δ) متوازيان إذا و فقط إذا كان: $ab'-a'b=0$.

برهان: (Δ) و (D) متوازيان يعني أن المتجهتين المتجهتين لهما مستقيتان أي أن: $\vec{U}(-b,a)$ و $\vec{V}(-b',a')$ مستقيميتان.يعني أن: $ab'-a'b=0$

مثال1: نعتبر المستقيمين $(D):x-2y+6=0$ و $(D'):-2x+4y+1=0$

بين $(D)\parallel(D')$

الجواب $(-2)\times(-2)-4\times1=4-4=0$ اذن: $(D)\parallel(D')$

تمرين7: نعتبرفي المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم المستقيمات: $(D_1):6x+3y+2=0$ و $(D_2):3x-2y-1=0$ و النقط التالية : $A(1,2)$ و $B(3,-2)$

1. بين أن (D_1) و (D_2) متقاطعان و حدد نقطة تقاطعهما
2. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).
3. حدد الوضع النسبي للمستقيمين (D_1) و (AB).
4. حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (Δ) المار من $C(1,2)$ و الموازي للمستقيم (D_1).

الجواب 1): $(6)\times(-2)-3\times3=-12-9=-21\neq0$ اذن: (D_1) و (D_2) متقاطعان

لتحديد نقطة التقاطع نحل النظمة التالية: $\begin{cases}6x+3y+2=0\\3x-2y-1=0\end{cases}$

$(1)\begin{cases}6x+3y=-2\\3x-2y=1\end{cases}$ ونستعمل احدى الطرق لحل هذه النظمة

محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}6 & 3\\3 & -2\end{vmatrix}=-21\neq0$ و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:هو

$x=\dfrac{\begin{vmatrix}-2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{1}{21}$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}6 & -2\\3 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{12}{-21}=\dfrac{4}{7}$ و منه نقطة التقاطع : $H\left(\dfrac{1}{21};\dfrac{4}{7}\right)$

2):نعلم أن معادلة مستقيم (AB) تكتب على الشكل : $ax+by+c=0$

ونعلم أن : $\overrightarrow{AB}(2,-4)$ متجهة موجهة له : $\overrightarrow{AB}(-b,a)$

اذن: $-b=2$ و $a=-4$ اذن: $b=-2$ و $a=-4$ ومنه: $-4x-2y+c=0$

يجب الآن البحث عن c نعلم أن: $A\in(AB)$ اذن احداثياته تحقق:

المعادلة : $-4-4+c=0$ يعني: $c=8$ ومنه: $-4x-2y+8=0$

يعني: $-2(2x+y-4)=0$ يعني: $(AB)\ 2x+y-4=0$

3) $(D_1):6x+3y+2=0$ و $(AB)\ 2x+y-4=0$

$(6)\times(1)-3\times2=6-6=0$ اذن: (D_1) و (AB) متوازيين

4) (Δ) يوازي للمستقيم (D_1) يعني المتجهة الموجهة ل (D_1) هي أيضا موجهه ل (Δ)

اذن : $\vec{u}(-b,a)$ أي $\vec{u}(-3,6)$ موجهه ل $(D_1):6x+3y+2=0$

وبما أن (Δ) يمر من $C(1,2)$ فان: $(\Delta)\begin{cases}x=1-3t\\y=2+6t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

تمرين8: نعتبر المستقيمين $(D):3x-5y+6=0$ $\qquad (D'):x-y=0$

1. حدد تمثيلا باراميتريا لكل من المستقيم (D) و (D')
2. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من $B(1,0)$ و الموازي ل (EC) حيث $E(3,3)$ و $C(4,0)$
3. حدد إحداثيات النقط I تقاطع (Δ) و (D) و إحداثيات النقطة J تقاطع (Δ) و (D)
4. بين أن J منتصف $[IB]$

أجوبة: 1) أ) متجهة موجهة ل $(D):3x-5y+6=0$ هي: $\vec{u}(-b,a)$ أي: $\vec{u}(5,3)$

نحدد نقطة يمر منها المستقيم (D):

نضع مثلا : $x=0$ اذن : $(D):3\times0-5y+6=0$

يعني $y=\frac{6}{5}$ ومنه $I\left(0,\frac{6}{5}\right)\in(D)$ ومنه فان: $(D)\begin{cases}x=0+5t\\ y=\frac{6}{5}+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

ب) متجهة موجهة ل$(D'):x-y=0$ هي: $\vec{u'}(-b,a)$ أي: $\vec{u'}(1,1)$

نحدد نقطة يمر منها المستقيم (D')

نضع مثلا : $x=0$ اذن : $(D'):0-y=0$

يعني $y=0$ ومنه $O(0,0)\in(D')$

ومنه فان: $(D')\begin{cases}x=0+1k\\ y=0+1k\end{cases}(k\in\mathbb{R})$

2)(Δ) يمر من B و يوازي ل(EC) اذن: $\overrightarrow{EC}$ متجهة موجهة ل(Δ)

ولدينا: $\overrightarrow{EC}(1;-3)$ وبالمقارنة مع: $\overrightarrow{EC}(-b,a)$ نجد : $b=-1$ و $a=-3$

ومنه: $-3x-y+c=0$

ونعلم أن: (Δ) يمر من $B(1,0)$ اذن احداثياته تحقق:

المعادلة : $-3+0+c=0$ يعني: $c=3$ ومنه: $(\Delta)\ -3x-y+3=0$

3)أ) إحداثيات I تقاطع (Δ) و (D)

لتحديد نقطة التقاطع نحل النظمة التالية: $(1)\ \begin{cases}3x-5y+6=0\\ -3x-y+3=0\end{cases}$

ونستعمل احدى الطرق لحل هذه النظمة

نجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد: $y=\frac{3}{2}\Leftrightarrow -6y+9=0$

وبالتعويض في المعادلة نجد: $x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -3x-\frac{3}{2}+3=0$

و منه نقطة التقاطع : $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

3)ب) إحداثيات J تقاطع (Δ) و (D')

نحل النظمة التالية: $\begin{cases}x-y=0\\ -3x-y+3=0\end{cases}$

$x-y=0\Leftrightarrow x=y$ وبالتعويض في المعادلة الأخرى نجد:

$-3x-x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}$ و منه نقطة التقاطع : $j\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$

4)نبين أن J منتصف $[IB]$

يكفي أن نبين أن : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$ ؟؟؟

لدينا: $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right)$ ولدينا $\overrightarrow{JB}\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right)$ اذن: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$ ومنه J منتصف $[IB]$

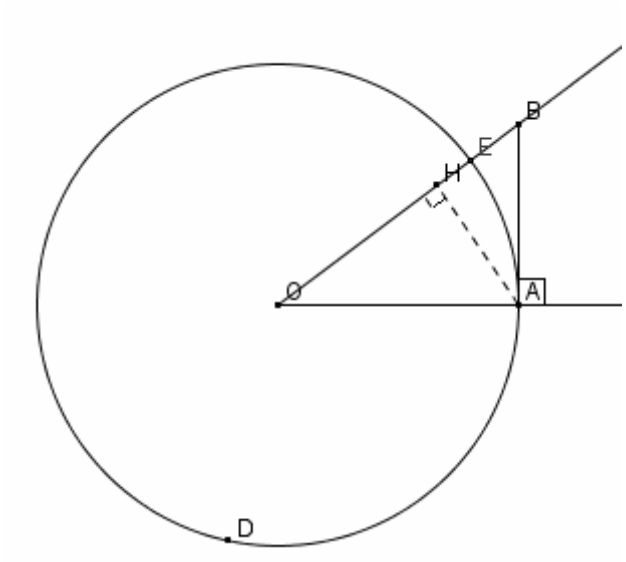
الحساب المثلثي – الجزء1

القدرات المنتظرة	الدورة الأولى 15 ساعة
*- استعمال المحسبة العلمية لتحديد قيمة مقربة ازاوية محددة بأحد نسبها المثلثية والعكس. *- التمكن من النسب المثلثية للزوايا الاعتيادية وتطبيق مختلف العلاقات	

I- تذكير و اضافات

1- أنشطة للتذكير

تمرين1



نعتبر الشكل التالي حيث $OA = 4$ و $AB = 3$ و H المسقط العمودي لـ A على (OB) :

1- أحسب OB

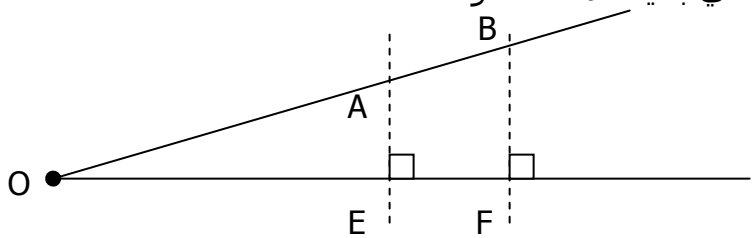
2- أ/ أحسب $\cos\left(\widehat{AOB}\right)$ ثم استنتج قيمة مقربة لقياس الزاوية $\left[\widehat{AOB}\right]$

ب/ استنتج المسافة OH

3- أحسب $\tan\left(\widehat{AOB}\right)$ ثم استنتج $\sin\left(\widehat{AOB}\right)$

تمرين2

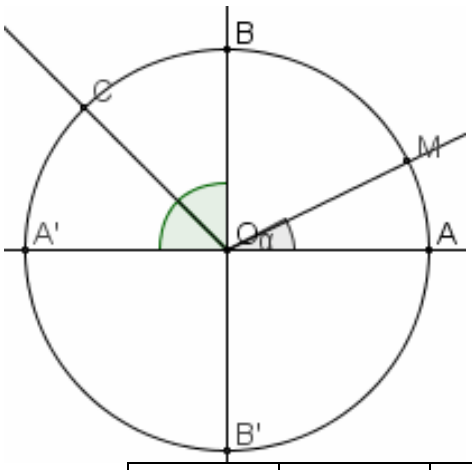
نعتبر الشكل التالي بحيث $AB = 5$ و $EF = 4$



أحسب $\cos\left(\widehat{AOE}\right)$ ثم استنتج $\sin\left(\widehat{AOE}\right)$

1- وحدات قياس الزوايا و الاقواس الهندسية – زاوية مركزية

1- أنشطة



لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R. نعتبر A و B و C و A' و B' و M نقط من (C) بحيث α قياس للزاوية الهندسية $\left[\widehat{AOM}\right]$ بالدرجة

1- اتمم الجدول التالي

الزاوية المركزية	$\left[\widehat{AOA'}\right]$	$\left[\widehat{AOB}\right]$	$\left[\widehat{AOC}\right]$	$\left[\widehat{AOB'}\right]$	$\left[\widehat{AOM}\right]$
قياس الزاوية المركزية بالدرجة					$\alpha°$
طول القوس الهندسية المرتبطة بها					l

2- بين أن $180°$ و $90°$ و $135°$ و $270°$ متناسبة πR و $\frac{\pi}{2}R$ و $\frac{3\pi}{4}R$ و $\frac{3\pi}{2}R$ على التوالي

3- حدد l بدلالة α و π و R

4- لتكن M' نقطة من (C) حيث طول القوس الهندسية $[AM']$ هو R.

حدد β قياس الزاوية المركزية $\left[\widehat{AOM'}\right]$ بالدرجة.

2- وحدات قياس الزوايا

لقياس الزوايا هناك ثلاث وحدات هي الدرجة و الغراد و الراديان.

أ/ تعريف الراديان

الراديان هو قياس زاوية مركزية، في دائرة شعاعها R ، تحصر قوسا دائرية طولها R .
نرمز لها بـ rd أو rad

ملاحظة $\pi rd = 200gr = 180^\circ$ (gr : يرمز للغراد)

ب/ نتيجة

إذا كان x قياس زاوية بالراديان و y قياسها بالدرجة و z قياسها بالغراد فان $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} = \frac{z}{200}$

ج/ قياس قوس هندسية

قياس قوس هندسية هو قياس الزاوية المركزية التي تحصره.

د/ طول قوس هندسية

إذا كان α قياس قوس هندسية بالراديان، في دائرة شعاعها R ، فان طول هذه القوس هو αR.

ملاحظة

طول قوس هندسية، في دائرة شعاعها 1 هو قياس الزاوية المركزية التي تحصرها.

تمارين تطبيقية

تمرين1

اتمم الجدول التالي

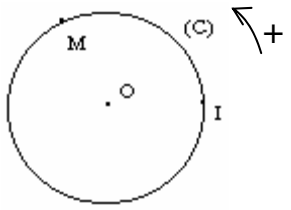
قياس زاوية بالدرجة	90°		45°	30°	0°
قياسها بالراديان		$\frac{\pi}{3}$			

تمرين2

ليكن ABC مثلثا متساوي الاضلاع حيث $AB = 5cm$ و نعتبر (C) الدائرة التي مركزه A و تمر من B. أحسب l طول القوس الهندسية المحصورة بالزاوية المركزية $\left[\widehat{BAC}\right]$

II- الدائرة المثلثية

1- توجيه دائرة - توجيه مستوى

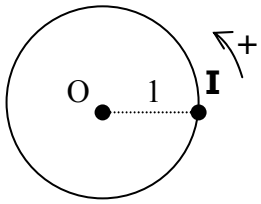


لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R و I نقطة من (C).
لو أردنا أن ننطلق من I لندور حول (C) ، لوجدنا أنفسنا أمام منحيين .
توجيه الدائرة (C) هو اختيار أحد المنحيين منحى موجبا (أو مباشرا)
و الآخر منحى سالبا (أو غير مباشر).
عادة نأخذ المنحى الموجب المنحى المعاكس لحركة عقارب الساعة .
النقطة I تسمى أصل الدائرة (C).

عندما توجه جميع دوائر المستوى توجيها موحدا فإننا نقول إن المستوى موجه.

2- الدائرة المثلثية

تعريف الدائرة المثلثية هي دائرة شعاعها1 مزودة بنقطة أصل و موجهة توجيها موجبا.



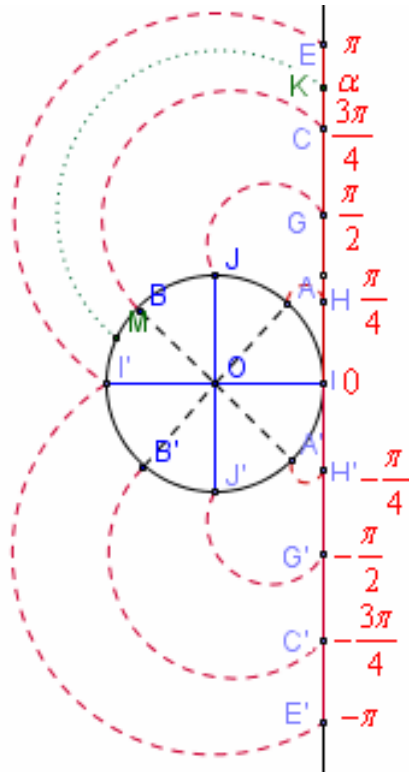
III– الأفاصيل المنحنية.

1- الأفصول المنحني الرئيسي لنقطة على الدائرة المثلثية

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها I. نعتبر المجال $]-\pi;\pi]$ حيث 0 أفصول I في المحور العمودي على (OI). حدد محيط الدائرة وشعاع الدائرة.

إذا لففنا القطعة الممثلة للمجال $]-\pi;\pi]$ على الدائرة (C) نلاحظ أن كل عدد α من $]-\pi;\pi]$ ينطبق مع نقطة وحيدة M من (C) و كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi;\pi]$

العدد α يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ M



خاصية و تعريف

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها I.

كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi;\pi]$ و كل عدد α من $]-\pi;\pi]$ يمثل نقطة وحيدة M من (C).

العدد α يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ M

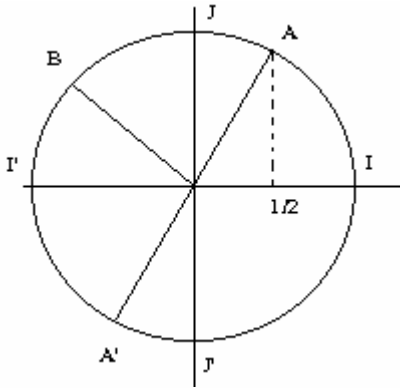
ملاحظة قياس الزاوية الهندسية $\left[\widehat{IOM}\right]$ هو $|\alpha|$ راديان

تمرين1

على دائرة مثلثية (C) أصلها I. أنشئ النقط A و B و C و D و E و F و G و H التي افاصيلها المنحنية الرئيسية هي $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{3\pi}{4}$ على التوالي

تمرين2

(C) دائرة مثلثية أصلها I . حدد الأفاصيل المنحنية الرئيسية للنقط B; A';A; J'; J; I';I الممثلة في الشكل كما يلي



2- الأفاصيل المنحنية لنقطة على الدائرة المثلثية

نعتبر (C) دائرة مثلثية أصلها I. نعتبر المحور $(\Delta)=D(I,E)$ حيث $(OI)\perp(\Delta)$.

لتكن نقطة M من (C) أفصولها المنحني الرئيسي α.

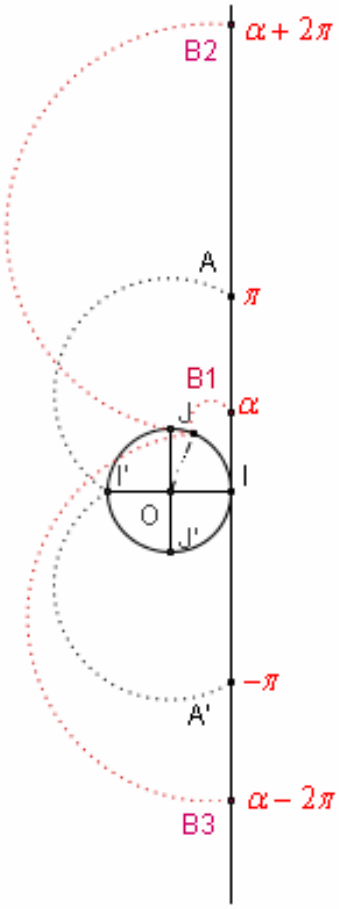
لنحدد كل الأعداد التي تنطبق مع M اذا لففنا المستقيم العددي على (C)

نلاحظ اننا اذا لففنا المستقيم العددي الممثل لـ $\mathbb{R}$ على (C) النقطة M تنطبق مع الأعداد

..... $\alpha+4\pi$; $\alpha+2\pi$; α ; $\alpha-2\pi$; $\alpha-4\pi$ .....

كل هذه الأعداد تسمى الأفاصيل المنحنية لنقطة M

نلاحظ أن هذه الأعداد تكتب بشكل عام عل شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$



تعريف

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I. و ليكن α أفصولها المنحني الرئيسي

كل عدد يكتب على الشكل $\alpha+2k\pi$ بحيث k عنصر من $\mathbb{Z}$ يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M.

تمرين حدد الأفاصيل المنحنية للنقطتين A و B ذات الافصولين المنحنيين الرئيسيين $\frac{\pi}{5}$ و $-\frac{2\pi}{3}$ على التوالي

تمرين (C) دائرة مثلثية أصلها I .

نعتبر $\frac{34\pi}{3}$ أفصول منحني لنقطة M . أنشئ M

ب- خاصيات

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I. و ليكن α أفصولها المنحني الرئيسي

بين اذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x-y=2\lambda\pi$

خاصية - إذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x-y=2\lambda\pi$ و نكتب $x\equiv y \quad [2\pi]$ و نقرأ x يساوي y بترديد 2π.

- إذا كان x أفصول منحني للنقطة M فان جميع الأفاصيل المنحنية للنقطة M تكتب على شكل $x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

تمرين حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة التي إحدى أفاصيلها المنحنية $\alpha=\frac{-227\pi}{6}$

تمرين مثل على الدائرة المثلثية النقط $C;B;A$ التي أفاصيلها المنحنية على التوالي هي

$$\frac{-108\pi}{12} \quad ; \quad \frac{37\pi}{3} \quad ; \quad 7\pi$$

تمرين أنشئ على الدائرة المثلثية النقط M_k التي أفاصيلها المنحنية $-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

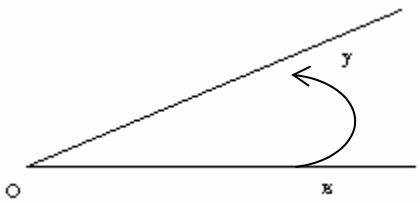
IV– الزوايا الموجهة

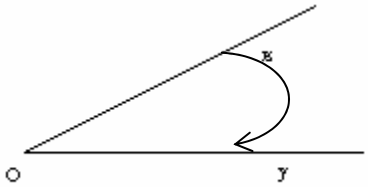
4- الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم

أ- تعريف

في المستوى الموجه نعتبر $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم لهما نفس الأصل

الزوج $([O;x[;[O;y))$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم و يرمز لها بالرمز $(\widehat{Ox;Oy})$





ب- قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم

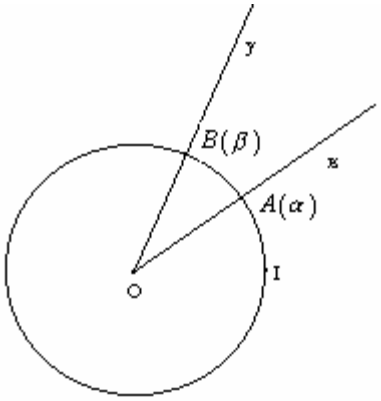
تعريف وخاصية

لتكن $(\widehat{Ox;Oy})$ زاوية موجهة لنصفي مستقيم ، و (C) دائرة مثلثية مركزها O ، A و B نقطتي تقاطع (C) و نصفي مستقيم $[O;x[$ و $[O;y[$ على التوالي

ليكن α و β أفصولين منحنيين للنقطتين A و B على التوالي .

العدد $\beta-\alpha$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$.

كل عدد حقيقي يكتب على الشكل $\beta-\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$.



نرمز لقياسات الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$ بالرمز $(\overline{Ox;Oy})$ نكتب $k\in\mathbb{Z}$ $\quad (\overline{Ox;Oy})=\beta-\alpha+2k\pi$

و نكتب أيضا $(\overline{Ox;Oy})\equiv\beta-\alpha \quad [2\pi]$

خاصية و تعريف

لكل زاوية موجهة لنصفي مستقيم قياس وحيد ينتمي إلى المجال $]-\pi;\pi]$ يسمى القياس الرئيسي لهذه الزاوية الموجهة.

خاصية

إذا كان θ قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$ فان $\theta+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ قياس للزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$.

إذا كان α و β قياسين للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$ فان $\alpha-\beta\equiv 0 \quad 2\pi$

أي $(k\in\mathbb{Z}/ \quad \alpha-\beta=2k\pi)$

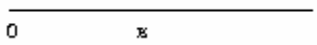
ملاحظات

* إذا كانت M نقطة من دائرة مثلثية أصلها I و مركزها O فان الأفاصيل المنحنية للنقطة M هي قياسات الزاوية الموجهة $(\widehat{OI;OM})$ و أن الافصول المنحني الرئيسي لـ M هو القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\widehat{OI;OM})$

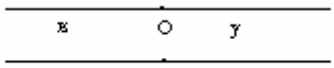
* القيمة المطلقة للقياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$ هي قياس الزاوية الهندسية $(\widehat{xOy})$.

بعض الزوايا الخاصة

الزاوية المنعدمة $(\overline{Ox;Ox})\equiv 0 \quad [2\pi]$

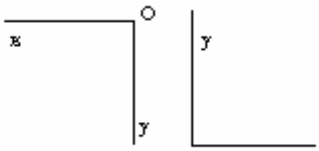


الزاوية المستقيمة $(\overline{Ox;Oy})\equiv\pi \quad [2\pi]$ $(\overline{Oy;Ox})\equiv\pi \quad [2\pi]$



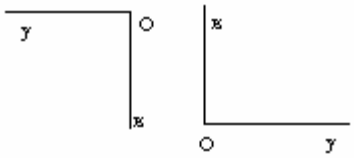
الزاوية القائمة - $(\overline{Ox;Oy})\equiv\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$ زاوية قائمة موجبة



- $(\overline{Ox;Oy})\equiv-\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$ زاوية قائمة سالبة.



تمرين

1- بين أن القياسات التالية تمثل قياسات نفس الزاوية $\frac{601\pi}{6}$; $\frac{-143\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$

2- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات 47π ; -36π ; $\frac{52\pi}{5}$; $-\frac{25\pi}{3}$

3- أنشئ زاوية موجهة $(\widehat{Ox;Oy})$ قياسها $\frac{-234\pi}{5}$.

تمرين أنشئ ABC مثلث متساوي الأضلاع حيث $(\overline{AB;AC})\equiv-\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

ج- علاقة شال ونتائجها

علاقة شال

إذا كانت $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم لها نفس الأصل فان

$(\overline{Ox;Oy})+(\overline{Oy;Oz})\equiv(\overline{Ox;Oz}) \quad [2\pi]$

نتائج

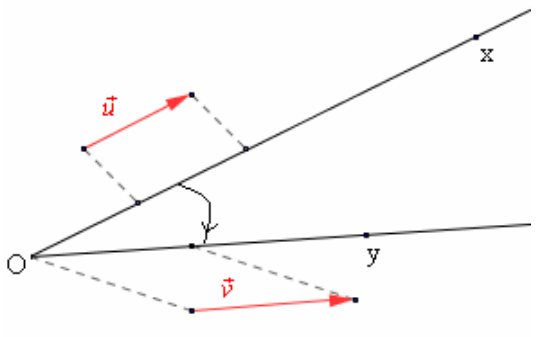
* اذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم فان $(\overline{Ox;Oy})\equiv-(\overline{Oy;Ox}) \quad [2\pi]$

* اذا كانت $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم تحقق $(\overline{Ox;Oy})\equiv(\overline{Ox;Oz}) \quad [2\pi]$ فان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم منطبقان.

و هذا يعني أنه اذا كان $[Ox[$ نصف مستقيم و α عددا حقيقيا فانه يوجد نصف مستقيم وحيد $[O;y[$ بحيث $[2\pi]$ $\left(\overline{Ox;Oy}\right)\equiv\alpha$.

د- زاوية زوج متجهتين غير منعدمتين

تعريف



لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى الموجه. و $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم موجهين على التوالي بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

زاوية زوج المتجهتين $(\vec{u};\vec{v})$ هي الزاوية الموجهة $\left(\widehat{Ox;Oy}\right)$

و يرمز لها بالرمز $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

ملاحظة

مجموعة قياسات الزاوية $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ هي مجموعة قياسات الزاوية $\left(\widehat{Ox;Oy}\right)$.

علاقة شال ونتائجها

علاقة شال

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة متجهات غير منعدمة فان

$$\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)+\left(\overline{\vec{v};\vec{w}}\right)\equiv\left(\overline{\vec{u};\vec{w}}\right)\quad[2\pi]$$

نتائج

* اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين فان $[2\pi]$ $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv-\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$

* اذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة متجهات غير منعدمة تحقق $[2\pi]$ $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\left(\overline{\vec{u};\vec{w}}\right)$

فان $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى.

تمرين

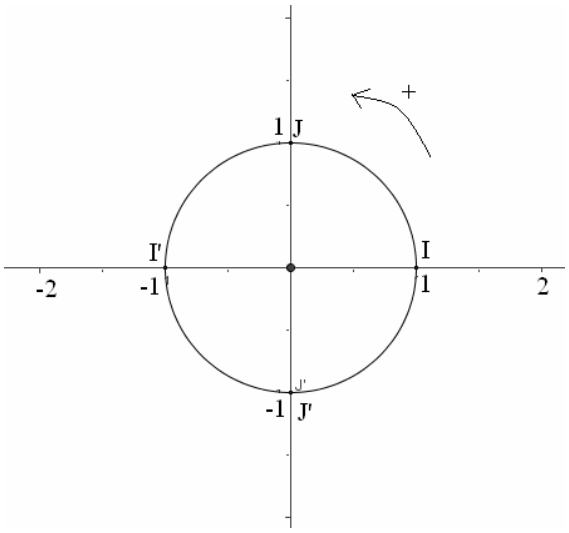
لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I. نعتبر على (C) النقط التالية المعرفة بأفاصيلها المنحنية $A(\pi)$ $B\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ $E\left(\frac{23\pi}{4}\right)$ $F\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$

أعط قياسا لكل من الزاويا التالية ، ثم حدد القياس الرئيسي لكل منهن

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}}\right)$

V - النسب المثلثية

1- المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثية



لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I .

ولتكن J من (C) بحيث $\left(\widehat{OI;OJ}\right)$ زاوية قائمة موجبة

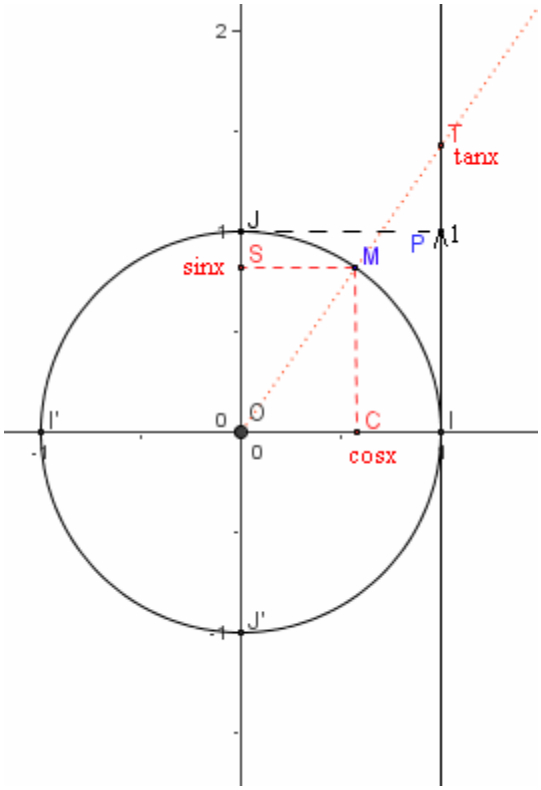
المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية (C).

لتكن J' من (C) بحيث $\left(\widehat{OI;OJ'}\right)$ زاوية قائمة سالبة .

المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ'}\right)$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم الغير المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية (C).

2- النسب المثلثية

2-1 تعاريف



لتكن (C) دائرة مثلثية و $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بها. لتكن M نقطة من (C)

و x أفصولا منحنيا لها . نعتبر C المسقط العمودي لـ M على (OI) و S المسقط العمودي لـ M على (OJ)

*- العدد الحقيقي أفصول النقطة M في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى جيب تمام العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\cos x$

*- العدد الحقيقي أرتوب النقطة M في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى جيب العدد الحقيقي x . نرمز له بـ $\sin x$

*- ليكن Δ المماس لـ (C) عند I و النقطة $P(1;1)$.

لتكن T نقطة تقاطع (OM) و Δ أي

$$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

العدد الحقيقي أفصول T في المعلم $(I;P)$ يسمى ظل العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\tan x$.

ملاحظة و اصطلاحات

- إذا كان x أفصول منحني لنقطة M فان $M(\cos x;\sin x)$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\cos x\end{array}$ تسمى دالة جيب التمام حيز تعريفها $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\cos$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\sin x\end{array}$ تسمى دالة الجيب حيز تعريفها $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\sin$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\tan x\end{array}$ تسمى دالة الظل حيز تعريفها $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ يرمز لها بـ $\tan$

2-2- خاصيات

*- كيفما كان وضع M نقطة من (C) أفصولها منحي x النقطة C تنتمي الى القطعة $[II']$ و S تنتمي الى $[JJ']$ حيث $J(0;1)$; $J'(0;-1)$; $I'(-1;0)$; $I(1;0)$

لكل $x\in\mathbb{R}$ $\quad -1\le\sin x\le 1 \quad -1\le\cos x\le 1$

*- لكل $x\in\mathbb{R}$ $\quad \cos^2 x+\sin^2 x=1$

*- لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

*- نعلم أن جميع الأعداد الحقيقية التي تكتب $x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، أفاصيل منحنية لنفس النقطة M

لكل $x\in\mathbb{R}$ $\quad \sin(x+2k\pi)=\sin x \quad ; \quad \cos(x+2k\pi)=\cos x$

- مهما كانت $M(x+k\pi)$ لدينا أفصـــول T هو $\tan x$

لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad \tan(x+k\pi)=\tan x$

حالة خاصة لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad \tan(x+\pi)=\tan x$

*- بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على

- $\sin(-x) = -\sin x \quad ; \quad \cos(-x) = \cos x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

نعبرعن هذا بقولنا ان الدالة cos زوجية و أن الدالة sin فردية.

- $\tan(-x) = -\tan x$ كل $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

نعبر عن هذا بقولنا ان الدالة tan فردية.

- $\sin(\pi - x) = \sin x \quad ; \quad cos(\pi - x) = -\cos x$ لكل $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x \quad ; \quad cos(\pi + x) = -\cos x$ لكل $x \in \mathbb{R}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad ; \quad cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ لكل $x \in \mathbb{R}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad ; \quad cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

3-2- نسب مثلثية اعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

تمارين

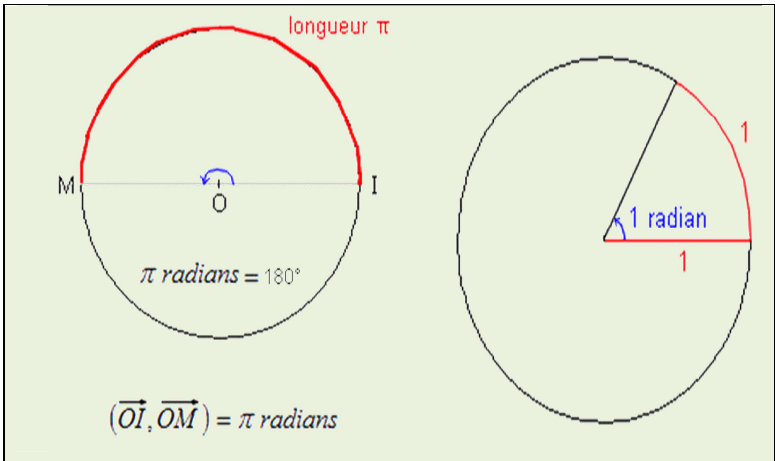
تمرين1 أحسب $\sin\frac{-7\pi}{2}$; $\sin\frac{53\pi}{6}$; $\cos\frac{-37\pi}{4}$; $\cos\frac{34\pi}{3}$

تمرين2 أ- حدد $1 + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{6} + ... + \cos\frac{11\pi}{6}$

ب- بسط $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) - \cos(7\pi - x)$

الحساب المثلثي

وحدات قياس الزوايا



- قياس زاوية مستقيمية هو $180°$ أما قياسها بالرديان فهو π (طول نصف دائرة شعاعها 1)
- توجد وحدة قياس أخرى لقياس الزوايا و هي الغراد و قياس زاوية مستقيمية بالغراد هو 200 غراد
- إذا كانت α و β و γ هي قياسات زاوية خندسية على التوالي بالدرجة و الرديان و الغراد فإن :

$$\frac{\alpha}{180}=\frac{\beta}{\pi}=\frac{\gamma}{200}$$

الدائرة المثلثية

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

الدائرة المثلثية هي دائرة مركزها O أصل المعلم و شعاعها 1

مزودة بنقطة أصل I و موجهة توجيها موجبا . التوجيه الموجب هو منحى الدوران حول الدائرة انطلاقا من I في المنحى المضاد لحركة عقارب الساعة

الأفاصيل المنحنية لنقطة من دائرة مثلثية

لتكن $(\mathscr{C})$ دائرة مثلثية و O مركزها و I أصلها و α عددا حقيقيا

- في حالة $\alpha>0$ ، نعتبر النقطة M من $(\mathscr{C})$ بحيث القياس بالرديان لطول القوس $\widehat{IM}$ هو α عند التنقل على $(\mathscr{C})$ في المنحى الموجب
- في حالة $\alpha<0$ ، نعتبر النقطة M من $(\mathscr{C})$ بحيث القياس بالرديان لطول القوس $\widehat{IM}$ هو $-\alpha$ عند التنقل على $(\mathscr{C})$ في المنحى السالب

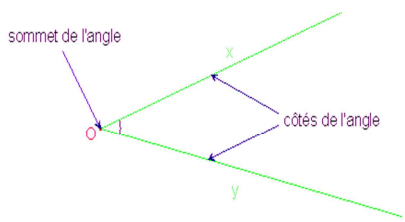
- في كلتا الحالتين α يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M على $(\mathscr{C})$ و نكتب $M(\alpha)$
- إذا كان $\alpha \in]-\pi,\pi]$ نقول إن α هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M و هو وحيد
- $\alpha+2k\pi$ هو أيضا أفصول منحني للنقطة M على $(\mathscr{C})$ أي $M(\alpha)$ و $M(\alpha+2k\pi)$ منطبقتان حيث $k \in \mathbb{Z}$

نقول أن x توافق y بترديد 2π و نكتب $x \equiv y\,[2\pi]$ إذا وفقط إذا كان $x = y + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$

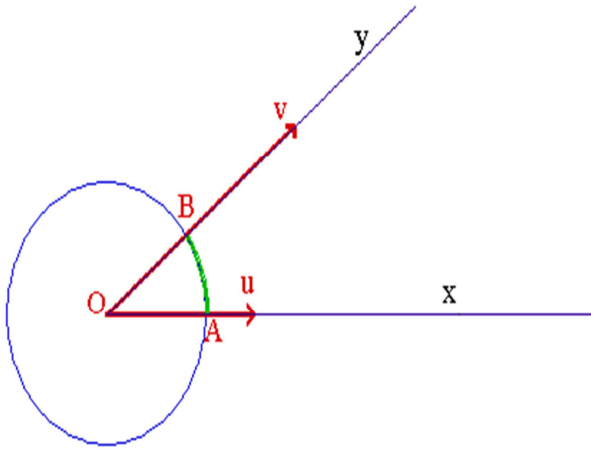
الزاوية الموجهة لنصفي مستقيمين لهما نفس الأصل

ليكن $([ox),[oy))$ نصفي مستقيمين لهما نفس الأصل O

- الزوج $([ox),[oy))$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم نرمز لها بالرمز $(\widehat{ox,oy})$
- الزوج $([oy),[ox))$ يحدد زاوية موجهة لنفي مستقيم نرمز لها بالرمز $(\widehat{oy,ox})$



الزوج $(\widehat{ox,oy})$ يسمى زاوية موجهة لنصفي مستقيمين $[ox)$ و $[oy)$



الزوج $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ يسمى الزاوية الموجهة للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

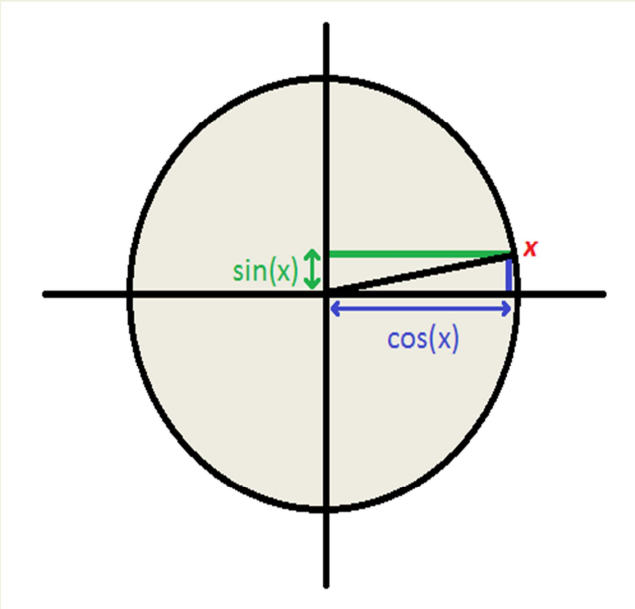
- $\left(\overline{\vec{u},\vec{u}}\right)=2k\pi$
- $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)=-\left(\overline{\vec{v},\vec{u}}\right)+2k\pi$
- علاقة شال $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)=\left(\overline{\vec{u},\vec{w}}\right)+\left(\overline{\vec{w},\vec{v}}\right)+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

النسب المثلثية لعدد حقيقي

لتكن $(\mathscr{C})$ دائرة مثلثية أصلها I و J النقطة من $(\mathscr{C})$ بحيث $\frac{\pi}{2}$ هو القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)$

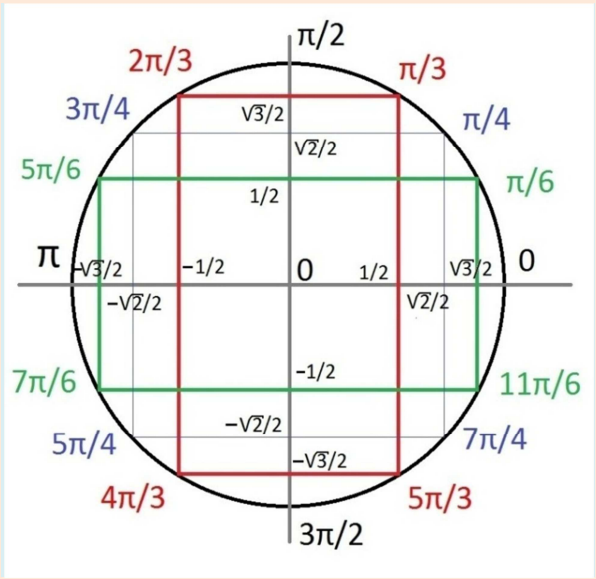
ليكن x أفصولا منحنيا لنقطة M على الدائرة $(\mathscr{C})$

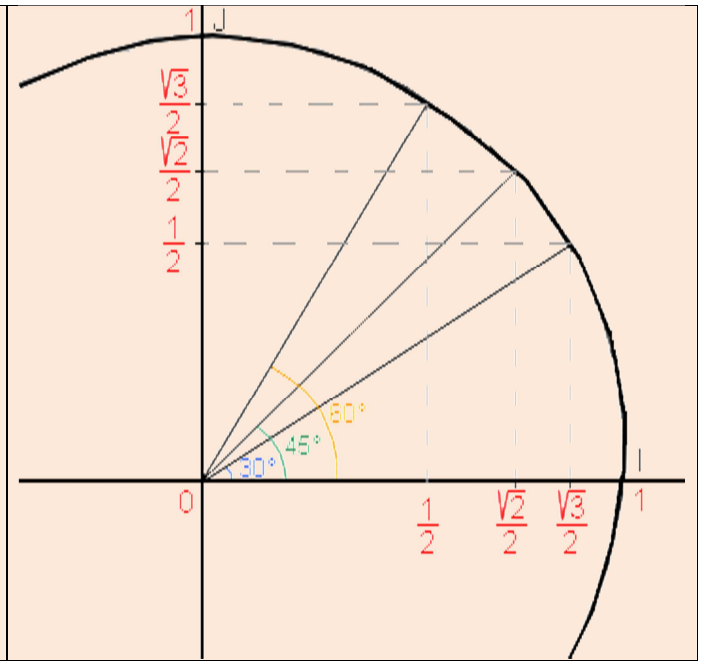
- أفصول النقطة M في المعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى جيب تمام x و نرمز له ب $\cos(x)$
- أرتوب النقطة M في المعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى جيب x و نرمز له ب $\sin(x)$



- ليكن x عددا حقيقيا يخالف $\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

العدد الحقيقي $\frac{\sin x}{\cos x}$ يسمى ظل x و نكتب $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$





	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

$$\begin{cases}\sin(-x)=-\sin(x)\\ \cos(-x)=\cos(x)\end{cases}$$
$$\tan(-x)=-\tan x$$

	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
$\sin(\ )$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\cos(\ )$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$

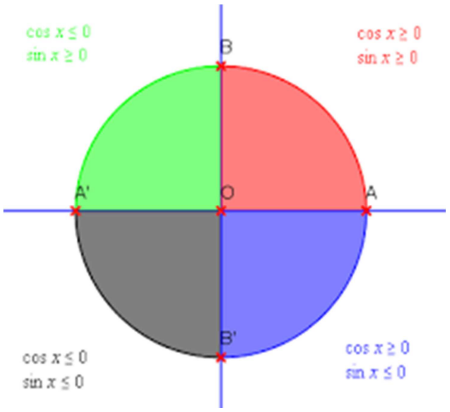
$\tan(\ )$	$-\tan x$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$-\dfrac{1}{\tan x}$

$$(k \in \mathbb{Z}) \quad \begin{cases} \sin(x+2k\pi)=\sin(x) \\ \cos(x+2k\pi)=\cos(x) \end{cases}$$

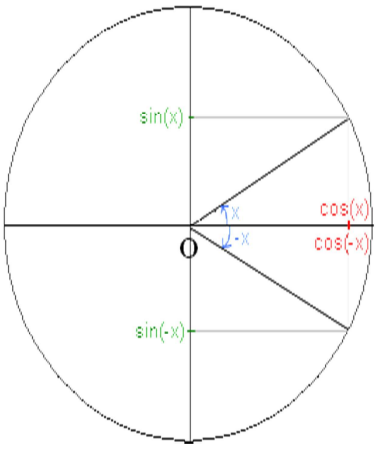
$$(k \in \mathbb{Z}) \quad \tan(x+k\pi)=\tan x$$

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$	$\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$
$-1\le \sin x \le 1 \quad -1\le \cos x \le 1$	$\sin^2 x=\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

إشارة cos و sin



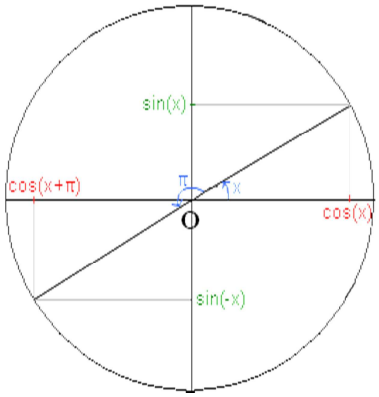
خاصيات



$\cos(-x)=\cos(x)$

et

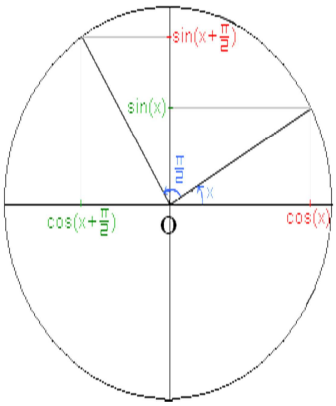
$\sin(-x)=-\sin(x)$



$\cos(x+\pi)=-\cos(x)$

et

$\sin(x+\pi)=-\sin(x)$



$\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin(x)$

et

$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos(x)$

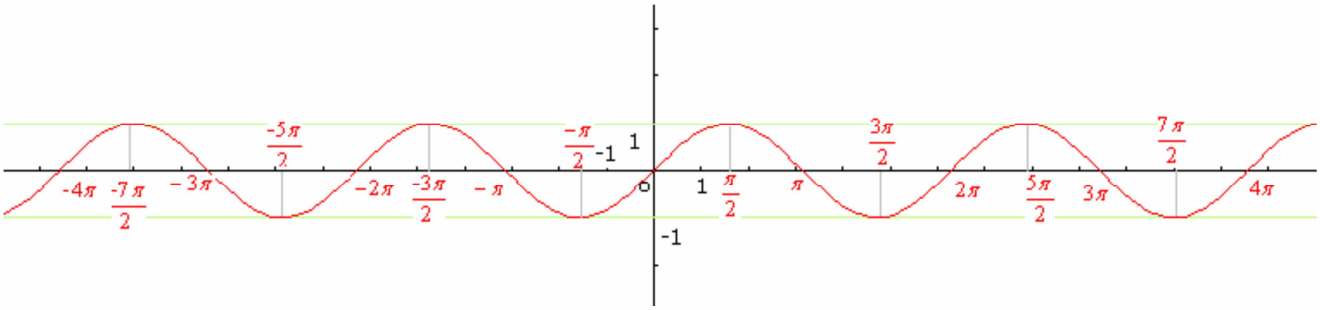
بنفس الطريقة يمكن الإشتغال على الدائرة لاستنتاج : $\cos(\pi-x)$ و $\sin(\pi-x)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

معادلات مثلثية

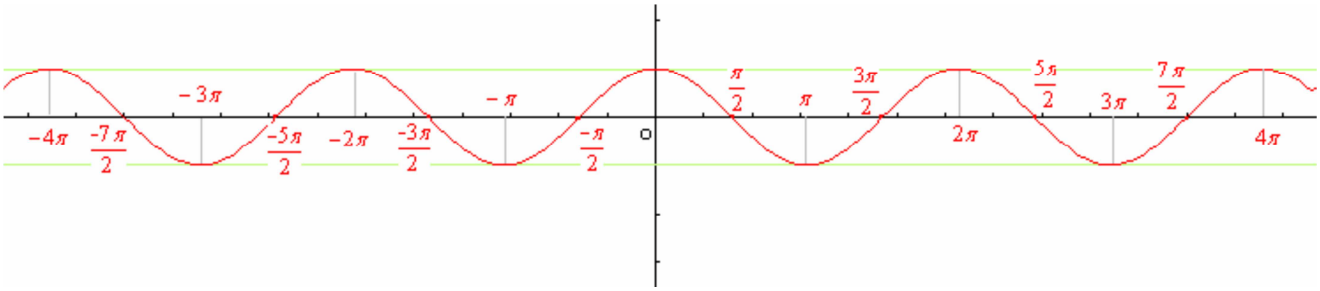
$\cos x=a$	$\sin x=a$	$\tan x=a$
• **إذا كان** $a\notin[-1,1]$ **فإن المعادلة لا تقلا حلا في** $\mathbb{R}$ • **إذا كان** $a=1$ **تكافئ** $\cos x=1$ $(k\in\mathbb{Z})\quad x=2k\pi$ • **إذا كان** $a=-1$ **تكافئ** $\cos x=-1$ $(k\in\mathbb{Z})\quad x=\pi+2k\pi$ • **إذا كان** $a\in]-1,1[$	• **إذا كان** $a\notin[-1,1]$ **فإن المعادلة لا تقلا حلا في** $\mathbb{R}$ • **إذا كان** $a=1$ **تكافئ** $\sin x=1$ $(k\in\mathbb{Z})\quad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ • **إذا كان** $a=-1$ **تكافئ** $\sin x=-1$	• **إذا كان** $a\in\mathbb{R}$ **فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد** α **ينتمي إلى** $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ **بحيث :** $\tan x=a$ **تكافئ** $\tan x=\tan\alpha$ **تكافئ** $(k\in\mathbb{Z})\quad x=\alpha+k\pi$

	$(k \in \mathbb{Z})\quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ • إذا كان $a \in]-1,1[$ يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $\sin x = a$ تكافئ $\sin x = \sin\alpha$ تكافئ : $(k \in \mathbb{Z})\quad \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$ **حالة خاصة** $\sin x = 0$ تكافئ $(k \in \mathbb{Z})\quad x = k\pi$	يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $]0,\pi[$ بحيث $\cos x = a$ تكافئ $\cos x = \cos\alpha$ تكافئ : $(k \in \mathbb{Z})\quad \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$ **حالة خاصة** $\cos x = 0$ تكافئ $(k \in \mathbb{Z})\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

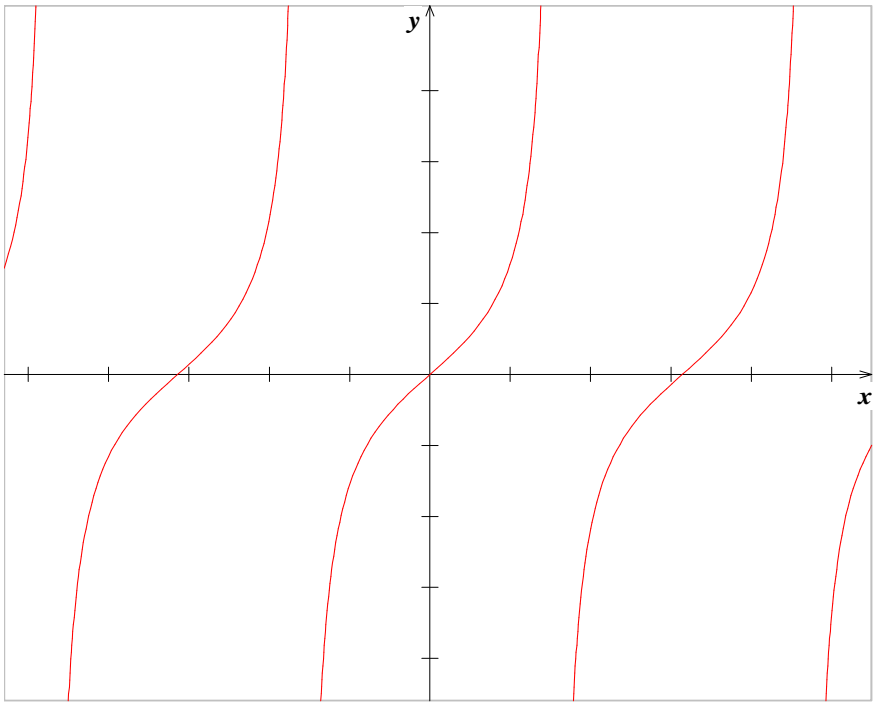
منحنى دالة sin



منحنى دالة cos

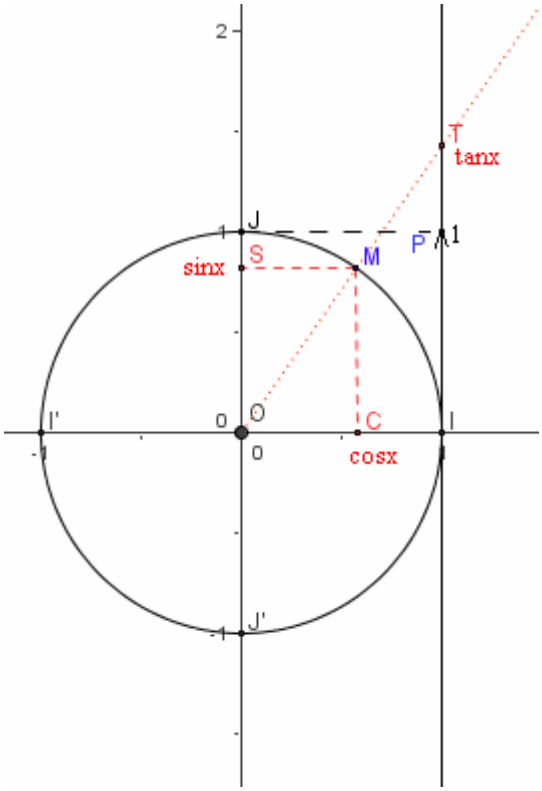


منحنى دالة tan



b- النسب المثلثية

تعاريف



لتكن (C) دائرة مثلثية و $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بها. لتكن M نقطة من (C) و x أفصولا منحنيا لها . نعتبر C المسقط العمودي لـ M على (OI) و S المسقط العمودي لـ M على (OJ)

*- العدد الحقيقي أفصول النقطة M في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى جيب تمام العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\cos x$

*- العدد الحقيقي أرتوب النقطة M في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى جيب العدد الحقيقي x . نرمز له بـ $\sin x$

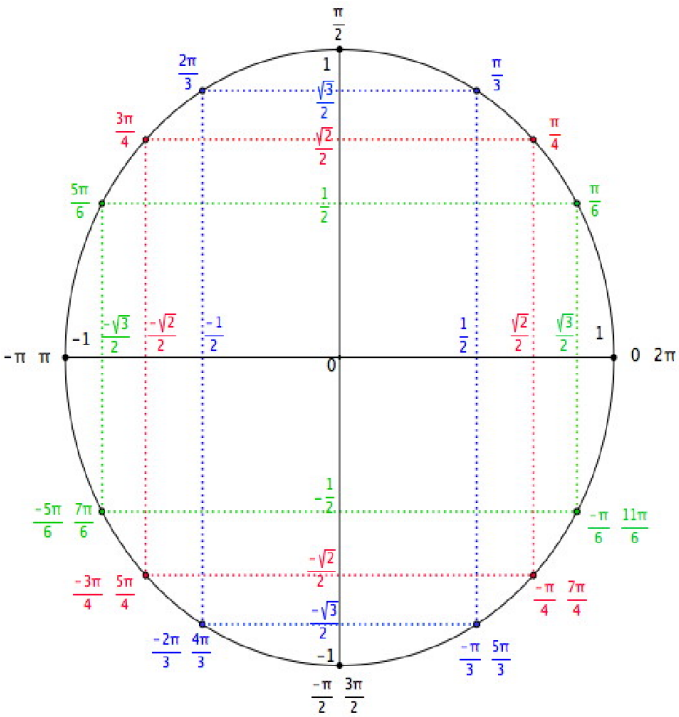
*- ليكن Δ المماس لـ (C) عند I و النقطة $P(1;1)$.

لتكن T نقطة تقاطع (OM) و Δ أي

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

العدد الحقيقي أفصول T في المعلم $(I;P)$ يسمى ظل العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\tan x$.

خاصيات:



لكل x من $\mathbb{R}$	$-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$
لكل x من $\mathbb{R}$	$\cos(x+2k\pi) = \cos x$
لكل $k \in \mathbb{Z}$	$\sin(x+2k\pi) = \sin x$
الدالة $Cosinus$ زوجية:	$\cos(-x) = \cos x$ لكل من x من $\mathbb{R}$.
الدالة $Sinus$ فردية:	$\sin(-x) = -\sin x$
لكل x من $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\tan(x+k\pi) = \tan x$

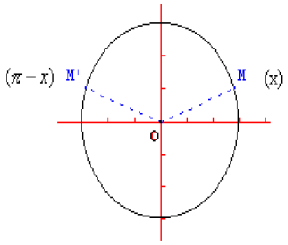
لكل x من $\mathbb{R}$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
لكل x من $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

** تمرين تطبيقي : (05 - س) (2-4)

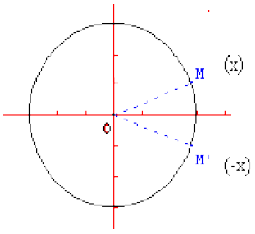
** تمرين تطبيقي : (10 - س) (3)

c. العلاقة بين النسب المثلثية لعدد:

*- بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على



$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

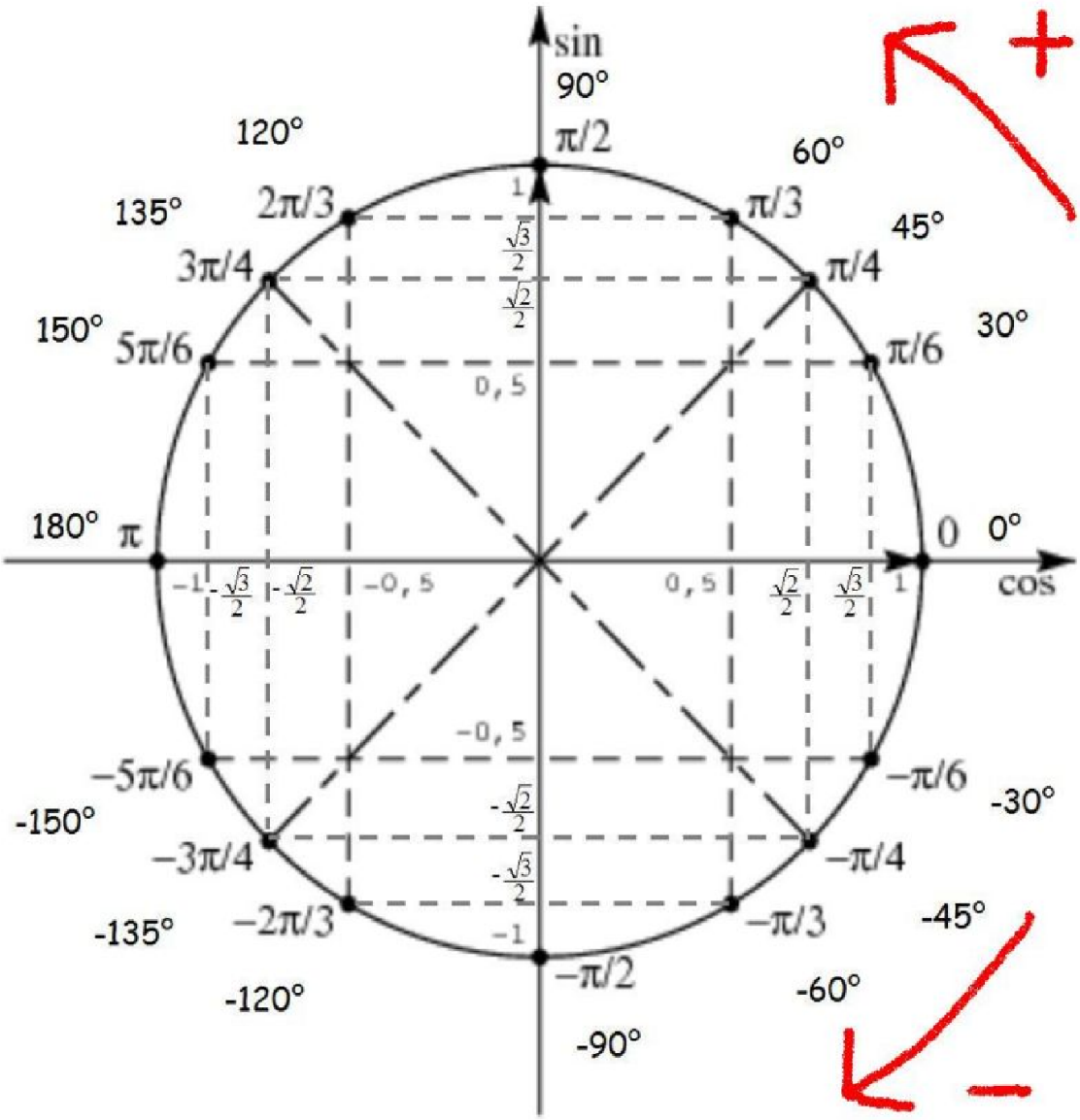
	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan x$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

** تمرين تطبيقي : (7 - س) (1-5)

d - نسب مثلثية اعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

**** تمرين تطبيقي : (6 - س)**



الهندسة

مذكرة رقم 9 : ملخص لدرس: الحساب المثلثي 1 مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

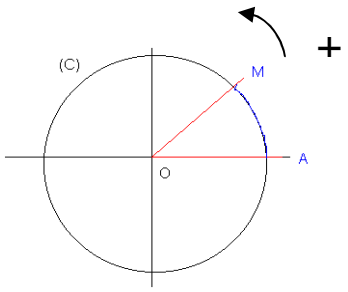
محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
الجزء الأول: - الدائرة المثلثية، الأفاصيل المنحنية لنقطة، الأفصول المنحني الرئيسي؛ . الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم لهما نفس الأصل؛ . قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم لهما نفس الأصل، القياس الرئيسي، علاقة شال؛ . العلاقة بين الدرجة والراديان والغراد؛ . الزاوية الموجهة لمتجهتين وقياسها؛ - النسب المثلثية لعدد حقيقي والنسب المثلثية لزاوية متجهتين؛ - العلاقات: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ، $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ - النسب المثلثية لزاوية قياسها: 0 ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ؛ - العلاقات بين النسب المثلثية لزاويتين مجموع أو فرق قياسيهما يساوي: 0 ، $\frac{\pi}{2}$ ، π بترديد 2π.	- استعمال الآلة الحاسبة العلمية لتحديد قيمة مقربة لزاوية محددة بأحد نسبها المثلثية والعكس. - التمكن من النسب المثلثية للزوايا الاعتيادية وتطبيق مختلف العلاقات	- تحدد نقطة من الدائرة المثلثية بأفصولها المنحني الرئيسي أو بإحداثيتيها بالنسبة للمعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثية.

لتكن (C) دائرة من المستوى (P) مركزها O, و لتكن I و M نقطتين من (C). لدينا منحنيين للوصول إلى النقطة M انطلاقا من I . أحدهما موجب و الآخر سالب.

لقد تم اختيار المنحى الموجب هو المنحى المضاد لحركة عقربي الساعة (المنحى + المشار إليه في الشكل) و يسمى المنحى المثلثي.

1. الدائرة المثلثية:

الدائرة المثلثية هي كل دائرة شعاعها 1 مزودة بأصل و موجهة توجيها موجبا.



2. تعريف الراديان : (C) دائرة مثلثية مركزها O

الراديان هو قياس الزاوية المركزية التي تحصر على الدائرة (C) قوسا طوله 1 ونرمز له بالرمز : rad ملاحظة : قياس زاوية مستقيمة بالدرجة 180° و الغراد 200 و بالراديان π

اذن وجدنا ثلاث وحدات لقياس الزوايا (الدرجة و الغراد والراديان) ويمكن استعمال الطريقة الثلاثية للتحويل من وحدة الى أخرى أو استعمال النتيجة التالية : **نتيجة** : اذا كانت α و β و γ قياسات زاوية بالدرجة و الغراد والراديان على التوالي فان : $\frac{\alpha}{180°} = \frac{\beta}{200} = \frac{\gamma}{\pi}$

تمرين1:

1. لتكن زاوية قياسها بالدرجة $135°$ حدد قياسها بالراديان و حدد قياسها بالغراد
2. لتكن زاوية قياسها بالدرجة $120°$ حدد قياسها بالراديان و حدد قياسها بالغراد

أجوبة :1) أ)حساب القياس بالراديان: $\frac{135}{180°} = \frac{\gamma}{\pi}$ يعني $135\times\pi = \gamma\times180$

يعني $\gamma = \frac{135\times\pi}{180} = \frac{27\times\pi}{36} = \frac{3\pi}{4} rad$

ب)حساب القياس بالغراد: $\frac{135}{180°} = \frac{\beta}{200}$ يعني $135\times200 = \beta\times180$

يعني $\beta = \frac{135\times200}{180}$ يعني $\beta = 150 grad$

2) أ)حساب القياس بالراديان: $\frac{120}{180°} = \frac{\gamma}{\pi}$ يعني $120\times\pi = \gamma\times180$

يعني $\gamma = \frac{120\times\pi}{180} = \frac{12\times\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} rad$

ب)حساب القياس بالغراد: $\frac{120}{180°} = \frac{\beta}{200}$ يعني $120\times200 = \beta\times180$

يعني $\beta = \frac{120\times200}{180}$ يعني $\beta = 133,33 grad$

3. الأفاصيل المنحنية لنقطة والأفصول المنحني الرئيسي:

لتكن (C) دائرة مثلثيه أصلها A و مركزها O, و M نقطة من (C).

ليكن α طول القوس الهندسية $\left[\widehat{IM}\right]$ $0 \le \alpha \le 2\pi$.

العدد α يسمى أفصول منحنى للنقطة M. الأعداد الحقيقية $\alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ هي أفاصيل منحنية للنقطة M . يوجد أفصول منحنى وحيد للنقطة M ينتمي إلى المجال $]-\pi,\pi]$ يسمى الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M.

تمرين2: أو مثال :مثل على الدائرة المثلثية للنقط التالية : $A(0)$ و $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$ و $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ و $G\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ و $H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ و $M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ و $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ و $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$

أجوبة: $\frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi-\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$ وبما أن : $-\pi < -\frac{\pi}{2} \le \pi$

فان : $-\frac{\pi}{2}$ هو أفصول منحنى رئيسي للنقطة M_0

الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$

طريقة1: نقسم العدد 2007 على 4 فنجد 501,75

ونأخذ أقرب عدد صحيح له أي **502**

$$\frac{2007\pi}{4} - 502\pi = \frac{2007\pi}{4} - \frac{2008\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

يعني $\frac{2007\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 502\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\times251\pi$

وبما أن : $-\pi < -\frac{\pi}{4} \le \pi$ فان : $-\frac{\pi}{4}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة I

طريقة2: $-\pi < \frac{2007\pi}{4} + 2k\pi \le \pi$ و $k \in \mathbb{Z}$ يعني $-1 < \frac{2007}{4} + 2k \le 1$

يعني $-1 - \frac{2007}{4} < 2k \le 1 - \frac{2007}{4}$ يعني $-\frac{2011}{4} < 2k \le -\frac{2003}{4}$

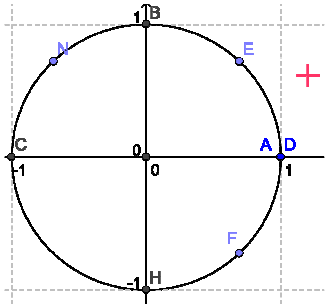
يعني $-\frac{2011}{8}<k\leq-\frac{2003}{8}$

يعني $-251,3\simeq-\frac{2011}{8}<k\leq-\frac{2003}{8}\simeq-250,3$

اذن : $k=-251$ ومنه

$\alpha=\frac{2007\pi}{4}+2(-251)\pi=-\frac{\pi}{4}$

ومنه : $-\frac{\pi}{4}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة I



تمرين3: حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقط التالية ومثلهم على الدائرة المثلثية : $M_0\left(\frac{9\pi}{2}\right)$ و $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$ و $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$ و $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

أجوبة:1) الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M_0

طريقة1: $\frac{9\pi}{2}=\frac{8\pi+\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}=2\times2\pi+\frac{\pi}{2}$ وبما أن : $-\pi<\frac{\pi}{2}\leq\pi$

فان : $\frac{\pi}{2}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_0

طريقة2: $-\pi<\frac{9\pi}{2}+2k\pi\leq\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ يعني $-1<\frac{9}{2}+2k\leq1$

يعني $-1-\frac{9}{2}<-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+2k\leq1-\frac{9}{2}$ يعني $-\frac{11}{2}<2k\leq-\frac{7}{2}$

يعني $-\frac{11}{2}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\leq-\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{11}{4}<k\leq-\frac{7}{4}$

يعني $-2,7\simeq-\frac{11}{4}<k\leq-\frac{7}{4}\simeq-1,7$

اذن : $k=-2$ ومنه $\alpha=\frac{9\pi}{2}+2(-2)\pi=\frac{9\pi}{2}-4\pi=\frac{9\pi-8\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

ومنه : $\frac{\pi}{2}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_0

2) الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M_1

طريقة1: $\frac{67\pi}{4}=\frac{64\pi+3\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=16\pi+\frac{3\pi}{4}=2\times8\pi+\frac{3\pi}{4}$ وبما أن :

$-\pi<-\frac{\pi}{3}\leq\pi$ فان : $-\frac{\pi}{3}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_1

طريقة2: $-\pi<\frac{11\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ يعني $-1<\frac{11}{3}+2k\leq1$

يعني $-1-\frac{11}{3}<-\frac{11}{3}+\frac{11}{3}+2k\leq1-\frac{11}{3}$ يعني $-\frac{14}{3}<2k\leq-\frac{8}{3}$

يعني $-\frac{14}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\leq-\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{7}{3}<k\leq-\frac{4}{3}$ يعني $-2,3\simeq-\frac{7}{3}<k\leq-\frac{4}{3}\simeq-1,3$

اذن : $k=-2$ ومنه $\alpha=\frac{11\pi}{3}+2(-2)\pi=\frac{11\pi}{3}-4\pi=\frac{11\pi-12\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

ومنه : $-\frac{\pi}{3}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_1

3) الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M_2

طريقة1: $\frac{67\pi}{3}=\frac{64\pi+3\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=16\pi+\frac{3\pi}{4}=2\times8\pi+\frac{3\pi}{4}$ وبما أن : $-\pi<\frac{3\pi}{4}\leq\pi$

فان : $\frac{3\pi}{4}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_2

طريقة2: $-\pi<\frac{67\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ يعني $-1<\frac{67}{4}+2k\leq1$

يعني $-1-\frac{67}{4}<-\frac{67}{4}+\frac{67}{4}+2k\leq1-\frac{67}{4}$ يعني $-\frac{71}{4}<2k\leq-\frac{63}{4}$

يعني $-\frac{71}{4}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\leq-\frac{63}{4}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{71}{8}<k\leq-\frac{63}{8}$

يعني $-8,8\simeq-\frac{71}{8}<k\leq-\frac{63}{8}\simeq-7,8$

اذن : $k=-8$ ومنه $\alpha=\frac{67\pi}{4}+2(-8)\pi=\frac{67\pi}{4}-16\pi=\frac{67\pi-64\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

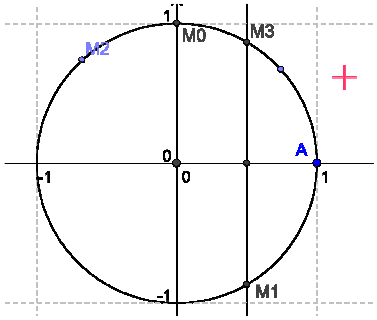
ومنه : $\frac{3\pi}{4}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_2

الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M_3

$\frac{19\pi}{3}=\frac{18\pi+\pi}{3}=\frac{18\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=6\pi+\frac{\pi}{3}=2\times3\pi+\frac{\pi}{3}$

وبما أن : $-\pi<\frac{\pi}{3}\leq\pi$

فان : $\frac{\pi}{3}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_3



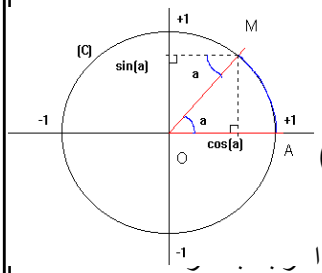
4. الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم:

كل زوج $([OA),[OB))$ من نصفي مستقيم يحدد الزاوية الموجهة المرموز اليها ب: $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ أنظر الشكل.

ليكن α و β أفصولين منحنيين للنقطتين A و B على التوالي. الأعداد الحقيقية $\beta-\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ هي قياسات للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

و نكتب: $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\beta-\alpha[2\pi]$.

للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ قياس وحيد في المجال $]-\pi,\pi]$ يسمى القياس الرئيسي للزاوية.



5. النسب المثلثية لعدد حقيقي:

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها A و مركزها O و لتكن B نقطة من (C) حيث: $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ هو المعلم المتعامد الممنظم ا

المثلثية (C). لتكن $M\in(C)$ حيث $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right)\equiv a[2\pi]$.

أفصول النقطة M يسمى جيب تمام a و يكتب $\cos a$.

أرتوب النقطة M يسمى جيب a و يكتب $\sin a$.

إذا كان $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$. AT أو $-AT$: ظل a و يكتب $\tan a$.

خاصيات:

لكل x من $\mathbb{R}$	$-1\leq\sin x\leq1$, $-1\leq\cos x\leq1$
لكل x من $\mathbb{R}$	$\cos(x+2k\pi)=\cos x$
لكل $k\in\mathbb{Z}$	$\sin(x+2k\pi)=\sin x$
لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ لدينا:	$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$
	$\tan(x+k\pi)=\tan x$

- اذا كانت $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ فان $\cos x\geq0$
- اذا كانت $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$ فان $\cos x\leq0$
- اذا كانت $0\leq x\leq\pi$ فان $\sin x\geq0$
- اذا كانت $\pi\leq x\leq2\pi$ فان $\sin x\leq0$

6. العلاقات بين النسب المثلثية لعدد:

- لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos^2x+\sin^2x=1$

تمرين4: بين أن : لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$

الجواب: $1+(\tan x)^2=1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=1+\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}$

ونعلم أن: $\cos^2x+\sin^2x=1$ اذن①

$$1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$$

وتكتب على شكل مبرهنة

تمرين5: علما أن : $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ و $\sin x=-\frac{4}{5}$

أحسب $\cos x$ و $\tan x$

الجواب:1)حساب $\cos x$

نعلم أن: $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ يعني $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$

يعني $(\cos x)^2+\frac{16}{25}=1$ يعني $(\cos x)^2=1-\frac{16}{25}$ يعني $(\cos x)^2=\frac{9}{25}$

يعني $\cos x=\sqrt{\frac{9}{25}}$ أو $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{25}}$ يعني $\cos x=\frac{3}{5}$ أو $\cos x=-\frac{3}{5}$

ونعلم أن: $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ يعني $\cos x\geq 0$ ومنه نأخذ: $\cos x=\frac{3}{5}$

1)حساب $\tan x$ **لدينا:** $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

يعني

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{5}\times\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}$$

تمرين6: علما أن : $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ و $\tan x=\frac{1}{3}$ أحسب 1) $\cos x$

2) $\sin x$

الجواب:1) نعلم أن: $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$

يعني أن : $1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}$ يعني $1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$

يعني $\frac{10}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$ يعني $10\cos^2 x=9$ يعني $\cos^2 x=\frac{9}{10}$

يعني $\cos x=\sqrt{\frac{9}{10}}$ أو $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}$

ونعلم أن: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ يعني $\cos x\leq 0$ ومنه نأخذ: $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2)نعلم أن: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ يعني: $\sin x=\tan x\times\cos x$ يعني:

$$\sin x=-\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

ملخص للعلاقات بين النسب المثلثية

	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan x$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

7. النسب المثلثية للقيم الاعتيادية:

تمرين7: بسط و أحسب التعابير التالية :

$\cos\frac{3\pi}{4}$ و $\cos\frac{7\pi}{6}$ و $\sin\frac{3\pi}{4}$ و $\sin\frac{7\pi}{6}$ و $\cos\frac{10\pi}{3}$

$\cos\frac{13\pi}{6}$ و $\sin\frac{53\pi}{6}$ و $\cos\frac{34\pi}{3}$ و $\tan\frac{3\pi}{4}$ و $\tan\frac{37\pi}{4}$

أجوبة: $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\frac{6\pi+\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\frac{6\pi+\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(\frac{9\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{9\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\left(\frac{12\pi+\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{53\pi}{6}=\sin\left(\frac{54\pi-\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{54\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(8\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\frac{53\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{34\pi}{3}=\cos\left(\frac{33\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{33\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(11\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(10\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{34\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{3\pi}{4}=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$$

$$\tan\frac{37\pi}{4}=\tan\left(\frac{36\pi+\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{36\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(9\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

تمرين8: بسط التعابير التالية :

1. $A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$
2. $B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}$
3. $C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
4. $D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$
5. $E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)$
6. $F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$
7. $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$
8. $H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

أجوبة:1) $A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$$A=\sin(x)\times\sin(x)-\cos x\times(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

2) $B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=\frac{\sin x+\sin x}{-\cos x}=-\frac{2\sin x}{\cos x}=-2\tan x$

3) $C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)$

$$C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2\sqrt{3}}{6}$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$C=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

4) $D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$$D=\sin(10\pi+\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+\cos(2\times7\pi-x)$$

$$D=\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(-x)$$

$$D=\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)=\sin(x)$$

5) $E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)=-\tan(x)+\tan(x)=0$

6) $F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ يعني $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

ومنه: $F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$

7) $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}=\pi$ يعني: $\frac{\pi}{7}=\pi-\frac{6\pi}{7}$

و أن: $\frac{2\pi}{7}+\frac{5\pi}{7}=\pi$ يعني: $\frac{5\pi}{7}=\pi-\frac{2\pi}{7}$

و أن: $\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi$ يعني: $\frac{4\pi}{7}=\pi-\frac{3\pi}{7}$

ومنه: $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

يعني: $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=0$

8) $H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ يعني: $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

و أن: $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ يعني: $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

ومنه: $H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

يعني: $H=+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

نلاحظ أيضا أن: $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ يعني: $\frac{3\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

ومنه: $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

يعني: $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$

تمرين9: بسط التعابير التالية :

1) $A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}-2\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}$

2) $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}$

3) $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

الأجوبة :

1) $A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}-2\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ يعني: $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

$\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi$ يعني: $\frac{4\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=0$

2) $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ يعني: $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

و أن: $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ يعني: $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

ومنه: $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

يعني: $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$

$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$B=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$

ونلاحظ أيضا أن: $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ يعني: $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

ومنه: $B=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$

3) $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}=\pi$ يعني: $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$

و أن: $\frac{3\pi}{12}+\frac{9\pi}{12}=\pi$ يعني: $\frac{9\pi}{12}=\pi-\frac{3\pi}{12}$

و أن: $\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\pi$ يعني: $\frac{7\pi}{12}=\pi-\frac{5\pi}{12}$

ومنه: $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$

$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}+2\sin^2\frac{\pi}{4}$

$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

ونلاحظ أيضا أن: $\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$ يعني: $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

ومنه: $C=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\times1+1=3$

تمرين10: أحسب وبسط

$A=\sin(\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin(6\pi+x)-\cos(3\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

$C=\sin(x-7\pi)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(x+11\pi)+\cos\left(\frac{-3\pi}{2}-x\right)$

أجوبة: $A=\sin(\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x+\cos x-\cos x+\sin x=0$

$B=\sin(6\pi+x)-\cos(3\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin(2\times3\pi+x)-\cos(2\pi+\pi-x)+\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)-\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin(x)+\cos(x)-\cos(x)-\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(x)-\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

$B=\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)-\sin(x)=0$

$C=\sin(x-7\pi)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(x+11\pi)+\cos\left(\frac{-3\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin(x-\pi-6\pi)-\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}+x\right)+\sin(x+1\pi+10\pi)+\cos\left(\frac{-4\pi+\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin(x-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin(-(\pi-x))-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\sin x$

$C=-\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\sin x$

$C=-\sin(x)+\sin(x)-\sin(x)+\sin(x)=0$

تمرين11: بين أن :

1. $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$
2. $\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x-\sin^4 x=0$
3. $\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\cos^2 x\times\sin^2 x$
4. $\cos^4 x-\sin^4 x+2\times\sin^2 x=1$
5. $,\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\times\sin^2 x=1$

أجوبة 1) $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=$

$=\cos^2 x+2\cos x\times\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\times\sin x+\sin^2 x$

$=2\cos^2 x+2\sin^2 x=2(\cos^2 x+\sin^2 x)=2\times1=2$

2) $\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x-\sin^4 x=(\cos^2 x)^2-(\sin^2 x)^2-\cos^2 x+\sin^2 x$

$=(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)-\cos^2 x+\sin^2 x$

$=(\cos^2 x-\sin^2 x)\times1-\cos^2 x+\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x=0$

3) $\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\cos^2 x\times\sin^2 x$

نعلم أن : $(\cos^2 x+\sin^2 x)^2=(\cos^2 x)^2+2\cos^2 x\times\sin^2 x+(\sin^2 x)^2$

يعني : $(\cos^2 x+\sin^2 x)^2=\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\times\sin^2 x$

يعني : $(1)^2=\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\times\sin^2 x$

يعني : $1-2\cos^2 x\times\sin^2 x=\cos^4 x+\sin^4 x$

4) $\cos^4 x-\sin^4 x+2\times\sin^2 x=1$ ؟؟؟؟

$\cos^4 x-\sin^4 x+2\times\sin^2 x=(\cos^2 x)^2-(\sin^2 x)^2+2\times\sin^2 x$

$=(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)+2\times\sin^2 x$

$=\cos^2 x-\sin^2 x+2\times\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

5) نعلم أن: $(\cos^2 x+\sin^2 x)^3=\cos^6 x+3\cos^4 x+3\cos^2 x\times\sin^4 x+\sin^6 x$

يعني : $1=\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^4 x+3\cos^2 x\times\sin^4 x$

يعني : $1=\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$

يعني : $\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x=1$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

القدرات المنتظرة
***- التعرف على تقايس وتشابه الأشكال استعمال الإزاحة و التحاكي والتماثل.**
***- استعمال الإزاحة و التحاكي و التماثل في حل مسائل هندسية.**

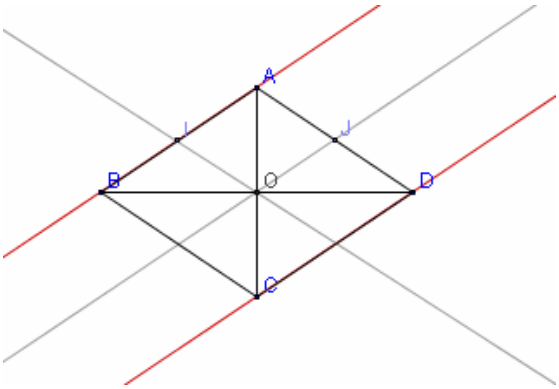
I – التماثل المحوري – التماثل المركزي – الإزاحة

1-أنشطة:

ليكن $ABCD$ معين مركزه O ، و I و J منتصفي $[AB]$ و $[AD]$

1- أنشئ الشكل
2- حدد مماثلة كل من A و B و O بالنسبة للنقطة O على التوالي استنتج مماثل (AB) بالنسبة لـ O
3- حدد مماثلة كل من B و O و I بالنسبة للمستقيم (AC) على التوالي استنتج مماثل (IO) بالنسبة لـ(AC)
4- حدد صورة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$
حدد صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{IJ}$
حدد صورة $[BO]$ بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{IJ}$

1- الشكل



2- نحدد مماثلة كل من A و B و O بالنسبة للنقطة O على التوالي و نستنتج مماثل (AB) بالنسبة لـ O

*- مماثل O بالنسبة لـ O هي نفسها

ا

*- بما أن O منتصف القطعتان $[AC]$ و $[BD]$ فان C و D مماثلا A و B على التوالي بالنسبة لـ O
و منه مماثل (AB) بالنسبة لـ O هو المستقيم (DC)

3- نحدد مماثلة كل من B و O و I بالنسبة للمستقيم (AC) على التوالي و نستنتج مماثل (IO) بالنسبة لـ(AC)

*- بما أن $ABCD$ معين فان (AC) واسط $[BD]$ و منه مماثل B بالنسبة للمستقيم (AC) هو D

*- لدينا $O \in (AC)$ و منه مماثل O بالنسبة للمستقيم (AC) هي نفسها

*- ليكن $S_{(AC)}$ التماثل المحوري الذي محوره (AC)

تذكير: $S_{(AC)}(M) = M'$ تقرأ M' مماثل M بالنسبة للمستقيم (AC)

بما أن $S_{(AC)}(A) = A$ و $S_{(AC)}(B) = D$ فان مماثل $[AB]$ هو $[AD]$ بالنسبة للمستقيم
و نعلم أن مماثل منتصف قطعة هو منصف مماثل القطعة
و حيث أن I و J منتصفا $[AB]$ و $[AD]$ على التوالي فان $S_{(AC)}(I) = J$

* نستنتج مماثل (IO) بالنسبة لـ(AC)

لدينا $S_{(AC)}(I) = J$ و $S_{(AC)}(O) = O$ ومنه مماثل (IO) بالنسبة لـ(AC) هو المستقيم (JO)

4- نحدد صورة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$
بما أن $ABCD$ معين فان $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
و منه صورة A هي النقطة D بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$ نكتب $t_{\overrightarrow{BC}}(A) = D$

*- نحدد صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{IJ}$

في المثلث ABD لدينا I و J منتصفا $[AB]$ و $[AD]$ ومنه $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

و حيث أن O منتصف $[BD]$ فان $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ وبالتالي $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ إذن $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$

*- نحدد صورة $[BO]$ بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{IJ}$

مما سبق نستنتج أن $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{IJ}$ إذن $t_{\overrightarrow{IJ}}(O)=D$

و حيث أن $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$ فان صورة $[BO]$ هي $[OD]$ بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{IJ}$

2- تعاريف و مصطلحات

أ- المماثل المركزي

لتكن I نقطة معلومة و M و M' نقطتين من المستوى

* نقول إن النقطة M' هي مماثلة النقطة M بالنسبة للنقطة I اذا و فقط اذا تحقق ما يلي:

- إذا كان $M=I$ فان $M'=I$
- إذا كان $M\neq I$ فان I منتصف $[MM']$

* العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى (P) بمماثلتها M' بالنسبة للنقطة I تسمى التماثل المركزي الذي مركزه I نرمز له بالرمز S_I

نقول إن النقطة M' صورة M بالتماثل المركزي S_I نكتب $S_I(M)=M'$ أو $S_I: M\to M'$

نقول كذلك إن S_I يحول M إلى M' لذا نقول إن التماثل المركزي S_I تحويل في المستوى.

ملاحظات:

* $S_I(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$
* $S_I(I)=I$ نقول إن النقطة I صامدة بالتماثل المركزي S_I
* $S_I(M)=M'$ تكافئ $S_I(M')=M$

ب- المماثل المحوري

ليكن (D) مستقيما و M و M' نقطتين من المستوى

* نقول إن النقطة M' هي مماثلة النقطة M بالنسبة للمستقيم (D) إذا و فقط إذا تحقق ما يلي:

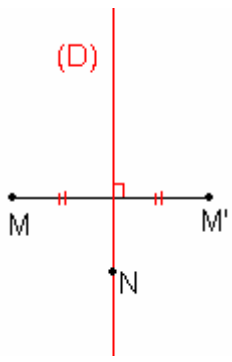
- إذا كان $M\in(D)$ فان $M'=M$
- إذا كان $M\notin(D)$ فان (D) واسط $[MM']$

* العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى (P) بمماثلتها M' بالنسبة للمستقيم (D) تسمى التماثل المحوري الذي محوره (D) نرمز له بالرمز $S_{(D)}$

نقول إن النقطة M' صورة M بالتماثل المحوري $S_{(D)}$ نكتب $S_{(D)}(M)=M'$ أو $S_{(D)}: M\to M'$

نقول كذلك إن $S_{(D)}$ يحول M إلى M' لذا نقول إن التماثل المحوري $S_{(D)}$ تحويل في المستوى.

ملاحظة:



* $S_{(D)}(M)=M'$ يكافئ (D) واسط $[MM']$
* لكل نقطة N من (D) : $S_{(D)}(N)=N$

نقول إن جميع نقط المستقيم (D) صامدة بالتماثل المحوري $S_{(D)}$

* $S_{(D)}(M)=M'$ تكافئ $S_{(D)}(M')=M$

ب- الإزاحة

ليكن $\vec{u}$ متجهة و M و M' نقطتين من المستوى

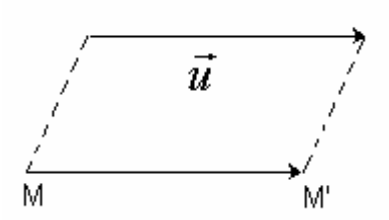
* نقول إن النقطة M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ إذا و فقط إذا $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

* العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى (P) بصورتها M' بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}$ تسمى الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ نرمز لها $t_{\vec{u}}$

نكتب $t_{\vec{u}}(M)=M'$ أو $t_{\vec{u}}:M\to M'$

نقول كذلك إن $t_{\vec{u}}$ يحول M إلى M' لذا نقول إن الإزاحة $t_{\vec{u}}$ تحويل في المستوى.

ملاحظة:



*$t_{\vec{u}}(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

* $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$ لكل M من المستوى $t_{\vec{O}}(M)=M$

* $t_{\vec{u}}(M)=M$ تكافئ $\overrightarrow{MM}=\vec{0}$

*$t_{\vec{u}}(M')=M$ يكافئ $t_{-\vec{u}}(M')=M$

2- الخاصية المميزة للإزاحة

*- لتكن M و N و M' و N' نقط من المستوى (P) حيث $t_{\vec{u}}(N)=N'$; $t_{\vec{u}}(M)=M'$

ومنه $\overrightarrow{NN'}=\vec{u}$; $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ و بالتالي $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$ إذن $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$

إذا كان $t_{\vec{u}}(M)=M'$ و $t_{\vec{u}}(N)=N'$ فان $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$

*- ليكن T التحويل حيث لكل نقطتين M و N من المستوى حيث $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$ و $T(N)=N'$; $T(M)=M'$

نحدد طبيعة T

لتكن A نقطة معلومة و M نقطة ما من المستوى

لنعتبر $T(A)=A'$

$T(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{M'A'}$

تكافئ $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$

تكافئ $t_{\overrightarrow{AA'}}(M)=M'$

إذن $T=t_{\overrightarrow{AA'}}$

الخاصية المميزة

ليكن T تحويل في المستوى

يكون T إزاحة إذا و فقط إذا كانت T تحول كل نقطتين M و N من المستوى إلى نقطتين M' و N' حيث $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$

3- الاستقامية و التحويلات

نشاط

لتكن A ; B ; C ; D نقط من المستوى حيث $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$. نعتبر A' ; B' ; C' ; D' صورها على التوالي بتحويل T

نبين أن $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$ في الحالتين $T=t_{\vec{u}}$ و $T=S_{\Omega}$

*- الحالة $T=t_{\vec{u}}$

$T(B)=B'$; $T(A)=A'$ ومنه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$

$T(D)=D'$; $T(C)=C'$ ومنه $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{C'D'}$

وحيث أن $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

*- <u>الحالة</u> $T=S_{\Omega}$

$T(B)=B'$; $T(A)=A'$ ومنه $\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega B'}$ و $\overrightarrow{\Omega A}=-\overrightarrow{\Omega A'}$ و بالتالي $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A'B'}$

$T(D)=D'$; $T(C)=C'$ ومنه $\overrightarrow{\Omega C}=-\overrightarrow{\Omega C'}$ و $\overrightarrow{\Omega D}=-\overrightarrow{\Omega D'}$ و بالتالي $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{C'D'}$

وحيث أن $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

نقبل الحالة $T=S_{(D)}$

خاصية

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري

A ; B ; C ; D نقط من المستوى

إذا كان T يحول النقط A ; B ; C ; D بالتوالي إلى النقط A' ; B' ; C' ; D' حيث $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$

فان $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

نعبر عن هذا بقولنا الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحويلات تحافظ على معامل استقامية متجهتين

نتيجة

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري

A ; B ; C نقط مستقيمية حيث $A\neq B$ ومنه يوجد α حيث $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$

A' ; B' ; C' صورها بالتحويل T ومنه $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$ اذن A' ; B' ; C' مستقيمية.

الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحافظ على استقامية النقط

4- التحويل و المسافات

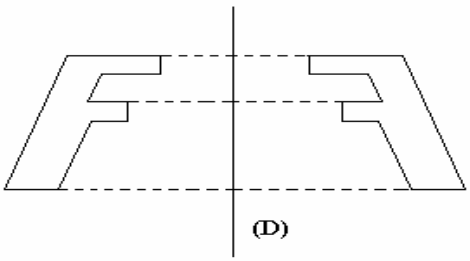
خاصية

الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحويلات تحافظ على المسافة أي إذا كان A' و B' صورتي A و B بأحد هذه التحويلات فان $AB=A'B'$

5- صورة أشكال بتحويل: الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري

أ- أنشطة

ننشئ صورة الشكل (F) بالتحويلات الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحو



تعريف

ليكن (F) شكلا

مجموعة صور نقط الشكل (F) بتحويل T تكون شكلا (F') يسمى صورة شكل (F) بالتحويل T

نكتب $T((F))=(F')$

خاصية

صورة تقاطع شكلين (F_1) و (F_2) بتحويل T هو تقاطع (F_1') و (F_2') صورتي هذين الشكلين بهذا التحويل

$T((F_1)\cap(F_2))=T((F_1))\cap T((F_2))$

ب- صور أشكال اعتيادية بتحويل

صورة مستقيم – صورة نصف مستقيم – صورة قطعة

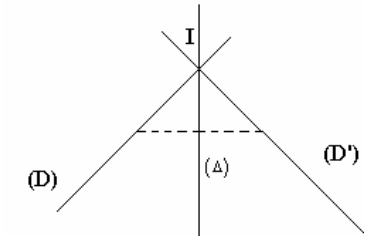
ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري

إذا كان $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ فان $T((AB))=(A'B')$ و $T([AB))=[A'B')$ و $T([AB])=[A'B']$

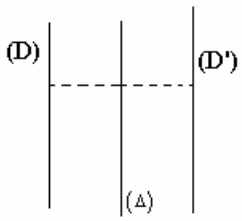
أ- صورة مستقيم

*- صورة مستقيم (D) بتماثل محوري $S_{(\Delta)}$ هو مستقيم (D')

+ إذا كان (D) يقطع (Δ) في نقطة I فان (D') يقطع (Δ) في نقطة I

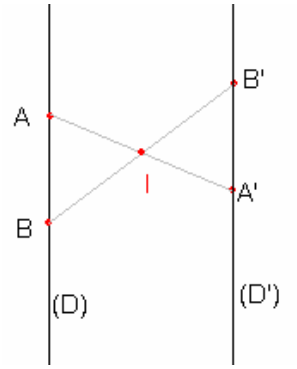


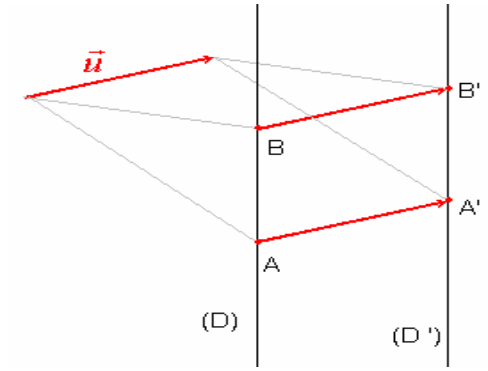
+ إذا كان $(\Delta)//(D)$ فان $(\Delta)//(D')$



+ إذا كان $(D)\perp(\Delta)$ فان $(D)=(D')$

*- صورة مستقيم (D) بإزاحة أو تماثل مركزي هو مستقيم (D') يوازيه



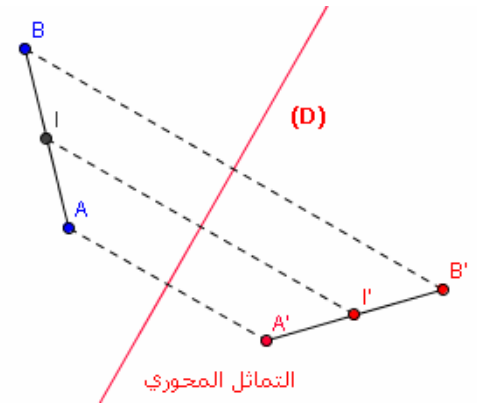


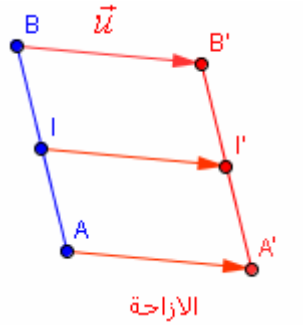
<u>ملاحظة</u>

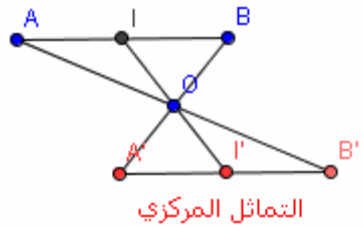
*- صورة مستقيم (D) بتماثل مركزي مركزه ينتمي إلى (D) هو المستقيم نفسه

*- صورة مستقيم (D) بإزاحة متجهتها موجهة لـ (D) هو المستقيم نفسه

ب- صورة منتصف قطعة





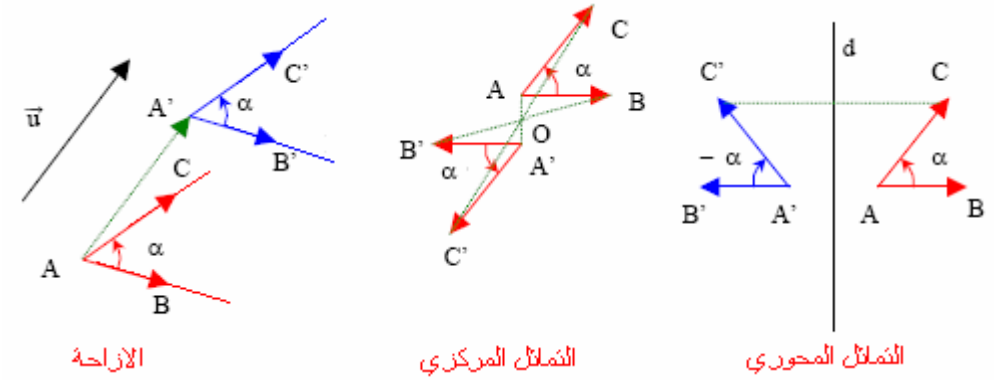


ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري إذا كان I منتصف $[AB]$ و $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ و $T(I)=I'$ فان I' منتصف $[A'B']$

ج- صورة دائرة

صورة دائرة مركزها O و شعاعها r بإزاحة أو تماثل محوري أو تماثل مركزي هو دائرة مركزها O' صورة O و شعاعها r

د- صورة زاوية



ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري

إذا كان $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ و $T(C)=C'$ فان $T(\widehat{BAC})=\widehat{B'A'C'}$ و $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$

الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحافظ على قياس الزوايا الهندسية

6- صورة مثلث

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري

إذا كان $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ و $T(C)=C'$ فان صورة المثلث ABC هو المثلث $A'B'C'$ الذي يقايسه

7- التحويلات و التوازي و التعامد

خاصية

الإزاحة التماثل المركزي و التماثل المحوري تحويلات تحافظ على التعامد و التوازي

8- محاور تماثل شكل – مراكز تماثل شكل

أ- تعريف

نقول إن المستقيم (D) محور تماثل شكل (F) إذا و فقط إذا كان $S_{(D)}((F))=(F)$

أمثلة: + محاور تماثل مستقيم هو المستقيم نفسه و جميع المستقيمات العمودية عليه.

+ محاور تماثل دائرة هي حاملات أقطارها + محاور تماثل زاوية هو حامل منصفها

ب تعريف

نقول إن النقطة I مركز تماثل شكل (F) اذا و فقط اذا كان $S_I((F))=(F)$

أمثلة: + مركز تماثل مستقيم جميع نقطه + مركز تماثل دائرة هي دائرته

+ مركز تماثل متوازي الأضلاع هو مركزه

II – التحاكي

1-نشاط

لتكن O و A و B نقط من المستوى

أنشئ O' و A' و B' حيث $\overrightarrow{OA'}=-2\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB'}=-2\overrightarrow{OB}$

نقول ان A' و B' صورتي A و B على التوالي بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته 2-

أنشئ M' صورة M بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته 2-

بين أن $\overrightarrow{A'B'}=-2\overrightarrow{AB}$ و استنتج أن $(AB)//(A'B')$

ما هو الوضع النسبي للمستقيمين (AM) و $(A'M')$

2- تعريف

لتكن I نقطة معلومة من المستوى (P) و k عددا حقيقا غير منعدم

العلاقة التي تربط النقطة M بالنقطة M' حيث $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$ تسمى التحاكي الذي مركزه I و نسبته k

ونرمز له بالرمز $h(I;k)$ أو h

نقول ان النقطة M' صورة النقطة M بالتحاكي M و نكتب $h(M)=M'$ أو $h:M\to M'$

نقول كذلك h يحول M إلى M'

التحاكي h تحويل في المستوى

مثال

أ- h تحاك مركز I و نسبته 3 أنشئ M' صورة M بالتحاكي h

ب- h تحاك مركز I و نسبته $\frac{-1}{2}$ أنشئ M' صورة M بالتحاكي h

ملاحظات

ليكن $h(I;k)$ تحاك حيث $k\neq 0$

* - إذا كان $k=1$ فان $h(I;1)$ يحول كل نقطة إلى نفسها

- إذا كان $|k|\succ 1$ نقول إن $h(I;k)$ " تكبير"

- إذا كان $|k| \prec 1$ نقول إن $h(I;k)$ " تصغير"

*- إذا كان $h(I;k)$ يحول M إلى M' فان I و M و M' نقط مستقيمية

* إذا كان $h(M)=M'$ فان $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$ أي $\frac{1}{k}\overrightarrow{IM'}=\overrightarrow{IM}$ و بالتالي M صورة M' بالتحاكي الذي مركزه I و نسبته $\frac{1}{k}$

* - $h(I)=I$ نقول إن I بالتحاكي $h(I;k)$

- مركز التحاكي هو النقطة الوحيدة الصامدة بهذا التحاكي

2- خاصيات

أ- أنشطة

نشاط1

ليكن $h(I;k)$ تحاك حيث $k\neq 0$ و M و N و M' و N' حيث $h(M)=M'$ و $h(N)=N'$

1- بين أن $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$ و أن $M'N'=|k|MN$

2- بين أن اذا كان $M\neq N$ فان $M'\neq N'$ و $(MN)//(M'N')$

نشاط2

ليكن $k\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ و M و N و M' و N' نقط حيث $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

1- بين أن المستقيمين (MM') و (NN') متقاطعين في نقطة I

2- بين أن $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$ و $\overrightarrow{IN'}=k\overrightarrow{IN}$ و استنتج أه يوجد تحاك يحول M و N على التوالي الى M' و N'

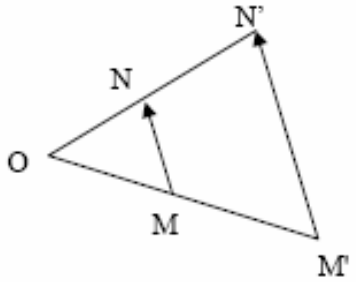
نشاط3

لتكن A ; B ; C ; D نقط من المستوى حيث $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$.

نعتبر A' ; B' ; C' ; D' صورها على التوالي بالتحاكي $h(I;k)$ حيث $k\neq 0$

بين أن $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

ب- الخاصية المميزة



ليكن T تحويل في المستوى و k عدد حقيقي غير منعدم يخالف 1

يكون T تحاك نسبته k إذا و فقط إذا كانت T تحول كل نقطتين M و N من المستوى إلى نقطتين M' و N'

حيث $k\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$

نتيجة

اذا كان M و N من المستوى و كان M' و N' صورتيهما على التوالي بتحاك نسبته k غير منعدمة فان

$M'N'=|k|MN$

ج- خاصية: المحافظة على معامل الاستقامية

لتكن A ; B ; C ; D نقط من المستوى و A' ; B' ; C' ; D' صورها على التوالي

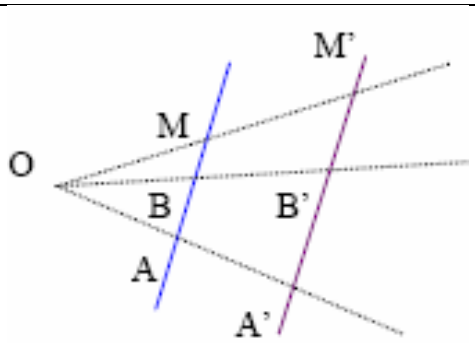
بالتحاكي $h(I;k)$ حيث $k\neq 0$

اذا كان $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

نعبر عن هذا بقولنا التحاكي يحافظ علة معامل استقامية متجهتين

نتيجة

التحاكي يحافظ على استقامية النقط



نتيجة

ليكن h تحاك

إذا كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ فان $h((AB))=(A'B')$ و $h([AB))=[A'B')$ و $h([AB])=[A'B']$

نتيجة

ليكن h تحاك

إذا كان I منتصف $[AB]$ و $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ و $h(I)=I'$ فان I' منتصف $[A'B']$

3- صور بعض الأشكال بتحاك

خاصية1

صورة مستقيم (D) بتحاك هو مستقيم (D') يوازيه

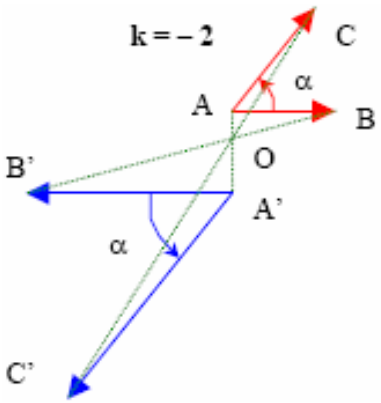
ملاحظة : صورة مستقيم (D) بتحاك مركزه ينتمي إلى (D) هو المستقيم نفسه

خاصية2

ليكن h

إذا كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ و $h(C)=C'$ فان $T(\widehat{BAC})=\widehat{B'A'C'}$ و $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$

التحاكي يحافظ على قياس الزوايا الهندسية



خاصية3

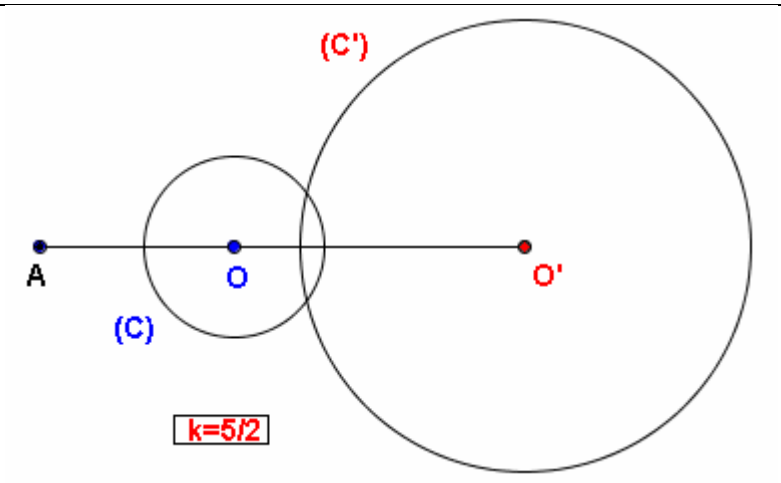
التحاكي يحافظ على التعامد و التوازي

أي صورتا مستقيمان متعامدان هما مستقيمان متعامدان

صورتا مستقيمان متوازيان هما مستقيمان متوازيان

خاصية4

صورة دائرة مركزها O و شعاعها r بتحاك نسبته k هو دائرة مركزها O' صورة O بهذا التحاكي و شعاعها $|k|r$



خاصية5: صورة مثلث

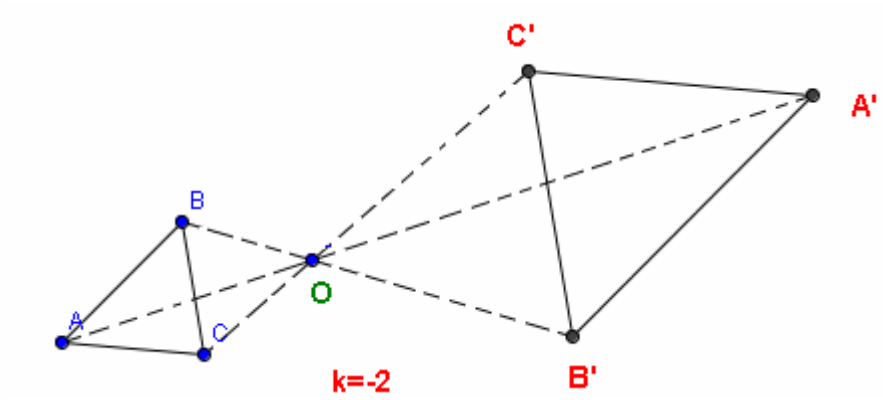
ليكن h نسبته $k \neq 0$

إذا كان $h(A) = A'$ و $h(B) = B'$ و $h(C) = C'$ فان صورة المثلث ABC هو المثلث $A'B'C'$

ملاحظة و اصطلاح :

إذا كان المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بتحاك نسبته k غير منعدمة فان المثلث ABC صورة المثلث $A'B'C'$ بالتحاكي نسبته $\frac{1}{k}$

نقول إن المثلثين ABC و $B'A'C'$ متحاكيان



خاصية6

إذا كان المثلثان $B'A'C'$ و ABC متحاكيان فان $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

و $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ و $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ و $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$

و $(AB)//(A'B')$ و $(AC)//(A'C')$ و $(CB)//(C'B')$

التحويلات الاعتيادية

التماثل المركزي

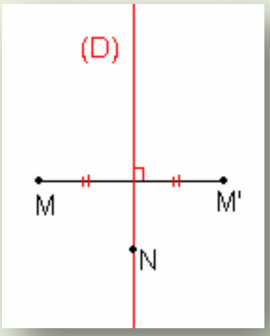
لتكن I نقطة معلومة و M و M' نقطتين من المستوى.

- نقول إن النقطة M' هي مماثلة النقطة M بالنسبة للنقطة I إذا و فقط تحقق ما يلي :
  - إذا كان $M = I$ فإن $M' = I$
  - إذا كان $M \neq I$ فإن I منتصف $[MM']$
- العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى (P) بمماثلتها M' بالنسبة للنقطة I تسمى التماثل المركزي الذي مركزه I نرمز له بالرمز S_I و نكتب $S_I(M) = M'$
  - $S_I(M) = M'$ تكافئ $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$
  - $S_I(I) = I$ نقول إن النقطة I صامدة بالتماثل المركزي S_I
  - $S_I(M) = M'$ تكافئ $S_I(M') = M$

التماثل المحوري

ليكن (D) مستقيما و M و M' نقطتين من المستوى.

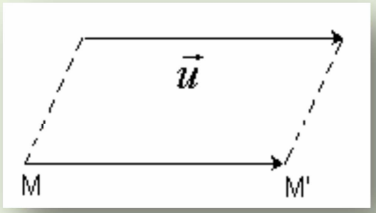
- نقول إن النقطة M' هي مماثلة النقطة M بالنسبة للمستقيم (D) إذا و فقط تحقق ما يلي :
  - إذا كانت $M \in (D)$ فإن : $M' = M$
  - إذا كان $M \notin (D)$ فإن : (D) واسط للقطعة $[MM']$
- العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى (P) بمماثلتها M' بالنسبة للمستقيم (D) تسمى التماثل المحوري الذي محوره (D) نرمز له بالرمز $S_{(D)}$ و نكتب $S_{(D)}(M) = M'$
  - $S_{(D)}(M) = M'$ يكافئ (D) واسط القطعة $[MM']$
  - لكل نقطة N من (D) : $S_{(D)}(N) = N$ نقول إن جميع نقط المستقيم (D) صامدة بالتماثل المحوري (D)
  - $S_{(D)}(M) = M'$ تكافئ $S_{(D)}(M) = M'$



الإزاحة

لتكن $\vec{u}$ متجهة و M و M' نقطتين من المستوى.

- نقول إن النقطة M' هي صورة النقطة M بالإزاحة التي متجهتها $\vec{u}$ إذا وفقط إذا : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$
- العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى (P) بصورتها M' بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ تسمى الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ و نرمز لها ب : $t_{\vec{u}}$ و نكتب $t_{\vec{u}}(M)=M'$



- $t_{\vec{u}}(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$
- إذا كانت $\vec{u}=\vec{0}$ فإن $t_{\vec{u}}(M)=M$
- $t_{\vec{u}}(M)=M'$ تكافئ $t_{-\vec{u}}(M')=M$

❖ الخاصية المميز للإزاحة

إذا كانت M و N و M' و N' نقط من المستوى (P) حيث : $t_{\vec{u}}(M)=M'$ و $t_{\vec{u}}(N)=N'$

فإن : $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

الإستقامية و التحويلات

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة – التماثل المركزي – التماثل المحوري

A و B و C و D نقط من المستوى

إذا كان T يحول النقط A و B و C و D على التوالي للنقط A' و B' و C' و D' حيث $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ فإن :

$\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

نقول عن هذه التحويلات أنها تحافظ على معامل استقامية متجهتين

الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحافظ على استقامية النقط

المسافة و التحويلات

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة – التماثل المركزي – التماثل المحوري

إذا كان $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ فإن $A'B'=AB$

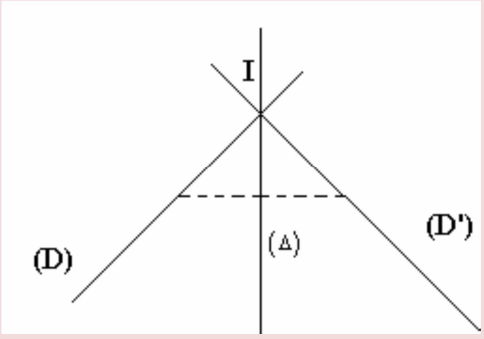
صور أشكال اعتيادية بتحويل

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة – التماثل المركزي – التماثل المحوري

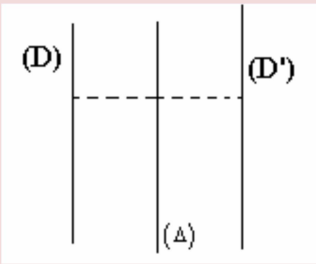
إذا كان $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ فإن $T((AB))=(A'B')$ و $T([AB))=[A'B')$ و $T([AB])=[A'B']$

صورة مستقيم

- **صورة مستقيم (D) بتماثل محوري $S_{(\Delta)}$ هو مستقيم (D') بحيث :**
  - **إذا كان (D) يقطع (Δ) في نقطة I فإن (D') يقطع (Δ) في النقطة I**

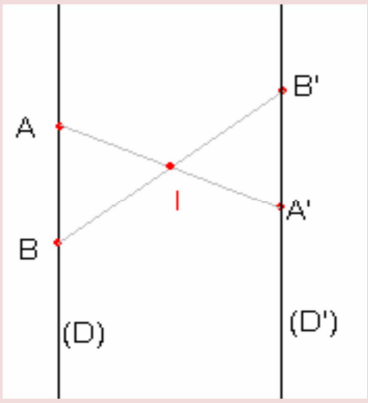


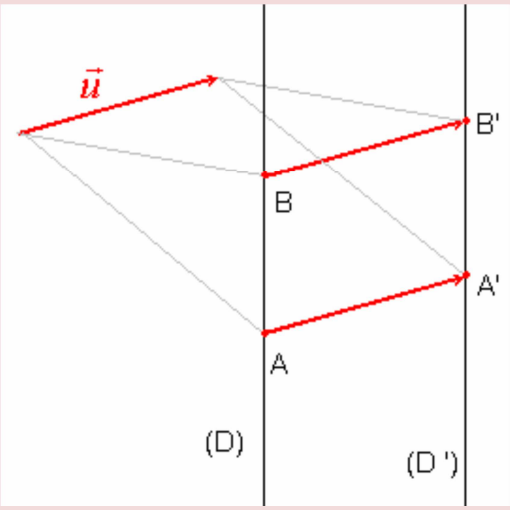
  - **إذا كان $(D)//(\Delta)$ فإن $(D')//(\Delta)$**



  - **إذا كان $(D)\perp(\Delta)$ فإن $(D)=(D')$**

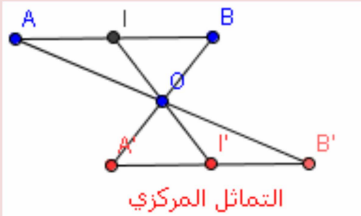
- **صورة مستقيم بتماثل مركزي أو بإزاحة هو مستقيم يوازيه**

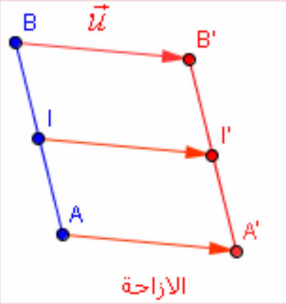


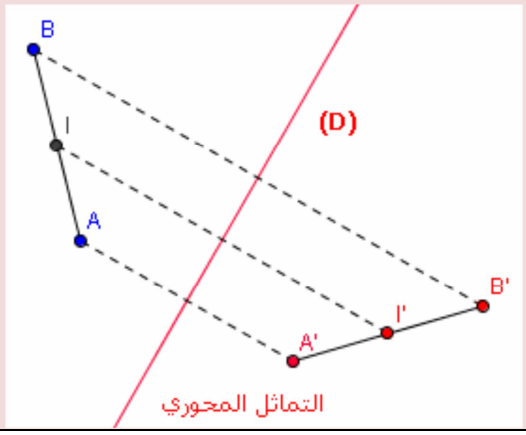


صورة منتصف قطعة

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة – التماثل المركزي – التماثل المحوري
إذا كانت I منتصف قطعة $[AB]$ و كان $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ و $T(I)=I'$ فإن I' منتصف قطعة $[A'B']$





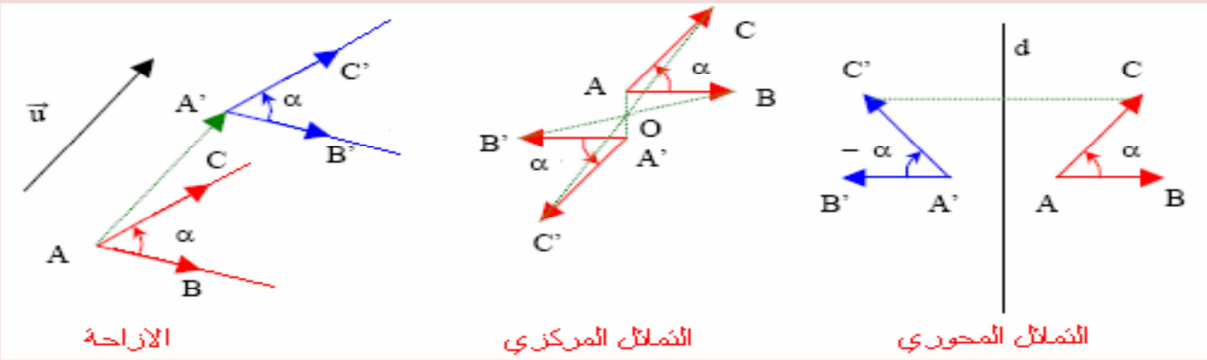


صورة دائرة

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة – التماثل المركزي – التماثل المحوري
صورة دائرة مركزها O و شعاعها r بالتحويل T هي دائرة لها نفس الشعاع r و مركزها O' حيث $O'=T(O)$ و شعاعها

صورة زاوية

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة – التماثل المركزي – التماثل المحوري
إذا كان $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ و $T(C)=C'$ فإن $T(B\widehat{A}C)=B'\widehat{A'}C'$ و لدينا $B\widehat{A}C=B'\widehat{A'}C'$



صورة مثلث

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة – التماثل المركزي – التماثل المحوري
إذا كان $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ و $T(C)=C'$ فإن صورة المثلث ABC هو المثلث $A'B'C'$ الذي يقايسه

التحويلات و التوازي و التعامد

الإزاحة – التماثل المركزي – التماثل المحوري تحويلات تحافظ على التوازي و التعامد

التحاكي

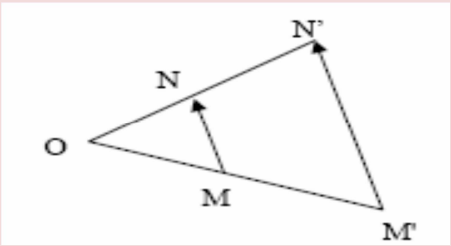
- لتكن I نقطة معلومة من المستوى $(\mathscr{P})$ و k عدد حقيقي غير منعدم
العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى $(\mathscr{P})$ بالنقطة M' حيث $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$ تسمى التحاكي الذي مركزه I و نسبته k و نرمز له بالرمز $h(I,k)$ أو h
- نقول أن النقطة M' صورة M بالتحاكي h الذي مركزه I و نسبته k و نكتب $h(M)=M'$

أمثلة :

✓ M' صورة M بالتحاكي h الذي مركزه I و نسبته 3 :

✓ M' صورة M بالتحاكي h الذي مركزه I و نسبته $\frac{-1}{2}$:

الخاصية المميزة : ليكن h تحاكي مركزه I و نسبته k حيث $k\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$
إذا كانت M و N و M' و N' نقط من المستوى (P) حيث : $h(M)=M'$ و $h(N)=N'$
فإن : $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

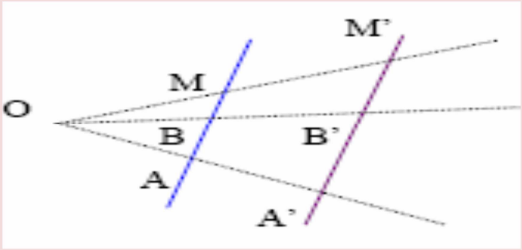


ليكن h تحاكي مركزه I و نسبته k حيث $k \in \mathbb{R}^*$
إذا كان $h(M)=M'$ و $h(N)=N'$ فإن : $M'N'=|k|MN$

التحاكي يحافظ على معامل الإستقامية

A و B و C و D نقط من المستوى
ليكن h تحاكي يحول النقط A و B و C و D على التوالي للنقط A' و B' و C' و D' حيث $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ فإن :
$\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

التحاكي يحافظ على استقامية النقط



ليكن h تحاكي
إذا كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ فإن $h((AB))=(A'B')$ و $h([AB])=[A'B']$ و $h([AB])=[A'B']$

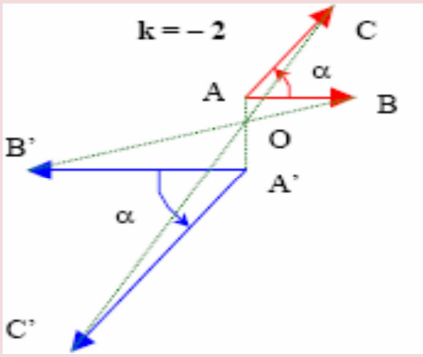
ليكن h تحاكي
إذا كانت I منتصف قطعة $[AB]$ و كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ و $h(I)=I'$ فإن I' منتصف قطعة $[A'B']$

صورة مستقيم (D) بتحاك هو مستقيم (D') يوازيه

ليكن h تحاكي

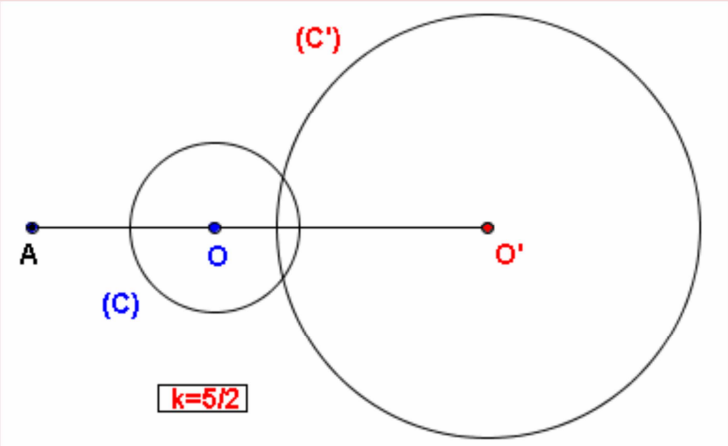
إذا كان $h(A)=A'$ **و** $h(B)=B'$ **و** $h(C)=C'$ **فإن** $h(B\widehat{A}C)=B'\widehat{A'}C'$ **و لدينا** $B\widehat{A}C=B'\widehat{A'}C'$

التحاكي يحافظ على ياس الزوايا



- **صورة مستقيمان متعامدان بتحاكي هما مستقيمان متعامدان**
- **صورة مستقيمان متوازيان بتحاكي هما مستقيمان متوازيان**

صورة دائرة مركزها O و شعاعها r بتحاك h نسبته k هي دئرة مركزها O' صورة O بالتحاكي h و شعاعها r' حيث $r'=|k|r$



ليكن h تحاكي نسبته k حيث $k\in\mathbb{R}^*$

إذا كانت $h(A)=A'$ **و** $h(B)=B'$ **و** $h(C)=C'$ **فإن صورة المثلث** ABC **هو المثلث** $A'B'C'$

الهندسة

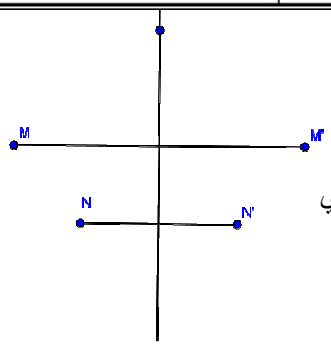
ملخص لدرس: التحويلات الاعتيادية في المستوى مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- تذكير: التماثل المحوري، التماثل المركزي، الإزاحة؛ - التحاكي؛ - الخاصية المميزة لكل من الإزاحة والتحاكي، حالة التماثل المركزي؛ - الحفاظ على معامل استقامية متجهتين؛ - المسافة والتحويلات السابقة؛ - صور بعض الأشكال (قطعة، مستقيم، نصف مستقيم، دائرة، زاوية).	- التعرف على تقايس وتشابه الأشكال باستعمال الإزاحة والتحاكي والتماثل. - استعمال الإزاحة والتحاكي والتماثل في حل مسائل هندسية.	- يتم التذكير بالتماثل المحوري والتماثل المركزي والإزاحة من خلال أنشطة وتمارين وتعريفها متجهيا أو تآلفيا. - يقدم التحاكي من خلال أمثلة وبنفس الطريقة التي **قدمت** به التحويلات السابقة. - تعتبر الصيغ التحليلية لهذه التحويلات خارج المقرر.

I. تعاريف:

1. التماثل المحوري:



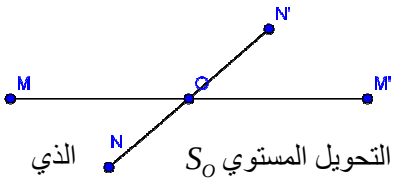
ليكن (D) مستقيما من المستوى.

التماثل المحوري الذي محوره (D) هو التحويل المستوي $S_{(D)}$ الذي يربط كل نقطة من المستوى (P) بالنقطة M' حيث يكون (D) واسطا للقطعة $[MM']$.

ملاحظة: إذا كانت M تنتمي إلى المستقيم (D) فان $S_{(D)}(M)=M$.

$S_{(D)}(M)=M'$ $\quad S_{(D)}(N)=N'$

2. التماثل المركزي

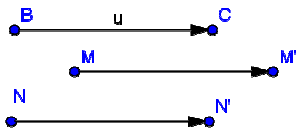


لتكن O نقطة من المستوى (P). التماثل المركزي الذي مركزه O هو التحويل المستوي S_O الذي يربط كل نقطة M من المستوى (P) بالنقطة M' حيث تكون النقطة O منتصف القطعة $[MM']$.

ملاحظة: $S_O(O)=O$

$S_O(M)=M'$ تعني O منتصف القطعة $[MM']$.

3. الإزاحة:



لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة من المستوى. الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ هي التحويل المستوي الذي يربط كل نقطة M من المستوى (P) بالنقطة M' حيث $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.

$t(M)=M'$ و $t(N)=N'$

تمرين 1: ليكن $ABCD$ معينا مركزه O, و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AD]$

1) أنشئ الشكل.

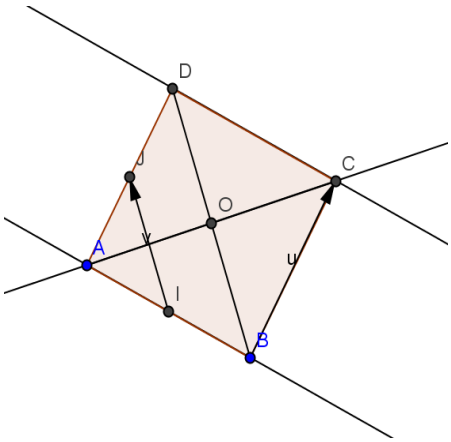
2) حدد $S_O(A)$ و $S_O(B)$ و $S_O(O)$ و $S_O((AB))$

3) $S_{(AC)}(B)$ و $S_{(AC)}(A)$ و $S_{(AC)}(O)$ و $S_{(AC)}([AB])$ و $S_{(AC)}(I)$ و $S_{(AC)}((OI))$

4) حدد $t_{\overrightarrow{BC}}(A)$ و $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)$ و $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])$

أجوبة :

(1



(2

- $S_O(A)=C$ لأن : $OA=OC$
- $S_O(B)=D$ لأن : $OB=OD$
- $S_O(O)=O$ نقول النقطة O صامدة
- بحث عن $S_O((AB))$: صورة المستقيم (AB)

لدينا : $\begin{cases} S_O(A)=C \\ S_O(B)=D \end{cases}$ اذن : $S_O((AB))=(CD)$

نلاحظ أن صورة متقيم بواسطة تماثل مركزي هو مستقيم يوازيه

(3

- $S_{(AC)}(B)=D$ لأن : (AC) واسطا للقطعة $[BD]$.
- $S_{(AC)}(A)=A$ لأن : كل النقط التي تنتمي الى (AC) صامدة
- $S_{(AC)}(O)=O$ لأن : $O\in(AC)$ وكل النقط التي تنتمي الى (AC) صامدة
- $S_{(AC)}([AB])=[AD]$ لأن : $\begin{cases} S_{(AC)}(A)=A \\ S_{(AC)}(B)=D \end{cases}$
- $S_{(AC)}(I)$ ؟؟؟؟؟؟

لدينا I منتصف $[AB]$ و $S_{(AC)}([AB])=[AD]$ اذن $S_{(AC)}(I)$ هو منتصف $[AD]$ أي النقطة J ومنه $S_{(AC)}(I)=J$

- $S_{(AC)}((OI))$ ؟؟؟؟؟

الأستاذ: عثماني نجيب

لدينا $\begin{cases} S_{(AC)}(O)=O \\ S_{(AC)}(I)=J \end{cases}$ اذن $S_{(AC)}((OI))=(OJ)$

(4

• $t_{\overrightarrow{BC}}(A)$ ؟؟؟؟

لدينا $ABCD$ معين اذن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ومنه : $t_{\overrightarrow{BC}}(A)=D$

• $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)$ ؟؟؟؟

نعتبر المثلث : ABD : لدينا I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AD]$ اذن : $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$ ونعلم أن O منتصف $[BD]$

اذن $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}$ ومنه : $2\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{IJ}$ أي : $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$

وبالتالي : $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$

• $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])$ ؟؟؟؟

لدينا $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ و O منتصف $[BD]$ اذن : $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

ومنه $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{IJ}$ أي : $t_{\overrightarrow{IJ}}(O)=D$ ونعلم أن : $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$

اذن : $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])=[DO]$

4. التحاكي:

لتكن Ω نقطة من المستوى و k عددا حقيقيا غير منعدم

التحاكي h الذي مركزه Ω و نسبته k هو التحويل المستوي الذي يربط كل نقطة M من المستوى (P) بالنقطة M'

حيث $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$.

ملاحظة: إذا كانت $k=-1$ فان التحويل h هو تماثل مركزي مركزه Ω.

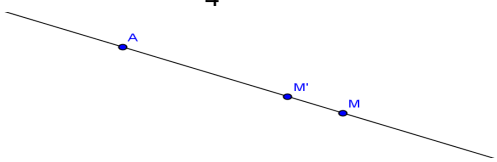
$h(M)=M'$ يعني أن النقط Ω و M و M' مستقيمية.

$h(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$h(N)=N'$ يعني $\overrightarrow{\Omega N'}=k\overrightarrow{\Omega N}$

تمرين 2: لتكن A و M نقطتين من المستوى , أرسم النقطة M' صورة النقطة M بالتحاكي h ذا المركز A و نسبته $\frac{3}{4}$

الجواب : $h(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{AM'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AM}$



تمرين 3: عبر عن العلاقة المتجهية : $\overrightarrow{IC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$ بتحاك

الجواب :اذا اعتبرنا h التحاكي الذي مركزه I و نسبته $k=-\frac{2}{3}$

أي : $h\left(I,-\frac{2}{3}\right)$ فان : $\overrightarrow{IC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$ يعني $h(B)=C$

تمرين4: حدد نسبة و مركز التحاكي h الذي يحول A إلى B في الحالات التالية :

1. $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ حيث I نقطة معلومة
2. $2\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{BA}$ حيث Ω نقطة معلومة
3. $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ حيث I نقطة معلومة

الأجوبة : $h(I,k)$ $h(A)=B$ يعني $\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{IA}$

(1 $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

يعني $2\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

يعني $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ يعني $-\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

يعني $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ ومنه $h\left(I,\frac{1}{3}\right)$

(2 $2\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{BA}$

يعني $2\overrightarrow{\Omega B}=\overrightarrow{AB}$ يعني $2\overrightarrow{\Omega B}=\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}$

يعني $2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$ يعني $\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$

ومنه $h(\Omega,-1)$

(3 $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

يعني $3\overrightarrow{IA}-5\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$ يعني $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AI}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

يعني $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ يعني $8\overrightarrow{IA}=5\overrightarrow{IB}$

يعني $\overrightarrow{IB}=\frac{8}{5}\overrightarrow{IA}$ ومنه $h\left(I,\frac{8}{5}\right)$

II. الخاصيات المميزة لكل من التحاكي و الازاحة والتماثل المركزي

ليكن T تحويلا اعتياديا في المستوى و $k\in\mathbb{R}^*-\{1\}$

تمرين 5: ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k ويحول M إلى M' و يحول N إلى N'

بين أن : $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

الجواب :

$h(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$h(N)=N'$ يعني $\overrightarrow{\Omega N'}=k\overrightarrow{\Omega N}$

$\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega N'}=-\overrightarrow{\Omega M'}+\overrightarrow{\Omega N'}$

$\overrightarrow{M'N'}=-k\overrightarrow{\Omega M}+k\overrightarrow{\Omega N}=k\left(-\overrightarrow{\Omega M}+\overrightarrow{\Omega N}\right)$

$\overrightarrow{M'N'}=k\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega N}\right)=k\overrightarrow{MN}$

يمكن تعميم النتيجة ونحصل عن الخاصية التالية:

خاصية:(الخاصية المميزة للتحاكي)

يكون التحويل T تحاكيا نسبته k اذا وفقط اذا كان : $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

بحيث : $T(M)=M'$ و $T(N)=N'$

تمرين 6: ليكن $t_{\vec{u}}$ الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ بحيث تحول M إلى M' و تحول N إلى N'

بين أن : $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

الجواب : $t_{\vec{u}}(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ و $t_{\vec{u}}(N)=N'$ يعني $\overrightarrow{NN'}=\vec{u}$

ومنه : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$ اذن : $MM'N'N$ متوازي الأضلاع

وبالتالي: $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

يمكن تعميم النتيجة ونحصل عن الخاصية التالية:

خاصية:(الخاصية المميزة للازاحة)

يكون التحويل T ازاحة اذا وفقط اذا كان : $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$ بحيث : $T(M)=M'$ و $T(N)=N'$

ملاحظة:بما أن التماثل المركزي هو تحاكي نسبته $k=-1$ نحصل على الخاصية التالية :

خاصية:(الخاصية المميزة للتماثل المركزي)

يكون التحويل T تماثلا مركزيا اذا وفقط اذا كان : $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$ بحيث : $T(M)=M'$ و $T(N)=N'$

III. خاصيات

نشاط : $h(O;2)$ أرسم $h(M)=M'$ و $h(N)=N'$

ماذا تلاحظ؟

❖ كل هذه التحويلات تحافظ على المسافة باستثناء التحاكي الذي نسبته k بحيث $|k|\neq 1$.

❖ كل هذه التحويلات تحافظ على المنتصف.

❖ كل هذه التحويلات تحافظ على الاستقامية و التوازي و التعامد و قياس الزوايا الهندسية.

IV. صور بعض الأشكال:

❖ صورة مستقيم (Δ) بواسطة ازاحة أو تماثل مركزي أو تحاك هو مستقيم (Δ') يوازي (Δ).

❖ صورة قطعة $[AB]$ هي قطعة $[A'B']$ تقايس $[AB]$ إذا كان التحويل إزاحة أو تماثلا. أما إذا كان التحويل تحاكيا نسبته k فان $A'B'=|k|AB$.

❖ صورة دائرة (E) ذات المركز c و الشعاع r هي دائرة مركزه c' صورة c و شعاعها r إذا كان التحويل إزاحة أو تماثلا و شعاعها $|k|\cdot r$. إذا كان التحويل تحاكيا نسبته k.

❖ صورة الزاوية $[\widehat{AOB}]$ هي الزاوية $[\widehat{A'O'B'}]$

$\widehat{A'O'B'}=\widehat{AOB}$

حيث A' و B' و O' هي صور A و B و O على التوالي بالتحويل.

تمرين 7: ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع و I و J نقطتين معرفتين ب $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$.

1) أنشئ الشكل.

2) بين أن (BJ) صورة (AI) بالإزاحة t_{AB}. وماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (BJ) و (AI)؟

3) نعتبر التحاكي h ذا المركز I و الذي يحاول B إلى C.

أ) بين أن $h((AB))=(CD)$.

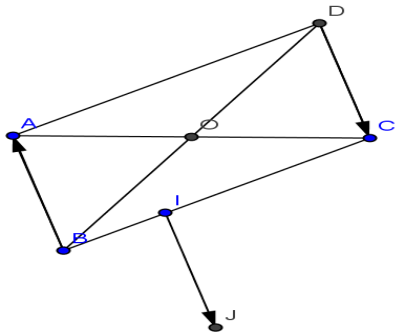
ب) أثبت أن نسبة h هي العدد -2.

4) لتكن K نقطة حيث $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$.

أ) بين أن $h(J)=K$.

ب) أثبت أن $AI=\frac{1}{2}CK$.

الأجوبة : (1



2) نبين أن : $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$ ؟؟؟؟؟

لدينا $ABCD$ متوازي الأضلاع اذن $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

ولدينا حسب المعطيات : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$

ومنه $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ أي: $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$

ولدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ اذن $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$

لدينا اذن : $\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J \\ t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B \end{cases}$ وبالتالي : $t_{\overrightarrow{AB}}((AI))=(BJ)$

❖ الاستنتاج: نعلم أن صورة مستقيم بواسطة ازاحة هو مستقيم يوازيه اذن $(AI)\parallel(BJ)$

3) أ) لدينا حسب المعطيات : $h(B)=C$

ونعلم أن صورة المستقيم (AB) بواسطة تحاك هو مستقيم يوازيه ويمر من صورة B أي يمر من C

اذن هو المستقيم (CD)

وبالتالي : $h((AB))=(CD)$

3) ب) $h(B)=C$ يعني $\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IB}$

ونعلم حسب المعطيات أن: $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ يعني $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CB}$

يعني $3\overrightarrow{CI}=2\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}\right)$ يعني $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{IB}$

يعني $3\overrightarrow{CI}-2\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$ يعني $\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$

يعني $\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IB}$ ومنه $k=-2$

5) أ) $h(J)=K$ ؟؟؟؟؟

ونعلم حسب المعطيات أن: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ وأن : $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$

اذن : $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{IJ}$ يعني $\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{IJ}$

وهذا يعني أن : $h(J)=K$

أ) وجدنا اذن : $\begin{cases} h(J)=K \\ h(B)=C \end{cases}$ اذن : $\overrightarrow{CK}=-2\overrightarrow{BJ}$

(حسب الخاصية المميزة للتحاكي)

ومنه بالمرور الى المنظم نجد :

$\|\overrightarrow{CK}\|=\|-2\overrightarrow{BJ}\|$ اذن : $\|\overrightarrow{CK}\|=|-2|\|\overrightarrow{BJ}\|$

اذن : $CK=2BJ$

وجدنا $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ ادن : $ABJI$ متوازي الأضلاع اذن

$BJ=AI$ اذن : $CK=2AI$ يعني $AI=\frac{1}{2}CK$

V. الحفاظ على معامل استقامية متجهتين:

ليكن T تحويلا اعتياديا في المستوى و A و B و C و D نقط و A' و B' و C' و D' صورهم بالتحويل T

اذا كان : $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ فان : $\overrightarrow{C'D'}=k\overrightarrow{A'B'}$

تمرين 8: ليكن ABC مثلثا و I منتصف $[BC]$

نعتبر النقطتين B' و C' بحيث : $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

و ليكن J منتصف $[B'C']$

وليكن h التحاكي الذي مركزه A نسبته $k=\frac{2}{3}$

1) بين أن $\overrightarrow{B'C'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$:

2) باستعمال التحاكي h بين أن النقط J و A و I نقط مستقيمية

الأجوبة : (1 $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ يعني : $h(B)=B'$

$\overrightarrow{AC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ يعني : $h(C)=C'$ اذن : $\overrightarrow{B'C'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

(حسب الخاصية المميزة للتحاكي)

2) لدينا I منتصف $[BC]$ اذن : $h(I)$ منتصف $[B'C']$

وبما أن : J منتصف $[B'C']$ فان : $h(I)=J$

ومنه : النقط J و A و I نقط مستقيمية **انتهى الدرس**

ملاحظات عامة حول الدرس

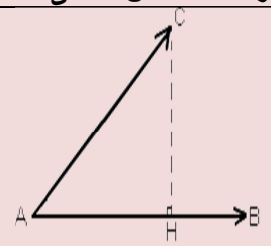
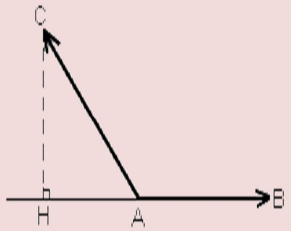
الجداء السلمي

منظم متجهة

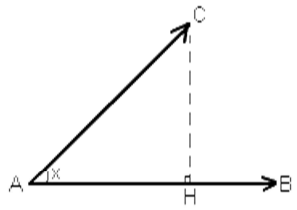
لتكن $\vec{u}$ متجهة و A و B نقطتين من المستوى بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$
نرمز لمنظم المتجهة $\vec{u}$ بالرمز $\|\vec{u}\|$ و المعرف بما يلي $\|\vec{u}\|=AB$

الجداء السلمي لمتجهتين

لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين و لتكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB). الجداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نرمز له ب : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و هو العدد الحقيقي المعرف بما يلي : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

إذا كانت للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ نفس المنحى	إذا كانت للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ منحيان متعاكسان
 $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH}$	 $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AH}$

الصيغة المثلثية للجداء السلمي



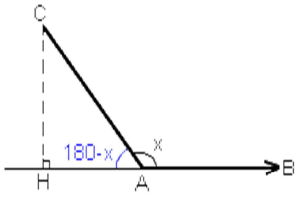
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH$

Mais comme $\cos(x)=\dfrac{AH}{AC}$

$AH=AC\times\cos(x)$

et donc

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(x)$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$

Mais comme $\cos(180-x)=\dfrac{AH}{AC}$

$AH=AC\times\cos(180-x)=-AC\times\cos(x)$

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times(-AC\times\cos(x))$

d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(x)$

الجداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو العدد الحقيقي المعرف بما يلي : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(x)$
(حيث x هو قياس للزاوية المحصورة بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$)

تعامد متجهتين

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$$

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من المستوى و ليكن α و β عددين حقيقيين

- $\vec{u}\bullet\vec{v}=\vec{v}\bullet\vec{u}$
- $\vec{u}\bullet(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}$
- $(\alpha\vec{u})\bullet(\beta\vec{v})=\alpha\beta\times(\vec{u}\bullet\vec{v})$
- $\vec{u}\bullet\vec{u}=\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ (المربع السلمي)
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\bullet\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\bullet\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})\bullet(\vec{u}+\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A و لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) ، لدينا :

- $BC^2=AB^2+AC^2$
- $AH^2=HB\times HC$
- $AB^2=BH\times BC$
- $AC^2=CH\times CB$

مبرهنة المتوسط

ليكن ABC مثلثا بحيث I منتصف $[AB]$ لدينا : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

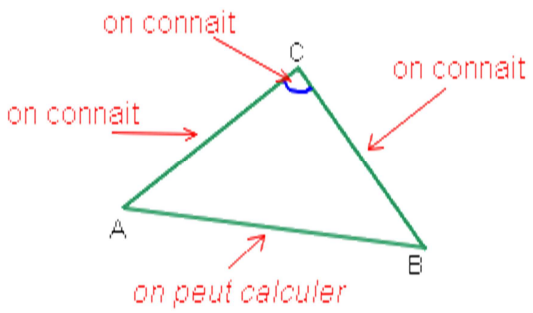
مبرهنة الكاشي

ليكن ABC مثلثا ، لدينا :

$$AB^2=CA^2+CB^2-2CA\times CB\cos(\hat{c})$$

$$AC^2=BA^2+BC^2-2BA\times BC\cos(\hat{b})$$

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos(\hat{a})$$



الهندسة

مذكرة رقم14 : ملخص لدرس: الجداء السلمي مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- تعريف وخاصيات؛ - الصيغة المثلثية؛ - تعامد متجهتين؛ - بعض تطبيقات الجداء السلمي: . العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية؛ . مبرهنة المتوسط؛ . مبرهنة الكاشي.	- التعبير عن المسافة والتعامد بواسطة الجداء السلمي. - استعمال الجداء السلمي في حل مسائل هندسية. - استعمال مبرهنة الكاشي ومبرهنة المتوسط لحل تمارين هندسية.	- يتم تقديم الجداء السلمي وخاصياته انطلاقا من الإسقاط العمودي. - ينبغي التأكيد على دور هذه الأداة في تحديد بعض المحلات الهندسية في المستوى وفي حساب الأطوال والمساحات وقياسات الزوايا. - تعتبر الصيغة التحليلية للجداء السلمي خارج المقرر.

I. تعاريف:

تعريف 1: الجداء السلمي لمتجهتين:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى بحيث: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

و H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي يرمز له بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و المعروف بما يلي:

- إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما نفس المنحى فان:
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AH$$
- إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما منحيان متعاكسان فان:
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-AB\times AH$$
- و نكتب $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AH$ أو $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AC$

تعريف 2: الصيغة المثلثية للجداء السلمي:

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و α هو قياس الزاوية $\widehat{BAC}$

حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ فان:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$$

نتيجة: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

مثال أو تمرين1 : ليكن $\dfrac{\pi}{4}$ قياسا لزاوية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

حيث: $\|\vec{u}\|=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ و $\|\vec{v}\|=4$ أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$

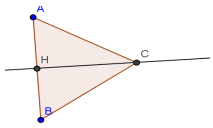
الجواب: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{5}{2}\times4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

تمرين2: ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي 6cm وليكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB}$

الجواب: بما أن المثلث متساوي الأضلاع فان كل زواياه متقايسة وقياس كل زاوية هو $\dfrac{\pi}{3}$

ومنه: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat{A}=AB\times AC\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times6\times\frac{1}{2}=18$$

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB}=\|\overrightarrow{CH}\|\times\|\overrightarrow{HB}\|\times\cos\hat{H}=CH\times HB\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=CH\times HB\times0=0$$

تمرين3: ليكن EFG مثلثا بحيث: $EF=5$ و $EG=3$ و $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=-6$ أحسب $\cos\left(\widehat{FEG}\right)$

الجواب: $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=\|\overrightarrow{EF}\|\times\|\overrightarrow{EG}\|\cos\left(\widehat{FEG}\right)=-6$

يعني $EF\times EG\cos\left(\widehat{FEG}\right)=-6$

يعني $5\times3\cos\left(\widehat{FEG}\right)=-6$

يعني $\cos\left(\widehat{FEG}\right)=-\dfrac{6}{15}=-\dfrac{2}{5}$

تمرين4: ليكن ABC مثلثا بحيث $AB=3$ و $AC=4$ و $\widehat{BAC}=\dfrac{2\pi}{3}$ أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

الجواب: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat{A}=AB\times AC\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times3\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)=12\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=12\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times3\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)=12\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=-12\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

لأن : $\cos(\pi-x)=-\cos x$ اذن :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-12\times\frac{1}{2}=-6$$

II. خاصيات الجداء السلمي:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)=k\vec{u}\cdot\vec{v}$ مهما يكن k من $\mathbb{R}$.

ملاحظة: $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ نرمز ل $\vec{u}\cdot\vec{u}$ ب $\vec{u}^2$: و يسمى المربع السلمي,

- $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ اذن $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$
- و اذا كانت $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ فان $AB=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

المتطابقات الهامة:

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$$

تمرين5: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين بحيث: $\|\vec{u}\|=5$ و $\|\vec{v}\|=3$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\dfrac{3}{2}$

أحسب $\vec{u}^2$ و $\vec{v}^2$ و $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2$ و $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$ و $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ و

$\left(3\vec{u}-2\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+5\vec{v}\right)$ و $\left(5\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(5\vec{u}+\vec{v}\right)$

الجواب: $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2=5^2=25$ و $\vec{v}^2=\|\vec{v}\|^2=3^2=9$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=5^2+2\left(-\tfrac{3}{2}\right)+3^2=25-3+9=31$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=5^2-2\left(-\tfrac{3}{2}\right)+3^2=25+3+9=37$$

$$(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=5^2-3^2=25-9=16$$

$$(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+5\vec{v})=3\vec{u}\cdot\vec{u}+3\vec{u}\cdot5\vec{v}-2\vec{v}\cdot\vec{u}-2\vec{v}\cdot5\vec{v}$$

$$(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+5\vec{v})=3\vec{u}^2+15\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{v}-10\vec{v}^2=3\times25+13\vec{u}\cdot\vec{v}-10\times9$$

$$(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+5\vec{v})=75+13\left(-\frac{3}{2}\right)-90=-15-\frac{39}{2}=-\frac{69}{2}$$

$$(5\vec{u}-\vec{v})\cdot(5\vec{u}+\vec{v})=(5\vec{u})^2-(\vec{v})^2=25(\vec{u})^2-(\vec{v})^2=25\times25-9=616$$

خاصية: تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين إذا و فقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ و نكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$

نتيجة: $(AB)\perp(CD)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

III. علاقات مترية في مثلث قائم الزاوية:

خاصية: ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

إذا كان ABC قائما في A فان:

1) $AB^2+AC^2=BC^2$ (مبرهنة فيتاغورس)

2) $AC\times AB=AH\times BC$

3) $BA^2=BH\times BC$ أو $CA^2=CH\times BC$

4) $AH^2=HB\times HC$

براهين : 1) $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$

لدينا : $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AC}$ لأن ABC قائما في A اذن: $BC^2=BA^2+AC^2$

2) باعتبار المثلث : (ABC) : $\sin\hat{B}=\dfrac{AC}{BC}$ و باعتبار المثلث :

(ABH) : $\sin\hat{B}=\dfrac{AH}{AB}$ ومنه $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AH}{AB}$ ومنه : $AC\times AB=AH\times BC$

3) ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

باعتبار المثلث : (ABC) : $\cos\hat{A}=\dfrac{AB}{AC}$

و باعتبار المثلث : (ABH) : $\cos\hat{B}=\dfrac{BH}{AB}$ ومنه $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BH}{AB}$

ومنه $AC^2=CH\times BC$

تمرين 6 :مثال: ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).أحسب : AC و BH و AH و HC علما أن : $AB=2cm$ و $BC=5cm$

الجواب: حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فان : $BC^2=AB^2+AC^2$

يعني : $AC^2=BC^2-AB^2$ يعني : $AC^2=5^2-2^2=21$

يعني : $AC=\sqrt{21}cm$

وحسب العلاقات المترية لدينا: $AB^2=BH\times BC$

يعني : $BH=\dfrac{AB^2}{BC}=\dfrac{4}{5}cm$

ولدينا: $AC^2=CH\times CB$ يعني : $CH=\dfrac{AC^2}{BC}=\dfrac{21}{5}cm$

ولدينا: $AB\times AC=AH\times BC$ يعني : $AH=\dfrac{AB\times AC}{BC}=\dfrac{2\sqrt{21}}{5}cm$

IV. مبرهنة الكاشي:

خاصية: ليكن ABC مثلثا

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$

نتائج:

1. $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$

2. $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

و منه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

3. هناك علاقتين مماثلتين للعلاقة الأولى:

$$AB^2=CA^2+CB^2-2CA\times CB\times\cos\left(\widehat{ACB}\right)$$

$$AC^2=BA^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)$$

تمرين 7: ليكن ABC مثلثا بحيث: $\widehat{BAC}=\dfrac{2\pi}{3}$ و $AC=8$ و $AB=5$. 1) أحسب BC . 2) $\cos\widehat{ACB}$

الجواب:1) حساب BC

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\widehat{BAC}$

يعني : $BC^2=5^2+8^2-2\times8\times5\cos\widehat{BAC}$

يعني : $BC^2=89-80\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ يعني : $BC^2=89-80\cos\left(\dfrac{3\pi-\pi}{3}\right)$

يعني : $BC^2=89-80\cos\left(\dfrac{3\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ يعني : $BC^2=89-80\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)$

يعني : $BC^2=89-80\left(-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ لأن : $\cos(\pi-x)=-\cos x$

يعني : $BC^2=89+80\left(\dfrac{1}{2}\right)$ يعني : $BC^2=89+40$ يعني : $BC^2=129$

يعني : $BC=\sqrt{129}$

2) حساب $\cos\widehat{ACB}$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\cos\widehat{ACB}$

يعني : $5^2=8^2+\left(\sqrt{129}\right)^2-2\times8\times\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

يعني : $25=64+129-16\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

يعني : $25-193=-16\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

يعني : $-168=-16\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$ يعني

: $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{-168}{-16\sqrt{129}}=\dfrac{168\sqrt{129}}{2064}=\dfrac{21\sqrt{129}}{258}=\dfrac{7\sqrt{129}}{86}$

V. مبرهنة المتوسط:

خاصية: ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة $[BC]$

لدينا: $AB^2+AC^2=2AI^2+\dfrac{BC^2}{2}$

تذكير: مبرهنة المتوسط: إذا كانت A و B نقطتين من المستوى P و I منتصف القطعة $[AB]$ فإن $MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{1}{2}AB^2$.

مثال: ليكن ABC مثلثا بحيث: $BC=4cm$ و $AC=6cm$ و $AB=3cm$ و لتكن I منتصف $[BC]$ أحسب AI .

الجواب: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$AB^2+AC^2=2AI^2+\dfrac{1}{2}BC^2$ يعني : $3^2+6^2=2AI^2+\dfrac{1}{2}4^2$

يعني : $9+36=2AI^2+\dfrac{16}{2}$ يعني : $45-8=2AI^2$ يعني : $37=2AI^2$

يعني : $AI^2=\dfrac{37}{2}$ يعني : $AI=\sqrt{\dfrac{37}{2}}$

تمرين 8 : ليكن ABM مثلثا بحيث: $AB=4cm$ و $AM=3cm$ و $BM=4cm$

و لتكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AM]$ و K منتصف $[BM]$

أحسب المسافات MI و AK و BJ

الجواب: حساب MI: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$ يعني: $3^2+4^2=2MI^2+\frac{1}{2}4^2$

يعني: $9+16=2MI^2+\frac{16}{2}$ يعني: $25-8=2MI^2$ يعني: $17=2MI^2$

يعني: $MI^2=\frac{17}{2}$ يعني: $MI=\sqrt{\frac{17}{2}}$

حساب AK: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$AB^2+AM^2=2AK^2+\frac{1}{2}BM^2$ يعني: $2^2+3^2=2AK^2+\frac{1}{2}4^2$

يعني: $25-8=2AK^2$ يعني: $17=2AK^2$

يعني: $AK^2=\frac{17}{2}$ يعني: $AK=\sqrt{\frac{17}{2}}$

حساب BJ: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$AB^2+BM^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AM^2$ يعني: $4^2+4^2=2BJ^2+\frac{1}{2}3^2$

يعني: $32-\frac{9}{2}=2BJ^2$ يعني: $\frac{55}{2}=2BJ^2$

يعني: $BJ^2=\frac{55}{4}$ يعني: $BJ=\sqrt{\frac{55}{4}}$ يعني: $BJ=\frac{\sqrt{55}}{2}$

تمرين9: ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB=1$ و $AC=\sqrt{2}$ و $CB=2$

ولتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

1) بين أن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$ واستنتج $\cos\hat{A}$

2) اكتب: $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

3) أحسب $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ و استنتج طبيعة المثلث ABD

4) أحسب AD

5) ليكن I منتصف القطعة $[BC]$ و J منتصف القطعة $[AC]$

أحسب AI و BJ

الجواب:1) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$

ونعلم أن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat{A}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

اذن: $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

بالتعويض نجد: $2^2=1^2+\sqrt{2}^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

يعني: $4=1+2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ يعني: $1=-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

يعني: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$

استنتاج: $\cos\hat{A}$: لدينا: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يعني

$-\frac{1}{2}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$: يعني: $-\frac{1}{2}=1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}$ يعني:

$$\cos\hat{A}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

2) $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ يعني: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ يعني: $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يعني: $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{DA}$ يعني: $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$

يعني: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(AB^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0$

ومنه: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ وبالتالي $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ أي: ABD قائم الزاوية في A

4) لدينا: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$ اذن: $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\right)^2$

اذن: $AD^2=\frac{1}{9}\left(\left(\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(2\overrightarrow{AC}\right)^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{9}\left(AB^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4AC^2\right)$

$AD^2=\frac{1}{9}\left(1+4\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times2\right)=\frac{1}{9}(1-2+8)=\frac{7}{9}$ اذن: $AD=\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

5) حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني: $1^2+\sqrt{2}^2=2AI^2+\frac{1}{2}2^2$

يعني: $3=2AI^2+2$ يعني: $3-2=2AI^2$ يعني: $1=2AI^2$

يعني: $AI^2=\frac{1}{2}$ يعني: $AI=\sqrt{\frac{1}{2}}$

حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$BA^2+BC^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AC^2$ يعني: $1^2+2^2=2BJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{2}^2$

يعني: $5=2BJ^2+1$ يعني: $5-1=2BJ^2$ يعني: $4=2BJ^2$

يعني: $BJ^2=2$ يعني: $BJ=\sqrt{2}$

تمرين10: ليكن ABC مثلثا بحيث: BC= 3 و AC= 2

و AB = $\sqrt{7}$ و ليكن I منتصف القطعة $[BC]$

1) أ) باستعمال مبرهنة الكاشي أحسب $\cos(B\hat{A}C)$

ب) أثبت أن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$

ج) أحسب AI

2) نعتبر النقطة M بحيث: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

أ) أحسب $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$

ب) بين أن: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MB) و (AC)

الجواب:1)أ) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$

بالتعويض نجد: $9=4+7-4\sqrt{7}\cos\left(\hat{A}\right)$

يعني: $-2=-4\sqrt{7}\cos\left(\hat{A}\right)$

$$\cos\left(\hat{A}\right)=\frac{2}{4\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{14}$$

1)ب) لدينا: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يعني

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{14}=2\times\frac{\left(\sqrt{7}\right)^2}{14}=\frac{14}{14}=1$$

1)ج) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني: $\sqrt{7}^2+2^2=2AI^2+\frac{1}{2}3^2$

يعني: $11=2AI^2+\frac{9}{2}$ يعني: $\frac{13}{2}=2AI^2$ يعني: $AI^2=\frac{13}{4}$ يعني: $AI=\sqrt{\frac{13}{4}}$

2) أ) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}AC^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times4=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

2) ب) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+1=0$

ومنه : $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{AC}$ وبالتالي : $(MB)\perp(AC)$

تمرين11 : ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB=1$ و $BC=AC=\sqrt{2}$

و D نقطة بحيث $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ و I منتصف القطعة $[AB]$.

1. أحسب CI
2. عبر عن $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$
3. بين أن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$
4. استنتج أن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ و استنتج $\cos\widehat{BAC}$
5. أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ و استنتج طبيعة المثلث BAD
6. نعتبر النقطة M حيث : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$
   أ. عبر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$ و أحسب $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$
   ب. بين أن $(MD)\perp(AC)$

الجواب:1) حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$BC^2+AC^2=2CI^2+\frac{1}{2}AB^2$ يعني: $\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2=2AI^2+\frac{1}{2}1^2$

يعني: $4=2CI^2+\frac{1}{2}$ يعني: $\frac{7}{2}=2CI^2$ يعني: $\frac{7}{4}=CI^2$

يعني: $CI=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ يعني: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

يعني: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ يعني: $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يعني: $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

لدينا I منتصف القطعة $[AB]$ و ABC متساوي الساقين في C

ومنه $(IC)\perp(AB)$ أي $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IC}$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=0$

وبالتالي : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AI}\|\cos 0=AB\cdot AI\cdot 1=AB\cdot\frac{AB}{2}\cdot\cos 0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

حساب $\cos\widehat{BAC}$ وجدنا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ يعني $AB\times AC\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

يعني $1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$ يعني $\cos\hat{A}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ يعني $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5) وجدنا $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ اذن :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

يعني $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times\frac{1}{2}-AB^2=1-1=0$ أي $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

ومنه BAD **قائم الزاوية في** A

6) أ) $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ يعني $-3\overrightarrow{MA}+7\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

يعني $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ يعني $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{AM}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يعني $-4\overrightarrow{AM}=-7\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$

حساب $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ ؟؟؟؟

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2AC^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 2-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

ب) 6) $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

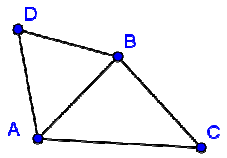
يعني $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{2}$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{7}{4}\cdot 2+\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=0$ أي $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{AC}$

ومنه $(MD)\perp(AC)$

تمرين12 : ليكن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه B بحيث: $AB=\sqrt{2}$

ننشئ خارجه المثلث المتساوي الأضلاع ABD (أنظر الشكل)



1) أحسب: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$
2) أحسب : AC و DC
3) بين أن $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$
4) تحقق من أن $\widehat{DAC}=\frac{7\pi}{12}$
5) استنتج أن $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

الجواب:1)

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BD}\|\cos\widehat{ABD}=AB\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\|\overrightarrow{BC}\|\cdot\|\overrightarrow{BD}\|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

2) حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فان: $AC^2=BC^2+AB^2$

يعني $AC^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2$ يعني $AC^2=4$ يعني $AC=2$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث BCD لدينا:

$DC^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$DC^2=2+2-2\times 2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

يعني $DC^2=4+4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=4+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4+2\sqrt{3}$

يعني $DC=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

3) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ACD لدينا:

$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD\cos(\alpha)$

$DC^2=AC^2+AD^2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

يعني $4+2\sqrt{3}=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

يعني $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) $\widehat{DAC}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

5) وجدنا : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

يعني: $AC\times AD\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}$

يعني: $2\times\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}$ يعني:

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

تمرين13: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A بحيث:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$ و

$\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$

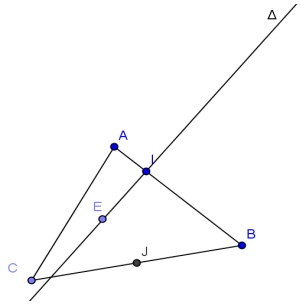
و I نقطة بحيث $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ و

J منتصف القطعة $[BC]$.وليكن

(Δ) المستقيم المار من I

والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة E بحيث : $E\in(\Delta)$



1) أرسم شكلا تقريبيا

2) بين أن : $AB=8$ وأحسب BC

3) أحسب: $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$

4) بين أن : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$

5) أحسب: AJ

الجواب:1)

2)أ) لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$ يعني $AB\times AC\times\cos\hat{A}=16$

يعني $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$ يعني $AB^2\times\frac{1}{4}=16$

يعني $AB^2=64$ يعني $AB=8$

ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$

بالتعويض نجد: $BC^2=64+64-2\times64\times\frac{1}{4}$

يعني : $BC^2=96$ يعني $BC=\sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$

لدينا $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ لأن : $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$

ومنه : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني : $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

يعني : $128=2AJ^2+48$ يعني : $80=2AJ^2$ يعني : $40=AJ^2$

يعني : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

تمرين13 BIS: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه B

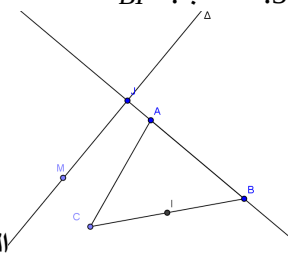
بحيث: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ و $\cos(A\hat{B}C)=\frac{1}{3}$

و J نقطة بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}$ و I منتصف القطعة $[AC]$.وليكن

(Δ) المستقيم المار من J والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة بحيث : $M\in(\Delta)$

1. أرسم شكلا تقريبيا
2. بين أن : $AB=6$ وأحسب AC
3. أحسب: $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}$
4. بين أن : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=45$
5. أحسب: BI



الجواب:1)

2)أ) لدينا $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ يعني $\|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\cos\hat{B}=12$

يعني $BA\times BC\times\cos\hat{B}=12$ يعني $AB^2\times\frac{1}{3}=12$

يعني $AB^2=36$ يعني $AB=6$

ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos\hat{B}$

بالتعويض نجد: $AC^2=36+36-2\times36\times\frac{1}{3}$

يعني : $AC^2=54$ يعني $AC=\sqrt{54}$

3) $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{5}{4}BA^2=\frac{5}{4}\times36=45$

4) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}$

لدينا $\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ لأن : $\overrightarrow{MJ}\perp\overrightarrow{AB}$

ومنه : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BJ}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=45$

5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$AB^2+BC^2=2BI^2+\frac{1}{2}AC^2$ يعني : $6^2+6^2=2BI^2+\frac{1}{2}\sqrt{54}^2$

يعني : $72=2BI^2+27$ يعني : $45=2BI^2$ يعني : $BI^2=\frac{45}{2}$ يعني : $BI=\sqrt{\frac{45}{2}}$

تمرين للبحث : يكن ABC مثلثا بحيث: $AC=3$ و $AB=1$ و

$\widehat{CAB}=\frac{2\pi}{3}$ و I منتصف القطعة $[AB]$.

1) بين أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}$

2) لتكن E النقطة بحيث: $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

أ) بين أن $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ ثم أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$

ب) بين أن $(AB)\perp(IE)$

انتهى الدرس

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

حول الدرس

عموميات حول الدوال العددية

I- الدالة – تساوي دالتين – التمثيل المبياني لدالة

1/ تعريف دالة – مجموعة تعريف دالة

نشاط

حدد مجموعة تعريف الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x في الحالات التالية

a) $f(x)=\frac{5}{4-x}$; b) $f(x)=\sqrt{2x+1}$

c) $f(x)=\frac{3x^2-2}{x^2+2x-3}$; d) $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{3-x}}$

الحل

a) $f(x)=\frac{5}{4-x}$

لتكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f$ تكافئ $4-x\neq 0$

تكافئ $x\neq 4$

اذن $D_f=\mathbb{R}-\{4\}$

b) $f(x)=\sqrt{2x+1}$

$x\in D_f$ تكافئ $2x+1\succ 0$

تكافئ $x\geq -\frac{1}{2}$

اذن $D_f=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

c) $f(x)=\frac{3x^2-2}{x^2+2x-3}$;

$x\in D_f$ تكافئ $x^2+2x-3\neq 0$

ليكن Δ مميز ثلاثية الحدود x^2+2x-3

$\Delta=4+12=16$

و منه لـ x^2+2x-3 جرين هما $x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2}=1$ و $x_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2}=-3$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-3;1\}$

تعريف

نقول اننا عرفنا دالة عددية لمتغير حقيقي f اذا ربطنا كل عدد من $\mathbb{R}$ على الاكثر بعدد حقيقي نرمز له بـ $f(x)$.

$f(x)$ تقرأ صورة x بالدالة f أو باختصار f لـ x

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي .

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية التي تقبل صورة بالدالة f نرمز لها بـ D_f

2- تساوي دالتين

نشاط

قارن الدالتين العدديتين f و g لمتغير حقيقي في الحالتين التاليتين

a) $g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$; $f(x)=x-1$

b) $g(x)=\frac{2}{x(x+2)}$; $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$

a/ لدينا $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

ومنه $D_f\neq D_g$ اذن $f\neq g$

b/ لدينا $D_g=D_f=\mathbb{R}^*-\{2\}$

لتكن $x\in\mathbb{R}^*-\{2\}$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x}{x(x+2)}=\frac{2}{x(x+2)}=g(\ )$$

إذن $f=g$

تعريف

لتكن f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي

تكون f و g متساويتين اذا وفقط اذا كان لهما نفس مجموعة التعريف D و لكل x من D

$f(x)=g(x)$

3- التمثيل المبياني لدالة

نشاط

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث $f(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2}$

أ- حدد D_f

ب - حدد أرتوبي A و B نقطتين من المنحنى C_f أفصوليهما على التوالي 0 و 3

ج- هل النقط $C(2;0)$; $D(-4;6)$; $E(4;-6)$ تنتمي إلى C_f

د – أكتب $f(x)$ بدون رمز للقيمة المطلقة ثم أنشئ المنحنى C_f في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

الحل

أ- نحدد D_f

$x\in D_f$ تكافئ $|x|-2\neq 0$

تكافئ $|x|\neq 2$

تكافئ $x\neq 2$ أو $x=-2$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

ب - نحدد أرتوبي A و B نقطتين من المنحنى C_f أفصوليهما على التوالي 0 و 3

لدينا $f(0)=\frac{-4}{-2}=2$ و منه $A(0;2)\in C_f$

لدينا $f(3)=\frac{9-4}{3-2}=5$ و منه $B(3;5)\in C_f$

ح- هل النقط $C(2;0)$; $D(-4;6)$; $E(4;-6)$ تنتمي إلى C_f

لدينا $2\notin\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ومنه $C(2;0)\in C_f$

لدينا $f(-4)=\frac{16-4}{4-2}=6$ و منه $D(-4;6)\in C_f$

لدينا $f(4)=\frac{16-4}{4-2}=6$ و منه $E(4;-6)\notin C_f$

د – نكتب $f(x)$ بدون رمز للقيمة المطلقة

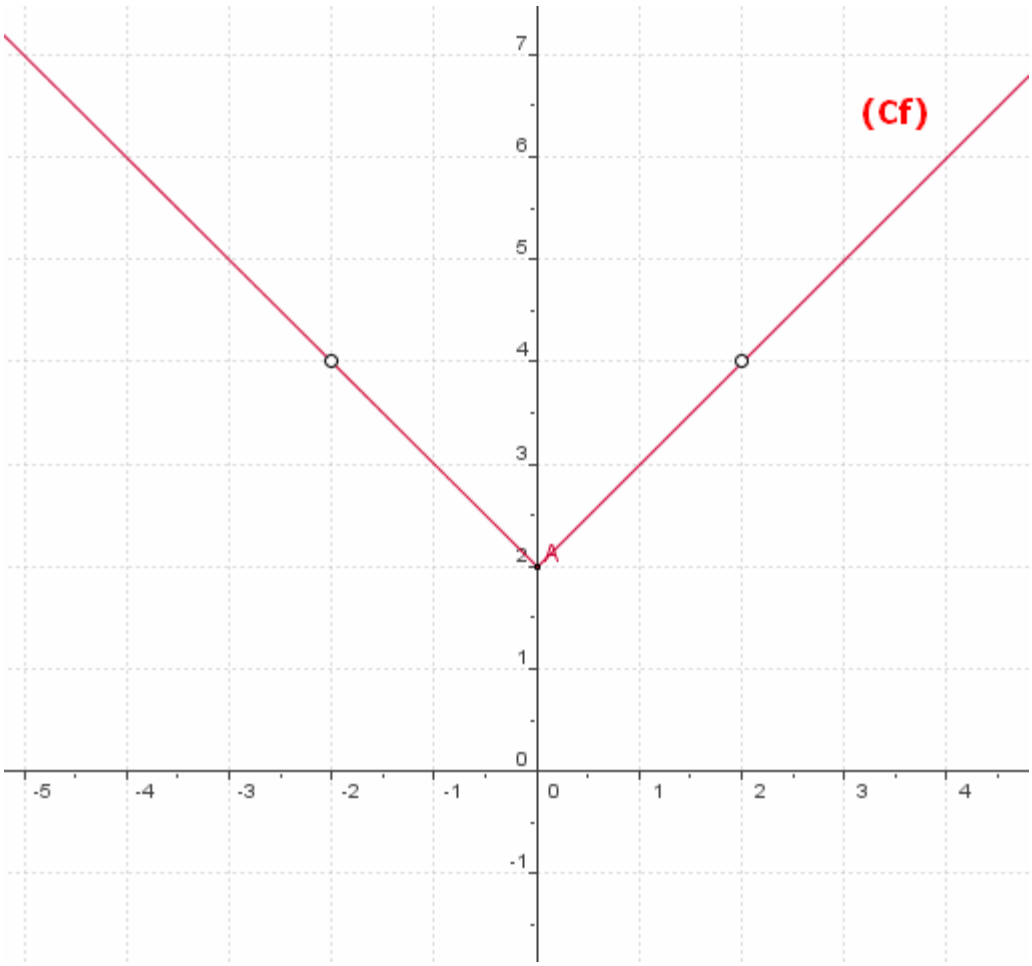
لدينا إذا كان $x \in [0;2[\cup]2;+\infty[$ فان $f(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$

إذا كان $x \in]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ فان $f(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{-x-2}=-x+2$

ننشئ المنحنى C_f

معادلة جزء C_f على $[0;2[\cup]2;+\infty[$ هي $y=x+2$ و منه C_f نصع مستقيم أصله النقطة $A(0;2)$ محروم من النقطة ذات الأفصول 2

معادلة جزء C_f على $]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ هي $y=-x+2$ و منه C_f نصع مستقيم أصله النقطة $A(0;2)$ محروم من النقطة ذات الأفصول 2 -



تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي .

التمثيل المبياني للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x;f(x))$ حيث $x \in D_f$ نرمز لها بالرمز C_f $\quad C_f=\{M(x;f(x))/x \in D_f\}$

ملاحظة

$M(x;y) \in C_f$ تكافئ $y=f(x)$ و $x \in D_f$

العلاقة $y=f(x)$ تسمى معادلة ديكارتية للمنحنى C_f

II - زوجية دالة

1- الدالة الزوجية

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

نقول ان f دالة زوجية اذا تحقق الشرطان التاليان :

* لكل x من D_f $\quad -x \in D_f$

* لكل x من D_f $\quad f(-x) = f(x)$

تمرين

هل الدالة العددية f زوجية في الحالات التالية

a) $f(x) = |x| - \frac{1}{x^2}$; b) $f(x) = x^3 + 1$

c) $\begin{cases} f(x) = 2x & 0 \le x \prec 4 \\ f(x) = -2x & x \prec 0 \end{cases}$

a/ $f(x) = |x| - \frac{1}{x^2}$

$D_f = \mathbb{R}^*$

لدينا لكل $x \in \mathbb{R}^*$ $\quad -x \in \mathbb{R}^*$

لتكن $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = |-x| - \frac{1}{(-x)^2} = |x| - \frac{1}{x^2} = f(x)$$

إذن f دالة زوجية

b/ $f(x) = x^3 + 1$

$f(1) = 1^3 + 1 = 1 + 1 = 2 \qquad f(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$

ومنه $f(-1) \neq f(1)$

f دالة غير زوجية

c/ $\begin{cases} f(x) = 2x & 0 \le x \prec 4 \\ f(x) = -2x & x \prec 0 \end{cases}$

$D_f =]-\infty;0[\cup [0;4[=]-\infty;4[$

نلاحظ أن $-6 \in D_f$ و $6 \notin D_f$ اذن f دالة غير زوجية

ب التمثيل المبياني لدالة زوجية

f دالة زوجية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;f(x))$ من C_f و M' مماثلتها بالنسبة لمحور الأراتيب .

ومنه $M'(-x;f(x))$

و حيث أن f زوجية فان $-x \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$

ومنه $M'(-x;f(-x))$ و بالتالي $M' \in C_f$

اذن C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

العكس

بين أنه إذا كان C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب فان f دالة زوجية

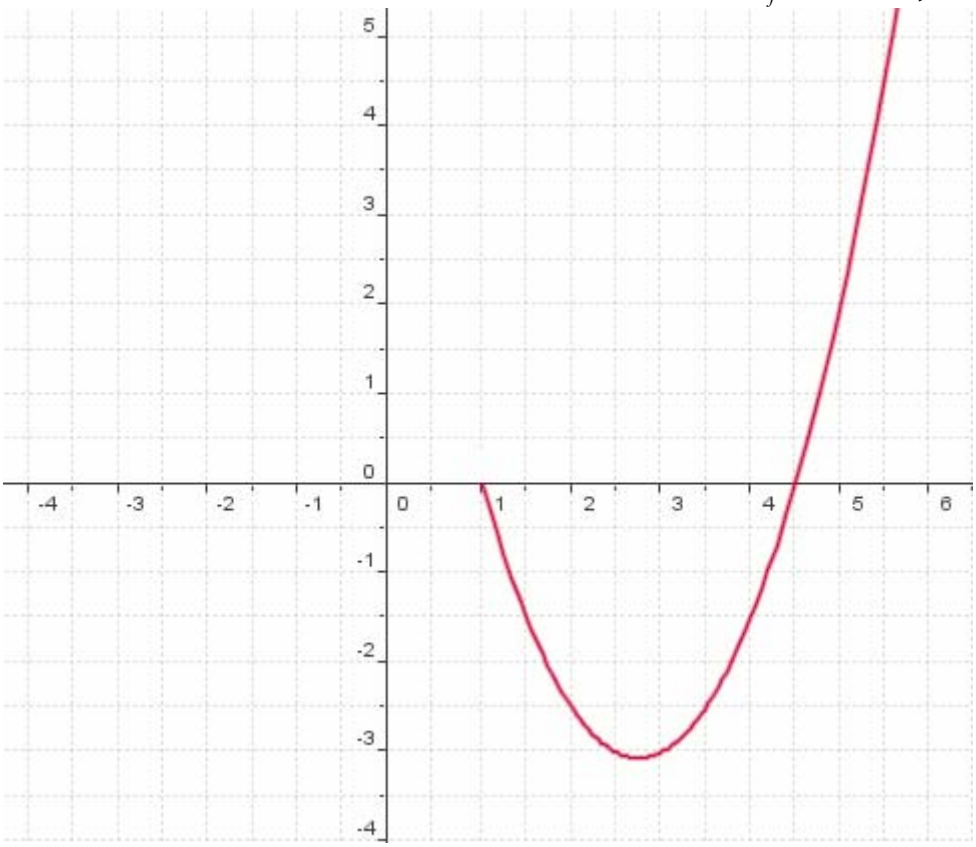
خاصية

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

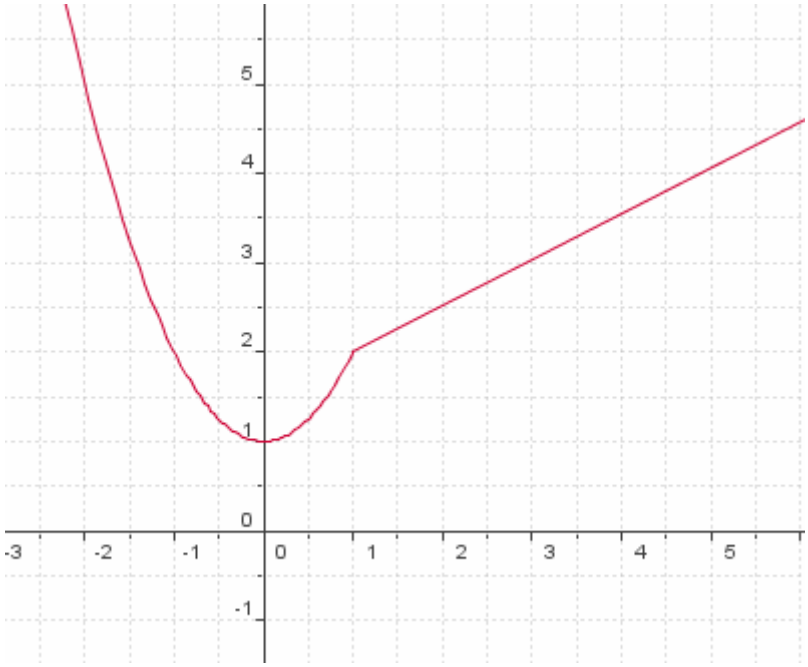
تكون f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل للمنحنى C_f

تمرين

1- f دالة زوجية أتمم المنحنى C_f



2- f دالة عددية منحناها كما يلي



هل f زوجية

2- دالة فردية

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

نقول ان f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان :

* لكل x من D_f $\quad -x \in D_f$

* لكل x من D_f $\quad f(-x) = -f(x)$

تمرين

هل الدالة العددية f فردية في الحالات التالية

a) $f(x)=\frac{1}{x^3}$; b) $f(x)=x^3+1$

c) $\begin{cases} f(x)=-2x+1 & 0\le x\le 2 \\ f(x)=-2x-1 & -2\le x\prec 0 \end{cases}$

a/ $f(x)=\frac{1}{x^3}$

$D_f=\mathbb{R}^*$

لدينا لكل $x\in\mathbb{R}^*$ $\quad -x\in\mathbb{R}^*$

لتكن $x\in\mathbb{R}^*$

$f(-x)=\frac{1}{(-x)^3}=-\frac{1}{x^3}=-f(x)$

إذن f دالة فردية

b/ $f(x)=x^3+1$

$f(1)=1^3+1=1+1=2 \qquad f(-1)=(-1)^3+1=-1+1=0$

ومنه $f(-1)\neq -f(1)$

f دالة غير فردية

c/ $\begin{cases} f(x)=-2x+1 & 0\le x\le 2 \\ f(x)=-2x-1 & -2\le x\prec 0 \end{cases}$

$D_f=[-2;0[\cup[0;2]=[-2;2]$

لدينا لكل $x\in[-2;2]$ و $-x\in[-2;2]$

إذا كان $x\in]0;2]$ فان $-x\in[-2;0[$

و بالتالي $f(x)=-2x+1$ و $f(-x)=-2(-x)-1=2x-1$ و منه $f(-x)=-f(x)$

إذا كان $x\in[-2;0[$ فان $-x\in]0;2]$

و بالتالي $f(x)=-2x-1$ و $f(-x)=-2(-x)+1=2x+1$ و منه $f(-x)=-f(x)$

إذن لكل $x\in[-2;2]$ $\quad f(-x)=-f(x)$

إذن f دالة فردية

ب-التمثيل المبياني لدالة فردية

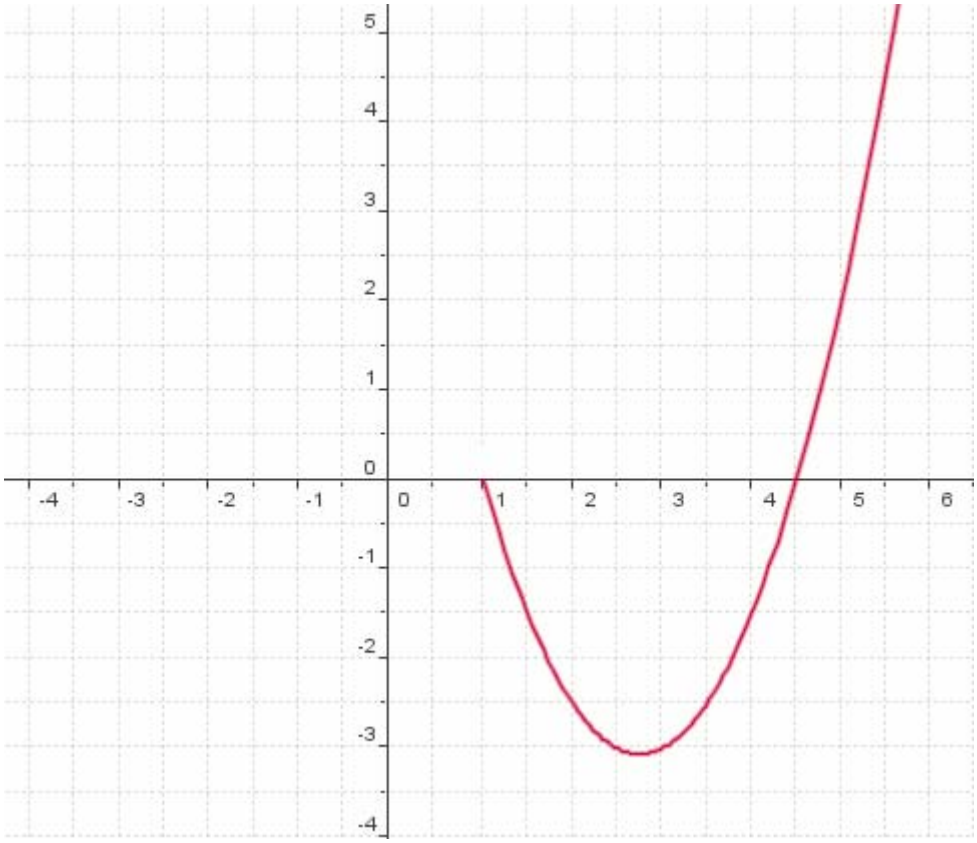
خاصية

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

تكون f دالة فردية إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

تمرين

f دالة فردية أتمم المنحنى C_f



تمرين

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث $f(x)=\dfrac{|x|+x^2}{x}$

حدد D_f وبين أن f فردية ثم أنشئ C_f

ملاحظة يمكن للدالة أن تكون غير فردية و غير زوجية

III- تغيرات دالة

1- منحى تغيرات دالة

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \leq f(x_2)$
- تكون f تزايدية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \prec f(x_2)$
- تكون f تناقصية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \geq f(x_2)$
- تكون f تناقصية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \succ f(x_2)$

مثال أدرس تغيرات الدالة f حيث $f(x)=-2x+1$

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a \prec b$

ومنه $-2a \succ -2b$ و بالتالي $-2a+1 \succ -2b+1$ $f(a) \succ f(b)$

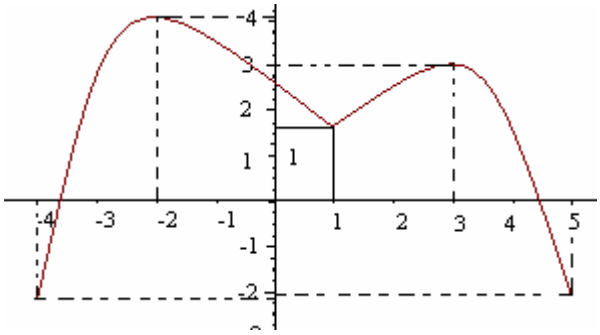
إذن f تناقصية قطعا

تمرين نعتبر $f(x)=|x-2|$

أدرس منحى تغيرات f على كل من $]-\infty;2]$ و $]2;+\infty[$

أنشئ C_f

تمرين من خلال التمثيل المبياني للدالة f
على المجال $[-4;5]$ حدد تغيرات f



2- الدالة الرتيبة

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f
نقول ان f رتيبة على I إذا و فقط إذا كان f إما تزايدية علىI و إما تناقصية على I.

ملاحظات

- يمكن لدالة أن تكون غير رتيبة على مجال I
- دراسة رتابة f على مجال I يعني تجزيءI إلى مجالات تكون فيها f رتيبة. ونلخص الدراسة في جدول يسمى جدول التغيرات

3- معدل التغير

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و x_1 و x_2 عنصرين مختلفينمن D_f
العدد $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x_1 و x_2.

مثال

نعتبر $f(x)=x^2-3x$
أحسب معدل تغيرات f بين 2 و 1-

ب- معدل التغير و الرتابة

بتوظيف التعريف نحصل على

خاصية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$
- تكون f تزايدية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\succ 0$
- تكون f تناقصية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq 0$
- تكون f تناقصية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\prec 0$

تمرين

نعتبر $f(x)=x^2-4x-1$
أدرس رتابة f على كل من المجالين $]2;+\infty[$; $]-\infty;2]$
و أعط جدول تغيرات f

الجواب

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a\neq b$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{a^2-4a-1-b^2+4b+1}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b)-4(a+b)}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b-4)}{a-b}=a+b-4$$

إذا كان a و b من $]2;+\infty[$ فان $a\succ 2$ و $b\succ 2$ ومنه $a+b\succ 4$ أي $a+b-4\succ 0$

إذن f تزايدية قطعا على $]2;+\infty[$

إذا كان a و b من $]-\infty;2]$ فان $a \le 2$ و $b \le 2$ ومنه $a+b \le 4$ أي $a+b-4 \le 0$

إذن f تناقصية على $]-\infty;2]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

تمرين

نعتبر $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$

أدرس رتابة f

4- الرتابة وزوجية دالة

أ- خاصية

لتكن f دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J=\{-x\,/\,x\in I\}\right)$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تناقصية على J.
- إذا كانت f تناقصية على I فان f تزايدية على J.

البرهان

لتكن f دالة زوجية و x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من J

ومنه يوجد x_1' و x_2' من I حيث $x_1'=-x_1$ و $x_2'=-x_2$

$$\frac{f(x_2')-f(x_1')}{x_2'-x_1'}=\frac{f(-x_2)-f(-x_1)}{-x_2+x_1}=-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

إذن تغيرات f على I عكس تغيرات f على J

أ- خاصية

لتكن f دالة فردية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J=\{-x\,/\,x\in I\}\right)$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تزايدية على J.
- إذا كانت f تناقصية على I فان f تناقصية على J.

ملاحظة

لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^+$ ثم استنتاج تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^-$

تمرين

نعتبر $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

1- حدد D_f و أدرس زوجية f

2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

VI- القيمة القصوى – القيمة الدنيا

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي

- نقول ان f تقبل قيمة قصوى عند a إذا وجد مجال I ضمن D_f و $a\in I$ حيث لكل $x\in I-\{a\}$ $f(x)\prec f(a)$
- نقول ان f تقبل قيمة دنيا عند a إذا وجد مجال I ضمن D_f و $a\in I$ حيث لكل $x\in I-\{a\}$ $f(x)\succ f(a)$

اصطلاح

كل من قيم القصوى و قيم الدنيا تسمى مطاريف لدالة f

تمرين نعتبر $f(x)=x+\frac{1}{x}$

1- أدرس زوجية f أحسب $f(1)$

2- بين أن لكل x من $]0;+\infty[$ $f(x)\geq 2$

3- حدد قيمة دنيا و قيمة قصوى لـ f إذا وجد

الجواب

1- ندرس زوجية f

$D_f=\mathbb{R}^*$

لكل $x\in\mathbb{R}$ $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$$

إذن f فردية

حساب $f(1)=1+\frac{1}{1}=2$

2- نبين أن لكل x من $]0;+\infty[$ $f(x)\geq 2$

ليكن x من $]0;+\infty[$

$$f(x)-2=x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$$

بما أن $x\succ 0$ و $(x-1)^2\geq 0$ فان $f(x)\geq 2$

3- نحدد قيمة دنيا و قيمة قصوى لـ f

من 1/ و 2/ نستنتج أن لكل x من $]0;+\infty[$ $f(x)\geq f(1)$

اذن f تقبل قيمة دنيا عند 1

ليكن $x\in]-\infty;0[$ و منه $-x\in]0;+\infty[$ مما سبث نستنتج أن $f(-x)\geq f(1)$

و حيث f فردية فان $-f(x)\geq f(1)$ و بالتالي $f(x)\leq -f(1)$ أي $f(x)\leq f(-1)$

اذن f تقبل قيمة قصوى عند 1-

خاصية

ليكن a و b و c أعداد حقيقية حيث $a\prec b\prec c$ و f دالة عددية لمتغير حقيقي

إذا كانت f تزايدية على $[a;b]$ و تناقصية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة قصوى عند b

إذا كانت f تناقصية على $[a;b]$ و تزايدية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة دنيا عند b

V - دراسة تغيرات دالة – دراسة وضعية منحنيين

دراسة تغيرات دالة f يعني

- تحديد D_f
- دراسة رتابة f وتلخيصها في جدول التغيرات

دراسة وضع منحنيين مبيانيا

ليكن C_f و Cg منحنيين للدالتين f و g على التوالي

يكون $f(x)\succ g(x)$ على المجال I اذا و فقط كان C_f فو ق Cg في المجال I

يكون $f(x)\prec g(x)$ على المجال I اذا و فقط كان C_f تحت Cg في المجال I

حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ على المجال I هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنيين C_f تحت Cg في المجال I

تمرين

أدرس تغيرات f حيث $f(x)=\frac{-2x+3}{x-1}$

تمرين

أدرس تغيرات f حيث $f(x)=x^3-3x$

حدد مطاريف الدالة f

تمارين و حلول

تمرين1

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ: $f(x)=x|x|-4x$

1 – أدرس زوجية الدالة f

2 – أ) بين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $[0;+\infty[$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-4$$

ب) حدد رتابة f على كل من $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و استنتج رتابة f على كل من $]-2;0]$ و $]-\infty;-2[$

ج) اعط جدول تغيرات الدالة f

3- حدد مطاريف الدالة f إن وجدت

4- حدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y=-2x$

$f(x)=x|x|-4x$

1 – ندرس زوجية الدالة f

لدينا $D_f=\mathbb{R}$

لكل x من $\mathbb{R}$: $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=-x|-x|+4x=-(x|x|-4x)=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

2 – أ) نبين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $[0;+\infty[$: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-4$

لدينا لكل x من $[0;+\infty[$: $f(x)=x^2-4x$

ليكن x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x\neq y$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{x^2-4x-y^2+4y}{x-y}$$
$$=\frac{(x-y)(x+y)-4(x-y)}{x-y}$$
$$=\frac{(x-y)(x+y-4)}{x-y}$$
$$=x+y-4$$

ب) نحدد رتابة f على كل من $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و نستنتج رتابة f على كل من $]-2;0]$ و $]-\infty;-2[$

* ليكن x و y من $[0;2[$ حيث $x\neq y$ ومنه $0\leq x\prec 2$ و $0\leq y\prec 2$

و بالتالي $0\leq x+y\prec 4$ أي $-4\leq x+y-4\prec 0$

ومنه $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \prec 0$

إذن f تناقصية قطعا على $[0;2[$ و حيث أن f فردية فان f تناقصية قطعا على $]-2;0]$

* ليكن x و y من $]2;+\infty[$ حيث $x \neq y$ ومنه $x \succ 2$ و $y \succ 2$

وبالتالي $x+y-4 \succ 0$ أي $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$

إذن f تزايدية قطعا على $]2;+\infty[$ ومنه f تزايدية قطعا على $]-\infty;-2[$

ج) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f		↗	4	↘	-4	↗	

3- نحدد مطاريف الدالة f

بما أن f تزايدية على كل من $]2;+\infty[$ و $]-\infty;-2[$ و تناقصية على $[-2;2]$ فان f تقبل قيمة قصوى عند -2 هي 4 و قيمة دنيا عند 2 هي -4

4- نحدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y=-2x$

تحديد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يرجع إلى حل المعادلة $x|x|-4x=-2x$

$x|x|-4x=-2x$ تكافئ $x|x|-2x=0$

تكافئ $x(|x|-2)=0$

تكافئ $x=0$ أو $|x|=2$

تكافئ $x=0$ أو $x=2$ أو $x=-2$

إذن المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 2 و -2

تمرين2

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\frac{-x}{x^2-1}$

1- حدد D_f و بين أن f دالة فردية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- حدد منحى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و استنتج منحى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

4- أعط جدول تغيرات f

الحل

$$f(x)=\frac{-x}{x^2-1}$$

1- نحدد D_f

*- ليكن $x \in \mathbb{R}$

$x \in D_f$ يكافئ $x^2-1 \neq 0$

تكافئ $x^2 \neq 1$

تكافئ $x \neq 1$ و $x \neq -1$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

*- نبين أن f دالة فردية

لكل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

لتكن $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$$f(-x)=\frac{-(-x)}{(-x)^2-1}=-\frac{-x}{x^2-1}=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

-2 نبين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f $\quad \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

ليكن a و b من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ حيث $a\neq b$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\frac{-a}{a^2-1}-\frac{-b}{b^2-1}}{a-b}=\frac{-a(b^2-1)+b(a^2-1)}{(a^2-1)(b^2-1)}\times\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{-ab^2+a+ba^2-b}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}=\frac{ab(a-b)+a-b}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{(a-b)(ab+1)}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

-3 نحدد منحى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و نستنتج منحى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

لدينا لكل عنصرين مختلفين a و b من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ $\quad \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

ليكن a و b من $[0;1[$

ومنه $0\le b\prec 1$; $0\le a\prec 1$ و بالتالي $0\le b^2\prec 1$ et $0\le a^2\prec 1$ et $0\le ab\prec 1$

ومنه $-1\le b^2-1\prec 0$ et $-1\le a^2-1\prec 0$ et $1\le ab+1\prec 2$

إذن $\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}\succ 0$ ومنه f تزايدية على $[0;1[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $]-1;0]$

ليكن a و b من $]1;+\infty[$

ومنه $b\succ 1$; $a\succ 1$ و بالتالي $b^2\succ 1$ et $0\le a^2\succ 1$ et $ab\succ 1$

ومنه $b^2-1\succ 0$ et $a^2-1\succ 0$ et $ab+1\succ 2$

إذن $\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}\succ 0$ ومنه f تزايدية على $]1;+\infty[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $]-\infty;-1[$

-4 جدول تغيرات f

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f	↗	‖	↗	‖	↗

1- دراسة و تمثيل مبيانيا الدالة $f : x \to ax^2$ حيث $a \neq 0$

أ- أمثلة

* نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x) = 2x^2$

- ندرس تغيرات f

$D_f = \mathbb{R}$

f دالة زوجية و منه اقتصار دراستها على $[0;+\infty[$

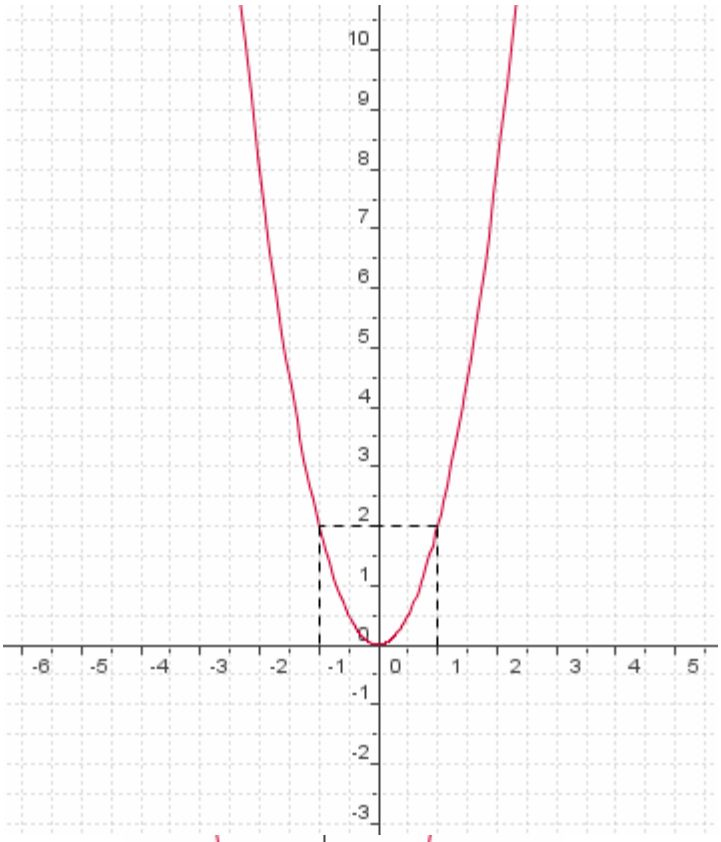
ليكن x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x \neq y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 2(x+y)$$

لكل x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x \neq y$: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$

إذن f تزايدية على $[0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	0	↗



معادلة C_f هي $y = 2x^2$

C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

ملاحظة

إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فان $0 \prec 2x^2 \prec 2x$

هذا يعني أن جزء C_f على $]0;1[$

تحت المستقيم $(\Delta) : y = 2x$

إذا كان $x \succ 1$ فان $2x^2 \succ 2x$

هذا يعني أن جزء C_f على $]1;+\infty[$

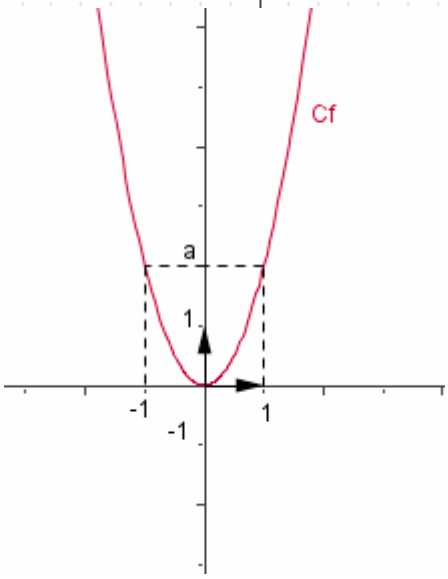
فوق المستقيم $(\Delta) : y = 2x$

جدول القيم

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل

* بالمثل أدرس الدالة f حيث $f(x) = \frac{-1}{2}x^2$



ب- الحالة العامة

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x) = ax^2$ حيث $a \neq 0$

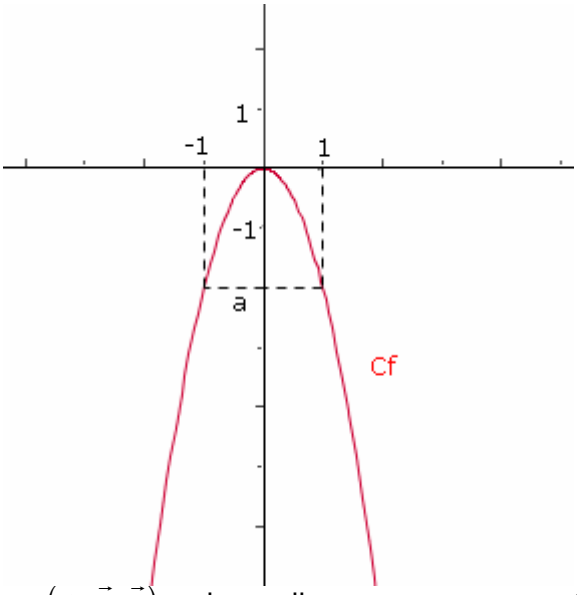
إذا كان $a \succ 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	0	↗

C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل

إذا كان $a \prec 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	0	↘



C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل

تمرين $f(x)=x^2$ $\quad g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$h(x)=3x^2$ $\quad m(x)=-2x^2$

1- أعط جدول تغيرات f و g و h و m

2- في نفس المعلم المتعامد الممنظم أنشئ C_f و C_g و C_h و C_m

2- دراسة الدالة $x \to ax^2+bx+c$

لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين و $\vec{u}(\alpha;\beta)$ متجهة في مستوى منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

و t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$

$t(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ تكافئ $\begin{cases} X-\alpha=x \\ Y-\beta=y \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} X=x+\alpha \\ Y=y+\beta \end{cases}$

مثال1 لندرس f حيث $f(x)=2x^2-4x-3$

الشكل القانوني لـ $f(x)$ هو $f(x)=2(x-1)^2-5$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=2(x-1)^2-5$ أي $y+5=2(x-1)^2$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;-5)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \to 2x^2$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases} X-1=x \\ Y+5=y \end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=2x^2$

تكافئ $Y+5=2(X-1)^2$

تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) شلجم رأسه $O(0;0)$ و محور تماثله

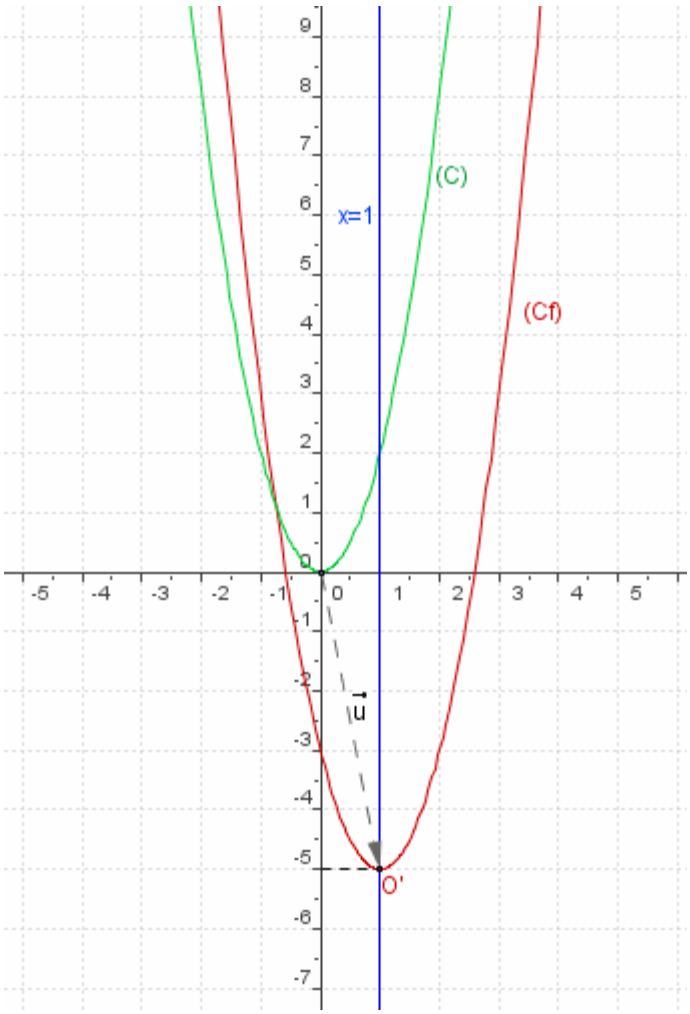
محور الاراتيب فان (C_f) شلجم رأسه $t(O)=O'$

أي $O'(1;-5)$ و محور تماثله المستقيم ذا المعادلة $x=1$

و حيث أن الدالة $x \to 2x^2$ تزايدية على $[0;+\infty[$

و تناقصية على $]-\infty;0]$ فان الدالة f تزايدية على

$[1;+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty;1]$



جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↘	-5	↗

إنشاء المنحنى

x	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-5	-3	3

مثال2 لندرس f حيث $f(x)=-x^2+2x+3$

الشكل القانوني لـ $f(x)$ هو $f(x)=-(x-1)^2+4$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=-(x-1)^2+4$ أي $y-4=-(x-1)^2$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;4)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x\to -x^2$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases} X-1=x \\ Y-4=y \end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=-x^2$

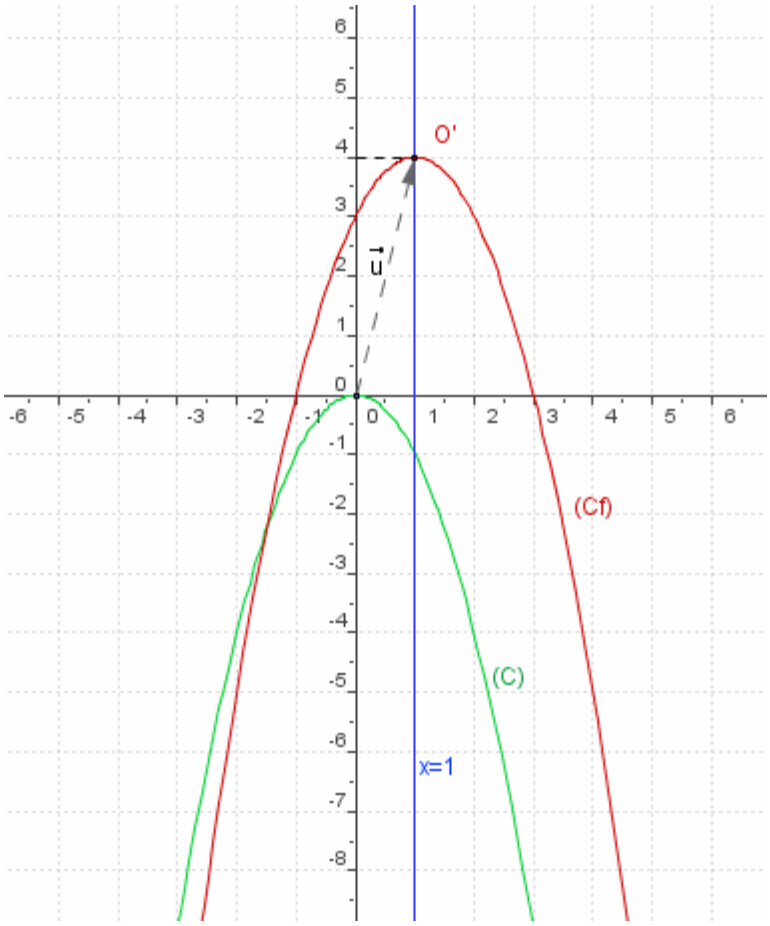
تكافئ $Y-4=-(X-1)^2$

تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) شلجم رأسه $O(0;0)$ و محور تماثله محور الاراتيب فان (C_f) شلجم رأسه $t(O)=O'$ أي $O'(1;4)$ و محور تماثله المستقيم ذا المعادلة $x=1$

و حيث أن الدالة $x\to -x^2$ تناقصية على $[0;+\infty[$ و تزايدية على $]-\infty;0]$ فان الدالة f تناقصية على $[1;+\infty[$ و تزايدية على $]-\infty;1]$



جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↗	4	↘	

إنشاء المنحنى

$f(x)=0$ تكافئ $x=-1$ أو $x=3$

x	0	1	2	4
$f(x)$	3	4	3	-5

الحالة العامة $x\to ax^2+bx+c$ حيث $a\neq 0$

نشاط

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ و $a\neq 0$

1/ أعط الشكل القانوني لـ f

2/ بين أن المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to ax^2$ بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}\left(\frac{-b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ و استنتج طبيعة (C_f)

ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد a

خاصيات

لتكن f دالة حدودية من الدرجة الثانية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ و $a\neq 0$

* $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ لكل x من $\mathbb{R}$ حيث $\alpha=\frac{-b}{2a}$ و $\beta=f(\alpha)$ هذه الكتابة تسمى الشكل القانوني للدالة f

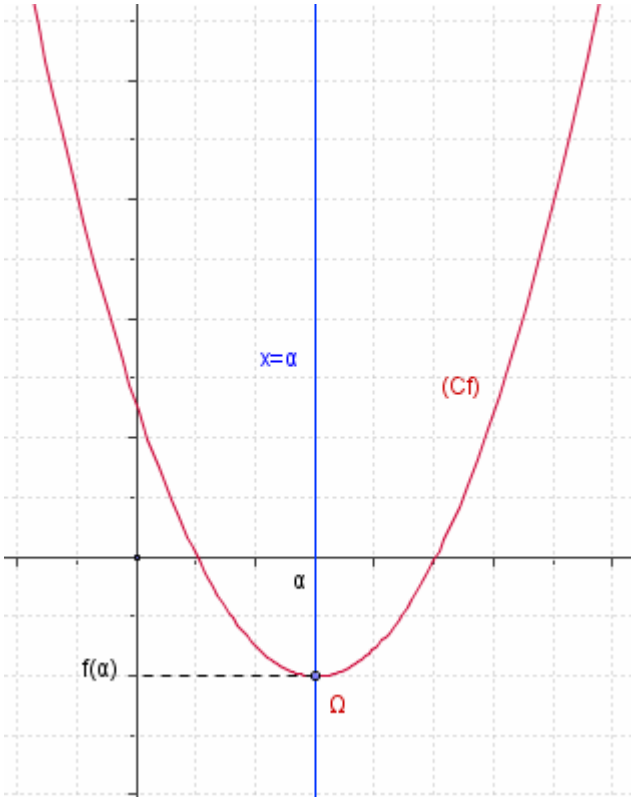
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to ax^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو شلجم رأسه $\Omega(\alpha;\beta)$ و محور تماثله المستقيم ذا $x=\alpha$

نضع $\alpha=\frac{-b}{2a}$

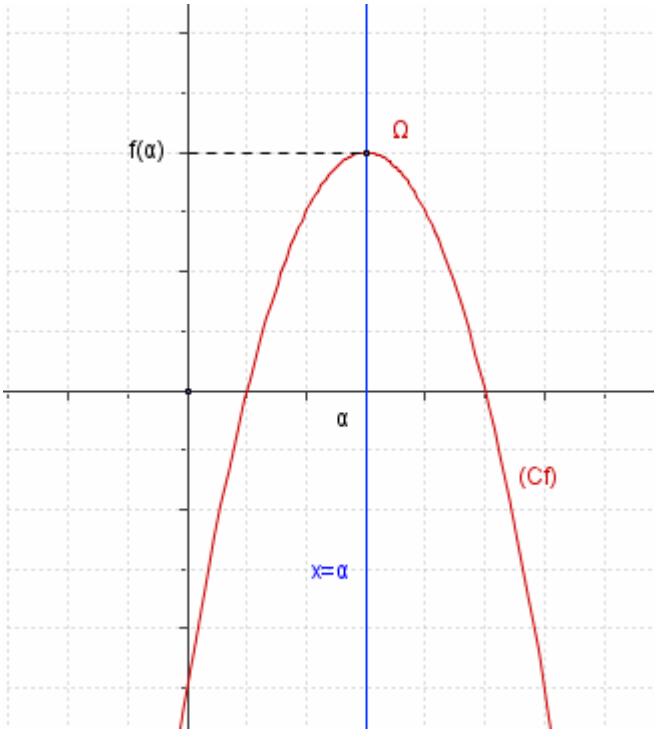
*- إذا كان $a\succ 0$ فان:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↘	$f(\alpha)$	↗



* إذا كان $a\prec 0$ فان:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↗	$f(\alpha)$	↘



3- دراسة الدالة $x\to\frac{a}{x}$

أ- أمثلة

* نعتبر الدالة $f(x)=\frac{2}{x}$

- ندرس تغيرات f

$D_f=\mathbb{R}^*$

f دالة فردية و منه اقتصار دراستها على $]0;+\infty[$

ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$ $\quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{-2}{xy}$

لكل x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$ $\quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\prec 0$

إذن f تناقصية على $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	‖	↘

ملاحظة

إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فان $\frac{2}{x} \succ 2$

هذا يعني أن جزء C_f على $]0;1[$

فوق المستقيم $(\Delta): y = 2$

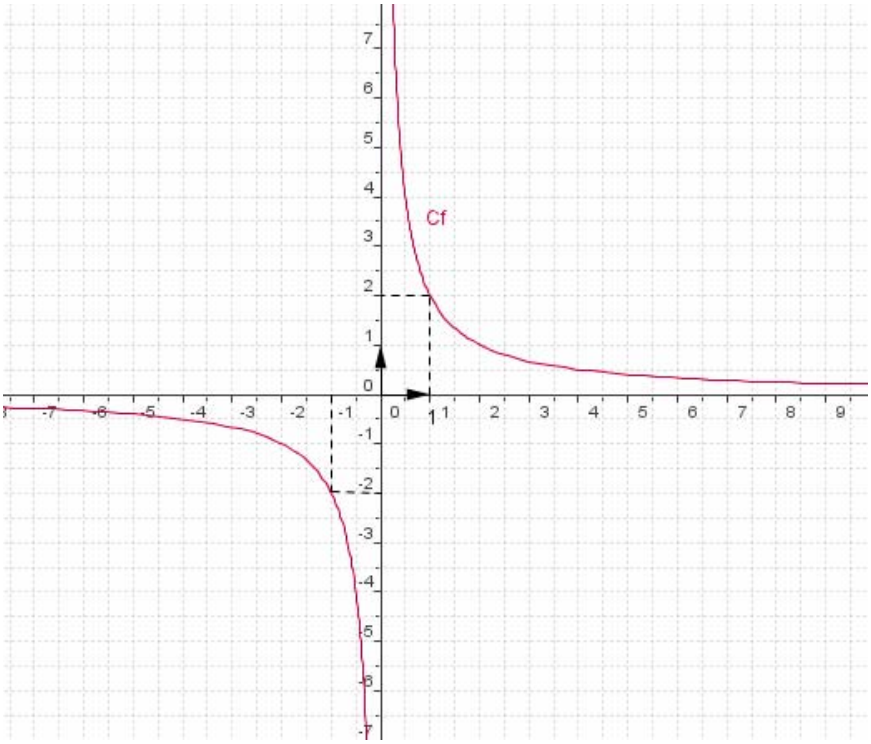
إذا كان $x \geq 1$ فان $0 \prec \frac{2}{x} \leq 2$

هذا يعني أن جزء C_f على $]1;+\infty[$

تحت المستقيم $(\Delta): y = 2$

جدول القيم

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	4	2	1	2



C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

* نعتبر الدالة $f(x) = \frac{-1}{x}$

- ندرس تغيرات f

$D_f = \mathbb{R}^*$

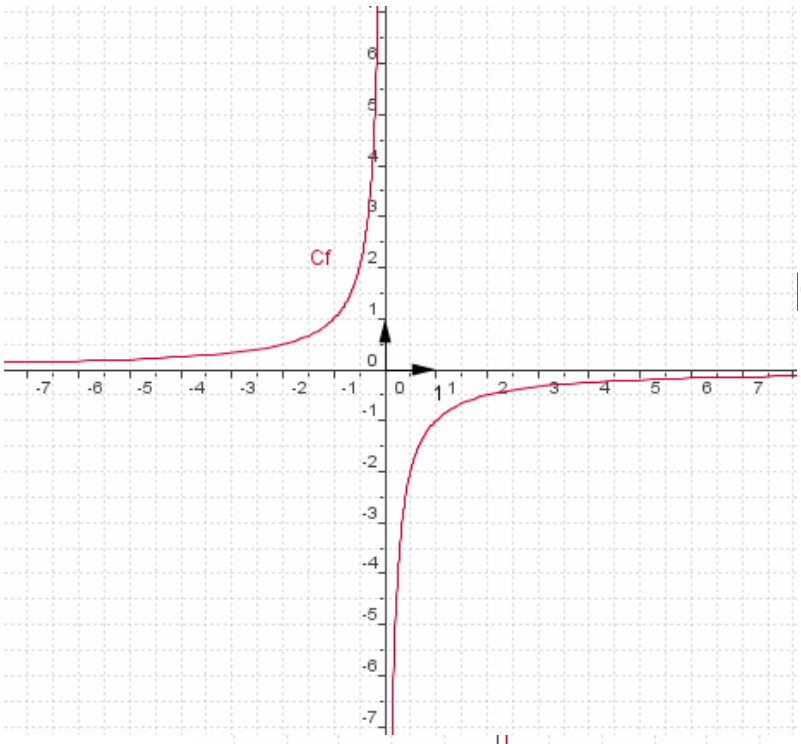
f دالة فردية و منه اقتصار دراستها على $]0;+\infty[$

ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x \neq y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{1}{xy}$$

إذن f تزايدية على $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	‖	↗



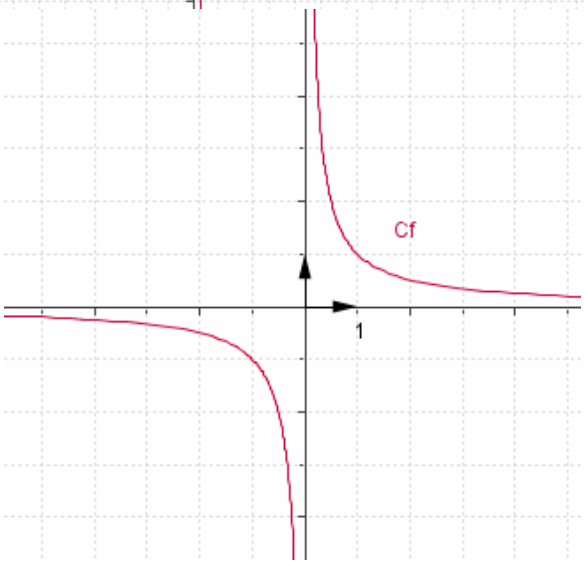
C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

ب- الحالة العامة

نعتبر $f(x) = \frac{a}{x}$

إذا كان $a \succ 0$ فان

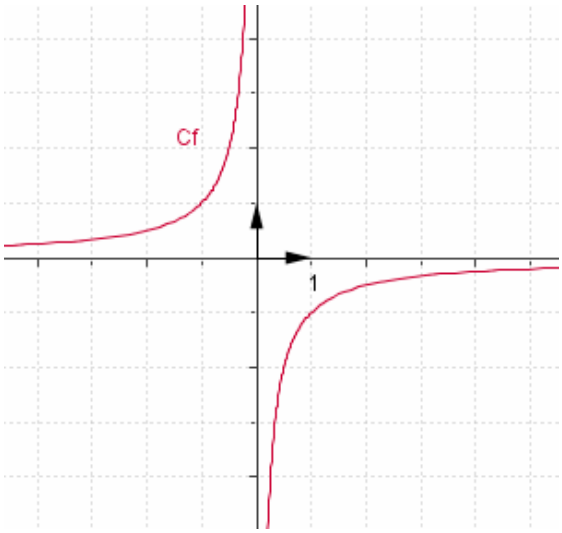
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	‖	↘



C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

إذا كان $a \prec 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	‖	↗



C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

4 - دراسة الدالة $x \to \dfrac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$

مثال 1 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

*- $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

*- بإنجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-1}$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y = 2 + \dfrac{3}{x-1}$ أي $y - 2 = \dfrac{3}{x-1}$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;2)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \to \dfrac{3}{x}$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M) = M'$ تكافئ $\begin{cases} X - 1 = x \\ Y - 2 = y \end{cases}$

$M(x;y) \in (C)$ تكافئ $y = \dfrac{3}{x}$ تكافئ $Y - 2 = \dfrac{3}{X-1}$ تكافئ $M'(X;Y) \in (C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) هدلول مركزه $O(0;0)$ و مقارباه محورا المعلم فان (C_f) هدلول مركزه

$t(O) = O'$ أي $O'(1;2)$ و مقارباه المستقيمان اللذان معادلتهما $x = 1$ و $y = 2$

و حيث أن الدالة $x \to \dfrac{3}{x}$ تناقصية على كل من $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ فان الدالة f تناقصية على كل من $]-\infty;1[$ و $]-\infty;1[$

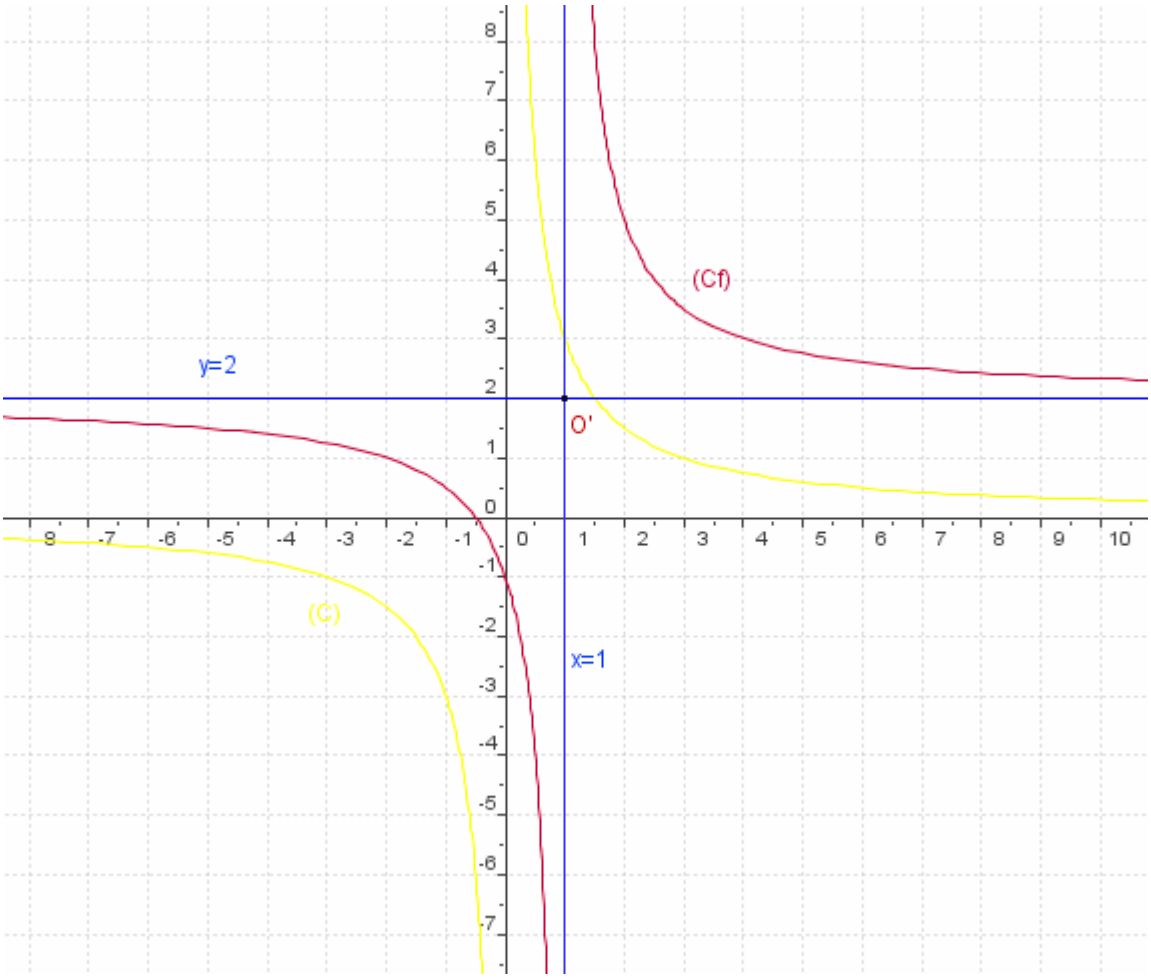
جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↘	‖	↘

إنشاء المنحنى

$f(x) = 0$ تكافئ $x = -\dfrac{1}{2}$

x	0	1	2	5
$f(x)$	-1	//	5	$\dfrac{11}{4}$



مثال 2 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

*- $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

*- بإنجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن

$$f(x)=2+\frac{-1}{x+2}$$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=2+\dfrac{-1}{x+2}$ أي $y-2=\dfrac{-1}{x+2}$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(-2;2)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x\to\dfrac{-1}{x}$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases}X+2=x\\Y-2=y\end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=\dfrac{3}{x}$ تكافئ $Y-2=\dfrac{-1}{X+2}$ تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) هذلول مركزه $O(0;0)$ و مقارباه محورا المعلم فان (C_f) هذلول مركزه

$t(O)=O'$ أي $O'(-2;2)$ و مقارباه المستقيمان اللذان معادلتهما $x=-2$ و $y=2$

و حيث أن الدالة $x\to\dfrac{-1}{x}$ تزايدية على كل من $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ فان الدالة f تزايدية على

كل من $]-\infty;-2[$ و $]-\infty;-2[$

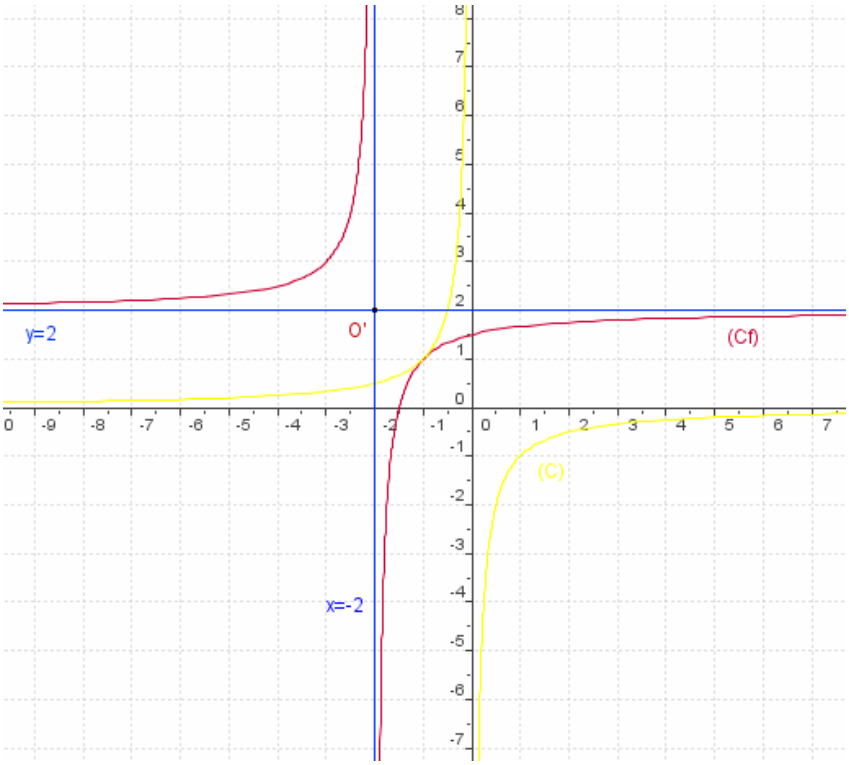
جدول التغيرات

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f		↗	‖	↗	

إنشاء المنحنى

$f(x)=0$ تكافئ $x=-\frac{3}{2}$

x	-3	-2	-1	0	2
$f(x)$	1	//	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$



الحالة العامة $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$

نشاط

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$

1- حدد α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

2- بين أن المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \to \frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

و استنتج طبيعة (C_f)

3- بين أن تغيرات f مرتبطة بالعدد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

خاصيات

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$

* توجد أعداد حقيقية α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \to \frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

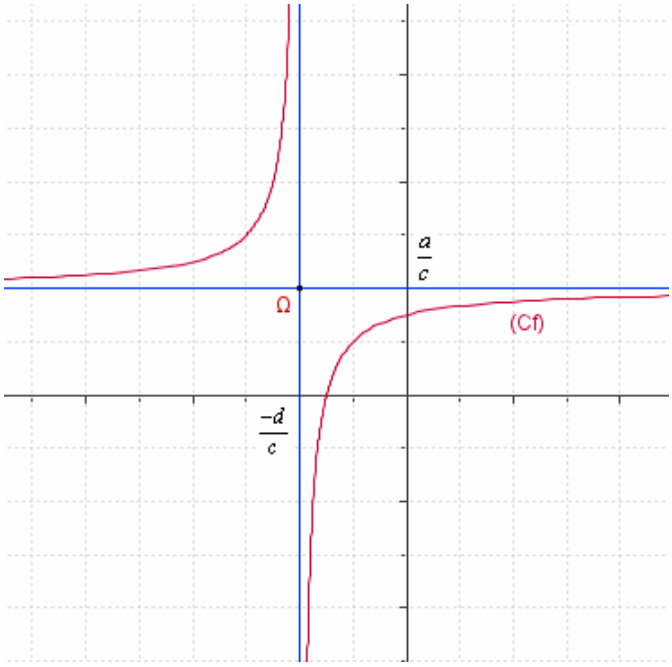
* C_f منحنى f في معلم متعامد هو هدلول مركزه $\Omega(\alpha;\beta)$ و مقارباه هما المستقيمان المعرفان بـ

$x=\alpha$ و $y=\beta$

ملاحظة: $\alpha=\frac{-d}{c}$ و $\beta=\frac{a}{c}$

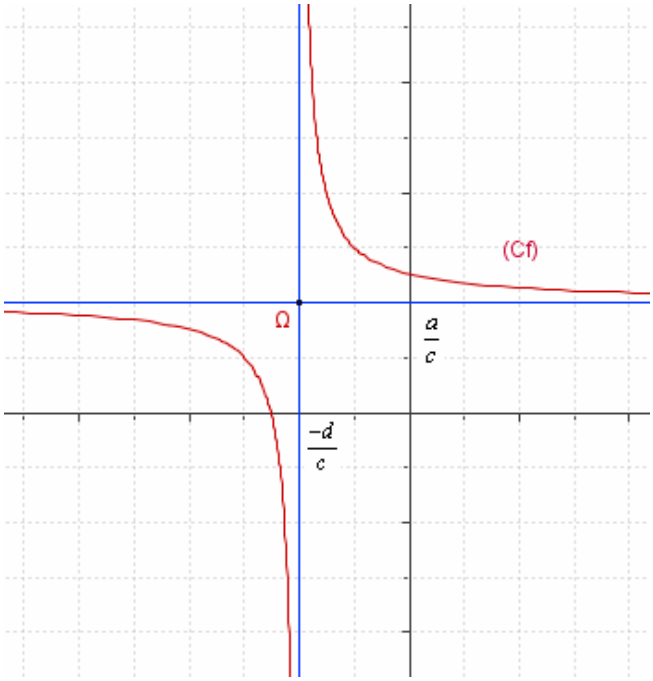
*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \succ 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	↗	‖	↗



*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \prec 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	↘	‖	↘



5- دالة الجيب sin - دالة جيب التمام cos

أ/ دالة الجيب sin

تعريف

الدالة $\sin us$ هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيبه $\sin x$

نكتب $\sin : x \to \sin x$

خاصية1

لكل x من $\mathbb{R}$ $\sin(-x) = -\sin x$ نقول ان الدالة sin فردية

* رأينا أن لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$ $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$

ومنه $\sin x = \sin(x + 2\pi)$

خاصية2

لكل x من $\mathbb{R}$ $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ نقول ان الدالة sin دورية و 2π دور لها

التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\sin})$

و حيث $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ فان $M'(x + 2k\pi;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\sin})$

و بالتالي $\overrightarrow{MM'} = 2k\pi\vec{i}$ أي M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى على مجال سعته 2π مثلا $]-\pi;\pi]$ و استنتاج ما تبقى من المنحنى

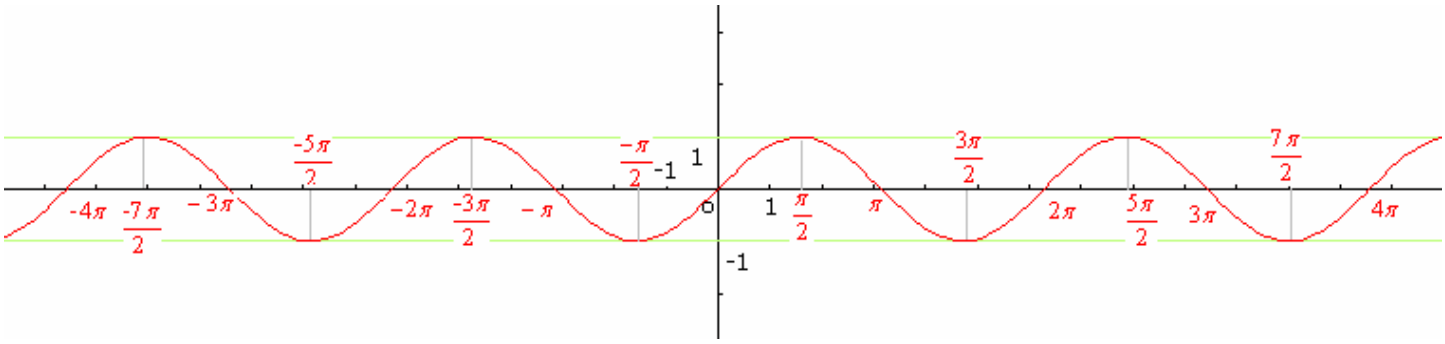
في المجالات $]-\pi + 2k\pi;\pi + 2k\pi]$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

ملاحظة

sin فردية و منه المنحنى متماثل بالنسبة لأصل المعلم

يكفي تمثيل المنحنى $(C_{\sin})$ على $[0;\pi]$ و استنتاج المنحنى $(C_{\sin})$ عل $[-\pi;0]$

التمثيل المبياني لدالة sin



ب/ دالة جيب التمام cos

تعريف

الدالة cos sin us هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيب تمامه $\cos x$

نكتب $\cos : x \to \cos x$

خاصية1

لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos(-x) = \cos x$ نقول إن الدالة cos زوجية

* رأينا أن لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$ $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$

ومنه $\cos x = \cos(x + 2\pi)$

خاصية2

لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ نقول إن الدالة cos دورية و 2π دور لها

التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;\cos x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\cos})$

و حيث $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ فان $M'(x + 2k\pi;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\cos})$

و بالتالي $\overrightarrow{MM'} = 2k\pi\vec{i}$ أي M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

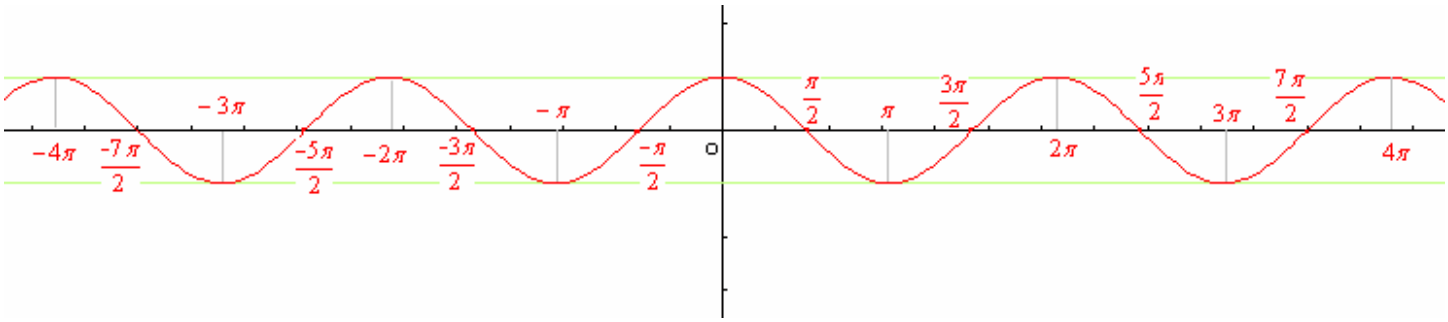
و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى $(C_{\cos})$ على مجال سعته 2π مثلا $]-\pi;\pi]$ و استنتاج ما تبقى من المنحنى في المجالات $]-\pi + 2k\pi;\pi + 2k\pi]$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

ملاحظة

cos زوجية و منه المنحنى $(C_{\cos})$ متماثل بالنسبة لمحو الاراتيب

يكفي تمثيل المنحنى $(C_{\cos})$ على $[0;\pi]$ و استنتاج المنحنى $(C_{\cos})$ عل $[-\pi;0]$

التمثيل المبياني لدالة cos



تمارين و حلول

تمرين1

نعتبر f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي حيث $f(x)=x^2-2x \quad ; \quad g(x)=\dfrac{-2x-1}{-2x+1}$

1 - حدد مجموعة تعريف الدالة g

2 - أعط جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

3- أ) أنقل الجدول التالي و أتممه

x	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$					
$g(x)$					

ب) حدد تقاطع C_f و محور الافاصيل

ج) أنشئ المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

الجواب

$$f(x)=x^2-2x \quad ; \quad g(x)=\frac{-2x-1}{-2x+1}$$

1 - نحدد مجموعة تعريف الدالة g

ليكن $x\in\mathbb{R}$ $\quad -2x+1\neq 0$ تكافئ $x\neq\frac{1}{2}$ $\quad$ إذن $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2 - نعطي جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

جدول تعيرات f $\quad a=1 \quad \frac{-b}{2a}=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↘	-1	↗

جدول تغيرات g $\quad$ لدينا $\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-4$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g	↘	‖	↘

3- أ - نتمم الجدول

x	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$	3	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3
$g(x)$	$\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$

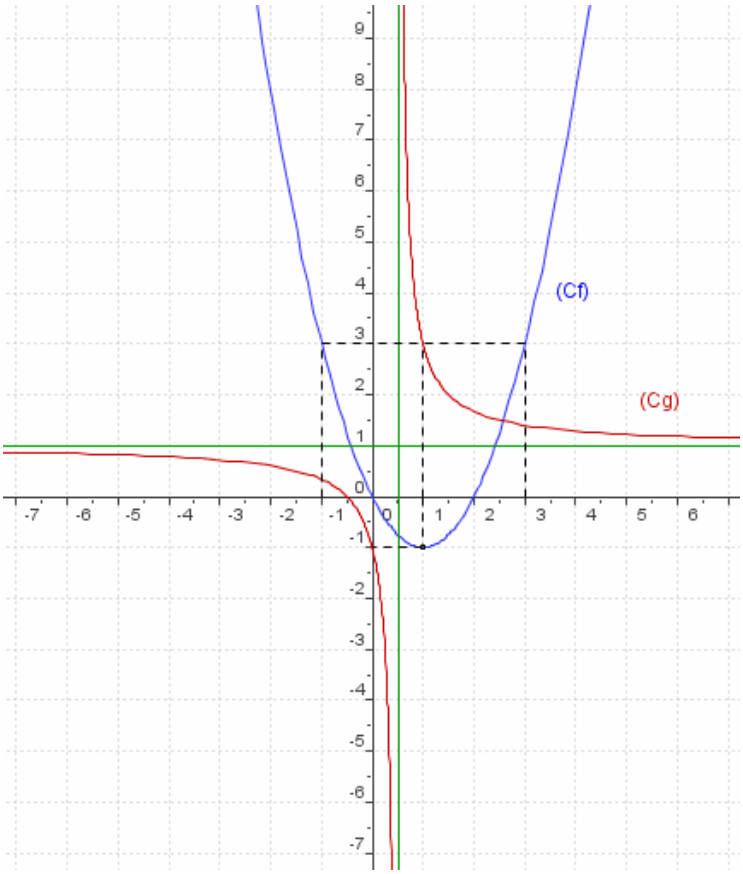
ب) نحدد تقاطع C_f و محور الافاصيل

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x=2$$

إذن C_f يقطع محو الافاصيل في النقطتين ذات الافصولين 0 و 2 على التوالي

ج) إنشاء المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$



تمرين2

لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين بـ

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1} \qquad g(x)=x^2-3|x|$$

وليكن C_f و C_g منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ- حدد D_f

ب- أحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(4)$

2- أعط جدول تغيرات f

3- أ- أدرس زوجية g

ب- بين أن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

د- أعط جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

4- حدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

5 - أ- أنشئ C_f و C_g

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

ج – حل مبيانيا المتراجحة $x^2-3|x|\geq 0$

الجواب

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1} \qquad g(x)=x^2-3|x|$$

2- أ- نحدد D_f

لتكن $x \in \mathbb{R}$

$x \in D_f$ تكافئ $x-1 \neq 0$

تكافئ $x \neq 1$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ب- نحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(4)$

$$f(2) = \frac{4-1}{2-1} = 3 \quad ; \quad g(2) = 4-6 = -2 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad ; \quad g(4) = 16-12 = 4$$

2- نحدد تغيرات f

لدينا $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ ومنه f تناقصية على كل من $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

3- أ- ندرس زوجية g

لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $-x \in \mathbb{R}$

$$g(-x) = (-x)^2 - 3|-x| = x^2 - 3|x| = g(x)$$

g دالة زوجية

ب- بين أن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

لدينا $g(x) = x^2 - 3x$ لكل x من $[0;+\infty[$

$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 0 \qquad \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$

معامل x^2 هو العدد الموجب 1 و منه الدالة $x \to x^2 - 3x$ تزايدية $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

اذن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

د- نعطي جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

لدينا g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

و حيث أن g زوجية فان g تزايدية على $\left]-\frac{3}{2};0\right]$ و تناقصية على $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g		↘	$\frac{9}{4}$	↗	0	↘	$\frac{9}{4}$	↗	

4- نحدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

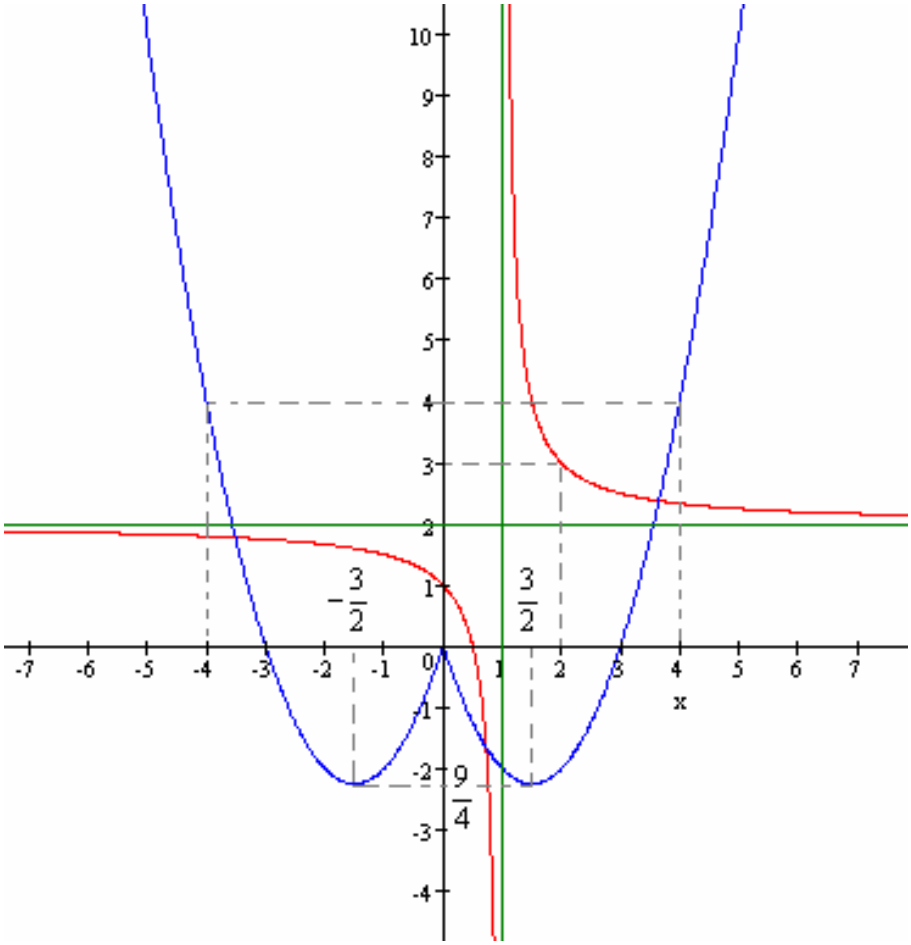
بما أن g زوجية فانه يكفي تحديد تقاطع C_g و محور الأفاصيل على $\mathbb{R}^+$ و استنتاج التقاطع على $\mathbb{R}^-$

ليكن $x \in \mathbb{R}^+$: $\quad g(x) = 0$ تكافئ $x^2 - 3x = 0$

تكافئ $x = 0$ أو $x = 3$

إذن C_g و محور الأفاصيل يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 3 و 3- على التوالي

5 - أ- ننشئ C_f و C_g



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

من خلال التمثيل المبياني نلاحظ أن C_f و C_g يتقاطعان في ثلاث نقط

ومنه للمعادلة $f(x)=g(x)$ ثلاثة حلول

ج – نحل مبيانيا المتراجحة $x^2-3|x|\geq 0$

$x^2-3|x|\geq 0$ تكافئ $g(x)\geq 0$ تكافئ C_g فوق محور الأفاصيل

من خلال التمثيل المبياني يتضح أن C_g فوق محور الأفاصيل أو ينطبقان في $]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[\cup\{0\}$

إذن $S=]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[\cup\{0\}$

تمرين3

لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين بـ

$$f(x)=x^2-x \qquad g(x)=\frac{2|x|-1}{|x|-1}$$

وليكن C_f و C_g منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

3- أ- حدد D_g

ب- أحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$

2- أ- أعط جدول تغيرات f

ب- حدد طبيعته المنحنى C_f

3- أ- بين أن g دالة زوجية

ب- حدد تغيرات g و أعط جدول تغيراتها

4- أ- أنشئ C_f و C_g

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

الجواب

$$g(x)=\frac{2|x|-1}{|x|-1} \qquad f(x)=x^2-x$$

4- أ- نحدد D_g

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_g$ تكافئ $|x|-1\neq 0$

تكافئ $|x|\neq 1$

تكافئ $x\neq 1$ و $x\neq -1$

إذن $D_g=\mathbb{R}-\{1;-1\}$

ب- نحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$

$$g(2)=\frac{2\times 2-1}{2-1}=3 \quad ; \quad f(2)=2^2-2=4-2=2$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-1}=0 \quad ; \quad g(0)=\frac{2\times 0-1}{0-1}=1 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}$$

2- أ- نعطي جدول تغيرات f

لدينا $f(x)=x^2-x$ أي $a=1$ و $\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}$

ومنه جدول تغيرات f

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	↘	$\frac{-1}{4}$	↗

ب- حدد طبيعته المنحنى C_f

C_f شلجم رأسه $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ و محور تماثلة المستقيم ذا المعادلة $x=\frac{1}{2}$

3- أ- نبين أن g دالة زوجية

لكل $x\in\mathbb{R}-\{1;-1\}$ لدينا $-x\in\mathbb{R}-\{1;-1\}$

ليكن $x\in\mathbb{R}-\{1;-1\}$ $\qquad g(-x)=\frac{2|-x|-1}{|-x|-1}=\frac{2|x|-1}{|x|-1}=g(x)$

إذن g دالة زوجية

ب- نحدد تغيرات g و نعطي جدول تغيراتها

لكل x من $[0;1[\cup]1;+\infty[$: $|x|=x$ ومنه $g(x)=\frac{2x-1}{x-1}$

و حيث $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\prec 0$ فان g تناقصية على كل من $]1;+\infty[$ و $[0;1[$

و بما أن g دالة زوجية فان g تزايدية على كل من $]-\infty;-1[$ و $]-1;0]$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g		↗	‖	↗	1	↘	‖	↘	

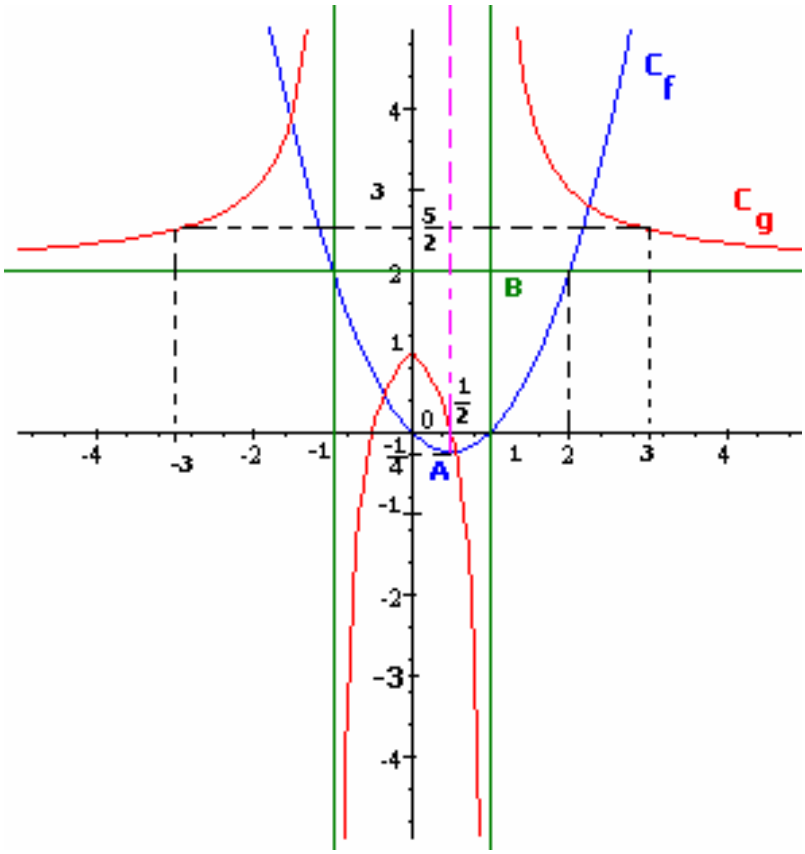
4- أ- ننشئ C_f و C_g

بما أن g زوجية فان C_g متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

جزئ منحنى C_g على $[0;1[\cup]1;+\infty[$ هو جزئ من هذلول مركزه $B(1;2)$ ومقارباه

$(\Delta_1): y=2 \quad (\Delta_2): x=1$

C_f شلجم رأسه $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

من خلا ل التمثيل المبياني نلاحظ أن C_f و C_g

يتقاطعان في أربع نقط

ومنه المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل أربعة حلول

الجبر

مذكرة رقم12 : ملخص لدرس: الدوال العددية مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- عموميات: . مجموعة تعريف دالة عددية؛ . تساوي دالتين عدديتين؛ . التمثيل المبياني لدالة عددية؛ . الدالة الزوجية والدالة الفردية (التأويل المبياني)؛ - تغيرات دالة عددية؛ - القيم الدنيا والقيم القصوى لدالة عددية على مجال؛ - التمثيل المبياني وتغيرات الدوال التالية: $x \to ax^2$ ، $x \to \frac{a}{x}$ ، $x \to ax^2+bx+c$ $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ ، $x \to \sin(x)$ ، $x \to \cos(x)$	- التعرف على المتغير ومجموعة تعريفه بالنسبة لدالة معرفة بجدول معطيات أو بمنحنى أو بصيغة. - قراءة صورة عدد وتحديد عدد صورته معلومة من خلال التمثيل المبياني لدالة. - استنتاج تغيرات دالة أو القيم القصوى والدنيا انطلاقا من التمثيل المبياني. - استعمال التمثيل المبياني لدراسة بعض المعادلات والمتراجحات. - التمكن من رسم منحنى دالة حدودية من الدرجة الثانية أو دالة متخاطة دون اللجوء إلى تغيير المعلم. - التعبير عن وضعيات مستقاة من الواقع أو من مواد أخرى باستعمال مفهوم الدالة.	- لتقريب مفهوم الدالة والتمثيل المبياني لها يمكن الاستئناس في حدود الإمكان ببعض البرامج المعلوماتية المدمجة في الحاسوب التي تمكن من إنشاء منحنيات الدوال كما يمكن الانطلاق من وضعيات مختارة من الهندسة والفيزياء والاقتصاد والحياة العامة. - ينبغي تدريب التلاميذ على ترييض الوضعيات وحل مسائل متنوعة أثناء تناول القيم الدنيا والقيم القصوى لدالة. - تعتبر جميع الدوال الواردة في هذا الفصل إلى جانب دالة الجيب وجيب التمام دوالا مرجعية. - يمكن استعمال الآلة الحاسبة العلمية في تحديد الصور أو الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة لإنشاء المنحنيات إن كان ذلك ممكنا (أو الإشارة إلى ذلك). - يمكن اقتراح مسائل تؤدي إلى معادلات يصعب حلها جبريا وتحديد حلول مقربة لها ، مبيانيا.

I. عموميات حول الدوال العددية:

1. دالة عددية لمتغير حقيقي:

تعريف: ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$. نسمي f دالة عددية معرفة على D (أو f دالة من D نحو $\mathbb{R}$), كل علاقة تربط كل عنصر x من D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$, يرمز له بالرمز $f(x)$.

اصطلاحات: لتكن f دالة عددية معرفة على D نكتب: $f : D \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)$

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f .
- ليكن x عنصرا من D, بحيث: $y = f(x)$
  ← y يسمى صورة x بالدالة f .
  ← العنصر x يسمى سابق العنصر y .
- الدالة f تسمى كذلك دالة عددية لمتغير حقيقي.

مثال 1: f = عدد ساعات الدراسة

$A = \{$ الأحد ؛ .....؛الاثنين $\}$ $B = \{3;4;5;6;7;8\}$

$f($الأحد$)$ غير معرفة

مثال2 : ليكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) = 3x^2 - 1$

1. أحسب : $f(1)$ و $f(-1)$ و $f(\sqrt{2})$
2. حدد سوابق العدد 2

الجواب:1) $f(1) = 3\times1^2 - 1 = 3 - 1 = 2$ و $f(-1) = 3\times(-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$

$f(\sqrt{2}) = 3\times(\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 4$

2) $f(x) = 3\times x^2 - 1 = 2$ يعني $3\times x^2 - 1 = 2$ يعني $3\times x^2 = 3$

يعني $x^2 = 1$ يعني $x = 1$ أو $x = -1$ ومنه للعدد سابقين هما $x = 1$ أو $x = -1$

2. مجموعة تعريف دالة عددية:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x. مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود ي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا بالرمز D_f بمعنى: $x \in D_f$ تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$.

ملحوظة: نقول إن f دالة عددية معرفة على A إذا كان A جزءا من D_f .

أنشطة : حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ 2) $g(x) = \frac{x^3}{2x-4}$

3) $h(x) = \frac{5x+10}{x^2-9}$ 4) $m(x) = \sqrt{2x-4}$

الجواب:1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $g(x) = \frac{x^3}{2x-4}$ يعني $D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 4 \neq 0\}$

$2x - 4 = 0$ يعني $2x = 4$ يعني $x = 2$ ومنه $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

3) $h(x) = \frac{5x+10}{x^2-9}$ يعني $D_h = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 \neq 0\}$

$x^2 - 9 = 0$ يعني $x^2 - 3^2 = 0$ يعني $(x-3)(x+3) = 0$

يعني $x + 3 = 0$ أو $x - 3 = 0$ يعني $x = -3$ أو $x = 3$

ومنه $D_h = \mathbb{R} - \{-3;3\}$

4) $m(x) = \sqrt{2x-4}$ يعني $D_m = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 4 \geq 0\}$

$2x - 4 \geq 0$ يعني $2x \geq 4$ يعني $x \geq \frac{4}{2}$ يعني $x \geq 2$ ومنه $D_m = [2;+\infty[$

تمرين 1: حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$ 2) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{4x-12}$

3) $f(x) = \frac{x+10}{4x^2-1}$ 4) $f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}$

5) $f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}$ 6) $f(x) = \sqrt{-3x+6}$

7) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$ 8) $f(x) = \sqrt{\frac{-3x+2}{x-1}}$

الجواب:1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$

يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{4x-12}$ يعني $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x - 12 \neq 0\}$

$4x-12=0$ يعني $4x=12$ يعني $x=3$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

3) $f(x)=\frac{x+10}{4x^2-1}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x^2-1\neq 0\}$

$4x^2-1=0$ يعني $(2x)^2-1^2=0$ يعني $(2x-1)(2x+1)=0$

يعني $2x-1=0$ أو $2x+1=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$ أو $x=-\frac{1}{2}$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

4) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ يعني $x(x^2-2)=0$ يعني $x^2-2=0$ أو $x=0$

يعني $x^2=2$ أو $x=0$ يعني $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$ أو $x=0$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

5) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-5$ و $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$ و $x_2=\frac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

6) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0$ يعني $-3x\geq -6$ يعني $x\leq\frac{-6}{-3}$ يعني $x\leq 2$ ومنه $D_m=]-\infty;2]$

7) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-3x+2\geq 0\}$

$a=1$ $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ و $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

ومنه: $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

8) $f(x)=\sqrt{\frac{-3x+2}{x+1}}$ $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-3x+2}{x+1}\geq 0 \text{ و } x+1\neq 0\right\}$

$-3x+2=0$ يعني $x=\frac{2}{3}$ يعني $x=3$ يعني $x+1=0$ يعني $x=-1$

نحدد أولا جدول الاشارة:

x	$-\infty$		-1		$1/3$		$+\infty$
$-3x+2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x+1$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$-3x+2/x+1$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$D_f=\left]-1,\frac{2}{3}\right]$

3. تساوي دالتين عدديتين:

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين لهما نفس مجموعة تعريف D.

تكون الدالتان f و g متساويتان إذا وفقط إذا كان $f(x)=g(x)$ لكل x من D. و نكتب: $f=g$

مثال: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$

لدينا: $D_f=\mathbb{R}$, لأن $x^2\geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ و منه فان $D_f=D_g$.

و بما أن $\sqrt{x^2}=|x|$ لكل x من $\mathbb{R}$ فان $f(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ إذن $f=g$.

4. التمثيل المبياني لدالة عددية:

المستوى المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ غالبا يكون متعامدا ممنظما.

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

التمثيل المبياني C_f للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى بحيث: $y=f(x)$ و $x\in D$

مثال1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{2x}{x+2}$ و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و ليكن A و B نقط أفاصيلها هي 1- و 2 على التوالي

1) حدد أراتيب A و B علما أنهما ينتميان إلى (C_f).

2) لتكن $E\left(\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right)$, $F(-3;5)$, $G(1;0)$ نقط من المستوى. هل النقط E , F و G تنتمي للمنحنى (C_f)؟

الجواب:1) $A\in(C_f)$ يعني $A(-1;f(-1))$

$f(-1)=\frac{2\times(-1)}{-1+2}=-2$ ومنه: $A(-1;-2)$

$B\in(C_f)$ يعني $B(2;f(2))$ $f(2)=\frac{2\times(2)}{2+2}=1$ ومنه: $B(2;1)$

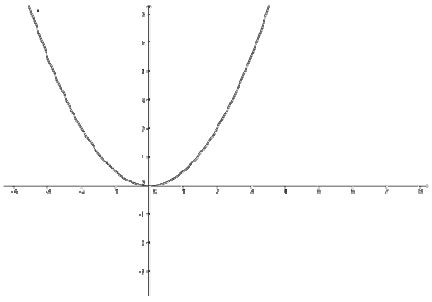
2) $E\left(\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right)$? لدينا $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)+2}=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$ ومنه: $E\left(\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right)\in(C_f)$

$F(-3;5)$ لدينا $f(-3)=\frac{2\times(-3)}{(-3)+2}=6\neq 5$ ومنه: $F(-3;5)\notin(C_f)$

$G(1;0)$? لدينا $f(1)=\frac{2\times(1)}{(1)+2}=\frac{2}{3}\neq 1$ ومنه: $G(1;0)\notin(C_f)$

مثال2 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2$

أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ ماذا تلاحظ بالنسبة لمنحنى الدالة؟



نلاحظ من خلال الحساب أن : التمثيل المبياني متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب وأن عددين متقابلين لهما نفس الصورة

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

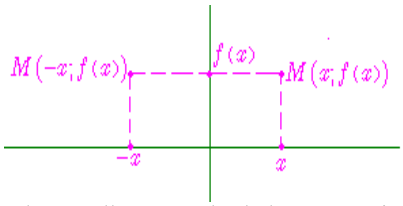
5. الدالة الزوجية- الدالة الفردية:

أ) الدالة الزوجية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان:

- ❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f.
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x)=f(x)$



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2$$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. بين أن f دالة زوجية
3. أرسم التمثيل المبياني للدالة f
4. اعط تأويلا مبيانيا

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

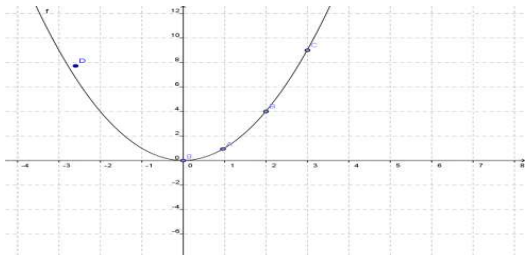
2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2=\frac{1}{2}x^2=f(x)$

ومنه f دالة زوجية

3)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$



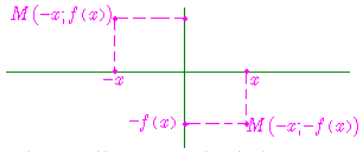
4) محور الأراتيب محور تماثل المنحنى C_f.

ب) الدالة الفردية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها

نقول أن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان:

- ❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f.
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x)=-f(x)$



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x)=\frac{2}{x}$$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. بين أن f دالة فردية
3. أرسم التمثيل المبياني للدالة f
4. اعط تأويلا مبيانيا

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}$

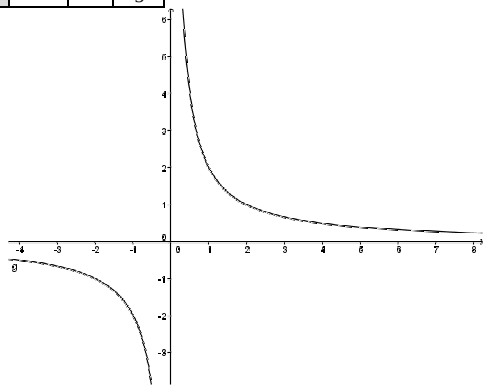
ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.

ب) $f(-x)=\frac{2}{(-x)}=-\frac{2}{x}=-f(x)$

ومنه f دالة فردية 3)

x	0	1	2	3
$f(x)$		2	1	$\frac{2}{3}$



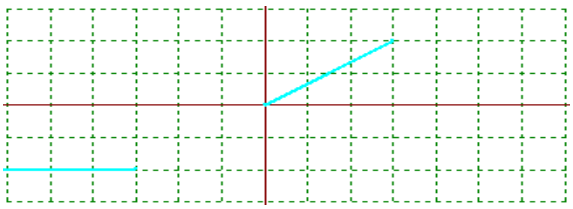
4) نقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f.

ت) التأويل المبياني

لتكن f دالة عددية لمتغير x حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

- ❖ تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل المنحنى C_f.
- ❖ تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f.

مثال: أتمم إنشاء منحنى الدالة الزوجة f المعرفة على $\mathbb{R}$



II. تغيرات دالة عددية:

مثال 1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x)=2x+1$$

املأ الجدول التالي: ماذا تلاحظ؟

-100	-10	-7	-3	0	2	5	10	100

نلاحظ: أنه عندما تكبر x فان $f(x)$ تكبر أيضا نقول أن الدالة f تزايدية

مثال 2: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x)=-3x+2$$

املأ الجدول التالي : ماذا تلاحظ؟

-100	-10	-7	-3	0	2	5	10	100

نلاحظ : أنه عندما تكبر x فان $f(x)$ تصغر نقول أن الدالة f تناقصية

1. **تعريف:** لتكن f دالة عددية معرفة على المجال I .

❖ نقول إن الدالة f تزايدية (تناقصية) على المجال I, إذا و فقط إذا كان لكل

إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \prec f(x_2)$ $\left(f(x_1) \succ f(x_2)\right)$

مثال1: $f(x)=4x-3$

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) ليكن: $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $4x_1 < 4x_2$ اذن: $4x_1-3 < 4x_2-3$ اذن: $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

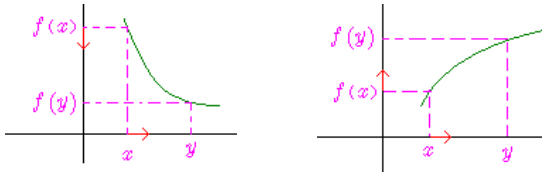
مثال2: $f(x)=-3x+2$

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) ليكن: $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $-3x_1 > -3x_2$ اذن: $4x_1+2 > 4x_2+2$ اذن: $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $\mathbb{R}$



f تزايدية $\qquad$ f تناقصية

❖ نقول إن الدالة f ثابتة على المجال I, إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I لدينا: $f(x_1)=f(x_2)$

مثال: اعط مثال لدالة ثابتة

2. **جدول تغيرات دالة:** لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.دراسة منحى تغيرات الدالة f , يعني تجزيء المجموعة D_f إلى أكبر مجالات ممكنة تكون فيها الدالة f تزايدية أو تناقصية قطعا أو ثابتة.و نلخص نتائج هده الدراسة في جدول, يسمى جدول تغيرات الدالة ثابتة.

3. **رتابة دالة على مجال:**

تعريف: لتكن دالة عددية معرفة على مجال I.

نقول إن f رتيبة قطعا على المجال I إذا كانت تزايدية قطعا على I أو تناقصية قطعا على I.

تمرين 2: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $]-1;+\infty[$ و $]-\infty;-1[$.

3) حدد جدول تغيرات الدالة f .

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x+1\neq 0\}$

$x+1=0$ يعني $x=-1$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

ليكن : $x_1 \in]-1;+\infty[$ و $x_2 \in]-1;+\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن $x_1+1 < x_2+1$ ومنه $\dfrac{1}{x_1+1} > \dfrac{1}{x_2+1}$ ومنه $\dfrac{2}{x_1+1} > \dfrac{2}{x_2+1}$

أي $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-1;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;-1[$

ليكن : $x_1 \in]-\infty;-1[$ و $x_2 \in]-\infty;-1[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن $x_1+1 < x_2+1$ ومنه $\dfrac{1}{x_1+1} > \dfrac{1}{x_2+1}$ ومنه $\dfrac{2}{x_1+1} > \dfrac{2}{x_2+1}$

أي $f(x_1) > f(x_2)$ ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty;-1[$

3)جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

III. دراسة الدوال:

1. الدالة: $x \mapsto ax^2$ $\quad (a\neq 0)$

ملخص **الحالة:** $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↘

ملاحظات: المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto ax^2$ $(a\neq 0)$ يسمى شلجما. النقطة أصل المعلم تسمى رأس الشلجم. محور الأراتيب هو محور تماثل للمنحنى.

مثال : لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. أدرس زوجية الدالة f
3. أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$
4. حدد جدول تغيرات الدالة f .
5. هل الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟
6. أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم م م $(o;\vec{i};\vec{j})$.

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x)=\dfrac{3}{2}(-x)^2=\dfrac{3}{2}x^2=f(x)$

ومنه f دالة زوجية

3) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

ليكن : $x_1 \in [0;+\infty[$ و $x_2 \in [0;+\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1^2 < x_2^2$ ومنه $\dfrac{3}{2}x_1^2 < \dfrac{3}{2}x_2^2$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

ليكن : $x_1 \in]-\infty;0]$ و $x_2 \in]-\infty;0]$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1^2 > x_2^2$ ومنه $\frac{3}{2}x_1^2 > \frac{3}{2}x_2^2$ أي $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty;0]$

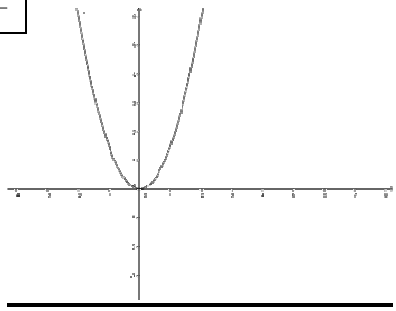
4)حدد جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

5) الدالة f تقبل قيمة دنيا عند : $x=0$

6) رسم التمثيل المبياني للدالة f

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{27}{2}$



تمرين 3: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=-\frac{1}{4}x^2$.

1)حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2)أدرس زوجية الدالة f

3)أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$

وحدد جدول تغيرات الدالة f .

4)هل الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟

5)أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x)=-\frac{1}{4}(-x)^2=-\frac{1}{4}x^2=f(x)$ ومنه f دالة زوجية

3)أ)دراسة رتابة الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

ليكن : $x_1 \in [0;+\infty[$ و $x_2 \in [0;+\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1^2 < x_2^2$ ومنه $-\frac{1}{4}x_1^2 > -\frac{1}{4}x_2^2$ أي $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $[0;+\infty[$

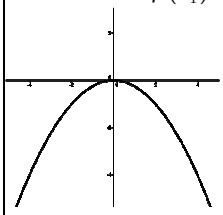
ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

ليكن : $x_1 \in]-\infty;0]$ و $x_2 \in]-\infty;0]$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1^2 > x_2^2$ ومنه $-\frac{1}{4}x_1^2 < -\frac{1}{4}x_2^2$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $]-\infty;0]$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↘



4)ا لدالة f تقبل قيمة قصوى عند $x=0$

5) التمثيل المبياني للدالة f هو شلجم رأسه النقطة O

تمرين 4: حدد جدول تغيرات الدالة في الحالات التالية :

1) $f(x)=-3x^2$ 2) $f(x)=5x^2$ 3) $f(x)=\frac{7}{2}x^2$

أجوبة: 1) $f(x)=-3x^2$ $a=-3<0$ اذن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↘

2) $f(x)=5x^2$ $a=5>0$ اذن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

3) $f(x)=\frac{7}{2}x^2$ $a=\frac{7}{2}>0$ اذن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

2. الدالة: $f(x)=\frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$

مثال : لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\frac{-2}{x}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. أدرس زوجية الدالة f
3. أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$
4. حدد جدول تغيرات الدالة f .
5. هل الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟
6. أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}$

ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.

ب) $f(-x)=\frac{-2}{(-x)}=-\frac{-2}{x}=-f(x)$ ومنه f دالة فردية

3) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

ليكن : $x_1 \in]0;+\infty[$ و $x_2 \in]0;+\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ ومنه $\frac{-2}{x_1} < \frac{-2}{x_2}$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $]0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0[$

ليكن : $x_1 \in]-\infty;0[$ و $x_2 \in]-\infty;0[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ ومنه $\frac{-2}{x_1} < \frac{-2}{x_2}$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $]-\infty;0[$

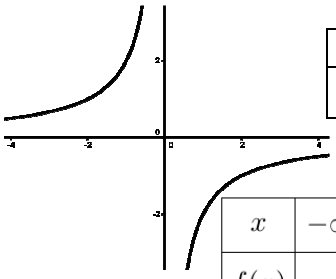
(4

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

5)الدالة f تقبل لاتقبل لا قيمة قصوى ولا قيمة دنيا

6) التمثيل المبياني للدالة f هو هذلول مركزه النقطة O

x	0	1	2	4
$f(x)$		-2	-1	1/2-



3) **ملخص :الحالة:** $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

التمثيل المبياني للدالة f: بما أن f دالة فردية فانه يكفي أن نمثل f على $]0,+\infty[$ ثم نتمم منحنى الدالة f على باستعمال التماثل المركزي الذي مركزه O أصل المعلم.

تعريف: منحنى الدالة $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ يسمى هذلولا مركزه O أصل المعلم و مستقيماه المقاربان هما $x=0$ و $y=0$.

تمرين 5: حدد جدول تغيرات الدالة في الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{-4}{x}$ 2) $f(x)=\frac{3}{x}$

أجوبة: 1) $f(x)=\frac{-4}{x}$ $a=-4<0$ اذن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

2) $f(x)=\frac{3}{x}$ $a=3>0$ اذن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

IV. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $x \mapsto ax^2+bx+c$

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a و b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

❖ يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث: $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (الشكل القانوني)

❖ منحنى الدالة f يسمى شلجما رأسه $S(-\alpha;\beta)$ و محوره $(D): x=-\alpha$

نقبل النتائج التالية: جدول تغيرات f :

الحالة: $a \succ 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f	↘	β	↗

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f	↗	β	↘

(6

مثال: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=-2x^2+4x-1$.

1) حدد D_f

2) بين أن: $f(x)=-2(x-1)^2+1$

3) (يسمى الشكل القانوني $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$)

4) حدد جدول تغيرات الدالة f .

5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل و مع محور الأراتيب.

6) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $f(x)=-2x^2+4x-1=-2(x^2-2x)-1=-2(x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2)-1$

$f(x)=-2((x-1)^2-1)-1=-2(x-1)^2+2-1=-2(x-1)^2+1$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني: $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

نجد : $\alpha=-1;\beta=1;a=-2$

4) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $a \prec 0$ اذن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↗		↘

5) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $-2(x-1)^2+1=0$

يعني $-2(x-1)^2=-1$ يعني $(x-1)^2=\frac{1}{2}$

يعني $x-1=\sqrt{\frac{1}{2}}$ أو $x-1=-\sqrt{\frac{1}{2}}$

يعني $x=\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{\sqrt{2}+2}{2}$ أو $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{-\sqrt{2}+2}{2}$

ومنه نقط التقاطع هما: $A\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2};0\right)$ أو $B\left(\frac{-\sqrt{2}+2}{2};0\right)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

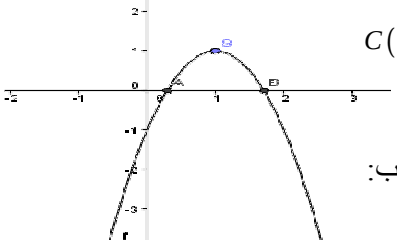
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=-2\times 0^2+4\times 0-1=-1$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;-1)$

6) رسم: C_f

-2	-1	0	1	2	3	4
-17	-7	-1	1	-1	-7	-17



تمرين 6: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=x^2+4x+3$.

1) بين أن: $f(x)=(x+2)^2-1$ (يسمى الشكل القانوني $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$)

2) حدد جدول تغيرات الدالة f .

3) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محوري المعلم

4) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته $(D): y=3$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

5) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D)

6) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2+4x \geq 0$.

أجوبة : $f(x)=x^2+4x+3$ (1

$D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$f(x)=x^2+4x+3=x^2+2\times x\times 2+2^2-2^2+3$

$f(x)=(x+2)^2-4+3=(x+2)^2-1$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني:

$f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

نجد : $\alpha=2;\beta=-1;a=1$

2) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $a=1>0$ اذن :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	

3)أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $(x+2)^2-1=0$

يعني $(x+2)^2=1$ يعني $x+2=1$ أو $x+2=-1$

يعني $x=-1$ أو $x=-3$

ومنه نقط التقاطع هما: $B(-1;0)$ و $A(-3;0)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

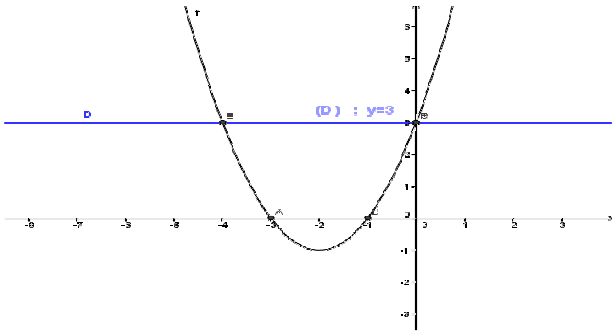
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=3$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

4)رسم: C_f

-5	-4	-3	-2	-1	0	1
8	3	0	-1	0	3	8



5)حدد نقط تقاطع (C_f) و (D)

نحل للمعادلة $f(x)=3$ يعني $f(x)=y$

$f(x)=3$ يعني $(x+2)^2-1=3$

يعني $(x+2)^2=4$ يعني $x+2=2$ أو $x+2=-2$

يعني $x=0$ أو $x=-4$ ومنه نقط التقاطع هما: $C(0;3)$ و $E(-4;3)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

6)الحل المبياني للمتراجحة: $x^2+4x\geq 0$

$x^2+4x\geq 0$ تعني $x^2+4x+3\geq 3$: تعني $f(x)\geq 3$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق

المستقيم (D) أي $S=]-\infty,-4]\cup[0,+\infty[$

V. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

حيث $c\neq 0$ و a و b و c و d أعداد حقيقية و $ad-bc\neq 0$ و $x\neq\frac{d}{c}$

نقبل النتائج التالية: يوجد ثلاث أعداد : α و β و k بحيث :

$f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ ويسمى الشكل المختصر

❖ **جدول تغيرات f:** **الحالة:** $k\succ 0$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

الحالة: $k\prec 0$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
f		↗	‖	↗	

❖ منحنى f يسمى هذلولا مركزه $S(-\alpha;\beta)$ و مقارباه $(D_1):x=-\alpha$ و $(D_2):y=\beta$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

1) حدد D_f

2) أكتب $f(x)$ على الشكل المختصر وحدد مقاربات منحنى الدالة f

3)حدد جدول تغيرات الدالة f

4)حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محوري المعلم

5) أرسم (C) التمثيل المبياني للدالة

6) أرسم المستقيم الذي معادلته : الذي معادلته : $y=5$

7) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة $f(x)=5$

8) حل مبيانيا المتراجحة: $f(x)\geq 5$

أجوبة : $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2)**انجاز القسمة الاقليدية:**

$$\begin{array}{l|l} 2x+1 & x-1 \\ \hline -2x+2 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}+\frac{3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني: $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$

نجد : $\alpha=-1;\beta=2;k=3$

3) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $k=3>0$ اذن :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

منحنى f هو هذلولا مركزه $A(1;2)$ و مقارباه $x=1$ و $y=2$

4)أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{2x+1}{x-1}=0$ يعني $2x+1=0$

يعني $2x=-1$ يعني $x=\frac{-1}{2}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$

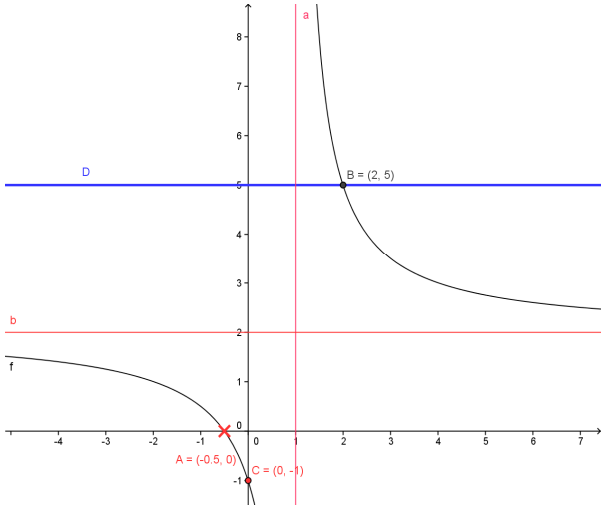
ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ $\quad f(0)=-1$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;-1)$

5)و6)ورسم: C_f

-2	-1	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3



7)ا)الحل المبياني للمعادلة $f(x)=5$: هوأفاصيل نقط تقاطع C_f و المستقيم (D) أي أفصول النقطة $B(2;0)$

ومنه مجموعة الحلول : $S=\{2\}$

ب)الحل الجبري للمعادلة $f(x)=5$:

$f(x)=5$ يعني $\frac{2x+1}{x-1}=5$ يعني $2x+1=5(x-1)$

يعني $2x+1=5x-5$ يعني $-3x=-6$ يعني $x=2$

ومنه مجموعة الحلول : $S=\{2\}$

8)الحل المبياني للمتراجحة: $f(x)\geq 5$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق المستقيم (D) أي $S=]1,2]$

تمرين 7: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{3x-1}{2x-2}$

1) حدد D_f

2) أكتب $f(x)$ على الشكل المختصر وحدد مقاربات منحنى الدالة f

3)حدد جدول تغيرات الدالة f

4)حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محوري المعلم

5) أرسم (C) التمثيل المبياني للدالة

6) أرسم المستقيم الذي معادلته : المستقيم (D) الذي معادلته : $y=2$

7) حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f و المستقيم (D)

8) حل مبيانيا المتراجحة: $f(x)\geq 2$

أجوبة : $f(x)=\frac{3x-1}{2x-2}$

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-2\neq 0\}$ ومنه $-2x+2$

2)**انجاز القسمة الاقليدية:**

$$\begin{array}{l|l} -3x-1 & 2x-2 \\ \hline -3x+3 & \frac{3}{2} \\ 2 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{3x-1}{2x-2}=\frac{\frac{3}{2}(2x-2)+2}{2x-2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{x-1}$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني: $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$

نجد : $\alpha=-1;\beta=\frac{3}{2};k=1$

3) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $k=1>0$ اذن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

منحنى f هو هذلولا مركزه $S\left(1;\frac{3}{2}\right)$ و مقارباه $x=1$ و $y=\frac{3}{2}$

4)أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{3x-1}{2x-2}=0$ يعني $3x-1=0$

يعني $3x=1$ يعني $x=\frac{1}{3}$

ومنه نقطة التقاطع هي: $A\left(\frac{1}{3};0\right)$

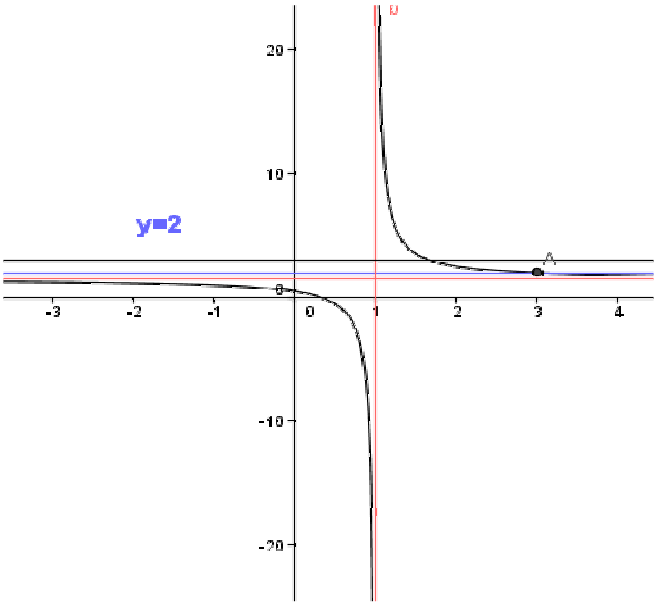
ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ $\quad f(0)=\frac{1}{2}$

ومنه نقطة التقاطع هي: $B\left(0;\frac{1}{2}\right)$

5) و 6)

-2	-1	0	1	2	3	4
$\frac{7}{6}$	1	$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$	2	$\frac{11}{6}$



7)نحل للمعادلة $f(x)=2$:

$f(x)=2$ يعني $\frac{3x-1}{2x-2}=2$ يعني $3x-1=2(2x-2)$

يعني $3x-1=4x-4$ يعني $x=3$

ومنه نقطة التقاطع هي : $C(3;2)$

8)الحل المبياني للمتراجحة: $f(x)\geq 2$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق المستقيم (D) أي $S=]1,3]$

VI. القيم القصوى و القيم الدنيا لدالة عددية على مجال:

نشاط1: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=x^2+2x+3$.

1) أحسب $f(-1)$ و تأكد أن : $f(x)=(x+1)^2+2$

2) تأكد أن : $f(x)\geq f(-1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

أجوبة: 1) $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)+3=1-2+3=2$

2) $f(x)-f(-1)=(x+1)^2+2-2=(x+1)^2\geq 0$

ومنه : $f(x)\geq f(-1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

نقول إن $f(-1)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تعاريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من I .

نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I إذا و فقط إذا كان: $f(x)\leq f(a)$ لكل x من I .

نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I إذا و فقط إذا كان: $f(x)\geq f(a)$ لكل x من I .

نقول كذلك الدالة f تقبل قيمة قصوى (أو دنيا) عند النقطة a على المجال I .

إذا كان $f(a)$ قيمة قصوى أو قيمة دنيا للدالة f نقول إن $f(a)$ مطراف للدالة f .

تمرين 8: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=-x^2+2x+3$.

1)حدد D_f وبين أن : $f(x)=-(x-1)^2+4$.

2)حدد جدول تغيرات الدالة f .

3)حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل ومع محور لأراتيب.

4)أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f .

5)حدد مطاريف الدالة إن وجدت.

6)ناقش مبيانيا حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة : $-x^2+2x+3-m=0$

أجوبة :

1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$f(x)=-x^2+2x+3=-(x^2-2x)+4=-(x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2)+4$

$f(x)=-(x-1)^2+4$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني:

$f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

نجد : $\alpha=-1;\beta=4;a=-1$

2)حدد جدول تغيرات الدالة f

لدينا : $a\prec 0$ اذن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↗	4	↘

3)أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $-x^2+2x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=2$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times3\times(-1)=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(2)+\sqrt{16}}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1;0)$ أو $B(3;0)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة بطريقة أخرى باستعمال الكتابة الأخرى ل $f(x)$

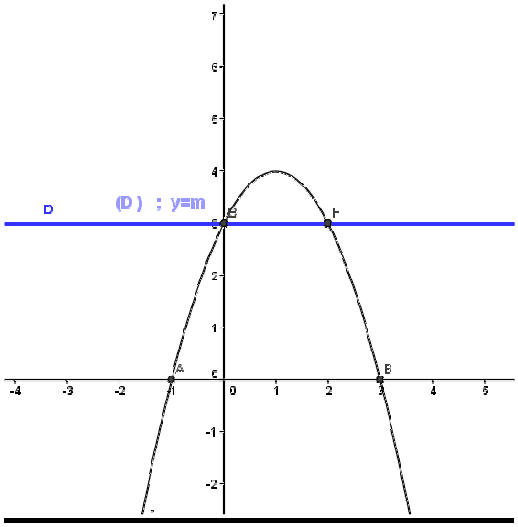
ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=-0^2+2\times0+3=3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

4)رسم: C_f

-2	-1	0	1	2	3	4
-5	0	3	4	3	0	-5



5) $f(x)=-(x-1)^2+4$

لدينا $-(x-1)^2\leq 0$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

ومنه $4-(x-1)^2\leq 4$ أي $f(x)\leq 4$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$

وبالتالي إن 4 هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

يمكننا ملاحظة ذلك من جدول التغيرات

6)المناقشة مبيانيا حسب قيم البارامتر m ل عدد حلول المعادلة : $-x^2+2x+3-m=0$

$-x^2+2x+3-m=0$ تكافئ $-x^2+2x+3=m$ أي $f(x)=m$

أي نحدد مبيانيا عدد نقط تقاطع منحنى الدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته : $y=m$

اذا كانت: $m>4$ التمثيل المبياني لا يقطع المستقيم (D) ومنه لا يوجد حل لهذه المعادلة أي $S=\varnothing$

اذا كانت: $m=4$ التمثيل المبياني يقطع المستقيم (D) في نقطة وحيدة ومنه للمعادلة حل وحيد $S=\{x_1\}$

اذا كانت: $m<4$ التمثيل المبياني يقطع المستقيم (D) في نقطتين ومنه للمعادلة حلين مختلفين $S=\{x_1,x_2\}$

تمرين 9: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\frac{1}{4}x^2$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) أدرس زوجية الدالة f 3) حدد جدول تغيرات الدالة f

4) هل الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟

5) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

6) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة $f(x)=1$

7) أرسم المستقيم الذي معادلته : $(D)\ :\ y=\frac{1}{2}x+2$

8) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}x+2$

9) حل مبيانيا ثم جبريا المتراجحة: $\frac{1}{4}x^2-2\geq\frac{1}{2}x$

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^2=\frac{1}{4}x^2=f(x)$

ومنه f دالة زوجية

3) حدد جدول تغيرات الدالة f .

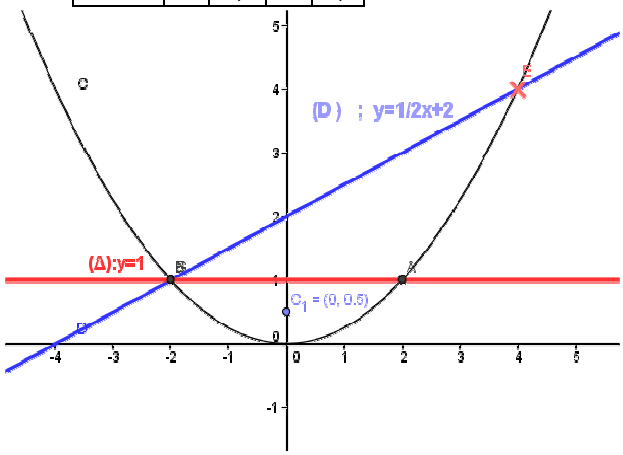
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

4) الدالة f تقبل قيمة دنيا عند : $x=0$

5) رسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$

x	0	1
y	2	$\frac{5}{2}$



6) أ) الحل المبياني للمعادلة : $f(x)=1$

الحل المبياني للمعادلة هو أفاصيل نقط تقاطع C_f و المستقيم $(\Delta):y=1$ وبما أن نقط التقاطع هما $A(2,1)$ و $B(-2,1)$

فان مجموعة الحلول : $S=\{-2;2\}$

ب) الحل الجبري للمعادلة : $f(x)=1$

$\frac{1}{4}x^2=1$ يعني $x^2=4$ يعني $x=\sqrt{4}$ أو $x=-\sqrt{4}$ يعني $x=2$ أو $x=-2$ ومنه فان مجموعة الحلول : $S=\{-2;2\}$

7) رسم المستقيم الذي معادلته : $(D)\ :\ y=\frac{1}{2}x+2$

8) أ) الحل المبياني للمعادلة $f(x)=\frac{1}{2}x+2$

الحل المبياني للمعادلة هو أفاصيل نقط تقاطع C_f و المستقيم $(D)\ :\ y=\frac{1}{2}x+2$ وبما أن نقط التقاطع هما $E(4,4)$ و $B(-2,1)$

ومنه فان مجموعة الحلول : $S=\{-2;4\}$

أ) الحل الجبري للمعادلة $f(x)=\frac{1}{2}x+2$

$\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}x+2$ يعني $x^2=2x+8$ يعني $x^2-2x-8=0$

يعني $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-8)=36=(6)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=4$ و $x_2=-2$

ومنه فان مجموعة الحلول : $S=\{-2;4\}$

9) أ) الحل المبياني للمتراجحة $\frac{1}{4}x^2-2\geq\frac{1}{2}x$

$\frac{1}{4}x^2\geq\frac{1}{2}x+2$ يعني $f(x)\geq\frac{1}{2}x+2$

ومنه مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق المستقيم $(D)\ :\ y=\frac{1}{2}x+2$ أي $S=]-\infty,-2]\cup[4,+\infty[$

ب) الحل الجبري للمتراجحة $\frac{1}{4}x^2-2\geq\frac{1}{2}x$

$x^2-2\geq\frac{1}{2}x$ يعني $x^2\geq2x+8$ يعني $x^2-2x-8\geq0$

$x_1=4$ و $x_2=-2$

جدول الاشارة:

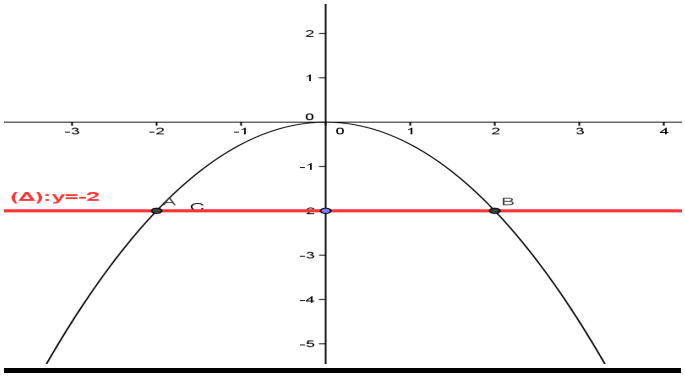
x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
x^2-2x-8		+	0	−	0	+	

أي $S=]-\infty,-2]\cup[4,+\infty[$

تمرين 10: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$.

1) مثل الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

2) حل مبيانيا المتراجحة $f(x)>-2$



2)مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق المستقيم $y=-2$: (Δ) أي $S=]-2,2]$

تمرين 11: لتكن f الدالة المعرفة ب: $f(x)=\frac{2}{x}$ والمستقيم الذي معادلته : $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$: (D)

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) أدرس زوجية الدالة f

3) حدد جدول تغيرات الدالة f .

4) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f والمستقيم (D) في معلم

5) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة $\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

6) حل مبيانيا المتراجحة : $\frac{2}{x}\geq\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq0\}$

ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.

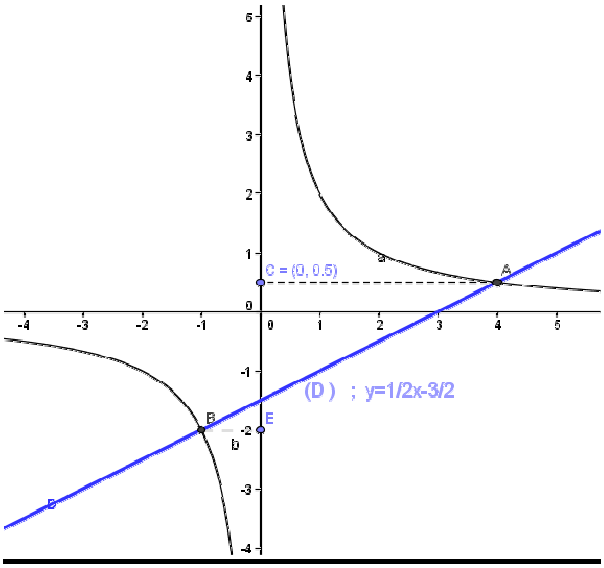
ب) $f(-x)=\frac{2}{(-x)}=-\frac{2}{x}=-f(x)$

ومنه f الدالة فردية

3)جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

4) منحنى الدالة f .



5)ا)الحل المبياني للمعادلة : $\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ يعني $f(x)=y$

الحل المبياني للمعادلة هو أفاصيل نقط تقاطع C_f و المستقيم (D)

وبما أن نقط التقاطع هما $A\left(4,\frac{1}{2}\right)$ و $A(-1,-2)$

فان مجموعة الحلول : $S=\{-1;4\}$

ا)الحل الجبري للمعادلة : $\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ $\quad x\neq0$

$\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ يعني $2x\times\frac{2}{x}=2x\times\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)$

(بضرب طرفي المعادلة في 2x)

يعني $4=x^2-3x$ يعني $x^2-3x-4=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=25=(5)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=4$ و $x_2=-1$

ومنه فان مجموعة الحلول : $S=\{-1;4\}$

6) حل مبيانيا المتراجحة : $\frac{2}{x}\geq\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق المستقيم (D) أي $S=]-\infty,-1]\cup[0,4]$

تمرين 12: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=-x^2+4x+5$

1) حدد D_f 2) تحقق أن : $f(x)=-(x-2)^2+9$

3)حدد جدول تغيرات الدالة f 4)حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محوري المعلم 5) أرسم (C) التمثيل المبياني للدالة f

6)حدد القيم الدنيا والقصوى ان وجدت

7) ناقش مبيانيا حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة : $x^2-4x-5+m=0$

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $f(x)=-x^2+4x+5=-(x^2-4x)+5=-(x^2-2\times x\times2+2^2-2^2)+5$

$f(x)=-(x-2)^2+4+5=-(x-2)^2+9$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني: $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

نجد : $\alpha=-2;\beta=9;a=-1$

3) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $a\prec0$ اذن :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	9	↗

4)أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $-x^2+4x+5=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=4$ و $c=5$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times5\times(-1)=36=(6)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-4+\sqrt{36}}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-4-\sqrt{36}}{-2}=5$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1;0)$ أو $B(5;0)$

<u>ملاحظة:</u> يمكن حل المعادلة بطريقة أخرى باستعمال الكتابة الأخرى ل $f(x)$

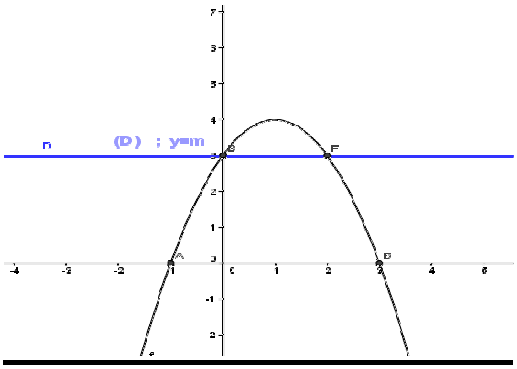
ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ $f(0)=-0^2+2\times0+3=3$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

-2	-1	0	1	2	3	4
-5	0	3	4	9	0	-5

5)رسم: C_f



6) $f(x)==-(x-1)^2+4$

لدينا $-(x-1)^2\le0$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

ومنه $4-(x-1)^2\le4$ أي $f(x)\le4$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$

وبالتالي إن 4 هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

<u>يمكننا ملاحظة ذلك من جدول التغيرات</u>

7)المناقشة مبيانيا حسب قيم البارامتر m ل عدد حلول المعادلة

$-x^2+2x+3-m=0$:

$-x^2+2x+3-m=0$ تكافئ $-x^2+2x+3=m$ أي $f(x)=m$

أي نحدد مبيانيا عدد نقط تقاطع منحنى الدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته : $y=m$

<u>اذا كانت</u>: $m>4$ التمثيل المبياني لا يقطع المستقيم (D) ومنه لا يوجد حل لهذه المعادلة أي $S=\varnothing$

<u>اذا كانت</u>: $m=4$ التمثيل المبياني يقطع المستقيم (D) في نقطة وحيدة ومنه للمعادلة حل وحيد $S=\{x_1\}$

<u>اذا كانت</u>: $m<4$ التمثيل المبياني يقطع المستقيم (D) في نقطتين ومنه للمعادلة حلين مختلفين $S=\{x_1,x_2\}$

<u>تمرين 13:</u> نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=ax^2+bx+1$

1) حدد a و b علما أن (C_f) التمثيل المبياني للدالة f يمر من النقطتين $A(1,5)$ و $B(-1,1)$

2) تحقق أن : $f(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ وحدد جدول تغيرات f

3) أرسم (C_f)

4) نعتبر المستقيم الذي معادلته $y=6x-1$ (D)

أ) أرسم (D)

ب) بين أن التمثيل المبياني للدالة f يوجد فوق المستقيم (D)

$f(x)=ax^2+bx+1$

الأجوبة : 1)

$A(1,5)\in(C_f)$ يعني: $f(1)=5$ يعني: $a\times(1)^2+b\times1+1=5$

$B(-1,1)\in(C_f)$ يعني: $f(-1)=1$ يعني: $a\times(-1)^2+b\times(-1)+1=1$

اذن نحل النظمة التالية: $\begin{cases}a+b+1=5\\a-b+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\a-b=0\end{cases}$

نجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد: $2a=4\Leftrightarrow a=2$

ولدينا $a-b=0\Leftrightarrow a=b$ ومنه $a=b=2$

2)حسب السؤال السابق: $f(x)=2x^2+2x+1$

نتحقق أن : $f(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$$2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=2\left(x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{2}$$

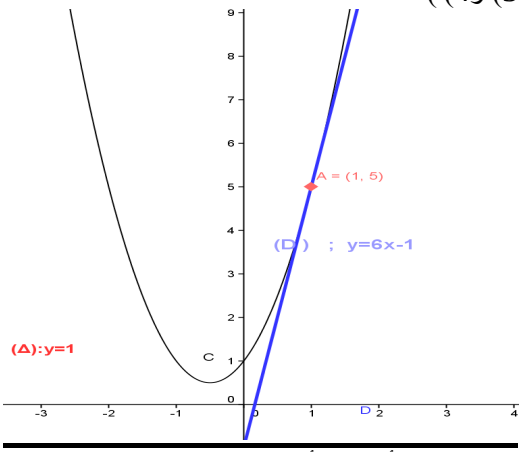
$$=2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

$$=2x^2+2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2x^2+2x+1=f(x)$$

ومنه جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-1/2$	↗

3) و4)أ)



4)ب) يجب أن نبين أن $f(x)-y\ge0$????

$$f(x)-y=2x^2+2x+1-6x+1=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)$$

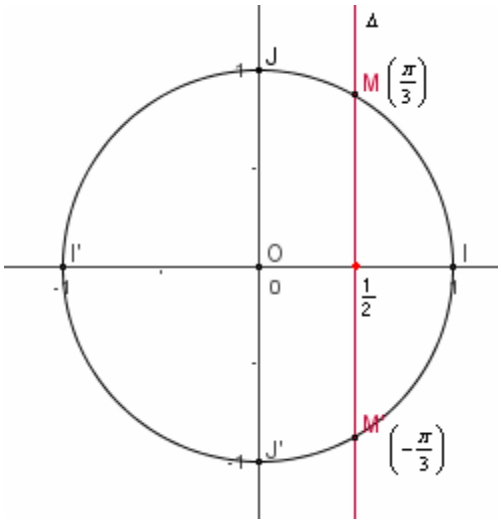
$=2(x^2-2\times x\times1+1^2)=2(x-1)^2\ge0$ لأن المربع دائما موجب

ومنه $f(x)\ge y$ وبالتالي (C_f) يوجد فوق المستقيم (D)

<u>انتهى الدرس</u>

الحساب المثلثي – الجزء 2-

القدرات المنتظرة التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية	الدرس الأول الدورة الثانية عدد الساعات: 15



I- المعادلات المثلثية

1- المعادلة $\cos x = a$

مثال1 حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

لدينا المستقيم $\Delta : \ x = \frac{1}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية

في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين

على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$.

بما أن $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M

و $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M'

فإننا نستنتج أن $\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن $S = \left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

مثال 2 حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in [-2\pi;2\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi;2\pi]$

فان $-2\pi \le \frac{\pi}{3}+2k\pi \le 2\pi$ أو $-2\pi \le -\frac{\pi}{3}+2k\pi \le 2\pi$

لدينا $-2\pi \le \frac{\pi}{3}+2k\pi \le 2\pi$ تكافئ $-\frac{7}{6} \le k \le \frac{5}{6}$ تكافئ $k=-1$ أو $k=0$

ومنه $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = -\frac{5\pi}{3}$

لدينا $-2\pi \le -\frac{\pi}{3}+2k\pi \le 2\pi$ تكافئ $-\frac{5}{6} \le k \le \frac{7}{6}$ تكافئ $k=1$ أو $k=0$

ومنه $x = -\frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{5\pi}{3}$

إذن $S = \left\{\frac{-5\pi}{3};\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$

خلاصة

* المعادلة $\cos x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \ \vee \ a \prec -1$
* $\cos x = 1$ $\ x \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x = 2k\pi$ $\ k \in \mathbb{Z}/$
* $\cos x = -1$ $\ x \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x = \pi + 2k\pi$ $\ k \in \mathbb{Z}/$
* إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر α من $]0;\pi[$ حيث $\cos\alpha = a$

و بالتالي حلول المعادلة $\cos x = a$ في $\mathbb{R}$ هي $x = \alpha + 2k\pi$ أو $x = -\alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

تمرين حل المعادلات

$x \in \mathbb{R} \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x) \qquad x \in]-\pi;3\pi] \quad \cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x \in [\pi;2\pi[\qquad 2\cos^2 x+3\cos x+1=0$

الحل

* نحل $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x) \qquad x \in \mathbb{R}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x)$ تكافئ $2x=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $2x=-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $3x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

* نحل $\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x \in]-\pi;3\pi]$

نعلم أن $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

و بالتالي $\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $2x-\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x-\frac{3\pi}{4}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $2x=\frac{19\pi}{12}+2k\pi$ أو $2x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{19\pi}{24}+k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

و حيث $x \in]-\pi;3\pi]$ فان

من أجل $x=\frac{19\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi \prec \frac{19\pi}{24}+k\pi \leq 3\pi$ أي $-1 \prec \frac{19}{24}+k \leq 3$

ومنه $-\frac{43}{24} \prec k \leq \frac{53}{24}$

و حيث $k \in \mathbb{Z}$ فان $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$ أو $K=2$

إذن $x=\frac{19\pi}{24}-\pi=-\frac{5\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}+\pi=\frac{43\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}+2\pi=\frac{67\pi}{24}$

من أجل $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi \prec -\frac{\pi}{24}+k\pi \leq 3\pi$ أي $-1 \prec -\frac{1}{24}+k \leq 3$

ومنه $-\frac{23}{24} \prec k \leq \frac{73}{24}$

و حيث $k \in \mathbb{Z}$ فان $k=0$ أو $k=1$ أو $K=2$ أو $k=3$

إذن $x=-\frac{\pi}{24}+0\cdot\pi=-\frac{\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+\pi=\frac{23\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+2\pi=\frac{47\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+3\pi=\frac{71\pi}{24}$

إذن $S=\left\{-\frac{5\pi}{24};-\frac{\pi}{24};\frac{19\pi}{24};\frac{23\pi}{24};\frac{43\pi}{24};\frac{47\pi}{24};\frac{67\pi}{24};\frac{71\pi}{24}\right\}$

* نحل $2\cos^2 x+3\cos x+1=0 \qquad x \in [\pi;2\pi[$

نضع $\cos x=X$ المعادلة تصبح $2X^2+3X+1=0$

ليكن Δ مميز المعادلة

$$\Delta = 3^2 - 4\times 2\times 1 = 1$$

ومنه $X = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$ أو $X = \frac{-3-1}{4} = -1$

و بالتالي $\cos x = -\frac{1}{2}$ أو $\cos x = -1$

لدينا $\cos x = -1$ تكافئ $x = \pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}/$

و حيث $x \in [\pi;2\pi[$ فان $\pi \le \pi + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $0 \le k \prec \frac{1}{2}$ ومنه $k = 0$ اذن $x = \pi$

لدينا $\cos x = -\frac{1}{2}$ أي $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

ومنه $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

و حيث $x \in [\pi;2\pi[$ فان

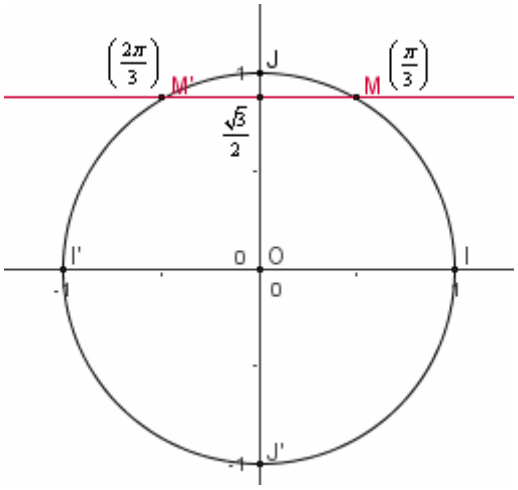
من أجل $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ لدينا $\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $\frac{5}{6} \le k \prec \frac{4}{3}$ ومنه $k = 1$

إذن $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$

من أجل $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ لدينا $\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $\frac{1}{6} \le k \prec \frac{2}{3}$ لا يوجد عدد صحيح نسبي يحقق المتفاوتة الأخيرة

إذن $S = \left\{\pi; \frac{4\pi}{3}\right\}$

2- المعادلة $\sin x = a$



مثال1 حل $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x \in \mathbb{R}$

لدينا المستقيم $\Delta : \ y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

بما أن $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M و $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M' فإننا نستنتج أن

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

مثال 2 حل $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x \in [-2\pi;3\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi;3\pi]$

فان $-2\pi \le \frac{\pi}{3}+2k\pi \le 3\pi$ أو $-2\pi \le \frac{2\pi}{3}+2k\pi \le 3\pi$

لدينا $-2\pi \le \frac{\pi}{3}+2k\pi \le 3\pi$ تكافئ $-\frac{7}{6} \le k \le \frac{8}{6}$

تكافئ $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

ومنه $x=\frac{7\pi}{3}$ أو $x=\frac{\pi}{3}$ أو $x=-\frac{5\pi}{3}$

لدينا لدينا $-2\pi \le \frac{2\pi}{3}+2k\pi \le 3\pi$ تكافئ $-\frac{8}{6} \le k \le \frac{7}{6}$

تكافئ $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

ومنه $x=\frac{8\pi}{3}$ أو $x=\frac{2\pi}{3}$ أو $x=-\frac{4\pi}{3}$

إذن $S=\left\{\frac{-5\pi}{3};\frac{-4\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right\}$

خلاصة المعادلة $\sin x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \quad \vee \quad a \prec -1$

$\sin x = 1 \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -1 \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر α من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\sin\alpha = a$

حلول المعادلة $\sin x = a$ في $\mathbb{R}$ هي $x=\alpha+2k\pi$ أو $x=\pi-\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

مجموعة حلول المعادلة $S=\{\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

تمرين حل المعادلات $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(3x) \quad x\in\mathbb{R}$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \quad x\in\left]-\pi;2\pi\right]$

الحل----------

نحل $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(3x) \quad x\in\mathbb{R}$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(3x)$ تكافئ $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

تكافئ $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ أو $2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{2}+3x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $5x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $-x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{6}+2(-k)\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن $S=\left\{\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2(-k)\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

نحل $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \quad x\in\left]-\pi;2\pi\right]$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ تكافئ $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

تكافئ $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x-\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $2x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ أو $2x=\frac{17\pi}{12}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{24}+k\pi$ أو $x=\frac{17\pi}{24}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

و حيث أن $x\in]-\pi;2\pi]$ فان

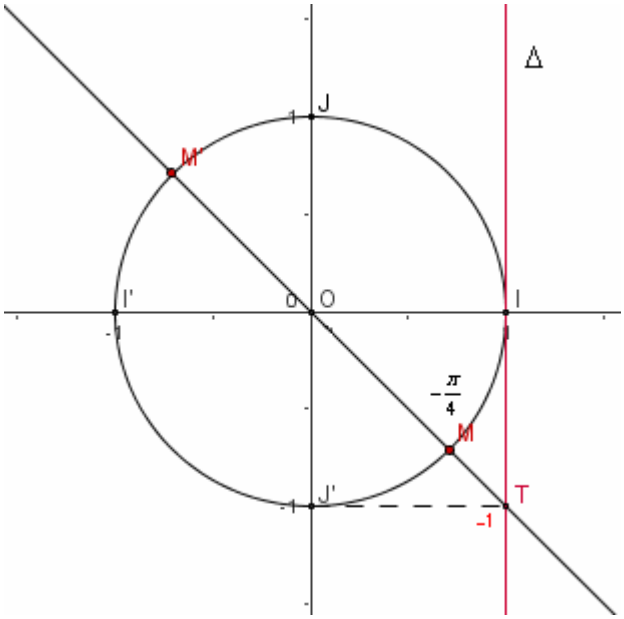
من أجل $x=\frac{\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi\prec\frac{\pi}{24}+k\pi\leq 2\pi$ أي $-\frac{25}{24}\prec k\leq\frac{47}{24}$ و منه $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

إذن $x=\frac{\pi}{24}-\pi=-\frac{23\pi}{24}$ أو $x=\frac{\pi}{24}$ أو $x=\frac{\pi}{24}+\pi=\frac{25\pi}{24}$

من أجل لدينا $-\pi\prec\frac{17\pi}{24}+k\pi\leq 2\pi$ ومنه $-\frac{41}{24}\prec k\leq\frac{31}{24}$ و منه $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

إذن $x=\frac{17\pi}{24}-\pi=-\frac{7\pi}{24}$ أو $x=\frac{17\pi}{24}$ أو $x=\frac{17\pi}{24}+\pi=\frac{41\pi}{24}$

ومنه $S=\left\{-\frac{23\pi}{24};-\frac{7\pi}{24};\frac{\pi}{24};\frac{17\pi}{24};\frac{25\pi}{24};\frac{41\pi}{24}\right\}$



3- المعادلة $\tan x=a$

حل المعادلة $\tan x=-1$ $x\in\mathbb{R}$

نعتبر Δ المماس الدائرة المثلثية (C) في أصلها I ،

نأخذ النقطة T من Δ حيث -1 أفصول T في المحور Δ

المستقيم (OT) يقطع الدائرة المثلثية (C)

في النقطتين M و M' نعلم أن $\tan(-\frac{\pi}{4})=-1$

و بالتالي $-\frac{\pi}{4}$ أفصول منحني للنقطة M

وبما أن $\tan(x+k\pi)=\tan x$ لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

فان حلول المعادلة هي $x=\frac{-\pi}{4}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$

اذن $S=\left\{\frac{-\pi}{4}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

خاصية

$\tan x=a\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi\quad/k\in\mathbb{Z}$ حيث α حل للمعادلة $\tan x=a$ في $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

تمرين حل المعادلتين

$\tan 2x=\sqrt{3}$ $x\in[0;3\pi]$

$\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan x$ $x\in\mathbb{R}$

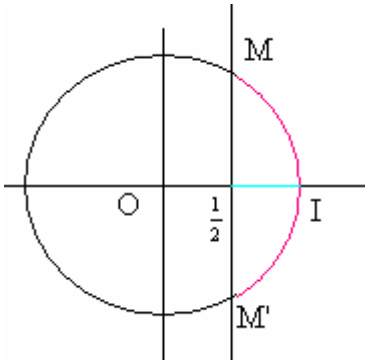
II- المتراجحات المثلثية

مثال1

حل $\cos x\geq\frac{1}{2}$ $x\in]-\pi;\pi]$

نحل أولا المعادلة $\cos x=\frac{1}{2}$ $x\in]-\pi;\pi]$

بإتباع خطوات حل المعادلات نحصل على



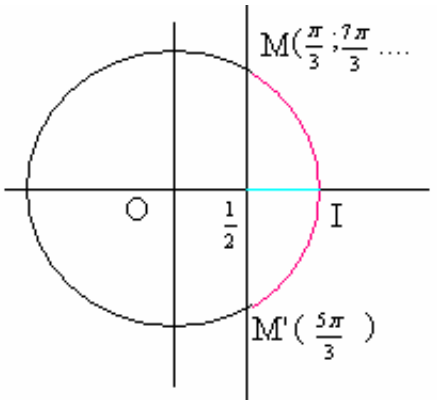
$\cos x = \frac{1}{2}$ $x \in]-\pi;\pi]$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = -\frac{\pi}{3}$

لتكن $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ نقطتين من الدائرة المثلثية

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل

المنحنية للنقط (C) التي تنتمي إلى القوس $\left[\widehat{M'IM}\right]$ في $]-\pi;\pi]$

وهذه المجموعة هي $S = \left[\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$



مثال 2 حل $\cos x \geq \frac{1}{2}$ $x \in [0;3\pi[$

نحل أولا المعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$ $x \in [0;3\pi[$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $x \in [0;3\pi[$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{7\pi}{3}$ أو $x = \frac{5\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$ و $\frac{7\pi}{3}$ أفصولين منحنيين لنفس النقطة M ،

نعتبر $\frac{5\pi}{3}$ أفصول منحني للنقطة M'

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل المنحنية للنقط (C)

التي تنتمي الى القوس $\left[\widehat{M'IM}\right]$ في $[0;3\pi[$

وهذه المجموعة هي $S = \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right]$

مثال3

حل $\tan x \geq \sqrt{3}$ $x \in [0;2\pi]$

نحل المعادلة $\tan x = \sqrt{3}$ $x \in [0;2\pi]$

$\tan x = \sqrt{3}$ $x \in [0;2\pi]$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{4\pi}{3}$

نعتبر $\frac{\pi}{3}$ أفصول منحني للنقطة A

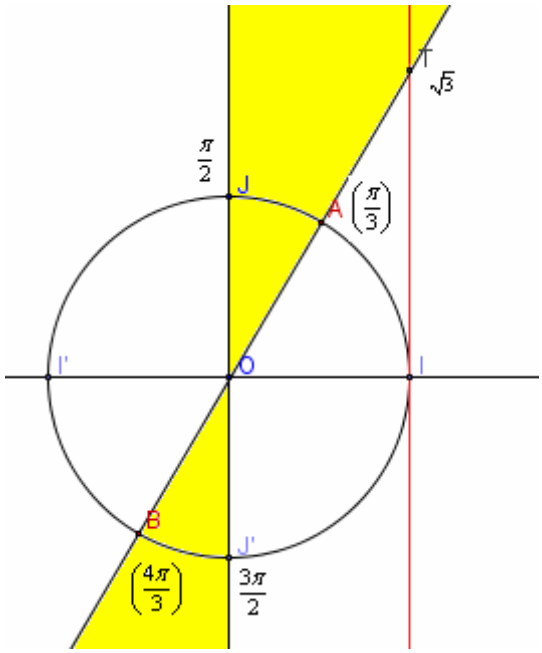
و $\frac{4\pi}{3}$ أفصول منحني للنقطة B

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل المنحنية

للنقط (C) التي تنتمي إلى اتحاد القوسين $\left[\widehat{AJ}\right[$ و $\left[\widehat{BJ'}\right[$

في $[0;2\pi]$

وهذه المجموعة هي $S = \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right[$



تمرين

حل $\sin x \succ \frac{-1}{2}$ $x \in]-\pi;\pi]$

$\sin x \succ \frac{-1}{2}$ $x \in]0;4\pi]$

$\tan x \prec 1$ $x \in [0;2\pi]$

متراجحات تؤول في حلها إلى متراجحات أساسية

تمرين

حل

$$x \in [-\pi;\pi] \quad \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \le \frac{1}{2}$$

$$x \in [0;\pi] \quad \tan 3x \succ \sqrt{3}$$

$$x \in]-\pi;\pi] \quad 4\cos^2 x - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2} \le 0$$

$$x \in]-\pi;\pi] \quad \frac{1+\tan x}{\sin 2x} \ge 0$$

III- الزوايا المحيطية – الرباعيات الدائرية

1- تعريف

- **الزاوية المركزية** : هي زاوية رأسها مركز الدائرة
- **الزاوية المحيطية** : هي زاوية ينتمي رأسها للدائرة وتحصر بين ضلعيها قوسا من هذه الدائرة

2-خاصيات

نشاط1

لتكن (C) دائرة مركزها O نعتبر A و B نقطتين مختلفتين من (C)غير متقابلتين قطريا

و M نقطة من (C) بحيث $\widehat{AOB}$ و $\widehat{AMB}$ تحصران نفس القوس $\left[\widehat{AB}\right]$

1- بين أن $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ في الحالات التالية

أ/ M و O و A مستقيمية

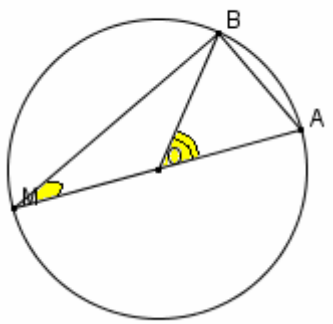
ب/ M و O و A غير مستقيمية

يمكن اعتبار نقطة N من(C) حيث N و O و M مستقيمية

و باستعمال أ/ مرتين بين المطلوب

2- نعتبر (AT) المماس للدائرة (C). الزاوية $\widehat{BAT}$ محيطية تحصر نفس القوس التي تحصره الالزاوية المركزية $\widehat{AOB}$

بين أن $\widehat{AOB} = 2\widehat{TAB}$



الحل----------

1- أ/ M و O و A مستقيمية

المثلث OBM متساوي الساقين في الرأس O

ومنه $\widehat{BOM} = \pi - 2\widehat{BMO}$

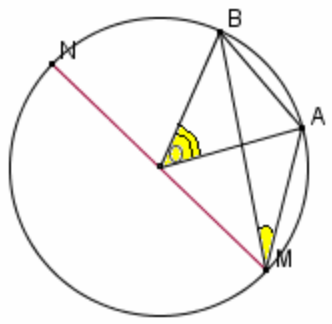
و حيث $\widehat{BOM} = \pi - \widehat{AOB}$ لأن M و O و A مستقيمية

فان $\widehat{AOB} = 2\widehat{BMO}$

اذن $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

ب/ M و O و A غير مستقيمية

N من(C) حيث N و O و M مستقيمية



حسب أ/ لدينا $\widehat{NOB} = 2\widehat{NMB}$

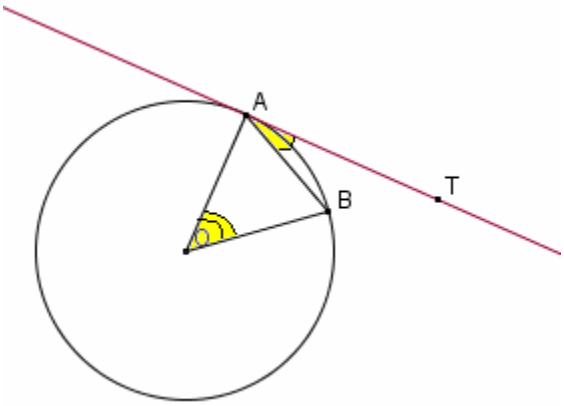
لدينا OAM مثلث متساوي الساقين في الرأس O

و منه $\widehat{AOM} = \pi - 2\widehat{AMO}$

لدينا $\widehat{AOB} = \pi - \left(\widehat{NOB} + \widehat{AOM}\right)$

ومنه $\widehat{AOB} = \pi - \left(2\widehat{NMB} + \pi - 2\widehat{AMO}\right)$

$\widehat{AOB} = 2\left(\widehat{AMO} - \widehat{NMB}\right)$



إذن $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

2/ بين أن $\widehat{AOB} = 2\widehat{TAB}$

(AT) المماس للدائرة (C) ومنه $\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BAT}$

لدينا OAB متساوي الساقين في الرأس O

ومنه $\widehat{OAB} = \pi - 2\widehat{OAB}$

و بالتالي $\widehat{OAB} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BAT}\right)$

إذن $\widehat{AOB} = 2\widehat{TAB}$

خاصية1

قياس زاوية مركزية في دائرة هو ضعف قياس زاوية محيطية تحصر نفس القوس التي تحصره هذه الزاوية المركزية

نشاط2

لتكن A و B و C و D نقط مختلفة من دائرة (C) مركزها O

بين أن $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi$ أو $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$

خاصية2

A و B و C ثلاث نقط من دائرة (C) و D نقط مختلفة من المستوى
تكون D من الدائرة (C) إذا و فقط إذا كان $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi$ أو $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$

3- علاقات الجيب في مثلث

نشاط 3

ليكن ABC مثلثا و R شعاع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

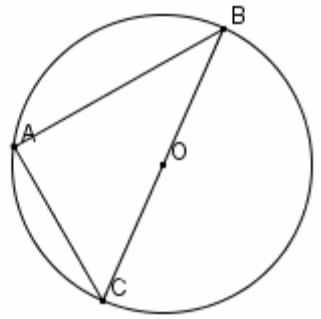
بين أن $\frac{BC}{\sin\widehat{A}} = \frac{AC}{\sin\widehat{B}} = \frac{AB}{\sin\widehat{C}} = 2R$ في الحالات التالية

أ/ ABC قائم الزاوية في A

ب/ جميع زوايا المثلث ABC حادة

ج/ إحدى زوايا المثلث ABC منفرجة

الجواب



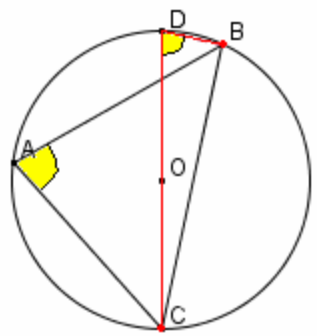
أ/ ABC قائم الزاوية في A

$\sin\widehat{A} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ ومنه $\frac{BC}{\sin\widehat{A}} = BC = 2R$

$\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{2R}$ ومنه $\frac{AC}{\sin\widehat{B}} = 2R$

$\sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{2R}$ ومنه $\frac{AB}{\sin\widehat{C}} = 2R$

إذن $\frac{BC}{\sin\widehat{A}} = \frac{AC}{\sin\widehat{B}} = \frac{AB}{\sin\widehat{C}} = 2R$



ب/ جميع زوايا المثلث ABC حادة

نعتبر D نقطة مقابلة قطريا مع C

DBC قائم الزاوية في B

لدينا $\widehat{D} \equiv \widehat{A}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$\sin\widehat{D} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{2R}$ ومنه $\frac{BC}{\sin\widehat{D}} = 2R$ إذن $\frac{BC}{\sin\widehat{A}} = 2R$

لدينا DAC قائم الزاوية في A

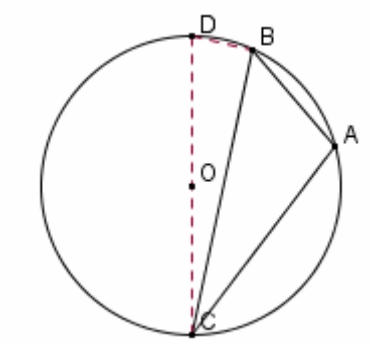
و $\widehat{CDA} \equiv \widehat{B}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$\sin \widehat{CDA} = \frac{AC}{DC} = \frac{AC}{2R}$ ومنه $\sin \widehat{B} = \frac{AC}{2R}$ إذن $\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R$

بالمثل نعتبر نقطة مقابلة قطريا مع A و نبين $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

إذن $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

ج/ إحدى زوايا المثلث ABC منفرجة



لنفترض أن $\widehat{A}$ منفرجة

نعتبر D نقطة مقابلة قطريا مع C

$\widehat{A}$ و $\widehat{D}$ متكاملتان ومن $\sin \widehat{D} = \sin \widehat{A}$

$\sin \widehat{D} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{2R}$ ومنه $\frac{BC}{\sin \widehat{D}} = 2R$ إذن $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = 2R$

الزاويتان $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ حادتان

حسب ب/ نحصل على $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$ و $\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R$

إذن $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

خاصية

ليكن ABC مثلثا و R شعاع الدائرة المحيطة به

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$$

4- علاقات في المثلث (المساحة - المحيط)

نشاط

ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي لـ A على (BC) و S مساحته

1- بين أن $S = \frac{1}{2}\left(BC \times AC \times \sin \widehat{C}\right)$

2- ليكن r شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و O مركزها

أ/ أحسب مساحة AOC بدلالة r و AC

ب/ بين أن $S = \frac{1}{2} p \times r$ حيث p محيط المثلث ABC

خاصية

ليكن ABC مثلثا و r شعاع الدائرة المحاطة به و S مساحته p محيطه

$$S = \frac{1}{2}\left(BC \times AC \times \sin \widehat{C}\right)$$

$$S = \frac{1}{2} p \times r$$

الهندسة

مذكرة رقم11 : ملخص لدرس: الحساب المثلثي 2 مع تمارين وأمثلة محلولة

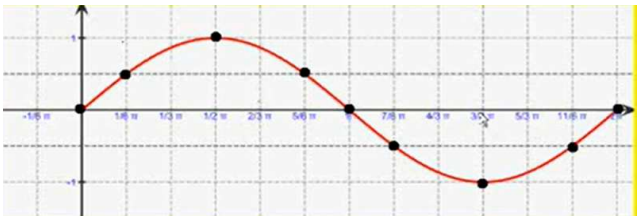
الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

الجزء الثاني: - التمثيل المبياني للدالتين sin و cos - المعادلات والمتراجحات المثلثية الأساسية: $\sin x = a$ ، $\cos x = a$ ، $\tan x = a$ $\sin x \geq a$ ، $\cos x \geq a$ ، $\tan x \geq a$ $\sin x \leq a$ ، $\cos x \leq a$ ، $\tan x \leq a$ - الزوايا المحيطية, الرباعيات الدائرية؛ - العلاقات: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ؛ $s = \frac{1}{2} ab \sin C$ ، $s = pr$ ؛	- التمكن من رسم منحنى كل من الدالتين sin و cos واستثماره في إدراك وتثبيت مفاهيم الدورية والزوجية والرتابة ... - التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية؛	- يمكن بمناسبة إنشاء التمثيل المبياني للدالتين cos و sin، التعرض إلى مفهوم الدالة الدورية (تعريفه وإعطاء بعض العلاقات المميزة له). - يعتبر حل المعادلات والمتراجحات المثلثية المحددة في البرنامج مناسبة لتعميق التعامل مع الدائرة المثلثية. - تعتبر دراسة الزوايا المحيطية والرباعيات الدائرية مناسبة لتثبيت وتقوية مكتسبات التلاميذ في جل مفاهيم الهندسة المستوية وإثبات بعض العلاقات في المثلث.

I. التمثيل المبياني للدالتين cos و sin

دراسة وتمثيل الدالة sin :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	0.5	1	0.5	0	−0.5	−1	−0.5	0

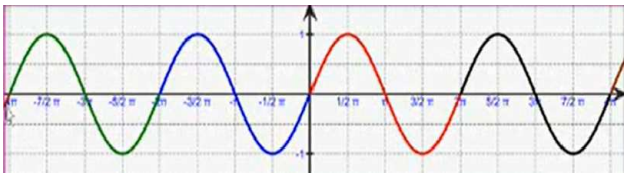


رسم منحنى الجيب : $y = \sin x$

كنشاط يقوم التلاميذ بملا الجدول التالي و رسم التمثيل المبياني على المجال : $[0;2\pi]$

ماذا تلاحظ بالنسبة لمنحنى الدالة sin ؟ أصغر قيمة ؟ أكبر قيمة ؟

بنفس الطريقة نرسم التمثيل المبياني على المجال : $\mathbb{R}$



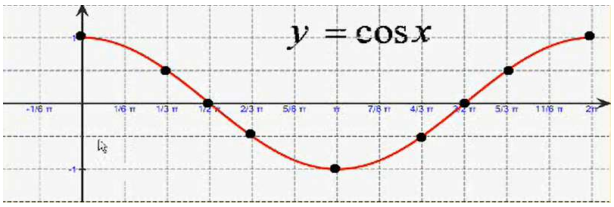
نلاحظ أن التمثيل المبياني يكرر نفسه على كل مجال سعته 2π

لذلك نقول ان الدالة دورية ودورها $T = 2\pi$

دراسة وتمثيل الدالة cos :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	1	0.5	0	−0.5	−1	−0.5	0	0.5	1

رسم منحنى الجيب : $y = \cos x$ و كنشاط يقوم التلاميذ بملا الجدول التالي و رسم التمثيل المبياني على المجال : $[0;2\pi]$



ماذا تلاحظ بالنسبة لمنحنى الدالة cos ؟ أصغر قيمة ؟ أكبر قيمة ؟

بنفس الطريقة نرسم التمثيل المبياني على: $\mathbb{R}$

نلاحظ أن التمثيل المبياني يكرر نفسه على كل مجال سعته 2π

لذلك نقول ان الدالة دورية ودورها $T = 2\pi$

II. المعادلات المثلثية الأساسية:

خاصية1 : $a \in \mathbb{R}$ و نعتبر المعادلة : $(E): \cos x = a$

- اذا كان : $a \succ 1$ أو $a \prec -1$ فان المعادلة : $\cos x = a$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$.
- اذا كان : $-1 \leq a \leq 1$ فانه يوجد $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث

$\cos x = \cos x_0$

وحلول المعادلة $(E): \cos x = a$ في $\mathbb{R}$ هي الأعداد الحقيقية :

$x_0 + 2k\pi$ أو $-x_0 + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

مثال1: 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x = \frac{1}{2}$

2) حل في المجال : $]-\pi, \pi]$ المعادلة : $\cos x = \frac{1}{2}$

الجواب:1) $\cos x = \frac{1}{2}$ يعني $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه : $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

2)نقوم بالتأطير:أ) $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ يعني $-1 < \frac{1}{3} + 2k \leq 1$

يعني $-\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{1}{3}$ $1 - \frac{1}{3} < \frac{1}{3} + 2k$ يعني $-\frac{4}{3} < 2k \leq \frac{2}{3}$

يعني $-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}$ يعني

$-0.66\simeq-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}\simeq0.33$ اذن : $k=0$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير: $-\pi<-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني

$-1<-\frac{1}{3}+2k\le1$ يعني $-1+\frac{1}{3}<-\frac{1}{3}+2k+\frac{1}{3}\le1+\frac{1}{3}$ يعني

$-\frac{2}{3}<2k\le\frac{4}{3}$

يعني $-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{3}<k\le\frac{2}{3}$ يعني

$-0.33\simeq-\frac{1}{3}<k\le\frac{2}{3}\simeq0.66$ اذن : $k=0$

ومنه :نعوض k ب 0 في $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد :

$x_1=-\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=-\frac{\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

مثال2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x=2$

الجواب: لدينا : $a=2>1$ ومنه : فان المعادلة : $\cos x=2$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$ أي : $S=\varnothing$

خاصية2 : $a\in\mathbb{R}$ و نعتبر المعادلة : $(E):\sin x=a$

اذا كان : $a\succ1$ أو $a\prec-1$ فان المعادلة : (E) ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$.

اذا كان : $-1\le a\le1$ فانه يوجد $x_0\in\mathbb{R}$ بحيث $\sin x=\sin x_0$

وحلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}$. هي الأعداد الحقيقية : $x_0+2k\pi$ أو $\pi-x_0+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

مثال: 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المعادلة : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب:1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\sin x=\sin\frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2)نقوم بالتأطير:أ) $-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني $-1<\frac{1}{3}+2k\le1$

يعني $1-\frac{1}{3}<\frac{1}{3}+2k-\frac{1}{3}\le1-\frac{1}{3}$ يعني $-\frac{4}{3}<2k\le\frac{2}{3}$

يعني $-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}$ يعني

$-0.66\simeq-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}\simeq0.33$ اذن : $k=0$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$ أي: $x_1=\frac{\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير: $-\pi<\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني

$-1<\frac{2}{3}+2k\le1$ يعني $-1+\frac{2}{3}<2k\le1+\frac{2}{3}$ يعني $-\frac{1}{3}<2k\le\frac{5}{3}$

يعني $-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{6}<k\le\frac{5}{6}$ اذن : $k=0$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد :

$x_1=\frac{2\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{2\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

خاصية3 : $a\in\mathbb{R}$ و نعتبر المعادلة : $(E):\tan x=a$

يوجد $x_0\in\mathbb{R}$ بحيث $\tan x=\tan x_0$; وحلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}$. هي الأعداد الحقيقية : $x_0+k\pi$ أو حيث $k\in\mathbb{Z}$

هي الأعداد الحقيقية : $x_0+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\tan x=1$

الجواب:

$\tan x=1$ يعني $\tan x=\tan\frac{\pi}{4}$ يعني $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

ملخص: من أجل كل عددين حقيقين x و y .

$\cos x=\cos y$ تكافئ أو $\begin{cases}x=y+2k\pi\\x=-y+2k\pi\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$	
$\sin x=\sin y$ تكافئ أو $\begin{cases}x=y+2k\pi\\x=(\pi-y)+2k\pi\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$	
$\tan x=\tan y$ تكافئ $x=y+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

الجواب:1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$

وحلول المعادلة هي : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

تمرين 2: 1) حل في $[0,2\pi[$ المعادلة : $\cos x=-\frac{1}{2}$

2) حل في $[0,2\pi[$ المعادلة : $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب:1) $\cos x=-\frac{1}{2}$ يعني $\cos x=-\cos\frac{\pi}{3}$ يعني $\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

لأن: $\cos(\pi-x)=-\cos x$

$\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ يعني $\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$ يعني

$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

نقوم بالتأطير:أ) $0\le\frac{2\pi}{3}+2k\pi<2\pi$ يعني $0\le\frac{2}{3}+2k<2$

يعني $-\frac{2}{3}\le2k<2-\frac{2}{3}$ يعني $-\frac{1}{3}\le k<\frac{2}{3}$

يعني $-0.33\simeq-\frac{1}{3}<k\le\frac{2}{3}\simeq0.66$ اذن : $k=0$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{2\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{2\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0\le-\frac{2\pi}{3}+2k\pi<2\pi$ يعني

$0\le-\frac{2}{3}+2k<2$ يعني $\frac{2}{3}\le2k<2+\frac{2}{3}$ يعني $\frac{1}{3}\le k<\frac{4}{3}$

يعني $0.33\simeq\frac{1}{3}<k\le\frac{4}{3}\simeq1.33$ اذن : $k=1$

ومنه: نعوض k ب 1 في $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=-\frac{2\pi}{3}+2\times1\times\pi$

أي : $x_2=\frac{4\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right\}$

2) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ يعني $\sin x=-\sin\frac{\pi}{4}$ يعني $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

لأن: $\sin(-x)=-\sin x$

$\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ يعني $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $x=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

نقوم بالتأطير: أ) $0\le-\frac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi$ يعني $0\le-\frac{1}{4}+2k<2$

يعني $\frac{1}{4}\le2k<2+\frac{1}{4}$ يعني $\frac{1}{8}\le k<\frac{9}{8}$ اذن : $k=1$

ومنه: نعوض k ب 1 فنجد : $x_1=-\frac{\pi}{4}+2\times1\times\pi$ أي: $x_1=\frac{7\pi}{4}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0\le\frac{5\pi}{4}+2k\pi<2\pi$ يعني

$0\le\frac{5}{4}+2k<2$ يعني $-\frac{5}{4}\le2k<2-\frac{5}{4}$ يعني $-\frac{5}{8}\le k<\frac{3}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه: نعوض k ب à فنجد : $x_2=\frac{5\pi}{4}$

وبالتالي : $S=\left\{\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$

III. معادلات خاصة:

$\cos x=1$ تكافئ	$x=2k\pi$
$\cos x=0$ تكافئ	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\quad k\in\mathbb{Z}$
$\cos x=-1$ تكافئ	$x=(2k+1)\pi$
$\sin x=1$ تكافئ	$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$
$\sin x=0$ تكافئ	$x=k\pi$ $\quad(k\in\mathbb{Z})$
$\sin x=-1$ تكافئ	$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

مثال: حل في $[0,3\pi]$ معادلة : $\sin x=0$

الجواب: $\sin x=0$ يعني $x=k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

نقوم بالتأطير: $0\le k\pi\le3\pi$ يعني $0\le k\le3$

اذن : $k=0$ أو $k=1$ أو $k=2$ أو $k=3$

ومنه: نعوض k بهذه القيم فنجد:

$x_0=0\times\pi$ أو $x_1=1\times\pi$ أو $x_2=2\times\pi$ أو $x_3=3\times\pi$

أي : $x_0=0$ أو $x_1=\pi$ أو $x_2=2\pi$ أو $x_3=3\pi$

وبالتالي : $S=\{0;\pi;2\pi;3\pi\}$

تمرين 3: حل في ال $[-\pi,2\pi[$ معادلة : $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$

ومثل الحلول على الدائرة المثلثية

الجواب: $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$ يعني $\cos x=0$ أو $\sqrt{2}\sin x-1=0$

يعني $\cos x=0$ أو $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

يعني $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

يعني $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

نقوم بالتأطير: أ) $-\pi\le\frac{\pi}{2}+k\pi<2\pi$ يعني $-1\le\frac{1}{2}+k<2$

يعني $-1-\frac{1}{2}\le k<2-\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{3}{2}\le k<\frac{3}{2}$

اذن : $k=0$ أو $k=1$ أو $k=-1$

ومنه: نعوض k بهذه القيم فنجد:

$x_1=\frac{\pi}{2}+0\times\pi$ أو $x_2=\frac{\pi}{2}+1\times\pi$ أو $x_3=\frac{\pi}{2}-1\times\pi$

أي : $x_1=\frac{\pi}{2}$ أو $x_2=\frac{3\pi}{2}$ أو $x_3=-\frac{\pi}{2}$

التأطير: ب) $-\pi\le\frac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi$ يعني $-1\le\frac{1}{4}+2k<2$

يعني $-1-\frac{1}{4}\le2k<2-\frac{1}{4}$ يعني $-\frac{5}{4}\le2k<\frac{7}{4}$ يعني $-\frac{5}{8}\le k<\frac{7}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه: نعوض k ب 0 فنجد : $x_4=\frac{\pi}{4}$

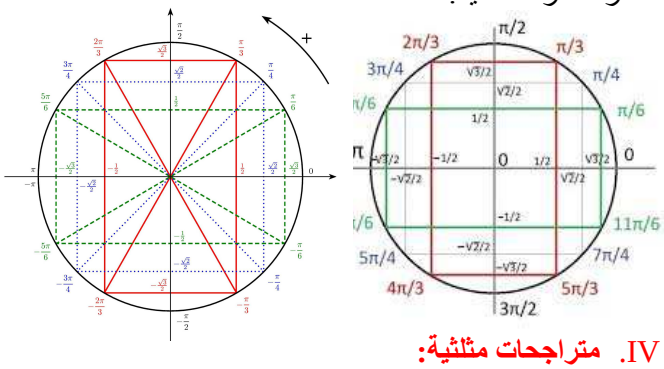
ج) نقوم بعملية التأطير : $-\pi\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi<2\pi$

يعني $-1\le\frac{3}{4}+2k<2$ يعني $-1-\frac{3}{4}\le2k<2-\frac{3}{4}$ يعني $-\frac{7}{8}\le k<\frac{5}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه: نعوض k ب 0 فنجد : $x_5=\frac{3\pi}{4}$

وبالتالي : $S=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

أنظر الدائرة المثلثية:



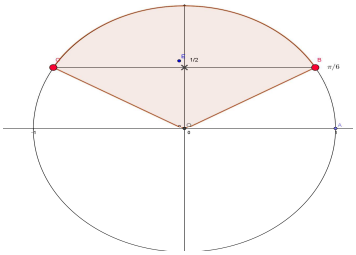
IV. متراجحات مثلثية:

حل هذه المتراجحات اعتمادا على الدائرة المثلثية و مثل على الدائرة المثلثية حلول المتراجحة:

مثال1: حل في المجال : $[0,2\pi[$ المتراجحة: $\sin x\ge\frac{1}{2}$

الجواب : $\sin x\ge\frac{1}{2}$ يعني $\sin x\ge\sin\frac{\pi}{6}$

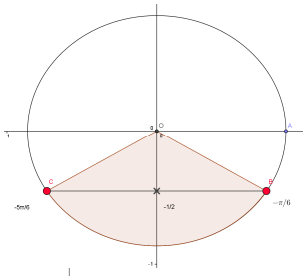
$S=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$



تمرين4: حل في المجال $]-\pi,\pi]$: المتراجحة:

$\sin x\le-\frac{1}{2}$

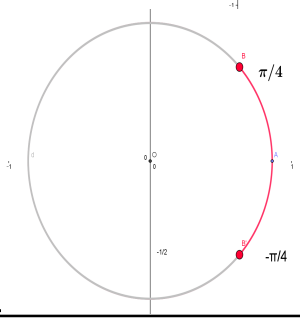
الجواب : $S=\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$



مثال2: حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المت

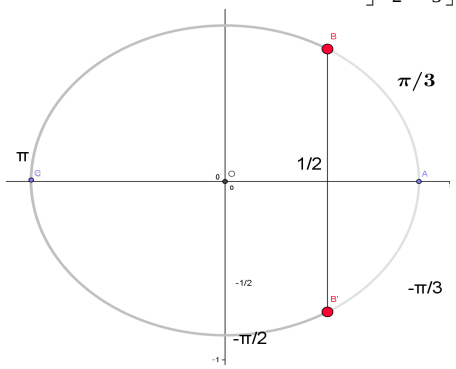
الجواب :

$S=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$



تمرين 5: حل في المجال : $\left]-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ المتراجحة: $\cos x \le \frac{1}{2}$

الجواب : $S=\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$



تمرين 6: حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المتراجحات:(1 $\cos x \le 0$

(2 $\sin x \ge 0$ **الأجوبة :** (1 $S=\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ (2 $S=[0,\pi]$

مثال3: حل في المجال : $S=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ المتراجحة: $\tan x \ge 1$

الجواب : $S=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

V.علاقات sin في مثلث :

ABC مثلث بحيث : $AB=c$ و $AC=b$ و $BC=a$

نفترض أن ABC قائم الزاوية في A اذن : $\sin\hat{A}=1$ ومنه :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=a$$

و لدينا كذلك : $\sin\hat{B}=\frac{b}{a} \Leftrightarrow a=\frac{b}{\sin\hat{B}}$

و لدينا كذلك : $\sin\hat{C}=\frac{c}{a} \Leftrightarrow a=\frac{c}{\sin\hat{C}}$

وبالتالي نجد : $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$

وهذه النتيجة تبقى صحيحة بالنسبة لمثلث عادي :

خاصية: إذا كان ABC مثلث بحيث : $AB=c$ و $AC=b$ و $BC=a$

فان : $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$

تمرين 7: ABC مثلث بحيث : $\hat{A}=\frac{\pi}{4}$ و $\hat{B}=\frac{\pi}{3}$ و $BC=4cm$

أحسب : $\hat{C}$ و $AC=b$ و AC

أجوبة:(1حساب $\hat{C}$ لدينا: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$ يعني $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\hat{C}=\pi$

يعني $\frac{3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}+\hat{C}=\pi$ يعني $\hat{C}=\pi-\frac{7\pi}{12}$ يعني $\hat{C}=\frac{5\pi}{12}$

(1 حساب AC

لدينا: $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}$ يعني $\frac{4}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{3}}$

يعني $4\times\sin\frac{\pi}{3}=AC\times\sin\frac{\pi}{4}$ يعني $AC=\frac{4\times\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$

تمرين 8: حل في المجال $]-\pi,\pi]$ معادلة : $2\sin 2x-1=0$

الجواب: $2\sin 2x-1=0$ يعني $\sin 2x=\frac{1}{2}$ يعني

$\sin 2x=\sin\frac{\pi}{6}$ يعني $2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

يعني $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ أو $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ ونقوم بالتأطير ونجد :

$$S=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{7\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right\}$$

تمرين 9: حل في المجال $\mathbb{R}$ معادلة : $(\sin x)^2+\sin x-2=0$

الجواب: نضع: $X=\sin x$ **والمعادلة تصبح :** $X^2+X-2=0$

نحسب المميز : Δ $a=1$ و $b=1$ و $c=-2$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-2)=9=(3)^2>0$ بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه

المعادلة لها حلين هما: $X_1=\frac{-1+3}{2\times1}=1$ **أو** $X_2=\frac{1-3}{2\times1}=-2$ ومنه

بالرجوع للمتغير الأصلي نجد :

$\sin x=1$ **أو** $\sin x=-2$

نلاحظ أن المعادلة الثانية ليس لها حل في $]-\pi,\pi]$

اذن فقط نحل المعادلة : $\sin x=1$ **(معادلة خاصة)**

$\sin x=1$ **يعني :** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ **ومنه :** $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

الهندسة الفضائية

القدرات المنتظرة

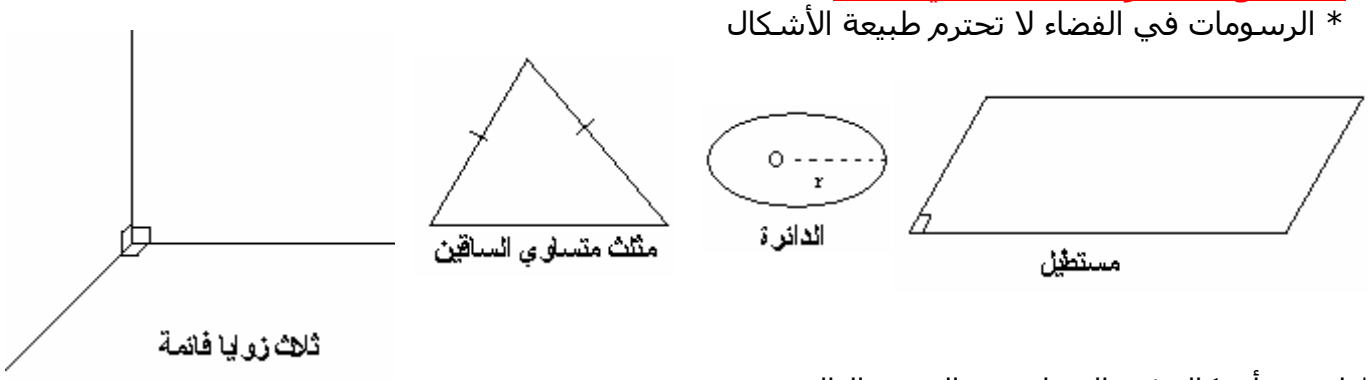
*- تعرف وتمثيل أجزاء في الفضاء على المستوى.
*- إدراك حالات المماثلة وحالات اللامماثلة بين مفاهيم وخاصيات في المستوى ونظيراتها في الفضاء.
*- توظيف خاصيات الهندسة الفضائية في حل مسائل مستقاة من الواقع.

التوازي في الفضاء

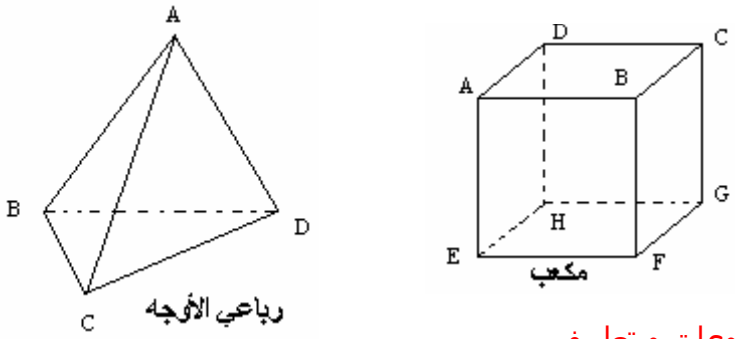
I- تذكير

1- التمثيل المستوى للأشكال في الفضاء

* الرسومات في الفضاء لا تحترم طبيعة الأشكال



* لرسم أشكال في الفضاء نتبع التقنية التالية
- الخطوط المرئية في الواقع نرسمها بخطوط متصلة
- الخطوط الغير المرئية في الواقع نمثلها بخطوط متقطعة
- المستقيمات المتوازية في الواقع نمثلها بمستقيمات متوازي في الرسم
- النقط المستقيمية تمثل بنقط مستقيمية في الرسم.
- قطعتان متقايستان حاملاهما متوازيان نمثلهما بقطعتين متقايستين حامليهما متوازيين



2- موضوعات و تعاريف

الفضاء مجموعة عناصرها تسمى نقط نرمز لها بالرمز(E)
المستقيمات و المستويات أجزاء فعلية من الفضاء

أ- موضوعة1

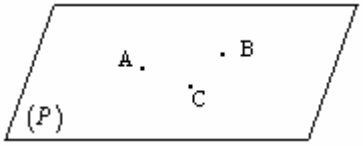
كل نقطتين مختلفتين A و B في الفضاء تحدد مستقيما وحيد نرمز له بـ (AB)

تعريف

نقول عن عدة نقط أنها مستقيمية في الفضاء إذا كانت تنتمي إلى نفس المستقيم

ب- موضوعة2

كل ثلاث نقط غير مستقيمية A و B و C في الفضاء تحدد مستوى وحيد نرمز له بـ(ABC) أو (P)



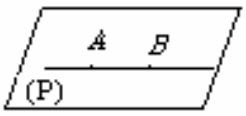
تعريف

* نقول عن عدة نقط أنها مستوائية في الفضاء إذا كانت تنتمي إلى نفس المستوى.
* نقول عن مستقيمين (أو مستقيمات) أنهما مستوئيين(أو مستوائية) إذا كانا (أو كانوا) ضمن نفس المستوى.

Moustaouli Mohamed

ج- موضوعة3

إذا انتمت نقطتان مختلفتان من مستقيم (D) إلى مستوى (P) فان (D) ضمن (P).

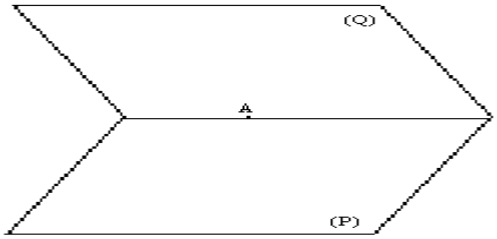


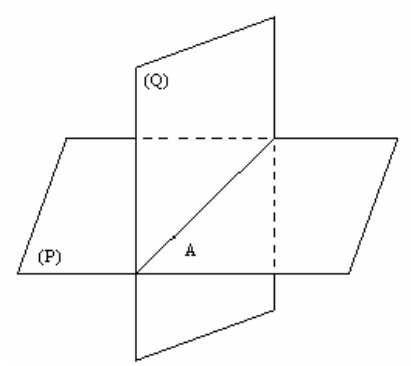
ملاحظة هامة

جميع خاصيات الهندسة المستوية تبقى صالحة في كل مستوى من مستويات الفضاء و كل مستقيم من مستقيماته.

د- موضوعة4

إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فانهما يتقاطعان وفق مستقيم يمر من هذه النقطة.





ذ- نتائج

نتيجة1

كل مستقيم ونقطة خارجه يحددان مستوى وحيدا في الفضاء

نتيجة2

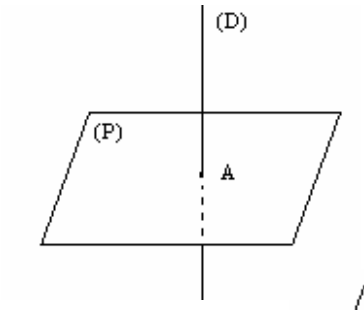
كل مستقيمين متقاطعين في الفضاء يحددان مستوى وحيد في الفضاء

3- الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى

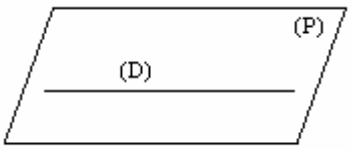
ليكن (D) مستقيم و (P) مستوى من الفضاء

لدينا ثلاث وضعيات ممكنة

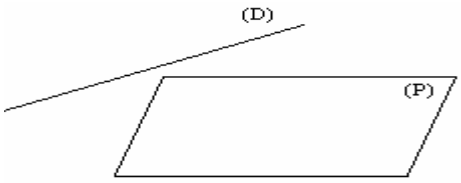
الوضعية1: (D) يخترق (P)



الوضعية2: $(D)\subset(P)$



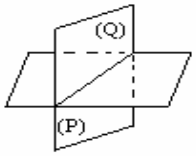
الوضعية3: (D) و(P) منفصلان (أي ليست لهما أية نقطة مشتركة)



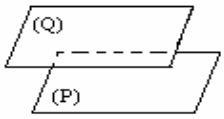
4- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

ليكن (P) و (Q) مستويين في الفضاء. لدينا ثلاث حالات

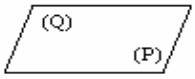
* (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم



* (P) و (Q) منفصلان
(أي ليست لهما أية نقطة مشتركة)



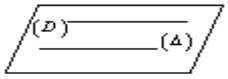
* (P) و (Q) منطبقان



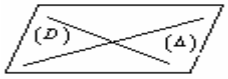
5- الأوضاع النسبية لمستقيمين مختلفين

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين مختلفين. هناك ثلاث حالات

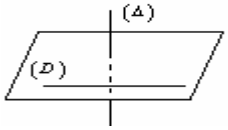
* (D) و (Δ) مستويان ومنفصلان



* (D) و (Δ) مستويان ومتقاطعان



* (D) و (Δ) غير مستويين



تمرين

ليكن $EFGH$ رباعي الأوجه النقطة I من $[FG]$ مخالفة عن F و G و النقطة J من $[EG]$ مخالفة عن E و G و النقطة K من $[EH]$ مخالفة عن E و H

هل (EI) و (JK) متقاطعان

تمرين

$ABCDEFGH$ مكعب

حدد تقاطع (ACG) و (BDG)

للبرهنة على استقامية نقط في الفضاء ، نبحث غالبا على مستويين متقاطعين و نبين أن هذه النقط مشتركة

تمرين $ABCD$ رباعي الأوجه و P و Q و R نقط من $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$ حيث (PR) يقطع (BD) في J و (PQ) يقطع (BC) في K و (QR) يقطع (CD) في I

أتبث أن J و K و I مستقيمية

التوازي في الفضاء

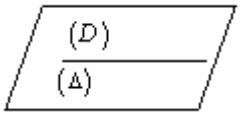
1- المستقيمات المتوازية

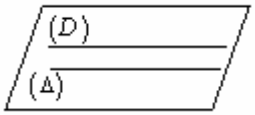
أ- تعريف

نقول إن مستقيمين (D) و (Δ) متوازيان في الفضاء إذا تحقق الشرطان التاليان

- أن يكون (D) و (Δ) مستوائيين
- أن يكون (D) و (Δ) منفصلان أو منطبقان

نكتب $(\Delta)//(D)$





ملاحظة

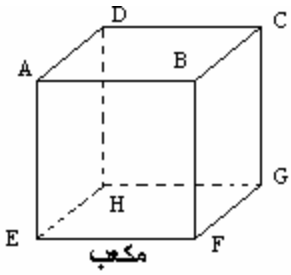
لا يكفي أن يكون (D) و (Δ) منفصلين لكي يكون متوازيين

مثال

(AE) و (BC) منفصلان و لكن غير متوازيين.

$(BC)//(AD)$

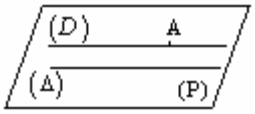
$(EF)//(DC)$



ب- مبرهنة

من نقطة معلومة خارج مستقيم يمر مستقيم وحيد يوازيه في الفضاء

البرهان



لدينا $A \notin (D)$ و بالتالي يوجد مستوى

وحيد (P) يحتوي على A و (D)

وحسب موضوعة اقليدس في المستوى (P) ، يمر مستقيم وحيد

(Δ) يوازي (D)

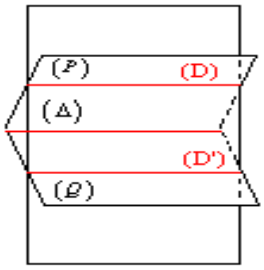
إذن (D) و (Δ) متوازيان في الفضاء

ج- مبرهنة

كل مستقيمين متوازيين قطعا في الفضاء يحددان مستوى وحيدا

د- مبرهنة (نقبلها)

إذا احتوى مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين قطعا فان تقاطعهما هو مستقيم مواز لهذين المستقيمين.



ذ- مبرهنة

إذا كان مستقيمان متوازيين في الفضاء فن كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الآخر

ملاحظة

إذا كان مستقيمان متوازيين فكل مستوى يقطع أحدهما يقطع الآخر

تمرين

ليكن $ABCDE$ هرما قاعدته متوازي أضلاع لتكن B' و C' منتصفي $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي.

أنشئ الشكل

1- أتبث أن $(DE)//(B'C')$

2- ليكن (Δ) تقاطع المستويين (ABC) و (ADE)

بين أن $(\Delta)//(B'C')$

2- توازي مستقيم و مستوى

أ-تعريف

يكون مستقيم (D) موازيا لمستوى (P) إذا و فقط إذا كان (D) و (P) منفصلان أو (D) ضمن (P)

نكتب $(D)//(P)$

ب- مبرهنة

يكون مستقيم (D) موازيا لمستوى (P) إذا و فقط إذا وجد مستقيم ضمن (P) يوازي (D)

تمرين

ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا . I و J و K منتصفات $[AB]$

و $[EF]$ و $[HG]$ على التوالي

أتبث أن (HI) يوازي المستوى (JKC)

3- توازي مستويين

أ- تعريف

يكون مستويان (P) و (Q) متوازيين في الفضاء إذا و فقط إذا كانا منطبقين أو منفصلين.

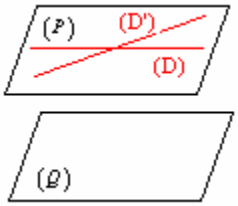
نكتب $(P)//(Q)$

ملاحظة

إذا كان $(P)//(Q)$ فان كل مستقيم ضمن أحدهما يوازي المستوى الآخر.

ب- مبرهنة

يكون مستويان متوازيين في الفضاء إذا و فقط إذا اشتمل أحدهما على مستقيمين متقاطعين يوازيين المستوى الآخر



ج- مبرهنة

إذا وازى مستويان مستوى ثالثا فانهما يكونان متوازيين

د- مبرهنة

من نقطة في الفضاء يمر مستوى و حيد مواز لمستوى معلوم

البرهان

ليكن (P) مستوى و A نقطة في الفضاء

نعتبر (D) و (Δ) متقاطعين ضمن المستوى (P)

يوجد مستقيم وحيد (D') مار من A و يوازي (D)

يوجد مستقيم وحيد (Δ') مار من A و يوازي (Δ)

(D') و (Δ') يحدان مستوى وحيد (Q)

(Q) يوازي (P)

ذ- نتائج

- إذا توازى مستويان فان كل مستقيم يخترق أحدهما يخترق الآخر
- إذا توازى مستويان فان كل مستوى يقطع أحدهما يقطع الآخر
- إذا توازى مستويان فان كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الآخر

تمرين

ليكن (P) و(Q) مستويين متوازيين قطعا . نعتبر $A \in (P)$

و BCD مثلث ضمن (Q) . لتكن I و J و K منتصفات $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$ على التوالي. المستقيم (CK) يخترق المستوى (P) في R.

1- أنشئ الشكل
2- أتبث أن المستوى (IJK) يوازي (P)
3- أتبث أن $(CD)//(AR)$

تمرين

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات و I منتصف $[GH]$

1- لتكن $(EI)\cap(FH)=\{M\}$

بين أن المستويين (AEI) و (AFH) يتقاطعان وفق (AM)

2- أ- بين أن النقط E و F و D و C مستوائية

ب- بين أن $(CF)//(DE)$

3- بين أن $(CFH)//(BDE)$

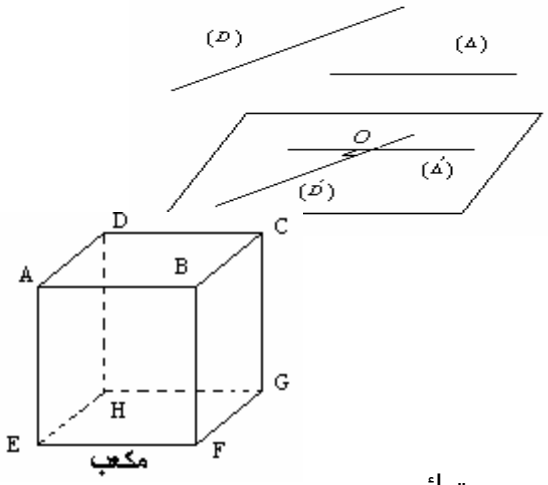
4- بين أن (CI) يخترق المستوى (ADH)

التعامد في الفضاء

I- تعامد مستقيمين في الفضاء

1- تعريف

نقول إن مستقيمين (D) و(Δ) متعامدان في الفضاء إذا و فقط إذا كان الموازيان لهما و الماران من نقطة O في الفضاء متعامدين. نكتب $(D)\perp(\Delta)$



مثال $ABCDEFGH$ مكعب

$(AD)\perp(AE)$

$(AD)\perp(CG)$

$(EF)\perp(DH)$

ملاحظة

مستقيمان متعامدان يمكن أن يكونا غير مستوائيين

تمرين

$ABCD$ رباعي الأوجه حيث $BD=DC$ و I و J و K منتصفات $[AB]$ و $[AC]$ و $[CB]$ على التوالي

بين أن $(IJ)\perp(DK)$

2- خاصيات

خاصية1

إذا كان مستقيمان متوازيين فكل مستقيم عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر

خاصية2

إذا كان مستقيمان متعامدين فكل مستقيم مواز لأحدهما يكون عموديا على الآخر

ملاحظة

يمكن لمستقيمين أن يكون عموديين على مستقيم ثالث دون أن يكونا متوازيين.

II- تعامد مستقيم و مستوى في الفضاء

1- مبرهنة

إذا كان مستقيم (D) عمودي على مستقيمين متقاطعين ضمن مستوى (P) فان (D) عمودي على جميع مستقيمات المستوى (P)

2- تعريف

نقول إن المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) إذا و فقط إذا (D) عموديا على جميع مستقيمات المستوى (P).

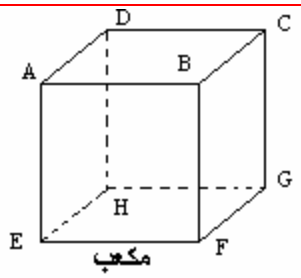
3- مبرهنة

يكون مستقيم (D) عمودي على مستوى (P) إذا و فقط إذا كان المستقيم (D) عمودي على مستقيمين متقاطعين ضمن المستوى (P)

مثال $ABCDEFGH$ مكعب

$(AD)\perp(ABE)$

$(AD)\perp(CHG)$



4- خاصيات

خاصية1

إذا كان مستويان متوازيين فان كل مستقيم عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر

خاصية2

إذا كان مستقيمان متوازيين فان كل مستوى عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر

خاصية4

يكون مستقيمان متعامدين إذا و فقط إذا كان أحدهما عمودبا على مستوى يتضمن الآخر

خاصية5

يكون مستويان متوازيين إذا وفقط إذا كانا عموديين على نفس المستقيم

تمرين

$ABCDEFGH$ مكعب

أتبث أن $(EB)\perp(DF)$ ثم أتبث أن $(EBG)\perp(DF)$

تمرين

ليكن (C) دائرة من المستوى (P). نعتبر $[AB]$ قطرا لـ (C) و (Δ) العمودي على (P) في A.

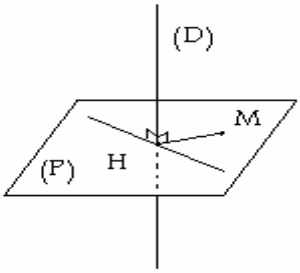
ليكن $S\in(\Delta)$ حيث $S\neq A$ و $M\in(C)$; $M\neq B$

أتبث أن $(MB)\perp(SM)$.

5- مبرهنات

مبرهنة1

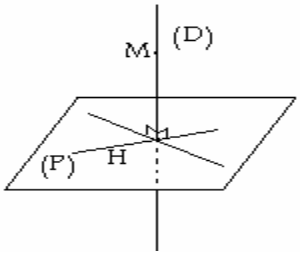
من كل نقطة في الفضاء يمر مستوى وحيد عمودي على مستقيم معلوم.



H المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D)

مبرهنة2

من كل نقطة في الفضاء يمر مستقيم وحيد عمودي على مستوى معلوم.



H المسقط العمودي للنقطة M على المستوى (P)

III- تعامد مستويين

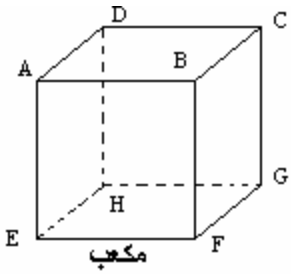
تعريف

نقول ان المستويين (P) و (Q) متعامدان اذا و فقط اذا كان أحدهما يتضمن مستقيما عموديا على الآخر نكتب $(P)\perp(Q)$

مثال $ABCDEFGH$ مكعب

$(ADC)\perp(ABE)$

$(ADF)\perp(CHG)$



ملاحظة

إذا تعامد مستويين في الفضاء فلا يعني أن كل مستقيم ضمن أحدهما عمودي على المستوى الآخر.

تمرين

ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين في A ضمن مستوى (P) و I منتصف $[BC]$. لتكن S نقطة من المستقيم العمودي على (P) في A حيث $S\neq A$

1- أتبث أن $(SAI)\perp(SCI)$

2- ليكن H المسقط العمودي لـ A على (SI)

أتبث أن $(AH)\perp(SC)$

تمرين

$ABCDEFGH$ مكعب

أتبث أن $(HEB)\perp(AGF)$

تمرين

في الفضاء نعتبر ABC مثلثا قائم الزاوية في A ضمن مستوى (P). لتكن D مماثلة B بالنسبة لـ A ، و S نقطة خارج (P) حيث $SB=SD$. لتكن I و J منتصفي $[SD]$ و$[DC]$ على التوالي

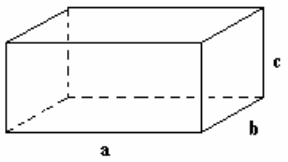
1- بين أن $(AB)\perp(SAC)$ استنتج أن $(P)\perp(SAC)$

2- بين أن $(AB)\perp(IJ)$

المساحات و الحجوم

1- متوازي المستطيلات

ليكن a و b و c طول و عرض و ارتفاع متوازي المستطيلات

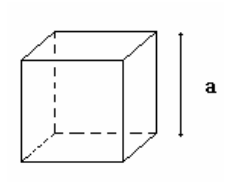


المساحة : $S = 2(ab + bc + ca)$

الحجم: $V = abc$

2- المكعب

ليكن a طول حرف المكعب

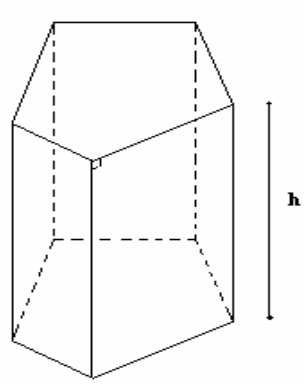


المساحة الكلية $S = 6a^2$

الحجم $V = a^3$

3 - الموشور القائم

أ- ليكن h ارتفاع موشور قائم و l و B محيط و مساحة قاعدته على التوالي.



* **المساحة الجانبية** $S = l \times h$

* **المساحة الكلية**

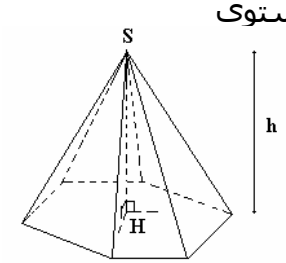
$S_T = l \times h + 2B$

* **الحجم** $V = B \times h$

4- الهرم

أ- ليكن h ارتفاع هرما رأسه S

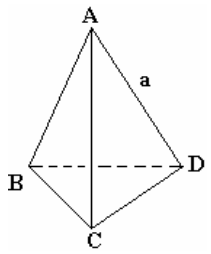
$h = SH$ حيث H المسقط العمودي لـ S على المستوى المتضمن للقاعدة. ليكن B مساحة قاعدة الهرم.



حجم الهرم: $V = \frac{1}{3} B.h$

5 - رباعي الأوجه المنتظم

ليكن a طول حرف رباعي الأوجه منتظم

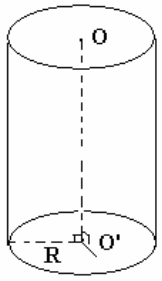


المساحة الجانبية $S = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^3$

الحجم $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

6 - الأسطوانة القائمة

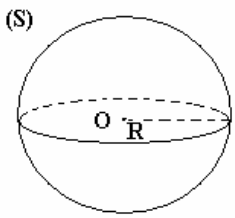
ليكن h ارتفاع الاسطوانة و R شعاع قاعدتها



المساحة الجانبية هي $S_L = 2\pi Rh$

الحجم هو $V = \pi R^2 h$

6- الفلكة

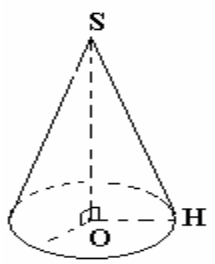


ليكن R شعاع الفلك

المساحة هي: $S = 4\pi R^2$

الحجم هو: هي $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

7 - المخروطي الدوراني



ليكن R شعاع القاعدة لمخروط دوراني

المساحة الجانبية هي $S_L = \pi R \cdot SH$

الحجم: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$h = OS$

تمرين $ABCD$ رباعي الأوجه حيث $BD = DC$ و I و J و K منتصفات $[AB]$ و $[AC]$ و $[CB]$ على التوالي

بين أن $(IJ) \perp (DK)$

تمرين $ABCDEFGH$ مكعب

أتبث أن $(EB) \perp (DF)$ ثم أتبث أن $(EBG) \perp (DF)$

تمرين ليكن (C) دائرة من المستوى (P). نعتبر $[AB]$ قطرا لـ (C) و (Δ) العمودي على (P) في A.

ليكن $S \in (\Delta)$ حيث $S \neq A$ و $M \in (C)$; $M \neq B$

أتبث أن $(MB) \perp (SM)$.

تمرين ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين في A ضمن مستوى (P) و I منتصف $[BC]$. لتكن S نقطة من المستقيم العمودي على (P) في A حيث $S \neq A$

3- أتبث أن $(SAI) \perp (SCI)$

4- ليكن H المسقط العمودي لـ A على (SI)

أتبث أن $(AH) \perp (SC)$

تمرين $ABCDEFGH$ مكعب

أتبث أن $(HEB) \perp (AGF)$

تمرين في الفضاء نعتبر ABC مثلثا قائم الزاوية في A ضمن مستوى (P). لتكن D مماثلة B بالنسبة لـ A ، و S نقطة خارج (P) حيث $SB = SD$. لتكن I و J منتصفي $[SD]$ و $[DC]$ على التوالي

3- بين أن $(AB) \perp (SAC)$ استنتج أن $(P) \perp (SAC)$

4- بين أن $(AB) \perp (IJ)$

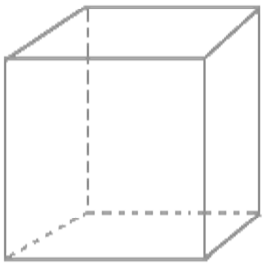
تمرين ليكن $ABCD$ معينا ضمن مستوى (P) حيث $BD = 3cm$ و $AC = 3cm$. لتكن S نقطة من المستقيم العمودي على (P) في A حيث $SA = 8cm$

أحسب حجم الهرم $SABCD$

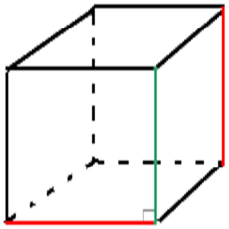
تمرين أحسب حجم فلكة مساحتها تساوي $1m^2$

الهندسة الفضائية

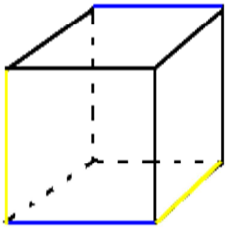
رسم مكعب في الفضاء



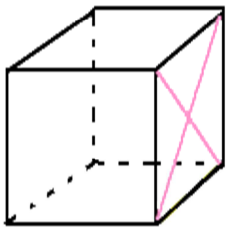
Exemples



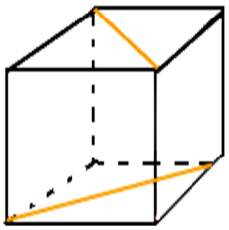
Les droites rouges sont orthogonales.



Les droites bleues sont parallèles.
Les droites jaunes sont orthogonales.

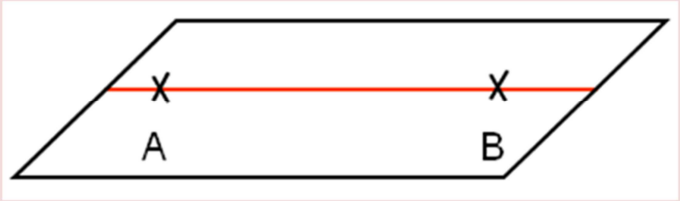


Les droites roses sont sécantes et perpendiculaires.



Les droites oranges ne sont ni parallèles ni sécantes.

موضوعات الهندسة الفضائية

من نقطتين مختلفتين A و B في الفضاء ، يمر مستقيم وحيد يرمز له ب (AB) 	من ثلاث نقط غير مستقيمية A و B و C في الفضاء ، يمر مستوى وحيد يرمز له ب (ABC)
إذا احتوى مستوى $\mathscr{P}$ على نقطتين مختلفتين A و B ، فإنه يتضمن المستقيم (AB) و نكتب : $(AB)\subset(\mathscr{P})$ 	إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة A فإنهما يتقاطعان وفق مستقيم يمر من النقطة A.

الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

ليكن (D) و (D') مستقيمين في الفضاء

(D) و (D')

- **مستوائيان**
  - **متقاطعان** $(D)\cap(D')=\{A\}$
  - **متوازيان** $(D)//(D')$
    - **متوازيان قطعا** $(D)\cap(D')=\varnothing$
    - **منطبقان** $(D)=(D')$
- **غير مستوائيين**

الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى

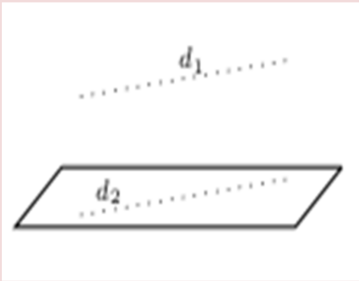
ليكن (D) مستقيما و (P) مستوى في الفضاء

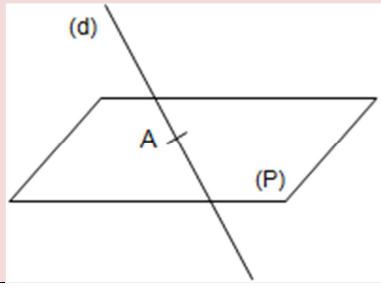
(D) و (P)

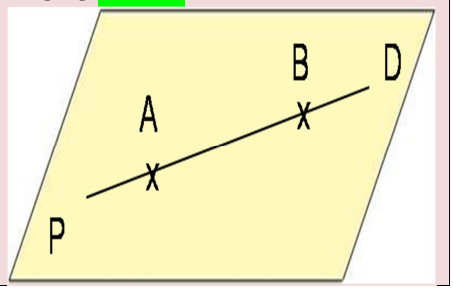
متوازيان $(D)//(P)$

- **متوازيان قطعا** $(D)\cap(P)=\varnothing$
- **(D) ضمن (P)** $(D)\subset(P)$

متقاطعان $(P)\cap(D)=\{A\}$







الأوضاع النسبية لمستويين

ليكن (P) و (Q) مستويين في الفضاء

(P) و (Q)

متوازيان $(P)//(Q)$

- **متوازيان قطعا** $(P)\cap(Q)=\varnothing$
- **منطبقان** $(P)=(Q)$

متقاطعان وفق مستقيم (D) $(P)\cap(Q)=(D)$

المستقيمات المتوازية

من كل نقطة A من الفضاء يمر مستقيما وحيدا مواز لمستقيم معلوم (D)	إذا كان $(D)//(\Delta)$ و $(D')//(\Delta)$ فإن $(D)//(D')$	إذا كان $(D)//(\Delta)$ و مستوى (P) يقطع (D) فإن (P) يقطع (Δ)

الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى

إذا كان $(P)//(Q)$ و (D) مستقيما يخترق (P) فإن (D) يخترق (Q)	إذا كان $(P)//(Q)$ و كان (H) مستوى يقطع (P) في مستقيم (D) ، فإن (H) يقطع (Q) في مستقيم (Δ) بحيث : $(D)//(\Delta)$	إذا كان مستقيم (D) يوازي قطعا مستويين متقاطعين (P) و (Q) ، فإن (D) يوازي تقاطعهما (Δ)

تعامد مستقيمين

• يكون (D) عموديا على (Δ) في الفضاء إذا وفقط إذا كان المستقيمان الموازيان لهما في نقطة O يحددان زاوية قائمة و نكتب : $(D)\perp(\Delta)$	• إذا كان $\begin{cases}(D)\perp(\Delta)\\(D')//(D)\\(\Delta')\perp(\Delta)\end{cases}$ فإن $(D')\perp(\Delta')$

تعامد مستقيم و مستوى

• المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) يعني أن (D) عمودي على جميع مستقيمات المستوى (P) و نكتب : $(D)\perp(P)$
• $(D)\perp(P)$ إذا وفقط إذا كان (D) عموديا على مستقيمين متقاطعين ضمن المستوى (P)
	• إذا كان $\begin{cases}(P)//(Q)\\(D)\perp(P)\end{cases}$ فإن $(D)\perp(Q)$
	• إذا كان $\begin{cases}(D)\perp(P)\\(\Delta)\perp(P)\end{cases}$ فإن $(D)//(\Delta)$
	• إذا كان $\begin{cases}(D)\perp(P)\\(D)\perp(Q)\end{cases}$ فإن $(P)//(Q)$

- من كل نقطة في الفضاء يمر مستوى وحيد عمودي على مستقيم معلوم
- من كل نقطة في الفضاء يمر مستقيم وحيد عمودي على مستوى معلوم

تعامد مستويين

يكون مستويان (P) و (Q) متعامدين في الفضاء إذا تضمن أحدهما مستقيما عموديا على الآخر

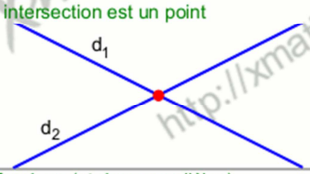
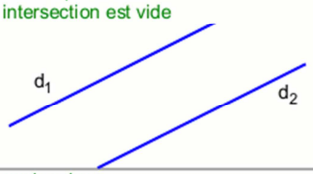
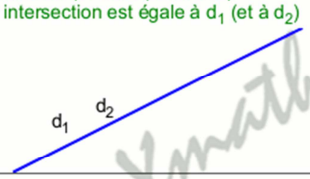
أشكال توضيحية :

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

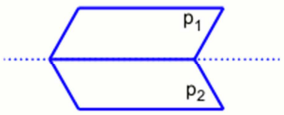
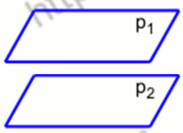
I Droites et plans de l'espace

Positions et intersection de droites et de plans

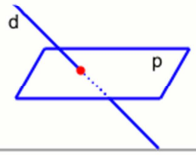
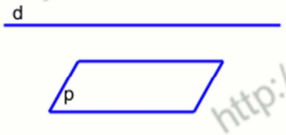
- Deux droites d_1 et d_2 de l'espace peuvent être :

• sécantes leur intersection est un point  	• strictement parallèles leur intersection est vide 
• confondues (et donc parallèles) leur intersection est égale à d_1 (et à d_2)  	• non coplanaires leur intersection est vide 

- Deux plans p_1 et p_2 peuvent être :

• sécants leur intersection est une droite  	• strictement parallèles leur intersection est vide  	• confondus (et donc parallèles) leur intersection est p_1 (et p_2) 

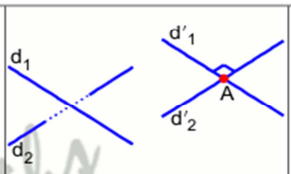
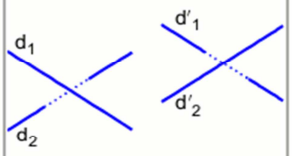
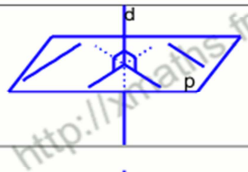
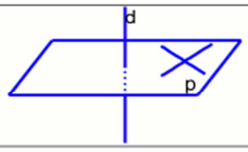
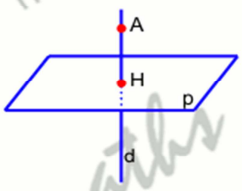
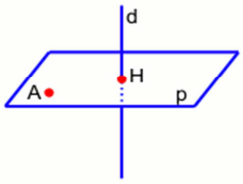
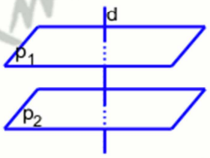
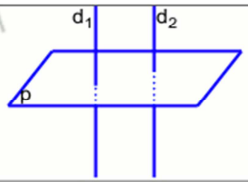
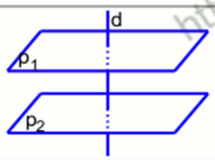
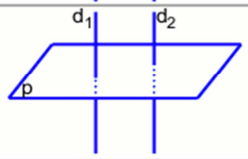
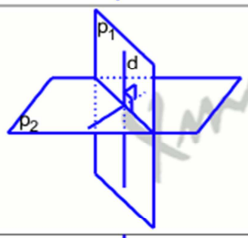
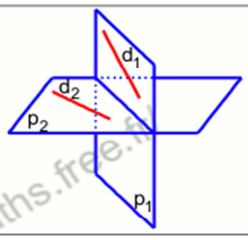
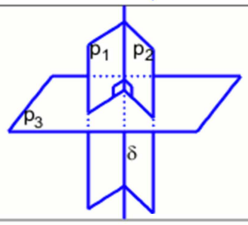
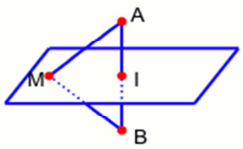
- Par rapport à un plan p, une droite d peut être :

• sécante à p leur intersection est un point  	• strictement parallèle à p leur intersection est vide  	• contenue dans p (et donc parallèle à p) leur intersection est d 

Remarques

- Dans l'espace, deux droites qui n'ont aucun point commun ne sont pas nécessairement parallèles.
- Il n'est pas possible que deux plans aient un seul point commun.

Orthogonalité de droites et de plans

Deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales si leurs parallèles respectives d'_1 et d'_2 passant par un même point A sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.		Si deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales, toute parallèle d'_1 à d_1 est orthogonale à toute parallèle d'_2 à d_2.	
Une droite d est perpendiculaire à un plan p si elle est orthogonale à toutes les droites de p.		Pour qu'une droite d soit perpendiculaire à un plan p il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de p.	
Par un point A il passe une et une seule droite d perpendiculaire à un plan p donné. Le point d'intersection H de d et de p est appelé projeté orthogonal de A sur p.		Par un point A il passe un et un seul plan p perpendiculaire à une droite d donnée. Le point d'intersection H de d et de p est appelé projeté orthogonal de A sur d.	
Si deux plans p_1 et p_2 sont parallèles, toute droite d perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.		Si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles, tout plan p perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.	
Si deux plans p_1 et p_2 sont perpendiculaires à une même droite d, alors p_1 et p_2 sont parallèles.		Si deux droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires à un même plan p, alors d_1 et d_2 sont parallèles.	
Deux plans p_1 et p_2 sont perpendiculaires si l'un d'eux contient une droite d perpendiculaire à l'autre.		**Attention** Si p_1 et p_2 sont deux plans perpendiculaires, une droite d_1 quelconque de p_1 n'est pas orthogonale à une droite d_2 quelconque de p_2.	
Si des plans sécants p_1 et p_2 sont tous deux perpendiculaires à un même plan p_3, alors la droite δ d'intersection de p_1 et p_2 est perpendiculaire à p_3.		Le plan médiateur d'un segment [AB] est le plan passant par I milieu de [AB] et perpendiculaire à la droite (AB) C'est l'ensemble des points M équidistants de A et de B.	

الهندسة

مذكرة رقم15 : ملخص لدرس: الهندسة الفضائية مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- موضوعات التلاقي، تحديد مستوى في الفضاء؛ - الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفضاء؛ - خاصيات التوازي والتقاطع؛ - التعامد: تعامد مستقيم ومستوى، تعامد مستويين؛ - خاصيات التعامد والتوازي؛	- تعرف وتمثيل أجزاء في الفضاء على المستوى. - إدراك حالات المماثلة وحالات اللامماثلة بين مفاهيم وخاصيات في المستوى ونظيراتها في الفضاء. - توظيف خاصيات الهندسة الفضائية في حل مسائل مستقاة من الواقع.	- انطلاقا من دراسة بعض الأشكال والمجسمات الاعتيادية من الفضاء ودراسة بعض المقاطع المستوية يتمكن التلاميذ من إبراز النتائج المتعلقة بالأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفضاء (التوازي، التعامد، التقاطع) واستقراء التعاريف والخاصيات المتعلقة بالتوازي والتعامد في الفضاء. - ينبغي الالتزام بالحد الأدنى الضروري من خاصيات الفضاء (الخاصيات والتعاريف والموضوعات الأساسية). - ينبغي ضبط بعض التقنيات والقواعد التي تتحكم في رسم الأشكال الفضائية على المستوى (دور الخطوط المتصلة والخطوط المتقطعة...). - يتعين الانتقال التدريجي من مستوى التجربة والملاحظة إلى مستوى البرهان الرياضي. - تعتبر جميع صيغ المساحات والحجوم مقبولة في هذا المستوى. - يمكن الاستئناس في حدود المتوفر بالمؤسسات التعليمية، ببعض البرامج المعلوماتية المندمجة في الحاسوب لتحديد المقاطع المستوية لبعض المجسمات من الفضاء.

I. موضوعات الهندسة الفضائية:

نرمز ب (E) إلى الفضاء.

- من نقطتين مختلفتين A و B من الفضاء (E) يمر مستقيم وحيد (AB).
- من ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء (E) يمر مستوى وحيد يرمز له ب (ABC).
- إذا احتوى مستوى (P) من الفضاء (E) على نقطتين A و B فانه يتضمن المستقيم (AB).

يعني إذا كان $A\in(P)$ و $B\in(P)$ فان $(AB)\subset(P)$.

- إذا اشترك مستويان مختلفان من الفضاء (E) في نقطة A فإنهما يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يمر من A.

إذا كان $\begin{cases} A\in(P) \text{ و } A\in(Q) \\ (P)\neq(Q) \end{cases}$ فإن $A\in(\Delta)/(P)\cap(Q)=(\Delta)$

- جميع خاصيات الهندسة الفضائية تبقى صحيحة في كل مستوى من الفضاء (E).

نتائج: يتحدد مستوى في الفضاء إما:

بثلاث نقط غير مستقيمية.

بمستقيم و نقطة لا تنتمي إليه.

← بمستقيمين متقاطعين.

← بمستقيمين متوازيين قطعا.

II. الأوضاع النسبية في الفضاء:

الأوضاع النسبية لمستقيمين: ليكن (D) و (Δ) مستقيمين من الفضاء (E) لدينا ثلاث وضعيات ممكنة:

- (D) و (Δ) متوازيان يعني $(D)\cap(\Delta)=\phi$
- (D) و (Δ) متقاطعان يعني $(D)\cap(\Delta)=\{I\}$
- (D) و (Δ) غير مستوائيان يعني (D) يخترق المستوى (P) الذي يضم المستقيم (Δ) في نقطة I لا تنتمي إلى (Δ).

1. الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى:

ليكن (D) مستقيما و (P) مستوى من الفضاء (E) لدينا حالات ممكنة:

- المستقيم (D) ضمن (P) ونكتب $(D)\subset(P)$
- المستقيم (D) خارج (P) ونكتب $(D)\cap(\Delta)=\phi$
- المستقيم (D) يخترق (P) ومنه $(D)\cap(\Delta)=\{I\}$

2. الأوضاع النسبية لمستويين من الفضاء:

ليكن (P) و (Q) مستويين مختلفين من الفضاء (E) لدينا حالتين:

(P) و (Q) منفصلان (متوازيان قطعا) أو (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم

III. التوازي في الفضاء:

1. توازي مستقيمسن: يكون مستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا و فقط إذا كانا مستوائيين منطبقان أو منفصلان و نكتب $(D)\parallel(D')$.

خاصيات و مبرهنات: كل مستقيمان متوازيان قطعا يحددان مستوى و حيد في الفضاء.

- أذا كان مستقيمان متوازيين فان أي مستقيم يوازي أحدهما يوازي الأخر و $(D')\parallel(\Delta)$ إذن $(D)\parallel(D')$

2. توازي مستقيم و مستوى: يكون مستقيم (D) موازيا لمستوى (P) إذا و فقط إذا كان (D) ضمن (P) أو كان (D) و (P) منفصلان $(P)\cap(Q)=\phi$ و نكتب $(D)\parallel(P)$.

خاصيات و مبرهنات: يكون مستقيم (D) موازيا لمستوى (P) إذا و فقط إذا (D) وجد مستقيم (Δ) ضمن (P) يوازي المستقيم (D).

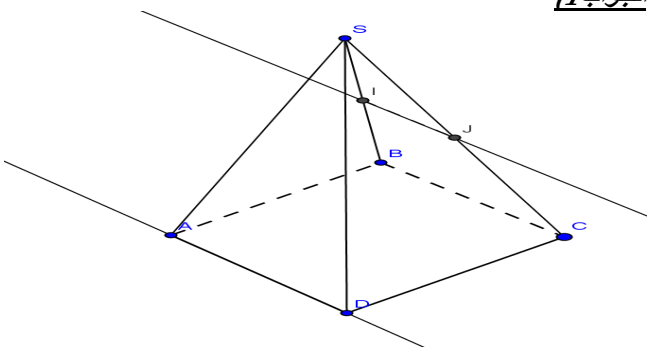
تمرين 1:

ليكن $SABCD$ هرما قاعدته متوازي الأضلاع $ABCD$ و لتكن I و J منتصفي القطعتين $[SB]$ و $[SC]$ على التوالي.

1) بين أن $(AD)\parallel(IJ)$

2) أثبت أن $(IJ)\parallel(ADS)$

الجواب1)



في المثلث SBC لدينا: I منتصف $[SB]$ و J منتصف $[SC]$ اذن, $(IJ)\parallel(BC)$.

و لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع اذن $(BC)\parallel(AD)$ و منه ان $(AD)\parallel(IJ)$ (1)

لدينا $A\in(ADS)$ و $D\in(ADS)$ إذن $(AD)\subset(ADS)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: $(IJ)\parallel(ADS)$

3. توازي مستويين: يكون مستويان (P) و (Q) متوازيين إذا و فقط إذا كانا منطبقين أو منفصلين و نكتب $(P)\parallel(Q)$.

$(P)\parallel(Q)$ تكافئ $(P)\cap(Q)=\phi$ أو $(P)=(Q)$.

خاصيات و مبرهنات: يكون مستويان من الفضاء متوازيين إذا وفقط إذا اشتمل أحدهما على مستقيمين متقاطعين و موازيين للأخر.

- إذا كان مستويان متوازيين فان أي مستوى يقطع أحدهما يقطع الأخر و يكون مستقيما تقاطعهما مع هذا المستوى متوازيين.
- إذا كان مستويان متوازيين فان أي مستقيم يخترق أحدهما يخترق الأخر.
- إذا اشتمل مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين قطعا فان تقاطعهما يكون مستقيما موازيا اهذين المستقيمين (مبرهنة السقف).

إذا كان $\begin{cases}(D')\subset(P')(D)\subset(P)\\(D')\parallel(D)\\(P)\cap(P')=(\Delta)\end{cases}$ فان $(D)\parallel(\Delta)\parallel(D')$

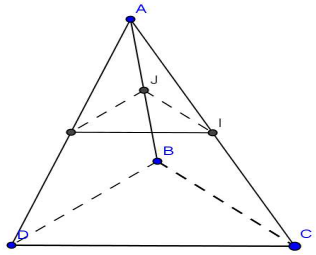
- إذا وازى مستويان مستوى ثالثا فإنهما يكونان متوازيين.

تمرين2: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه و لتكن I منتصف القطعة $[AC]$ و J منتصف القطعة $[AB]$ و K منتصف القطعة $[AD]$

1) أنشئ شكلا مناسبا.

2) بين أن $(BCD)\parallel(IJK)$

الجواب1)



2) في المثلث ABC

لدينا I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[AB]$ اذن

$(IJ)\parallel(BC)$

و لدينا في المثلث ABD : K منتصف $[AD]$ و J منتصف $[AB]$ اذن $(JK)\parallel(BD)$

و لدينا : $(IJ)\parallel(BC)$ و $(BC)\subset(BCD)$ إذن $(IJ)\parallel(BCD)$ (1)

و لدينا : $(JK)\parallel(BD)$ و $(BD)\subset(BCD)$ إذن $(JK)\parallel(BCD)$ (2)

و لدينا : $(IJ)\cap(JK)=\{J\}$ (3)

و لدينا : $(IJ)\subset(IJK)$ و $(JK)\subset(IJK)$ (4)

إذن (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن: $(BCD)\parallel(IJK)$

IV. التعامد في الفضاء:

1. تعامد مستقيمين:

نقول بأن مستقيمين (D) و (Δ) من الفضاء متعامدان إذا و فقط إذا كان الموازيان لهما في أية نقطة من الفضاء متعامدين و نكتب: $(D)\perp(\Delta)$

$(D')\subset(P)$ و $(\Delta')\subset(P)$

$(D)\parallel(D')$ و $(\Delta)\parallel(\Delta')$

$(D')\perp(\Delta')$ يعني $(D)\perp(\Delta)$

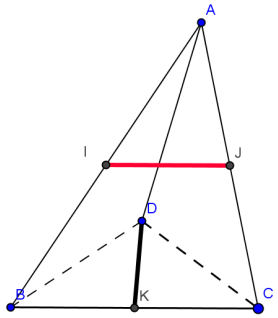
خاصية: إذا كان مستقيمان متوازيان فان كل مستقيم متعامد مع أحدهما يكون متعامدا مع الأخر.

تمرين3: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه حيث : $BD=DC$ و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف القطعة $[AC]$ و K منتصف القطعة $[BC]$

1) أنشئ شكلا مناسبا.

2) بين أن $(DK)\perp(IJ)$

الجواب1)



في المثلث ABC لدينا I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$ اذن

$(IJ)\parallel(BC)$ (1)

و في المثلث BCD لدينا $BD=DC$ و K منتصف القطعة $[BC]$ اذن :

$(DK)\perp(BC)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: $(DK)\perp(IJ)$

2. المستقيمات و المستويات المتعامدة:

نقول بأن مستقيما (D) عمودي عل مستوى (P) إذا و فقط إذا كان متعامدا مع جميع مستقيمات المستوى (P) و نكتب: $(D)\perp(P)$

خاصيات و مبرهنات: يكون مستقيم (D) عموديا عل مستوى (P) إذا و فقط إذا كان متعامدا مع مستقيمين متقاطعين ضمن (P).

إذا كان مستقيمان متوازيين فان أي مستوى عمودي على أحدهما يكون عموديا على الأخر.

$(\Delta_1)\subset(P)$ و $(\Delta_2)\subset(P)$, $(D)\perp(\Delta_1)$ و $(D)\perp(\Delta_2)$

و منه $(D)\perp(P)$

- **المستويات المتعامدة:** نقول بأن مستوى (P) على مستوى (Q) إذا تضمن أحدهما مستقيما عموديا على الأخر و نكتب: $(D)\perp(Q)$

خاصيات و مبرهنات:

- إذا كان مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) فان كل مستوى مار من (D) يكون عموديا على (P).
- إذا كان مستوى (P) عموديا على مستوى (Q) فان كل مستقيم ضمن أحدها عمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على الأخر.
- إذا كان مستوى عموديا على مستويين متقاطعين فان هذا المستوى يكون عموديا على مستقيم التقاطع.

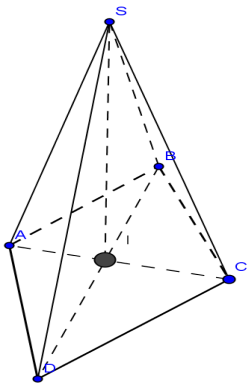
تمرين4: ليكن $ABCD$ شبه منحرف قطراه $[AC]$ و $[BD]$ يتقاطعان في I. لتكن S نقطة من الفضاء لا تنتمي إلى المستوى (ABC) بحيث يكون $(SI)\perp(ABC)$

1) حدد تقاطع المستويين (SAC) و (SBD) وحدد تقاطع المستويين (SAB) و (SDC).

2) تحقق أن $(SI)\perp(AB)$ وبين أن المستويين (SAC) و (ABC) متعامدان.

3) نفترض أن المثلث ABC قائم الزاوية في B و أن $SI=3$, $BC=\frac{1}{4}$, $AB=2$, $CD=3$.

أحسب حجم الهرم $SABCD$.



الجواب:

1)أ) لدينا $(SAC)\neq(SBD)$ لأن النقط S , A , B , C و D غير مستوائية.

لدينا: $S\in(SAC)$

و $S\in(SBD)$

و لدينا $I\in(AC)$ و $(AC)\subset(SAC)$ إذن $I\in(SAC)$

و لدينا $I\in(BD)$ و $(BD)\subset(SBD)$ إذن $I\in(SBD)$

إذن المستويان (SAC) و (SBD) يشتركان في النقطتين S و I.

إذن $(SAC)\cap(SBD)=(IS)$

ب) لدينا $S\in(SAB)$ و $S\in(SDC)$

و لدينا $(AB)\subset(SAB)$ و $(DC)\subset(SDC)$ و $(DC)\parallel(AB)$.

إذن (SAB) و (SDC) يتقاطعان في مستقيم يمر من S و يوازي المستقيمين (AB) و (DC). حسب مبرهنة السقف.

2)أ) لدينا $(SI)\perp(ABC)$ و $(AB)\subset(ABC)$.

إذن $(SI)\perp(AB)$

ب) لدينا $(SI)\subset(SAC)$ و $(SI)\perp(AC)$

إذن $(SI)\perp(ABC)$ و منه فان $(ABC)\perp(SAC)$

3) $((AB)\perp(BC))$ و منه مساحة شبه المنحرف $ABCD$ هي: $S=\frac{(DC+AB)\times BC}{2}=\frac{(3+2)\times\frac{1}{4}}{2}=\frac{5}{8}$

(لأن ارتفاعه هو BC) ومنه حجم الهرم $SABCD$ هو: $V=\frac{1}{3}\cdot S\times(SI)$

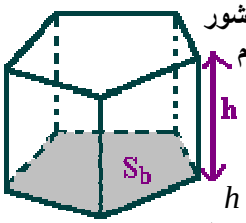
أي: $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)\cdot 3=\frac{5}{8}$

I. المساحة و الحجم:

مساحات و حجوم بعض المجسمات الاعتيادية:

الموشور القائم, متوازي المستطيلات, المكعب , الهرم رباعي الأوجه المنتظم و المخروط الدوراني:

الموشور القائم



ليكن h ارتفاع الموشور و l محيط قاعدته و S_b مساحة قاعدته.

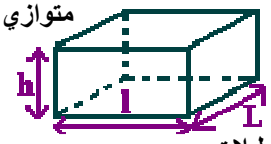
المساحة الجانبية: $S_l=l\times h$

المساحة الكلية:

$S_T=l\times h+2S_b$

الحجم: $V=S_b\times h$

متوازي المستطيلات



ليكن L و l و h على التوالي طول و عرض و ارتفاع متوازي المستطيلات.

المساحة الجانبية:

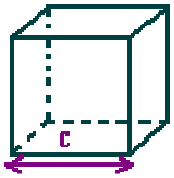
$S_l=2(l+L)\times h$

المساحة الكلية:

$S_T=2(l+L)\times h+2l\times L$

الحجم: $V=L\times l\times h$

المكعب.



ليكن a طول حرف المكعب.

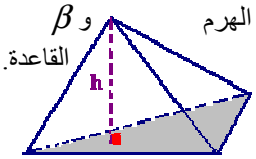
المساحة الجانبية:

$S_l=4a^2$

المساحة الكلية: $S_T=6a^2$

الحجم: $V=a^3$

الهرم



h ارتفاع الهرم و β مساحة القاعدة.

الحجم:

$V=\frac{1}{3}\beta\times h$

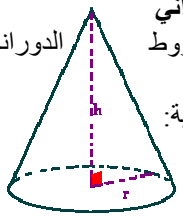
رباعي الأوجه المنتظم

ليكن a طول ضلع رباعي الأوجه المنتظم.

المساحة الجانبية: $S_l=\frac{1}{2}l\times h$

الحجم: $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

المخروط الدوراني



h ارتفاع المخروط الدوراني و $e=SH$.

المساحة الجانبية:

$S_l=\pi R\times h$

الحجم: $V=\frac{\pi R^2\times h}{3}$

تمرين 5: ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا في الفضاء.

لتكن I و J منتصفي القطعتين $[BC]$ و $[FG]$ على التوالي.

1) بين أن $(IJ)\parallel(HFB)$

2) بين أن $(HFB)\cap(EJ)=(PQ)$

حيث $(HF)\cap(EJ)=\{P\}$

و $(AI)\cap(BD)=\{Q\}$

3) بين أن $(PQ)\parallel(FB)$

الجواب:1) لدينا I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[FG]$ و
لدينا $(BF)\parallel(IJ)$ و بما أن $(BF)\subset(HFB)$ فان $(IJ)\parallel(HFB)$ و هذا هو المطلوب.
2) لدينا $(EJ)\subset(EIJ)$ و $(AI)\subset(EIJ)$ (لأن $(AE)\parallel(IJ)$ و منه النقط A , I , E و J نقط استوائية)
إذن $P\in(EIJ)$ و $Q\in(EIJ)$ ($Q\in(AI)$ و $P\in(EJ)$) و هذا يعني أن $(PQ)\subset(EIJ)$ (1) من جهة أخرى لدينا $(HF)\subset(HFB)$ و $(BD)\subset(HFD)$ (لأن $(DH)\parallel(BF)$ ومنه النقط D , H و F مستوائية).
إذن $P\in(HFD)$ و $Q\in(HFD)$ و هذا يعني أن $(PQ)\subset(HFD)$ (2) بما أن $(HFD)\neq(EIJ)$ فان (من (1) و (2))
$(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$
3) لدينا $(BF)\parallel(IJ)$ و $(IJ)\subset(EIJ)$ و $(BF)\subset(HFD)$
و $(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$ إذن $(PQ)\parallel(FB)$.

تمرين 6: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه و لتكن I منتصف القطعة $[BC]$ و B' مماثلة B بالنسبة للنقطة D.
2) أنشئ شكلا مناسبا.
3) بين أن $(CB')\parallel(AID)$
4) حدد تقاطع المستويين (AID) و $(AB'C)$.

الجواب:1)
2) لدينا ن I منتصف القطعة $[BC]$ و B' مماثلة B بالنسبة للنقطة D.
إذن D منتصف $[BB']$
و منه $(ID)\parallel(B'C)$ و لدينا $(ID)\subset(AID)$
إذن $(CB')\parallel(AID)$
3) لدينا $A\in(AID)$ و $A\in(AB'C)$ و $(AID)\neq(AB'C)$
إذن المستويين (AID) و $(AB'C)$ يتقاطعان في مستقيم يمر من A.
و بما أن $(ID)\subset(AID)$ و $(B'C)\subset(AB'C)$.
و أن $(B'C)\parallel(ID)$
فان المستويين (AID) و $(AB'C)$ يتقاطعان في مستقيم يمر من A و يوازي $(B'C)$ و (ID).

تمرين 7: ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا .
لتكن I , J و K منتصفات القطع $[AB]$, $[EF]$ و $[GH]$ على التوالي.
1) بين أن النقط B , C , J و K مستوائية.
2) بين أن I , B , H و K مستوائية.
3) بين أن $(IH)\parallel(KB)$.
4) استنتج أن $(IH)\parallel(JKC)$.

الجواب:
1) في المربع $EFGH$ لدينا I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[GH]$ إذن $(EH)\parallel(JK)\parallel(FG)$
و نعلم أن $(FG)\parallel(BC)$ إذن $(JK)\parallel(BC)$
و منه فان النقط B , C , J و K مستوائية.
2) لدينا $(AB)\parallel(EF)$ و $(EF)\parallel(HG)$ إذن $(AB)\parallel(HG)$ و منه فان النقط A , B , G و H مستوائية.
و لدينا $I\in[AB]$ و $K\in[HG]$.
إذن النقط I , B , H و K مستوائية.
3) $AB=HG$ و I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[GH]$ إذن $IB=HK$.
و نعلم أن $(IB)\parallel(HK)$
إذن الرباعي $IBKH$ متوازي أضلاع و منه فان $(IH)\parallel(KB)$
4) لدينا النقط B , C و I مستوائية.
و لدينا $(BK)\subset(JCK)$ و $(IH)\parallel(BK)$
إذن $(IH)\parallel(JKC)$.

تمرين 8: ليكن $ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات.
و لتكن O و O' مركزي المستطيلين $ABCD$ و $A'B'C'D'$ على التوالي.
1) أنشئ شكلا مناسبا.
2) بين أن النقط A , A' , C و C' مستوائية.
بين أن B , B' , D و D' مستوائية.
3) بين أن $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$
4) بين أن $(OO')\parallel(AA')\parallel(BB')$ و $(OO')\parallel(CC')\parallel(DD')$.

الجواب:1)
2) في المستطيل $AA'B'B$ لدينا $(AA')\parallel(BB')$ (1)
في المستطيل $BB'CC'$ لدينا $(BB')\parallel(CC')$ (2)
من (1) و (2) نستنتج أن $(AA')\parallel(CC')$
و منه فان النقط A , A' , C و C' مستوائية.
و بنفس الطريقة نبين أن: $(BB')\parallel(DD')$ و منه فان النقط B , B' , D و D' مستوائية.
3) لدينا O مركز المستطيل $ABCD$ إذن $O\in(BD)$ و منه $O\in(BB'D)$ و O' مركز المستطيل $A'B'C'D'$ إذن $O'\in(B'D')$ و منه $O'\in(BB'D)$
ادن $(OO')\subset(BB'D)$ (α)
لدينا O مركز المستطيل $ABCD$ اذن $O\in(AC)$ و منه $O\in(AA'C)$ و O' مركز المستطيل $A'B'C'D'$ إذن $O'\in(A'C')$ و منه $O'\in(AA'C')$
إذن $(OO')\subset(AA'C)$ (β)
و لدينا $(AA'C)\neq(BB'D)$ (A , A' , B , B' , C و D نقط غير مستوائية).
و منه (α) و (β) نستنتج أن: $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$ هذا هو المطلوب
4) لدينا $(BB')\parallel(AA')$ و $(AA')\subset(AA'C)$ و $(BB')\subset(BB'D)$
و $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$
إذن $(OO')\parallel(AA')\parallel(BB')$
و بنفس الطريقة:
$(DD')\parallel(CC'')$ و $(DD')\subset(BB'D)$ و $(CC')\subset(ACC')$
و $(ACC')\cap(BB'D)=(OO')$
إذن $(OO')\parallel(CC')\parallel(DD')$.

تمرين 9: ليكن $ABCD$ مربعا و E نقطة من الفضاء حيث: $(AE)\parallel(ABC)$
النقط I , J و K منتصفات القطع $[EB]$, $[AB]$ و $[DC]$
1) بين أن $(IJ)\parallel(ADE)$.

بين أن $(IJK)\parallel(ADE)$.

2) بين أن $(JK)\parallel(ABE)$.

3) حدد تقاطع المستويين (ABE) و (AIK).

الجواب:1) لدينا في المثلث ABE

I منتصف $[EB]$ و J منتصف $[AB]$ اذن $(IJ)\parallel(AE)$

و لدينا $(AE)\subset(ADE)$

إذن $(IJ)\parallel(ADE)$ (1)

و منه المطلوب.

لدينا K منتصف $[DC]$

إذن $(JK)\parallel(AD)\parallel(BC)$

و $(AD)\subset(ADE)$ اذن $(JK)\parallel(ADE)$ (2)

إذن(1) و(2) نستنتج أن: $(JIK)\parallel(ADE)$

و منه المطلوب.

2)لدينا $(AE)\perp(ABC)$

و $(JK)\subset(ABC)$ إذن $(AE)\perp(JK)$

و لدينا $(JK)\parallel(AD)$ و $(AD)\perp(AB)$

إذن $(JK)\parallel(AB)$

و منه فان (JK) عمودي على مستقيمين متقاطعين هما (AB) و $AE)$

ضمن المستوى (ABE)

إذن $(JK)\perp(ABE)$

3)لدينا $(AIK)\neq(ABE)$ $(E\notin(ABC))$

لدينا $A\in(ABE)$ و $A\in(AIK)$

و $(EB)\subset(ABE)$ إذن $I\in(ABE)$ (لأن $I\in(EB)$)

لدينا $I\in(AIK)$

و منه $(AIK)\cap(ABE)=(AI)$.

انتهى الدرس

الإحصاء

I - مصطلحات و تعاريف

1- الساكنة الإحصائية:

الساكنة الإحصائية هي المجموعة التي تخضع لدراسة إحصائية
وكل عنصر من هذه المجموعة يسمى فردا أو وحدة إحصائية.

ميزة إحصائية أو المتغير الإحصائي:

ميزة إحصائية هي الخاصية موضوع الدرس,فهي كمية أو كيفية.

- **ميزة كمية** هي التي تترجم عدديا .
  أمثلة القامة- المحصول الفلاحي- استهلاك الماء.....
- **ميزة كيفية** هي التي لا تترجم إلى عدد .
  أمثلة فصيلة الدم - الجنس.....

ملاحظة: الميزة الكمية فهي متقطعة فتأخذ قيما أو متصلة فيعبر عنها بالأصناف.

2- الحصيص و الحصيص المتراكم – التردد و التردد المتراكم

الحصيص:

الحصيص n_i الموافق لقيمة الميزة x_i (أو الموافق الصنف I_i) هو العدد المرات لتي تتكرر فيها القيمة x_i (أو هو عدد القيم التي تنتمي إلى الصنف I_i)

الحصيص المتراكم:

الحصيص المتراكم الموافق لقيمة الميزة x_i (أو الموافق الصنف I_i) هو العدد N_i

حيث $N_i=n_1+n_2+n_3+.....+n_i$

حيث n_1 و n_2 و.....n_i هي حصيصات القيم التي أصغر أو تساوي x_i

الحصيص الإجمالي:

الحصيص الإجمالي N هو مجموع جميع الحصيصات

التردد:

التردد f_i الموافق للقيمة الميزة x_i أو الصنف I_i هو العدد $f_i = \frac{n_i}{N}$

ملاحظة **مجموع جميع الترددات يساوي 1**

التردد المتراكم F_i الموافق للقيمة الميزة x_i أو الصنف I_i هو $F_i=f_1+f_2+.....f_i$

النسبة المئوية:

النسبة المئوية P_i الموافق للقيمة الميزة x_i أو الصنف I_i هي $P_i=100f_i$ حيث f_i التردد الموافق لـ x_i أو I_i

- مجموعة الأزواج $(x_i;n_i)$ **تسمى متسلسلة احصائية حيث** n_i **الحصيص الموافق للقيمة** x_i

أ- ميزة كمية متقطعة

مثال2

نعتبر الكشف التالي الذي يعطينا معطيات إحصائية حول عددالغرف في منازل أحد الأحياء

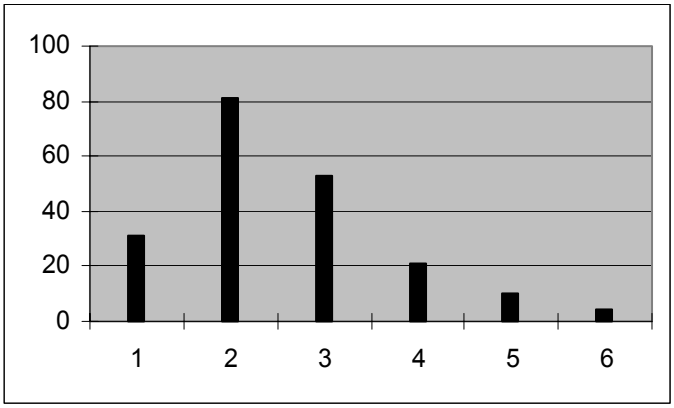
3	4	2	2	3	1	5	2	4	3
5	6	2	3	4	2	2	2	3	4
2	2	2	1	3	3	3	4	2	1
2	1	2	2	3	4	5	2	3	1
3	3	2	2	2	5	6	1	2	2
3	3	2	2	1	2	3	2	2	2
4	3	1	3	3	2	2	1	5	4
3	3	4	4	2	2	2	2	1	2
4	2	2	1	2	3	3	3	3	2
3	3	3	2	2	2	2	1	1	6
5	3	1	3	3	3	2	1	5	4
2	3	2	4	3	2	4	2	1	2
4	1	2	1	2	3	2	3	3	3
3	1	3	2	2	2	2	1	1	4
2	2	2	1	3	3	3	4	2	1
1	2	2	2	3	2	5	2	3	1
3	3	2	2	2	5	6	1	2	2
3	2	2	1	1	2	3	2	2	2
3	2	1	4	3	2	2	1	5	4
2	3	4	4	2	3	2	3	1	2

يعطينا هذا الكشف معلومات تهم ساكنة احصائية تتكون من**200** وحدة إحصائية.إذن الحصيص الإجمالي هو**200**
الميزة المدروسة هي عدد الغرف (ميزة كمية متقطعة)

نلاحظ أن العدد **1** يتكرر**31** مرة نقول إن **31** هو الحصيص الموافقللقيمة **1**
انطلاقا من هذا الكشف يمكن تكوين جدول إحصائي و ذلك بتنظيم المعلومات على الشكل التالي : يحتوي على قيم x_i مرتبة ترتيبا تزايديا و حصيصات موافقة لها، و ترددات موافق لها.

قيمة الميزة x_i	1	2	3	4	5	6
الحصيص n_i	31	81	53	21	10	4
الحصيص المتراكم N_i	31	112	165	186	196	200
التردد f_i	0,155	0,405	0,265	0,105	0,05	0,02
التردد المتراكم F_i	0,155	0,56	0,825	0,93	0,98	1

رغم ما تمتاز به الجداول من الدقة فإنها لا تعطينا فكرة واضحة و سريعة عن الظاهرة التي نحن بصدد دراستها.
لذا نعمد إلى تمثيل الجداول الإحصائية مبيانيا
التمثيل المبياني للحصيص



مخطط عصوي للحصيص

بنفس الطريقة نمثل الحصيص المتراكم و التردد و التردد المتراكم

ب- ميزة كمية متصلة

مثال1

الكشف التالي يتضمن معطيات إحصائية تتعلق بثمن نفس الكمية من منتوج فلاحي (بالدرهم) في نقط مختلفة للبيع.

45	80,5	46	41,5	41	51	20	40	84	43
41	32,5	54	43	21,5	69	61,5	37,5	82	67
48	84	56	70,5	58	25	44	70	32,5	43
64	68	51	75	43	81	50	48	86	60,5
29	48	59	74	48	30,5	56	58	49,5	33,5
34	53	53	42	28	59	67	72	77	45
60	55,5	33	63	44,5	34,5	38,5	56,5	44	51
53	78,5	38	38	25,5	62,5	77,5	57	67	47
34	55	67	69	31	37	44	47	51,5	58
55	49	34	44	37,5	74	56	37	72,5	67

يعطينا هذا الكشف معلومات عن ساكنة إحصائية تتكون من 100 وحدة إحصائية . الميزة المدروسة ثمن المنتوج الفلاحي

نلاحظ أنه ليس هناك تكرار كبير للمعلومات

لتبسيط الدراسة نعمد إلى تجميع المعلومات في مجالات لها نفس السعة تسمى **أصنافا**.

و بذل دراسة جميع قيم الميزة نختار في كل صنف قيمة وحيدة هي مركز الصنف و تسمى **قيمة الصنف.**

قيمة الصنف $[a;b[$ هي $\frac{a+b}{2}$

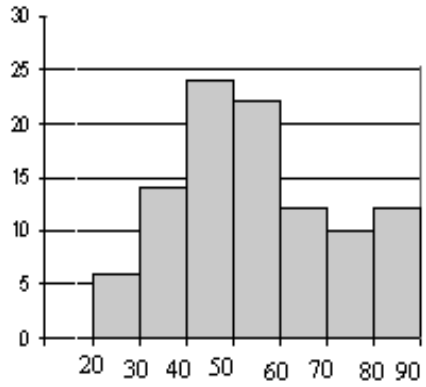
في المثال الذي لدينا يمكن تجميع المعلومات في مجالات سعته10

فنحصل مثلا على الصنف $[20;30[$ قيمة هذا الصنف هي 25

نقول في هذه الحالة ان الميزة المدروسة **ميزة كمية متصلة**

الصنف $[a_{i-1};a_i[$	قيمة الصنف x_i	الحصيص n_i	الحصيص المتراكم N_i	التردد f_i
$[20;30[$	25	6	6	0,06
$[30;40[$	35	14	20	0,14
$[40;50[$	45	24	44	0,24
$[50;60[$	55	22	66	0,22
$[60;70[$	65	12	78	0,12
$[70;80[$	75	10	88	0,10
$[80;90[$	85	12	100	0,12

التمثيل المبياني للحصيص



مدراج للحصيص

بالمثل نمثل التردد و الحصيص المتراكم .....

صفة عامة

عندما تأخذ الميزة الإحصائية عددا كبيرا من القيم فإننا نغطي مجموع هذه القيم بمجالات تسمى أصنافا $I_1=[a_0;a_1[$ $I_2=[a_1;a_2[$ ..... $I_n=[a_{n-1};a_n[$

n_i و يرمز له بـ I_i الحصيص هو عدد الوحدات التي تأخذ فيا الميزة قيمة تنتمي إلى الصنف

مجموعة الأزواج $(I_i;n_i)$ تسمى متسلسلة معبر عنها بالأصناف.

ح – ميزة كيفية

مثال3 نعتبر الكشف التالي الذي يحتوي على فصيلة الدم لـ 180 فردا

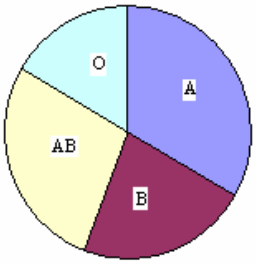
كما يلي60 فرد الفصيلة A و 40 فصيلة B و 50 فصيلةAB و 30 فصيلة O

الجدول الإحصائي

الميزة	A	B	AB	O
الحصيص	60	40	50	30
α_i	120°	80°	100°	60°

$$\alpha_i = n_i \frac{360}{180}$$

المخطط الدائري



II- وسيطات الوضع

1- المنوال

تعريف

منوال متسلسلة إحصائية هو كل قيمة أو صنف أو نوع له أكبر حصيص.

أمثلة

في المثال 1 السابق : 2 منوال للمتسلسلة الإحصائية

في المثال 2 السابق : $[40;50[$ منوال للمتسلسلة الإحصائية

في المثال 3 السابق : الفصيلة A منوال للمتسلسلة الإحصائية

2- القيمة الوسطية

أ- تعريف

لتكن متسلسلة ذات ميزة كمية و M عدد حقيقي يحقق الخاصية التالية : نصف وحدات الساكنة الإحصائية على الأقل تأخذ فيها الميزة قيمة أصغر من أو تساوي M و نصف وحدات الساكنة الإحصائية على الأقل تأخذ فيها الميزة قيمة أكبر من أو تساوي M

مثال

الجدول التالي يعطي النقط التي حصل عليها تلاميذ أحد الأقسام

النقطة	2	7	8	10	11	12	16
الحصيص	3	10	5	4	5	2	1
الحصيص المتراكم	3	13	18	22	27	29	30

نلاحظ أكثر من نصف عدد التلاميذ حصلوا على نقطة أصغر من أو تساوي 8. و أكثر من نصف عدد التلاميذ حصلوا على نقطة أكبر من أو تساوي 8

إذن العدد **8 قيمة وسطية** لهذه المتسلسلة الإحصائية.

ب- مبرهنة

أصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي هي قيمة وسطية في متسلسلة غير معبر عنها بالأصناف.

مثال

في المثال السابق لدينا $\frac{N}{2}=\frac{30}{2}=15$ و أصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي 15 هي8

إذن العدد **8 قيمة وسطية**

ج- مبرهنة

لتكن $\left([a_{i-1};a_i[;n_i\right)$ متسلسلة معبر عنها بالأصناف و N_i الحصيص المتراكم الموافق لصنف $[a_{i-1};a_i[$.

القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية هي القيمة M

المحددة بـ $M=(a_k-a_{k-1})\frac{\frac{N}{2}-N_{k-1}}{n_k}+a_{k-1}$

حيث k هو العدد الصحيح الطبيعي الذي يحقق $N_{k-1}\le\frac{N}{2}\prec N_k$ **(نأخذ** $N_0=0$ **)**

ملاحظة N_k **يوافق** $[a_{k-1},a_k[$ n_k **يوافق** $[a_{k-1},a_k[$

مثال

الصنف $[a_{i-1};a_i[$	الحصيص n_i	الحصيص المتراكم N_i
$[20;30[$	6	6
$[30;40[$	14	20
$[40;50[$	24	44
$[50;60[$	22	66
$[60;70[$	12	78
$[70;80[$	10	88
$[80;90[$	12	100

لدينا $\frac{N}{2}=\frac{100}{2}=50$ و $44 \le 50 \prec 66$ $(N_k=66 \quad N_{k-1}=44)$

الحصيص المتراكم 66 موافق لصنف $[50;60[$

الحصيص 22 موافق لصنف $[50;60[$

إذن $M=(60-50)\frac{50-44}{22}+50=\frac{580}{11}$

3- المعدل الحسابي

تعريف **لتكن $(x_1;n_1);(x_2;n_2)$.....; $(x_P;n_P)$ متسلسلة إحصائية حيث x_i هو قيمة الميزة (أو قيمة الصنف I_i) و n_i هو الحصيص الموافق لـ x_i .**

الوسط أو المعدل الحسابي هو العدد

$$\overline{X}=\frac{x_1n_1+x_2n_2+x_3n_3+\dots\dots\dots\dots+x_pn_p}{n_1+n_2+n_3+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+n_p}$$

أمثلة خاصية (نأخذ الأمثلة السابقة)

لتكن $\overline{x}$ المعدل الحسابي لمتسلسلة حصيصها الاجمالي N و $\overline{x'}$ المعدل الحسابي لمتسلسلة أخرى حصيصها الاجمالي N'

المعدل الحسابي للمتسلسلة المكونة من تجميع المتسلسلتين هو $\frac{N\overline{x}+n'\overline{x'}}{N+N'}$

III – وسيطات التشتت

1- نشاط تمهيدي

يعطي الجدولان التاليان نقط 20 تلميذا في مادة الرياضيات و الفرنسية.

الرياضيات

النقطة	8	9	10	11	12	13	14	15
الحصيص	1	1	3	5	2	2	2	4

الفرنسية

النقطة	2	5	7	8	10	11	12	14	15	16	17	18	19	20
الحصيص	1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	2	1	1	1

حدد وسيطات الوضع(المنوال – القيمة الوسطية – المعدل الحسابي)

لاحظ أن لهما نفس وسيطات الوضع

أنجز مخططا عصويا لكل منهما

رغم أن لهذين المتسلسلتين نفس وسيطات الوضع إلا أنهما يختلفان جذريا. فالنقط التي حصل عليها التلاميذ في الرياضيات تتجمع حول القيمة 11 في حين نلاحظ تشتت نقط الفرنسية بين 2 و 20

يبين هذا أن وسيطات الوضع غير كافية لإعطاء نظرة كاملة علىمتسلسلة إحصائية ، وهذا ما يتطلب أخرى تسمى **وسيطات التشتت**

2- الانحراف المتوسط

تعريف

الانحراف المتوسط لمتسلسلة إحصائية $(x_i ; n_i)_{1\le i\le p}$ **هو العدد**

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} n_i \left|x_i - \bar{x}\right|}{N}$$

$$\rho = \frac{n_1\left|x_1-\bar{x}\right| + n_2\left|x_2-\bar{x}\right| + \ldots\ldots\ldots\ldots n_p\left|x_p-\bar{x}\right|}{N}$$

حيث $\bar{x}$ **المعدل الحسابي و** N **الحصيص الإجمالي.**

مثال نأخذ النشاط السابق

الرياضيات

النقطة x_i	8	9	10	11	12	13	14	15
الحصيص n_i	1	1	3	5	2	2	2	4
$\left\|x_i - \bar{x}\right\|$	4	3	2	1	0	1	2	3

$$\rho_M = \frac{4+3+6+5+0+2+4+12}{20} = 1,8$$

بالمثل بالنسبة الفرنسية نحصل $\rho_F = 4,2$

نلاحظ $\rho_M \prec \rho_F$ و هذا يبين أن النقط الرياضيات أقل تشتتا من نقط الفرنسية

3- الانحراف الطرازي و المغايرة

تعريف

مغايرة متسلسلة إحصائية $(x_i ; n_i)_{1\le i\le p}$ **هو العدد**

$$v = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

الانحراف الطرازي لهذه المتسلسلة هو $\sigma = \sqrt{v}$

ملاحظة

$$v = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2\right) - \bar{x}^2 \quad *$$

*** إذا كانت المتسلسلة معبرا عنها بالأصناف فنعتبر** x_i **قيمةالصنف.**

مثال

المثال السابق

الرياضيات

النقطة x_i	8	9	10	11	12	13	14	15
الحصيص n_i	1	1	3	5	2	2	2	4
$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	16	9	4	1	0	1	4	9

$$\sigma_M = 2\sqrt{1,1} \quad ; \quad v_M = 4,4$$

الإحصاء

1) الحصيص و الحصيص المتراكم

حصيص قيمة هو عدد المرات التي تتكرر فيه تلك القيمة

مثال: إذا اعتبرنا سلسلة النقط : 10_10_11_8_10_9_8

- **حصيص 10 هو 3 و حضيض 8 هو 2**
- **عادة ما نجمع تلك القيم في جدول يسمى جدول الحصيصات كاتالي:**

(جدول 1)

قيم الميزة	8	9	10	11
الحصيص				

الحصيص المتراكم التزايدي لقيمة معينة هو مجموع حصيصها و حصيصات جميع القيم الأصغر منها .

مثال: الحصيص المتراكم التزايدي للقيمة 10 هو 3+1+2=6

(جدول 2)

قيمة الميزة x_i	8	9	10	11
الحصيصات n_i				
الحصيصات المتراكمة تزايديا				
الحصيصات المتراكمة تناقصيا				

حصيص صنف هو عدد المرات التي تأخذ فيها الميزة قيمة تنتمي لهذا الصنف

مثال:في المثال السابق إذا صنفنا النقط إلى صنفين : $[8,10[$ و $[10,12[$ فإن عدد النقط المختلفة أو المتساوية,التي تنتمي إلى الصنف $[8,10[$ هو 3.وحصيص الصنف $[10,12[$ هو : .....

2) التردد و التردد المتراكم

تردد قيمة أو صنف ميزة هو خارج هذه القيمة أو الصنف على الحصيص الإجمالي

إذا كان N هو الحصيص الإجمالي و كان n_i حصيص القيمة x_i فإن تردد x_i هو العدد $f_i = \frac{n_i}{N}$

مثال: لتكن المتسلسلة الإحصائية الممثلة في الجدول :

(جدول 3)

المستويات	الجذع المشترك	الأولى باكالوريا	الثانية باكالوريا
عدد الأقسام	12	8	6
الترددات			

مجموع الترددات يساوي دائما 1

التردد المتراكم التزايدي لقيمة ميزة هو مجموع تردد هذه القيمة و جميع ترددات القيم الأصغر منها

مثال: في الجدول 2 ,تردد القيمة 8 هو .....وتردد 9 هو ..... إذن التردد المتراكم للقيمة 9 هو .....

3) النسبة المئوية

النسبة المئوية لعدد a إلى عدد غير منعدم b هو العدد $100\times\frac{a}{b}$

النسبة المئوية لقيمة أو صنف ميزة هو جداء تردد هذه القيمة أو الصنف في مئة و يرمز له ب p_i و لدينا $p_i = 100\times f_i$

مثال 1: عدد الطلبة بالجامعات المغربية (للسنة الجامعية 2004/2005) هو 286382.
عدد الطلبة بشعبة العلوم و التقنيات هو 64559.
النسبة المئوية لطلبة شعبة العلوم و التقنيات هو .....أي .....

مجموع النسب المئوية لقيم و أصناف ميزة إحصائية يساوي 100

4) المعدل الحسابي لمتسلسلة إحصائية:

حالة ميزة كمية و قيم غير مجمعة.

المعدل الحسابي لمتسلسلة إحصائية $x_1, x_2, ..., x_n$ **, هو العدد** $\overline{x}$ **حيث:** $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$

المعدل الحسابي لمتسلسلة إحصائية $(x_1, n_1);(x_2, n_2);.....;(x_p, n_p)$ **,هو العدد** $\overline{x}$

حيث $\overline{x} = \dfrac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_p x_p}{n_1 + n_2 + ... + n_p}$

مثال: يمثل الجدول التالي مقاييس الأمطار ب mm **خلال أسبوع.**

مقاييس الأمطار x_i	70	28	49
عدد الأيام n_i	1	2	4

معدل مقاييس الأمطار خلال هذا الأسبوع هو $\overline{x}$ **بحيث:**

$\overline{x} = ...$

$\overline{x}$ المعدل الحسابي لمتسلسلة إجصائية :

$\overline{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_p x_p$

مثال: يمثل الجدول التالي عدد الكيلومترات التي قطعها سائق سيارة حسب السرعة الكيلومترية.

السرعة x_i km/h	60	90	100	120
الترددات	0.15	0.45	0.35	0.05

معدل السرعة هو : ..... أي .....

حالة ميزة كمية قيمتها أصناف (مجالات من $\mathbb{R}$ **)**

المعدل الحسابي لمتسلسلة إحصائية قيم ميزتها أصناف من الشكل $[a_i, a_{i+1}[$ **هو العدد** $\overline{x}$ **بحيث:**

$\overline{x} = \dfrac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + ... + n_p c_p}{n_1 + n_2 + ... + n_p}$ **حيث :** c_i **هو مركز** $[a_i, a_{i+1}[$ **و** $c_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$

p **هو عدد الأصناف و** n_i **هو حصيص الصنف** $[a_i, a_{i+1}[$.

مثال : الجدول التالي يعطي توزيع تلاميذ قسم حسب قاماتهم ب cm .

القامات ب cm	$[130,140[$	$[140,150[$	$[150,160[$
الحصيصات	8	12	10

$\overline{x} = ...$

$\overline{x}$ المعدل الحسابي لمتسلسلة إحصائية, f_i تردد الصنف $[a_i, a_{i+1}[$ و c_i مركز هذا الصنف.

$$\overline{x} = f_1c_1 + f_2c_2 + ... + f_pc_p$$

5) وسط متسلسلة إحصائية.

وسط متسلسلة إحصائية هي كل قيمة تجزء قيم هذه المتسلسلة إلى جزئين لهما نفس الحصيص.

لتكن ساكنة إحصائية حصيصها الإجمالي N و قيمها مرتبة (مع تكرار المتساوية منها).

- ✓ **إذا كان N فرديا فوسطها هو القيمة الموجودة بالرتبة $\frac{N+1}{2}$.**
- ✓ **إذا كان N زوجيا فوسطها هو كل عدد محصور بين القيمتين الموجودتين بالرتبة $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2}+1$.**

مثال: لتكن متسلسلتان إحصائيتان A و B بحيث:

A : 18_18_16_14_14_14_12

B: 80_45_40_40_40_36_36_25_17_17

- **بالنسبة للمتسلسلة A , الحصيص الإجمالي هو .... (عدد .....) إذن وسطها هو القيمة الموجودة بالرتبة ... أي ....**
- **بالنسبة للمتسلسلة B , الحصيص الإجمالي هو .... و هو عدد ..... إذن يمكن أن ناخذ الوسط هو معدل ....(قيمة الرتبة ....) و .....(قيمة الربة ....) أي .... وسط لهذه المتسلسلة.**

6) المنوال – الصنف المنوالي.

منوال متسلسلة إحصائية هو كل قيمة لها أكبر حصيص

مثال: الجدول التالي يعطي توزيع محطات الارصاد الجوية حسب درجة الحرارة $(\deg ré \quad Celsus)$

الدرجات x_i	-7°	-5°	-4°	0°	2°	6°	8°
الحصيصات n_i	1	6	3	1	6	1	2

لاحظ أن لكل من القيمتين .... و .... أكبر حصيص . إذن فلهذه المتسلسلة منوالان .... و ....

صنف منوالي لمتسلسلة إحصائية هو كل صنف له أكبر حصيص

مثال: إذا جمعنا المعطيات السابقة في أصناف نحصل مثلا على :

الأصناف	$[-7,-3[$	$[-3,1[$	$[1,5[$	$[5,9[$
الحصيصات				

بما أن .... هو أكبر حصيص فإن الصنف $[....,....[$ **هو الصنف المنوالي الوحيد لهذه المتسلسلة .**

7) المغايرة

مغايرة متسلسلة إحصائية, $(x_1,n_1);(x_2,n_2);.....;(x_p,n_p)$ **هي العدد** V **بحيث:**

$$V=\frac{n_1|x_1-\overline{x}|^2+n_2|x_2-\overline{x}|^2+.....+n_px_p}{n_1+n_2+.....+n_p}$$

مع $\overline{x}$ **المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة.**

مثال: نعتبر المتسلسلة الإحصائية المعرفة بالجدول:

قيمة الميزة x_i	2	3	6	7
الحصيصات n_i	6	4	2	3
القيم $\lvert x_i-\overline{x}\rvert$				
القيم $\lvert x_i-\overline{x}\rvert^2$				

$\overline{x}$ **المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة هو : .....**

مغايرة هذه المتسلسلة هي V **بحيث:**

$V=.....$

8) الانحراف الطرازي

الانحراف الطرازي لمتسلسلة إحصائية مغايرتها V هو العدد σ بحيث
$\sigma = \sqrt{V}$

مثال: في المثاب السابق , $V = ...$ **الانحراف الطرازي لهذه المتسلسلة هو σ حيث** $\sigma = \sqrt{.....}$ **أي** $\sigma \simeq .....$

المهندسة

ملخص لدرس: الاحصاء

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- جداول إحصائية؛ - الحصيصات والحصيصات المتراكمة؛ - النسب المئوية، التردد، الترددات المتراكمة - التمثيلات المبيانية، المدراج؛ - وسيطات الوضع: المعدل الحسابي، الوسط، المنوال. - وسيطات التشتت: الانحراف المتوسط، المغايرة، الانحراف الطرازي.	- تنظيم معطيات إحصائية. - قراءة مبيانات إحصائية وتأويلها. - تأويل وسيطات الوضع والتشتت. - التمييز بين مختلف وسيطات الوضع. - التمييز بين مختلف وسيطات التشتت.	- ينبغي اعتماد أمثلة حية مستقاة من مواد التدريس الأخرى (الاجتماعيات، البيولوجيا، الكيمياء، ...) أو من الحياة المعيشة وتمثل وضعيات حقيقية، يتعود التلاميذ من خلالها على جمع المعطيات الإحصائية وتنظيمها في جداول ثم تمثيلها. - يتم حساب الوسيطات الإحصائية وتأويلها بهدف الإجابة على تساؤلات مرتبطة بدراسة الظواهر والقيام باستنتاجات.

تعريف للإحصاء: الإحصاء علم يهتم بجمع و تنظيم ظواهر عديدة قصد التخطيط الجيد بعيدا عن الصدفة.
حيث لدراسة ظاهرة أيا كانت اجتماعية أو اقتصادية أو سياسة تقوم الدولة من فترة زمنية الى أخرى بعملية الاحصاء طبعا احصاء كل شيء عدد السكان (كل الفئاتالعمرية) مثلا المحاصيل الزراعية عدد النوادي .....
وقد ساهم التطور الهائل في مجال الاعلاميات في تطوير وتقوية هذه العمليات الحسابية .....
اذن لدراسة ظاهرة ما أولا نقوم بتجميع المعلومات وبعد ذلك تنظيمها في جداول احصائية ثم نمثلها لكي تعطينا فكرة واضحة وسريعة عن الظاهرة بحيث يسهل تحليلها والتخطيط المستقبلي لها ولنتائجها .

I. تنظيم المعلومات ومصطلحات احصائية

مثال1: ميزة إحصائية متقطعة:
الكشف التالي يعطينا نقط تلاميذ الجذع مشترك علمي في فرض من الفروض:
9–8–10–12–10–8–15–18–16–15–12–12–10–10–9–8–15–12–8–10

الاصطلاح الإحصائي:
- ❖ الساكنة الإحصائية: هي المجموعة " أو العينة " التي تخضع للدراسة. في هذا المثال: هي مجموعة تلاميذ الجذع مشترك علمي
- ❖ الوحدة الإحصائية: كل عنصر من هذه المجموعة يسمى وحدة إحصائية في هذا المثال: هو كل تلميذ من مجموعة تلاميذ الجذع مشترك علمي
- ❖ الميزة الإحصائية: هي الظاهرة المراد دراستها و هي نوعان: كمية أو كيفية. هذا المثال: هي النقطة وهي ميزة كمية
  - ○ الميزة الإحصائية الكمية هي الميزة المعبر عنها بعدد (الطول – العرض - الوزن.....)
  - ○ الميزة الإحصائية الكيفية هي التي لا يمكن التعبير عنها بعدد (اللغة – فصيلة الدم .....)

يمكن تنظيم نتائج الأحصاء في جدول يسمى جدول الحصيصات و الحصيصات المتراكمة:

قيمة الميزة	8	9	10	12	15	16	18
الحصيص	4	2	5	4	3	1	1
الحصيص المتراكم	4	6	11	15	18	19	20

ملاحظة 1: $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = 20$
العدد 20 يسمى الحصيص الإجمالي لهذه المتسلسلة و نرمز له ب N

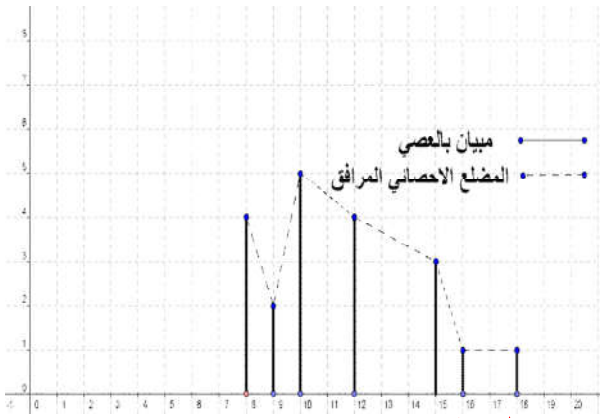
التردد و النسب المائوية : تردد القيمة x_i هو العدد الحقيقي المرموز إليه ب f_i و المعرف ب $f_i = \frac{n_i}{N}$

- النسبة المئوية للقيمة x_i هو العدد المرموز له ب p_i و المعرف ب $p_i = 100 f_i$.
- مثال : التردد الموافق للميزة 12: $f_1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ و
- النسبة المئوية الموافقة للميزة 12 هي :

$$p_1 = f_1 \times 100 = \frac{100}{5} = 20\%$$

- **التمثيلات المبيانية:**

هناك عدة أنواع مثلا : (مخطط بالعصي و يمكن أن نرسم المضلع المرافق له)



II. وسيطات الوضع :

1. **المنوال :** كل قيمة للميزة لها أكبر حصيص تسمى منوالا (في المثال : القيمة 10)
2. **القيمة الوسطية :** القيمة الوسطية لمتسلسلة إحصائية هي أصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبرمن أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي.
(في المثال :نصف الحصيص الاجمالي هو 10 و اذن القيمة الوسطية هي 10)
3. **المعدل الحسابي :**

$$m = \frac{8\times4+9\times2+10\times5+12\times4+15\times3+16\times1+18\times1}{20}$$

اذن: $m = \frac{32+18+50+48+45+16+18}{20} = \frac{227}{20} = 11.35$

III. وسيطات التشتت:

مثال :نعتبر المتسلسلة الإحصائية التالية :

الميزة	1	2	7
الحصيص	5	4	1

نحسب المعدل الحسابي:

$$m=\frac{5\times1+4\times2+1\times7}{10}=\frac{20}{10}=2$$

1)الانحراف المتوسط: e

$$e=\frac{5\times|1-2|+4|2-2|+1\times|7-2|}{10}=\frac{5\times|-1|+4|0|+1\times|5|}{10}$$

$$e=\frac{5\times1+4\times0+1\times5}{10}=\frac{10}{10}=1$$

2)المغايرة: V

$$V=\frac{5\times|1-2|^2+4|2-2|^2+1\times|7-2|^2}{10}=\frac{5\times|-1|^2+4|0|^2+1\times|5|^2}{10}$$

$$V=\frac{5\times1+4\times0+1\times25}{10}=\frac{30}{10}=3$$

3)الانحراف الطرازي: $\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{3}$

تمرين1 : تم إحصاء التغيبات في إحدى الأقسام المكونة من 40 تلميذا خلال الأسدس الأول من هذه السنة الدراسية فكانت النتائج كالتالي :

الميزة (عدد ساعات الغياب)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الحصيص	4	2	1	5	5	5	8	1	3	3	3
الحصيص المتراكم											

1. أنقل الجدول على ورقتك ثم أتممه .
2. حدد عدد و النسبة المئوية للتلاميذ الذين تغيبوا أكثر من أو يساوي 6 ساعات
3. أحسب وسيطات الوضع : أ) المنوال ب) المعدل الحسابي ج) القيمة الوسطية
4. أحسب وسيطات التشتت : أ) الانحراف المتوسط ب) المغايرة ج) الانحراف الطرازي
5. أنشئ مخطط للعصي و المضلع الإحصائي الموافق له.

أجوبة : 1)

الميزة (عدد ساعات الغياب)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الحصيص	4	2	1	5	5	5	8	1	3	3	3
الحصيص المتراكم	4	6	7	12	17	22	30	31	34	37	40

2)عدد التلاميذ الذين تغيبوا أكثر من أو يساوي 6 ساعات هو : 18

و النسبة المئوية هي: $p=f\times100=\frac{18}{40}100=45\%$

3) حساب وسيطات الوضع : أ) المنوال :هو 6س

ب) المعدل الحسابي :

$$m=\frac{0\times4+1\times2+2\times1+3\times5+5\times4+5\times5+6\times8+7\times1+8\times3+9\times3+10\times3}{40}$$

اذن : $m=\frac{0+2+2+15+20+25+48+7+24+27+30}{40}=\frac{200}{40}=5$

ج) القيمة الوسطية: نصف الحصيص الاجمالي هو 20

اذن القيمة الوسطية هي: 5

4) وسيطات التشتت : أ) الانحراف المتوسط:

$$e=\frac{4\times|0-5|+2|1-5|+1\times|2-5|+5\times|3-5|+5|4-5|+5\times|5-5|+8|6-5|+1\times|7-5|+3|8-5|+3\times|9-5|+3\times|10-5|}{40}$$

$$e=\frac{4\times|-5|+2|-4|+1\times|-3|+5\times|-2|+5|-1|+5\times|0|+8|1|+1\times|2|+3|3|+3\times|4|+3\times|5|}{40}$$

$$e=\frac{4\times5+2\times4+1\times3+5\times2+5\times1+5\times0+8\times1+1\times2+3\times3+3\times4+3\times5}{40}$$

$$e=\frac{20+8+3+10+5+0+8+2+9+12+15}{40}=\frac{92}{40}=2,3$$

ب) المغايرة :

$$V=\frac{4\times|0-5|^2+2|1-5|^2+1\times|2-5|^2+5\times|3-5|^2+5|4-5|^2+5\times|5-5|^2+8|6-5|^2+1\times|7-5|^2+3|8-5|^2+3\times|9-5|^2+3\times|10-5|^2}{40}$$

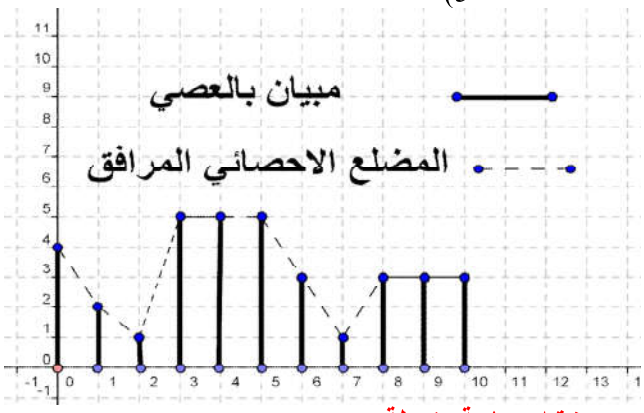
$$V=\frac{4\times|-5|^2+2|-4|^2+1\times|-3|^2+5\times|-2|^2+5|-1|^2+5\times|0|^2+8|1|^2+1\times|2|^2+3|3|^2+3\times|4|^2+3\times|5|^2}{40}$$

$$V=\frac{4\times25+2\times16+1\times9+5\times4+5\times1+5\times0+8\times1+1\times4+3\times9+3\times16+3\times25}{40}$$

$$V=\frac{100+32+9+20+5+0+8+4+27+48+75}{40}\qquad V=\frac{328}{40}=8,2$$

ج) الانحراف الطرازي:

5) $\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{8,2}$



IV.ميزة إحصائية متصلة :

مثال : الكشف التالي يعطينا نقط تلاميذ الجذع مشترك علمي في فرض من الفروض:

14–15–06–08–10–07–14–19–06–08–09–02–10–12–08–06–15–08–12–10

1)املأ الجدول التالي :

الصنف (النقطة)	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20[
الحصيص				
الحصيص المتراكم				

2)حدد الصنف المنوالي للمتسلسلة الإحصائية

3)أحسب المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية

4)أحسب وسيطات التشتت

5)أنشئ مدراج الحصيصات و المضلع الاحصائي المرافق له

أجوبة : 1) المجالات: $[0,5[$, $[5,10[$, $[10,15[$. $[15,20[$ لها نفس السعة و تسمى أصناف الميزة.

الصنف (النقطة) نحسب منتصفات الأصناف	[0;5[2,5	[5;10[7,5	[10;15[12,5	[15;20[17,5
الحصيص	1	9	7	3
الحصيص المتراكم	1	10	17	20

2) الصنف المنوالي هو الصنف الذي له أكبر حصيص (في **المثال:** الصنف المنوالي هو $[5;10[$).

3) المعدل الحسابي :

$$m=\frac{1\times2,5+9\times7,5+7\times12,5+3\times17,5}{20}=\frac{210}{20}=10,5$$

4) حساب وسيطات التشتت:

الانحراف المتوسط: e

$$e=\frac{1\times|2,5-10,5|+9\times|7,5-10,5|+7\times|12,5-10,5|+3\times|17,5-10,5|}{20}$$

$$e=\frac{1\times8+9\times3+7\times2+3\times7}{20}=\frac{70}{20}=3,5$$

المغايرة: V

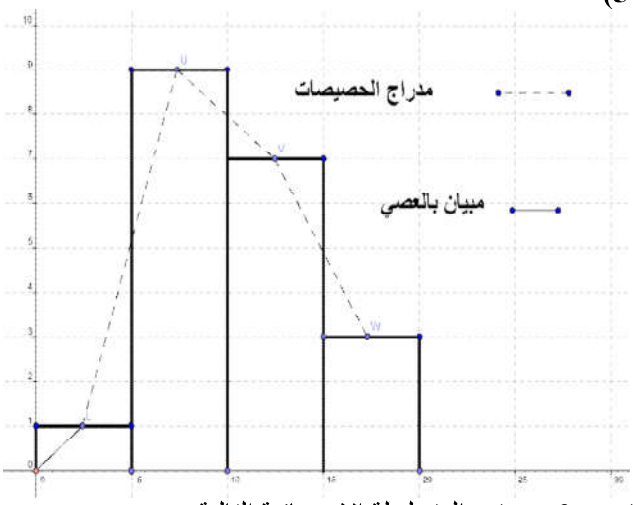
$$V=\frac{1\times|2,5-10,5|^2+9\times|7,5-10,5|^2+7\times|12,5-10,5|^2+3\times|17,5-10,5|^2}{20}$$

$$V=\frac{1\times|-8|^2+9|-3|^2+7\times|2|^2+3\times|7|^2}{10}$$

$$V=\frac{64+81+28+147}{20}=\frac{320}{20}=16$$

الانحراف الطرازي: $\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{16}=4$

(5



تمرين2: نعتبر المتسلسلة الاحصائية التالية:

الصنف	$[0;4[$	$[4;8[$	$[8;12[$	$[12;16[$	$[16;20[$
الحصيص	**1**	**2**	**4**	**2**	**1**

1. حدد الصنف المنوالي للمتسلسلة الإحصائية
2. أحسب المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية
3. أحسب وسيطات التشتت
4. أنشئ مدراج الحصيصات و المضلع الاحصائي المرافق له

أجوبة : 1) الصنف المنوالي هو الصنف الذي له أكبر حصيص هو $[8;12[$

2) المعدل الحسابي :

$$m=\frac{1\times2+2\times6+4\times10+2\times14+1\times18}{10}=\frac{100}{10}=10$$

3) حساب وسيطات التشتت:

الانحراف المتوسط: e

$$e=\frac{1\times|2-10|+2\times|6-10|+4\times|10-10|+2\times|14-10|+1\times|18-10|}{10}$$

$$e=\frac{1\times|-8|+2\times|-4|+4\times|0|+2\times|4|+1\times|8|}{10}=\frac{1\times8+2\times4+4\times0+2\times4+1\times8}{10}$$

$$e=\frac{8+8+0+8+8}{10}=\frac{32}{10}=3,2$$

المغايرة: V

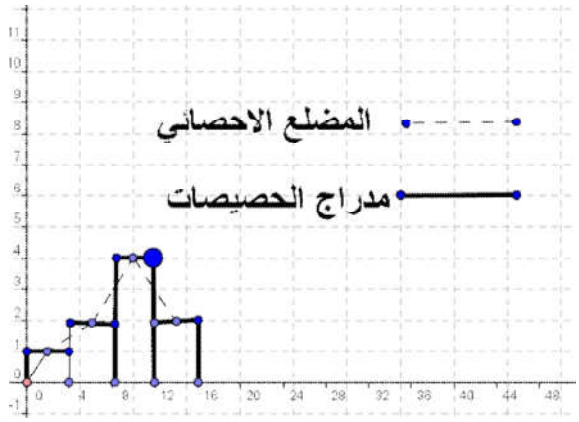
$$V=\frac{1\times|2-10|^2+2\times|6-10|^2+4\times|10-10|^2+2\times|14-10|^2+1\times|18-10|^2}{10}$$

$$V=\frac{1\times|-8|^2+2\times|-4|^2+4\times|0|^2+2\times|4|^2+1\times|8|^2}{10}=\frac{1\times64+2\times16+4\times0+2\times16+1\times64}{10}$$

$$e=\frac{64+32+0+32+64}{10}=\frac{192}{10}=19,2$$

الانحراف الطرازي: $\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{19,2}$

(4

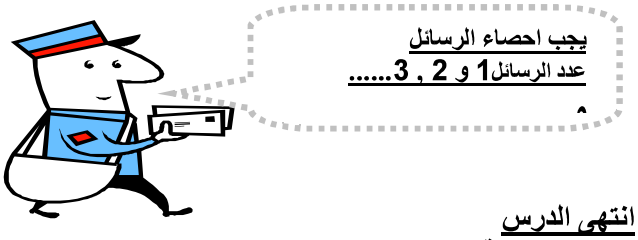


تمرين3 للبحث

يضم ناد للسباحة 25 منخرطا موزعين حسب أعمارهم وفق الجدول التالي :

العمر (سنة)	12	13	14	15	16	17
الحصيص	2	3	7	1	8	4
الحصيص المتراكم						

1. حدد منوال هذه السلسلة الإحصائية وأعط تفسير لها
2. أحسب معدل سن المنخرطين داخل هذا النادي
3. حدد النسبة المئوية الموافقة للميزة 14
4. حدد التردد الموافق للميزة 14
5. حدد النسبة المئوية للمنخرطين داخل هذا النادي الذي سنهم أكثر من 15 سنة
6. أحسب وسيطات التشتت : أ) الانحراف المتوسط ب) المغايرة ج) الانحراف الطرازي
7. أنشئ مخطط للعصي و المضلع الإحصائي الموافق له.



انتهى الدرس

ملاحظات عامة حول الدرس

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
que l'on devient un mathématicien

مذكرة رقم 10 : ملخص لدرس: الاحصاء

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- جداول إحصائية؛ - الحصيصات والحصيصات المتراكمة؛ - النسب المئوية، التردد، الترددات المتراكمة - التمثيلات المبيانية، المدراج؛ - وسيطات الوضع: المعدل الحسابي، الوسط، المنوال. - وسيطات التشتت: الانحراف المتوسط، المغايرة، الانحراف الطرازي.	- تنظيم معطيات إحصائية. - قراءة مبيانات إحصائية وتأويلها. - تأويل وسيطات الوضع والتشتت. - التمييز بين مختلف وسيطات الوضع. - التمييز بين مختلف وسيطات التشتت.	- ينبغي اعتماد أمثلة حية مستقاة من مواد التدريس الأخرى (الاجتماعيات، البيولوجيا، الكيمياء، ...) أو من الحياة المعيشة وتمثل وضعيات حقيقية، يتعود التلاميذ من خلالها على جمع المعطيات الإحصائية وتنظيمها في جداول ثم تمثيلها. - يتم حساب الوسيطات الإحصائية وتأويلها بهدف الإجابة على تساؤلات مرتبطة بدراسة الظواهر والقيام باستنتاجات.

تعريف للإحصاء:

الإحصاء علم يهتم بجمع و تنظيم ظواهر عديدة قصد التخطيط الجيد بعيدا عن الصدفة.
حيث لدراسة ظاهرة أيا كانت اجتماعية أو اقتصادية أو سياسة تقوم الدولة من فترة زمية الى أخرى بعملية الاحصاء طبعا احصاء كل شئ عدد السكان (كل الفئات العمرية) مثلا المحاصيل الزراعية عدد النوادي .....
وقد ساهم التطور الهائل في مجال الاعلاميات في تطوير وتقوية هذه العمليات الحسابية .....
اذن لدراسة ظاهرة ما أولا نقوم بتجميع المعلوت وبعد ذلك تنظيمها في جداول احصائية ثم نمثلها لكي تعطينا فكرة واضحة وسريعة عن الظاهرة بحيث يسهل تحليلها والتخطيط المستقبلي لها ولنتائجها .

I.تنظيم المعلومات ومصطلحات احصائية

مثال1:ميزة إحصائية متقطعة:

الكشف التالي يعطينا نقط تلاميذ الجذع مشترك علمي في فرض من الفروض:
$10-8-12-15-8-9-10-10-12-12-15-16-18-15-8-10-12-9$

الاصطلاح الإحصائي:

- الساكنة الإحصائية: هي المجموعة " أو العينة " التي تخضع للدراسة. في هذا المثال :هي مجموعة تلاميذ الجذع مشترك علمي
- الوحدة الإحصائية: كل عنصر من هذه المجموعة يسمى وحدة إحصائية هذا المثال :هو كل تلميذ من مجموعة تلاميذ الجذع مشترك علمي
- الميزة الإحصائية: هي الظاهرة المراد دراستها و هي نوعان: كمية أو كيفية. هذا المثال :هي النقطة وهي ميزة كمية
  - الميزة الإحصائية الكمية هي الميزة المعبر عنها بعدد (الطول – العرض - الوزن.....)
  - الميزة الإحصائية الكيفية هي التي لا يمكن التعبير عنها بعدد (اللغة – فصيلة الدم .....)
- الميزة الكمية نوعان:

متقطعة معبر عنها بقيم x_i (محددة)

متصلة معبر عنها بأصناف (مجلات) I_i يمكن التعبير عنها بعدد كبير من القيم.

يمكن أن ننظم هذه النقط في جدول إحصائي يضم:

- قيم الميزة و هي مرتبة تصاعديا: $8-9-10-12-15-16-18$ و نرمز اليها ب : $x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;x_6;x_7$
- الحصيص الموافق للميزة x_i هو عدد التلاميذ الحاصلين على النقطة x_i و نرمز إليه ب n_i حيث $1 \le i \le n$
- مجموعة الأزواج (x_i, n_i) $1 \le i \le n$ تسمى متسلسلة إحصائية.

قيمة الميزة x_i	8	9	10	12	15	16	18	المجموع
الحصيص	4	2	5	4	3	1	1	20

ملاحظة 1: $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = 20$
العدد 20 يسمى الحصيص الإجمالي لهذه المتسلسلة و نرمز إليه ب N

التردد و النسب المائوية : تردد القيمة x_i هو العدد الحقيقي المرموز إليه ب f_i و المعرف ب $f_i = \frac{n_i}{N}$

النسبة المئوية للقيمة x_i هو العدد المرموز له ب p_i و المعرف ب $p_i = 100f_i$.

مثال : التدد الموافق للميزة 11: $f_1 = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ و النسبة المئوية الموافق للميزة 11 هي : $p_1 = 100f_1$

قيمة الميزة x_i	9	10	12	15	16	18
الحصيص n_i	2	5	4	3	1	1
التردد f_i	0,1	0,25	0,2	0,15	0,05	0,05
النسبة المئوية p_i	10%	25%	20%	15%	5%	5%

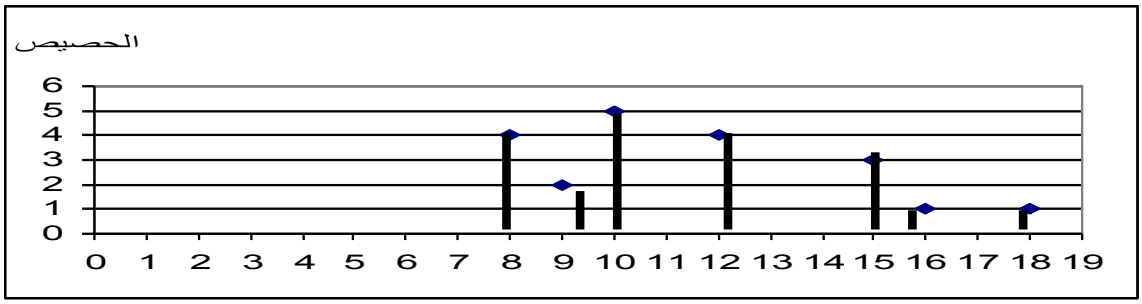
ملاحظة 2: مجموع الحصيصات يساوي الحصيص الإجمالي و تكتب: $\sum_{i=1}^{n} n_i = N$ و مجموع الترددات يساوي 1 و

نكتب $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$ مجموع النسب المئوية يساوي 100 و نكتب $\sum_{i=1}^{n} p_i = 100$

- الحصيص المتراكم: الحصيص المتراكم للقيمة x_i هو مجموع حصيصات القيم الأصغر أو تساوي x_i و نرمز إليه ب N_i
- جدول الحصيصات المتراكمة:

قيمة الميزة x_i	8	9	10	12	15	16	18
الحصيص n_i	4	2	5	4	3	1	1
الحصيص المتراكم N_i	4	6	11	15	18	19	20

- التمثيلات المبيانية: هناك عدة أنواع مثلا : (مخطط بالعصي و يمكن أن نرسم المضع المرافق له)



II.وسيطات الوضع :

1. **المنوال :** كل قيمة للميزة لها أكبر حصيص تسمى منوالا (في المثال : القيمة 10)
(كل صنف له أكبر حصيص يسمى صنفا منواليا (في **المثال:** الصنف [150,155[ ).
2. **القيمة الوسطية :** القيمة الوسطية لمتسلسلة إحصائية هي أصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبرمن أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي. (في المثال : القيمة 10)
3. **المعدل الحسابي :** المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية $(x_1,n_1)(x_2,n_2)\cdots\cdots(x_p,n_p)$ حصيصها الإجمالي N هو العدد الحقيقي المرموز إليه ب m أو $\overline{X}$ و المعرف ب : $m = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + \cdots\cdots + x_pn_p}{N}$

$m = \frac{8\times4+9\times2+10\times5+12\times4+15\times3+16\times1+18\times1}{20}$ اذن : $m = \frac{32+18+50+48+45+16+18}{20} = \frac{227}{20} = 11.35$

إذا كانت المتسلسلة معبرا عنها بالأصناف فان القيمة الوسطية هي: $M = a_{k-1} + (a_k - a_{k-1})\dfrac{\frac{N}{2} - N_{k-1}}{n_k}$

n_k هو حصيص الصنف $[a_{k-1}, a_k[$.

" $indice$ " k هو مدل أصغر حصيص متراكم أكبر أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي.

المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية $(I_1, n_1)(I_2, n_2)\cdots(I_p, n_p)$ حصيصها الإجمالي هو N

$m = \dfrac{n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_pc_p}{N}$ حيث c_i هو مركز المجال I_i.

III.مثال2 لميزة إحصائي متصلة :

الكشف التالي يعطينا نقط تلاميذ الجذع مشترك علمي في فرض من الفروض:

$14-15-06-08-10-07-14-19-06-08-09-02-10-12-08-06-15-08-12-10$

1. املأ الجدول التالي :

الصنف (النقطة)	$[0,5[$	$[5,10[$	$[10,15[$	$[15,20[$
الحصيص n_i				

2. حدد الصنف المنوالي للمتسلسلة الإحصائية
3. أحسب المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية
4. أنشئ مدراج الحصيصات و المضلع الاحصائي المرافق له

أجوبة : الجدول

الصنف (النقطة)	$[0,5[$	$[5,10[$	$[10,15[$	$[15,20[$
الحصيص n_i	1	9	7	3

المجالات: $[0,5[$, $[5,10[$, $[10,15[$. $[15,20[$ لها نفس السعة و تسمى أصناف الميزة.

1. الصنف المنوالي هو : $[5,10[$
2. المعدل الحسابي: $m = \dfrac{1\times 2.5 + 9\times 7.5 + 7\times 12.5 + 3\times 17.5}{20} = \dfrac{210}{20} = 10,5$
3. ورسم المدراج :

IV.وسيطات التشتت:

مثال : نعتبر الجدول التالي :

الصنف (النقطة)	$[0,5[$	$[5,10[$	$[10,15[$	$[15,20[$
الحصيص n_i	1	9	7	3

المعدل الحسابي: $m = \dfrac{1\times 2.5 + 9\times 7.5 + 7\times 12.5 + 3\times 17.5}{20} = \dfrac{210}{20} = 10,5$

1. **الانحراف المتوسط:**

$$e = \frac{n_1|x_1 - m| + n_2|x_2 - m| + \cdots + n_p|x_p - m|}{N} = \frac{1|2.5-10.5| + 9|7.5-10.5| + 7|12.5-10.5| + 3|17.5-10.5|}{20}$$

$$e = \frac{1|8| + 9|-3| + 7|2| + 3|7|}{20} = \frac{70}{20} = 3.5$$

2. **المغايرة:** $v = \dfrac{1(8)^2 + 9(3)^2 + 7(2)^2 + 3(7)^2}{20} = \dfrac{320}{20} = 16$
3. **الانحراف الطرازي:** $\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{16} = 4$