الفهرس

الــــدورة الأولــــى

الـــــهند ســــــــــة

الـــــــجــــــبــــــر

الـــــدورة الثانـــيـــة

الـــجــبــر

الـهــنــد ســــــة

أنشطـــة مبيانيـــة وإحصائيـــة

مبرهنة طاليس

1-مبرهنة طاليس المباشرة

مبرهنة

ليكن (D_1) و (D_2) مستقيمان متقاطعان في A

B و M نقطتان من (D_1) مختلفتان عن A . C و N نقطتان من (D_2) مختلفتان عن A

إذا كان المستقيمان (BC) و (MN) متوازيان فإن :

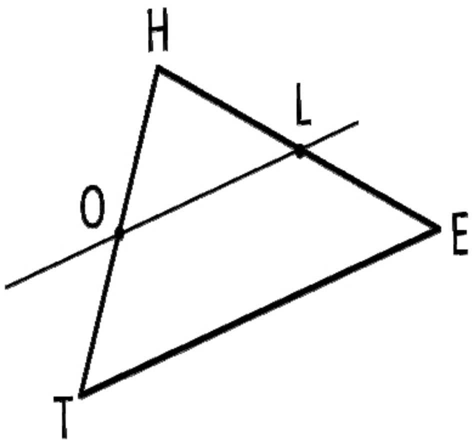
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

مثال1

في الشكل أسفله (OL)//(TE)

نعطي HE=5cm , HL=2cm , TE=7cm , HO=3cm

لنحسب HT و OL :



في المثلث HTE: (OL)//(TE) , L ϵ [HE] , Oϵ [HT]

حسب مبرهنة طاليس المباشرة لدينا : $\frac{OH}{HT}=\frac{HL}{HE}=\frac{OL}{TE}$

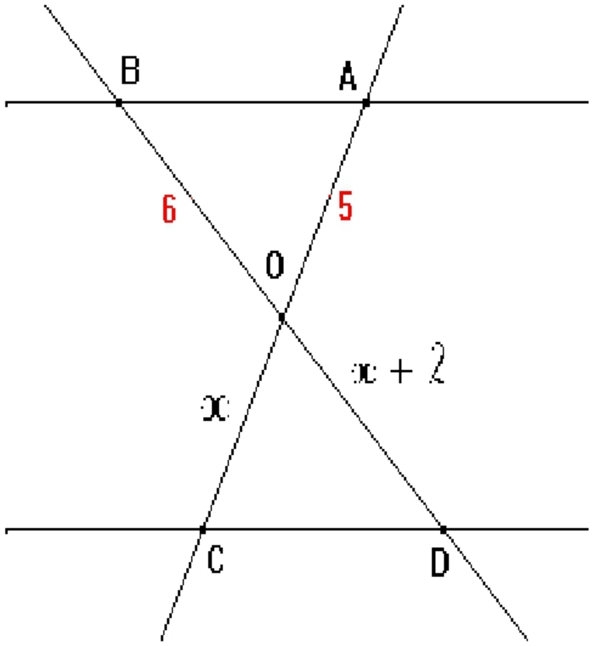
يعني $\frac{3}{HT}=\frac{2}{5}=\frac{OL}{7}$

يعني $2\times HT = 3\times 5$ إذن $HT=\frac{3\times 5}{2}=7,5$

يعني $5\times OL = 2\times 7$ إذن $OL=\frac{2\times 7}{5}=2,8$

مثال2

$OA=5$ و $OB=6$ و (AB) // (CD) لنحسب x:



لدينا (CD) // (AB) حسب مبرهنة طاليس ادن

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{BA}{DC}$$

ومنه

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$$

التطبيق العددي :

$$\frac{6}{x+2} = \frac{5}{x}$$

$$5(x+2) = 6x$$

$$5x + 10 = 6x$$

$$5x - 6x = -10$$

$$-x = -10$$

$$x = 10$$

ملاحظة : تستعمل مبرهنة طاليس المباشرة لحساب الاطوال

2- مبرهنة طاليس العكسية

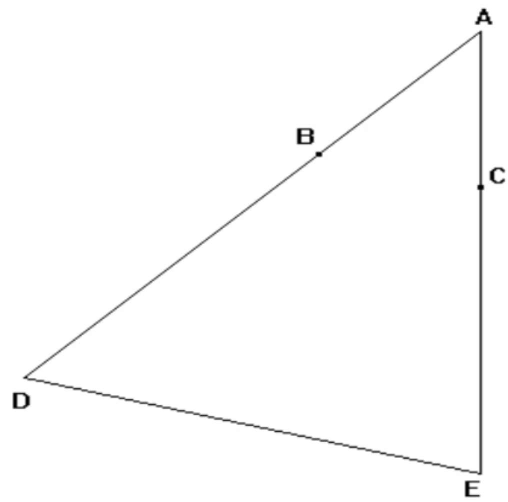
مبرهنة

ليكن (D) و (D’) مستقيمين متقاطعين في A .
B وN نقطتين من (D) مختلفتين عن A .
C وB نقطتين من (D’) مختلفتين عن A .
إذا كانت النقط A وB وM في نفس ترتيب النقط A و C و N .
اذا كان : $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$ فإن : $(BC)\parallel(MN)$

مثال

AB = 3 و AC = 2,4
AD = 8 و AE =6,4

لنبين أن : (BC) // (DE)



لدينا : $\frac{AC}{AE}=\frac{2,4}{6,4}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$ و $\frac{AB}{AD}=\frac{3}{8}$

ادن : $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

ولدينا النقط A وB وD في نفس الترتيب النقط A وC وE

حسب مبرهنة طاليس العكسية فان : $(BC)\parallel(MN)$

مبرهنة فيتاغورس

1- مبرهنة فيتاغورس المباشرة

المبرهنة

في كل مثلث قائم الزاوية، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي ضلعي.

مثال

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث : AB = 3 cm و BC = 5 cm

لنحسب AC

لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

ادن

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$
$$AC^2 = 5^2 - 3^2$$
$$AC^2 = 25 - 9$$
$$AC^2 = 16$$

و بما أن AC عدد موجب فإن : $AC = 4$

2- مبرهنة فيتاغورس العكسية

مبرهنة

إذا كان مجموع مربعي ضلعين في مثلث يساوي مربع طول الضلع الثالث،فإن المثلث قائم الزاوية

مثال

EFG مثلث بحيث : CG = 6 و FG = 8 و EF = 10

لنبين أنEFG مثلث قائم الزاوية .

لدينا :

$$EF^2 = 10^2 = 100$$
$$EG^2 + FG^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

إذن : $EF^2 = EG^2 + FG^2$

وحسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإنEFG مثلث قائم الزاوية في G

الحساب المثلثي

1- النسب المثلثية

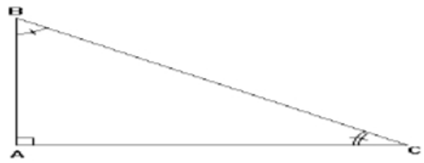
تعريف

- جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية يساوي خارج طول الضلع المحادي للزاوية الحادة على طول الوتر

- جيب زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية يساوي خارج طول الضلع المقابل على طول الوتر

- ظل زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية يساوي خارج طول الضلع المقابل لهذه الزاوية على طول الضلع المحاذي لها.

مثال1



[AB] هو الضلع المحادي للزاوية $A\hat{B}C$ ، والمقابل للزاوية $A\hat{C}B$

[AC] هو الضلع المقابل للزاوية $A\hat{B}C$ ، والمحادي للزاوية $A\hat{C}B$

[CB] هو الوتر

$$\cos A\hat{C}B = \frac{AC}{BC} \quad ,, \quad \cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin A\hat{C}B = \frac{AB}{BC} \quad ,, \quad \sin A\hat{B}C = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan A\hat{B}C = \frac{AC}{AB} \quad ,, \quad \tan A\hat{C}B = \frac{AB}{AC}$$

مثال2

ABC مثلث قائم الزاوية في A

بحيث : BC = 5 cm و AB = 3 cm و AC = 4 cm

لنحسب النسب المثلثية للزاوية $A\hat{C}B$

لدينا : $\cos A\hat{C}B = \frac{AC}{BC}$ إذن : $\cos A\hat{C}B = \frac{4}{5}$

لدينا : $\sin A\hat{C}B = \frac{AB}{BC}$ إذن : $\sin A\hat{C}B = \frac{3}{5}$

لدينا : $\tan A\hat{C}B = \dfrac{AB}{AC}$ إذن : $\tan A\hat{C}B = \dfrac{3}{4}$

2- العلاقة بين جيب تمام وجيب وظل زاوية حادة

خاصية

ليكن x قياس زاوية حادة، لدينا : $0 < \sin x < 1$ و $0 < \cos x < 1$

$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ و $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

مثال

لنحسب $\sin x$ و $\tan x$ علما أن : $\cos x = \dfrac{2}{3}$

لدينا : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

إذن : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{9-4}{9} = \dfrac{5}{9}$

لدينا : $0 < \sin x < 1$ إذن : $\sin x = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

لدينا: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ إذن : $\tan x = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\cancel{3}} \times \dfrac{\cancel{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

لدينا : $\cos A\hat{C}B = \dfrac{AC}{BC}$ إذن : $\cos A\hat{C}B = \dfrac{4}{5}$

لدينا : $\sin A\hat{C}B = \dfrac{AB}{BC}$ إذن : $\sin A\hat{C}B = \dfrac{3}{5}$

3- النسب المثلثية لزاويتين متتامتان

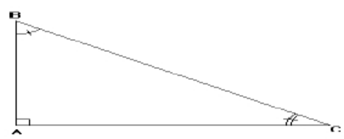
تعريف

إذا كانت زاويتين غير منعدمتين متتامتان،فإن:

- جيب كل منهما يساوي جيب الأخرى
- ظل كل منهما يساوي مقلوب ظل الأخرى.

مثال

ABC مثلث قائم الزاوية في A



$\cos A\hat{B}C = \sin A\hat{C}B$ و $\cos A\hat{C}B = \sin A\hat{B}C$ و $\tan A\hat{B}C = \dfrac{1}{\tan A\hat{C}B}$

الزوايا المحيطية والمركزية

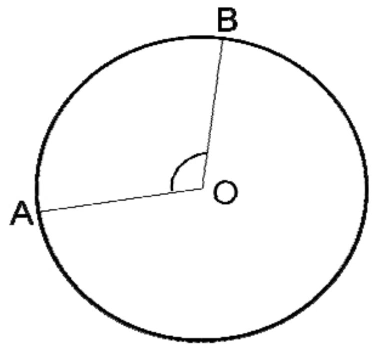
1- الزاوية المحيطية والمركزية

أ- الزاوية المركزية

تعريف

في دائرة، كل زاوية رأسها هو مركز هذه الدائرة ، تسمى زاوية مركزية

مثال



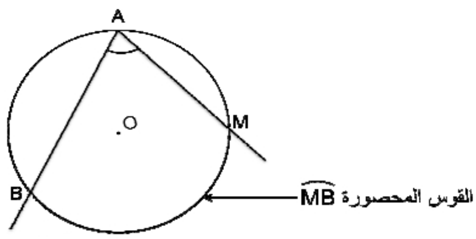
الزاوية $A\hat{O}B$ مركزية تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$

ب- الزاوية المحيطية

تعريف

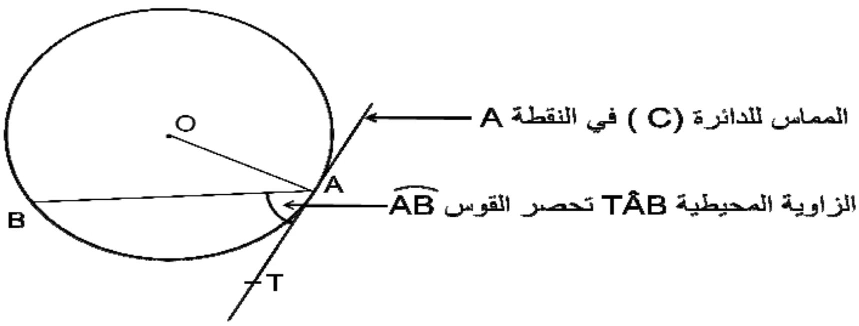
كل زاوية رأسها ينتمي إلى دائرة وتحصر قوسا في هذه الدائرة ،تسمى زاوية محيطية

مثال



الزاوية $M\hat{A}B$ تسمى زاوية محيطية وتحصر القوس $\overset{\frown}{MB}$

ج- حالة خاصة

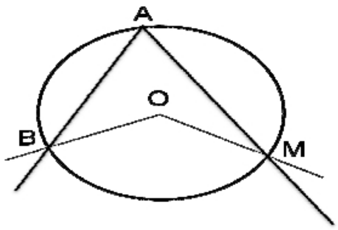


2- الزاوية المحيطية المرتبطة بالزاوية المركزية

تعريف

في دائرة ، نقول عن زاوية محيطية أنها مرتبطة بزاوية مركزية إذا كانتا تحصران نفس القوس

مثال

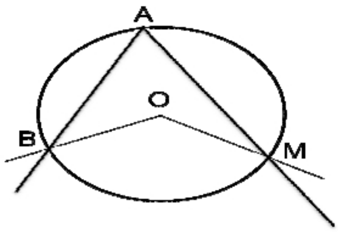


الزاوية المحيطية $B\hat{A}M$ مرتبطة بالزاوية المركزية $B\hat{O}M$

خاصية

في دائرة قياس الزاوية المركزية يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المرتبطة بها

مثال



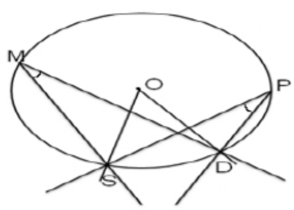
$$B\hat{O}M = 2B\hat{A}M$$

3- العلاقة بين زاويتين محيطيتين تحصران نفس القوس

خاصية

في دائرة، الزاويتان المحيطيتان اللتان تحصران نفس القوس ، تكونا متقايستين

مثال



$$B\hat{A}M = \frac{1}{2}B\hat{O}M \quad ,, \quad S\hat{M}D = S\hat{P}D$$

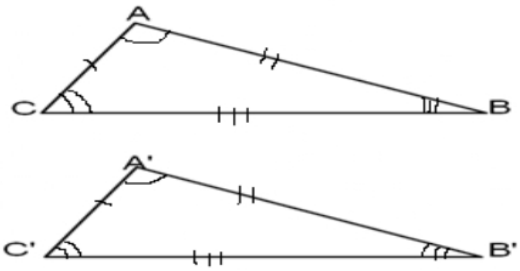
المثلثات المتقايسة

1-مثلثان متقايسان

تعريف

مثلثان متقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق

مثال



الضلعان[AB] و [A’B’] يسميان ضلعان متناظران

الزاويتان $B\hat{A}C$ و $B'\hat{A}'C'$ تسميان زاويتان متناظرتان

نتيجة

إذا كان مثلثان متقايسين فإن أضلاعهما متناظرة متقايسة وزواياهما المتناظرة متقايسة

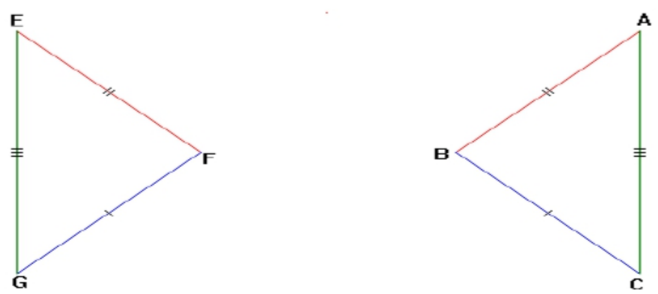
2-حالات التقايس

خاصية1

إذا قايست أضلاع مثلث على التوالي أضلاع مثلث آخر فإن هذين المثلثين متقايسـان

مثال

نعتبر EFG و ABC مثلثين بحيث : BC = FG و AC = EG و AB = EF



نقول أن المثلثين EFG و ABC متقايسـان

خاصية2

إذا قايس ضلعان في مثلث و الزاوية المحصورة بينهما على التوالي ضلعان في مثلث آخر و الزاوية المحصورة بينهما فإن هذين المثلثين متقايســـان

مثال

نعتبر EFG و ABC مثلثين بحيث : $AC = EG$ و $EF = AB$ و $B\hat{A}C = F\hat{E}G$

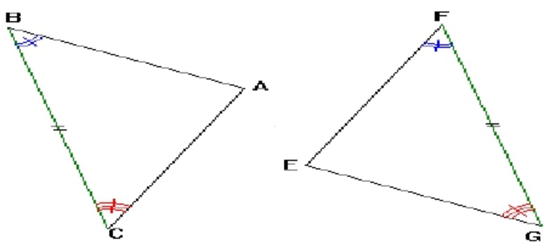
المثلثين EFG و ABC متقايســان

خاصية3

إذا قايست زوايتان لمثلث و الضلع المحاذي لهما على التوالي زوايتان لمثلث آخر و الضلع المحاذي لهما فإن هذين المثلثين متقايســـان

مثال

نعتبر EFG و ABC مثلثين بحيث : $BC = FG$ و $A\hat{C}B = E\hat{G}F$ و $A\hat{B}C = E\hat{F}G$



المثلثين EFG و ABC متقايســان

الجذور المربعة

1-الجذر المربع لعدد حقيقي

تعريف

a عدد حقيقي موجب،العدد x الذي مربعه a يسمى الجذر المربع للعدد a. ونرمز له بالرمز:
$\sqrt{a}$

$x = \sqrt{a}$ **يعني أن** $x^2 = a$

مثال

$x^2 = 11$ يعني أن : $x = \sqrt{11}$

ملاحظة

إذا كان a **عددا حقيقيا فان :** $\sqrt{a^2} = a$

إذا كان a عددا حقيقيا موجبا فان : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

أمثلة

$$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6 \quad ,, \quad \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$$

2- العمليات على الجذور المربعة

خاصية

b **و** a **عددان حقيقيان موجبان و b غير منعدم**

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

أمثلة

$$\sqrt{12} = \sqrt{3\times4} = \sqrt{3}\times\sqrt{4} = \sqrt{3}\times\sqrt{2^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{1}{2}$$

3- حذف الجذر المربع من المقام

خاصية 1

a **عدد حقيقي موجب و** $a \neq 0$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

مثال

$$\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{5\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^{2}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

خاصية2

***b* و *a* عددان حقيقيان موجبان بحيث :** $a\neq 0$ و $a\neq b$ $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

مثال

$$\frac{2}{1-\sqrt{5}}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{1^{2}-\sqrt{5}^{2}}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{1-5}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{-4}$$

ملاحظة: مرافق العدد $\left(1+\sqrt{5}\right)$ هو العدد $\left(1-\sqrt{5}\right)$

المتطابقات الهامة

1-النشرو التعميل

تعريف

– النشر هو كتابة مجموع أو فرق على شكـل جداء .
– التعميل هو كتابة جداء على شكـل مجموع أو فرق .

خاصية 1

إدا كانت a و b وk أعداد حقيقية فان:

$$k\times(a+b)=k\times a+k\times b$$

$$k\times(a-b)=k\times a-k\times b$$

النشـــــر →

← التعميـــل

أمثلة:

لننشر التعبيرينAو B :

$$A=\sqrt{5}\times(x+2)=\sqrt{5}\times x+\sqrt{5}\times 2=\sqrt{5}\,x+2\sqrt{5}$$

$$B=2\left(x-\frac{5}{2}\right)=2\times x-2\times\frac{5}{2}=2x-5$$

لنعمل التعبيرين B و A:

$$B=\frac{5}{4}x+\frac{25}{8}=\frac{5}{4}\times x+\frac{5}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{4}\times\left(x+\frac{5}{2}\right)$$

$$A=x^{2}-3x=x\times x-3\times x=x(x-3)$$

خاصية 2

a وb و c وd أعداد حقيقية

(a + b)(c + d)=a x (c + d) + b x (c + d)

(a + b)(c + d)=a xc + axd + bxc + bxd

النشـــــر →

← التعميـــل

أمثلة

لننشرA :

$$A=(a+5)(3+a)= a\times(3+a)+5\times(3+a)$$
$$= 3\times a + a\times a + 5\times 3 + 5\times a$$
$$= 3a + a^2 + 15 + 5a$$

لنعمل B :

$$B=2y-6+xy-3x=2\times y+2\times(-3)+x\times y+x\times(-3)$$
$$=(2+x)(y-3)$$

2-المتطابقات الهامة

خاصية

a و b عددان حقيقيان :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

النشر

التحليل

أمثلة

$$\left(\frac{x}{3}+2\right)^2=\frac{x^2}{3^2}+2\times\frac{x}{3}\times 2+2^2=\frac{x^2}{9}+\frac{4x}{3}+4$$

$$(y-3)^2=y^2-2\times 3\times x+3^2=y^2-6y+9$$

$$\left(x+\sqrt{\frac{2}{7}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{2}{7}}\right)=x^2-\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2=x^2-\frac{2}{7}$$

القوى

1- القوى

أ- قوة عدد حقيقي

تعريف

إذا كان x عددا جذريا و n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم فإن :

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times x \times \ldots\ldots \times x}_{n \text{ مرة}}$$

أمثلة

$\left(\frac{2}{3}\right)^3$; $(-4)^5$; $\left(\frac{12}{5}\right)^2$

ملاحظة

n عدد صحيح طبيعي و a عدد حقيقي غير منعدم

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

أمثلة

$$\left(\sqrt{15}\right)^{-2} = \frac{1}{\sqrt{15}^{2}} = \frac{1}{15}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

ب-اشارة عدد حقيقي

قاعدة

تكون إشارة قوة عدد حقيقي سالبة إذا كان الأساس سالبا و الأس فرديا، وتكون موجبة في جميع الحالات الأخرى

أمثلة

اشارة هذه القوة $(-3)^8$ موجبة

اشارة هذه القوة $(-5.7)^5$ سالبة

2- خصائص القوى

خصائص

b و a عددان حقيقيان غير منعدمين .

n و m عددان صحيحان نسبيان .

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\times m}$$

امثلة

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{11}\left(-\frac{2}{3}\right)^{53} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{11+53} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{64}$$

$$\left(\frac{-5}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{-5}{3}\times\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{-5}{6}\right)^4$$

$$\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^6}{\left(\frac{3}{5}\right)^6} = \left(\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}}\right)^6 = \left(\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}\right)^6 = \left(\frac{10}{21}\right)^6$$

$$\frac{22^5}{22^{12}} = 22^{5-22} = 22^{-17} = \frac{1}{22^{17}}$$

$$\left[\left(\frac{5}{7}\right)^5\right]^{-3} = \left(\frac{5}{7}\right)^{5\times(-3)} \left(\frac{5}{7}\right)^{-15} = \left(\frac{7}{5}\right)^{15}$$

3- قوى العدد 10

قاعدة

n عدد صحيح طبيعي

$10^n = 1000..............0$

n من الاصفار

$10^{-n} = 0,000...........01$

n من الاصفار

أمثلة

$10^5 = 100000$

$10^{-5} = 0,00001$

4-الكتابة العلمية

تعريف

- الكتابة العلمية لعدد عشري موجب هي كتابته على شكل:

$a \times 10^n$ حيث: n عدد صحيح نسبي و a عدد عشري حيث :

$$1 \leq a < 10$$

- الكتابة العلمية لعدد عشري نسبي سالب هي كتابته على شكل:

$-a \times 10^n$ حيث n عدد صحيح نسبي و a عدد عشري بحيث :

$$1 \leq a < 10$$

أمثلة

$2650000 = 2,65 \times 10^6$

$-2650000 = -2,65 \times 10^6$

$0,00026 = 2,6 \times 10^{-4}$

الترتيب والعمليات

1- مقارنة عددين حقيقيين

خاصية

لمقارنة عددين حقيقيين b و a: نحدد إشارة فرقهما

إذا كان $a-b \geq 0$ فإن : $a \geq b$

إذا كان $a-b \leq 0$ فإن : $a \leq b$

مثال

لنقارن العددين : 9 و $\frac{3}{7}$

لدينا :

$$\frac{3}{7}-9=\frac{3}{7}-\frac{63}{7}$$
$$=\frac{-60}{7}$$

إذن : $\left(\frac{3}{7}-9\right) \leq 0$ و منه فإن : $\frac{3}{7} \leq 9$

2-الترتيب والعمليات

أ- الترتيب والجمع

خاصية

m و k و b و a أعداد حقيقية

إذا كان $a \leq b$ **فإن :** $a+k \leq b+k$

إذا كان $a \leq b$ **فإن :** $a-k \leq b-k$

مثال

b و a عددان حقيقيان بحيث : $a+4 \leq b$

لنبين أن : $a+1 \leq b-3$

لدينا : $a+4 \leq b$ يعني أن : $a+4-3 \leq b-3$

أي $a+1 \leq b-3$

خاصية

d و c و b و a أعداد حقيقية .

إذا كان $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array}\right\}$ و **فإن :** $a+c \leq b+d$

مثال

b و a عددان حقيقيان بحيث : $a+3 \leq 3$ و

$b+4 \leq \sqrt{2}$

بين أن : $b+a+7\le 3+\sqrt{2}$

إذن : $(b+4)+(a+3)\le \sqrt{2}+3$ نعلم أن : $\left.\begin{array}{l} b+4\le \sqrt{2} \\ a+3\le 3 \end{array}\right\}$ و

و منه فإن : $b+a+7\le \sqrt{2}+3$

ب-الترتيب والضرب

خاصية

a و k و b أعداد حقيقية

/1 إذا كان و $\left.\begin{array}{l} a\le b \\ k\ge 0 \end{array}\right\}$ **فإن :** $a\times k\le b\times k$

/2 إذا كان و $\left.\begin{array}{l} a\le b \\ k\le 0 \end{array}\right\}$ **فإن :** $a\times k\ge b\times k$

مثال

b و a عددان جذريان بحيث : $b\ge \sqrt{3}$ و $a\ge \dfrac{4}{3}$

لنستنتج $-2b$ و $3a$

إذن : $3a\ge 4$ لدينا : و $\left.\begin{array}{l} a\ge \dfrac{4}{3} \\ 3\ge 0 \end{array}\right\}$ أي : $a\times 3\ge \dfrac{4}{3}\times 3$

$-2b\le -2\sqrt{3}$ و لدينا : و $\left.\begin{array}{l} b\ge \sqrt{3} \\ -2\le 0 \end{array}\right\}$ أي : $b\times(-2)\le \sqrt{3}\times(-2)$

إذن : $-2b\le -2\sqrt{3}$

3- التأطير

خاصية1

a و t و z و y و x و b أعداد حقيقية بحيث :

$z\le b\le t$ **و** $x\le a\le y$

$x+z\le a+b\le y+t$

مثال

y و x عددان حقيقيان بحيث : $-4\le y\le \dfrac{-3}{2}$ **و** $1\le x\le \sqrt{5}$

لنؤطر: $x+y$

لدينا : $-4 \le y \le \frac{-3}{2}$ و $1 \le x \le \sqrt{5}$

يعني أن : $1+(-4) \le x+y \le \sqrt{5}+\left(\frac{-3}{2}\right)$

أي : $-3 \le x+y \le \sqrt{5}-\frac{3}{2}$

خاصية2

a و y و x أعداد حقيقية بحيث : $x \le a \le y$ $-y \le -a \le -x$

مثال

x عدد حقيقي بحيث : $\sqrt{3} \le x \le 4$

لنؤطر $-x$: $-4 \le -x \le -\sqrt{3}$

خاصية3

a و t و z و y و x و b أعداد حقيقة بحيث : $x \le a \le y$ و $z \le b \le t$ $x-t \le a-b \le y-z$

مثال

y و x عددان حقيقيان بحيث : $-4 \le y \le \frac{-3}{2}$ و $1 \le x \le \frac{5}{2}$

لنؤطر: $y-x$

لدينا : $1 \le x \le \frac{5}{2}$ إذن : $-\frac{5}{2} \le -x \le -1$

يعني أن : $(-4)+\left(\frac{-5}{2}\right) \le y+(-x) \le \left(\frac{-3}{2}\right)+(-1)$

$\frac{-13}{2} \le y-x \le \left(\frac{-5}{2}\right)$

المعادلات والمتراجحات

1- تعريف

ليكن a و b عددين حقيقين معلومين. كل متساوية على شكل a + x = b أو ax = b حيث (x # 0)
تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول
واحد x.
قيمة x التي تحقق المعادلة تسمى حلا للمعادلة.

أمثلة

$\frac{11}{3} + x = 22$; $-5 + x = 10$; $\frac{x}{5} - 2 = -8$

2– حل المعادلة من نوع : a + x = b

قاعدة

a و b عددان حقيقيان
حل المعادلة a + x = b هو العدد: b – a

أمثلة

لنحل المعادلة: $\frac{3}{5} + x = 22$

أي : $x = 22 - \frac{3}{5}$

أي : $x = \frac{110}{5} - \frac{3}{5} = \frac{110-3}{5}$

أي : $x = \frac{107}{5}$

ادن حل المعادلة هو : $\frac{107}{5}$

3– حل المعادلة ax = b $(a \neq 0)$:

قاعدة

a و b عددان حقيقيان $(a \neq 0)$
حل المعادلة ax = b هو العدد: b/a

مثال

لنحل المعادلة: $\frac{-11}{3}x = 88$

أي: $x = 88 \div \left(\frac{-11}{3}\right)$

أي : $x = \frac{88}{1} \times \left(\frac{-3}{11}\right)$

ادن حل المعادلة هو : $\frac{-264}{11}$

4- حل معادلة من نوع: $(ax+b)(cx+d)=0$

خاصية

ليكن A و B عددين حقيقيين
$A \times B = 0$ يعني A=0 أو B=0 يعني

مثال :

حل المعادلة : $(2x+4)(-3x-5)=0$

المعادلة $(2x+4)(-3x-5)=0$ تكافئ على التوالي :

$-3x-5=0$ أو $2x+4=0$

$2x=-4$

$-3x=5$

$x=\frac{5}{-3}$ أو $x=\frac{-4}{2}$

$x=-2$

إذن للمعادلة حلين هما : $\frac{5}{-3}$ و -2

ادن: x = 140 × 4/5

ادن: x = 112

حل المعادلة هو: 112

- حل المسالة هو:. ثمن المحفظة هو: 112 درهم

140 – 112 = 28 DH ثمن الكتاب هو:

5- المتراجحات

أ- تعريف

كل تعبير على شكل : ax + b ≤ 0 حيث a و bعددان حقيقيان معلومان يسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.
- العدد x يسمى مجهولا .
- التعابير التالية : ax + b > 0 ; ax + b ≥ 0 ; ax + b < 0
هي أيضا متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

أمثلة

$7x-\frac{1}{2}\leq 5$,, $-5\geq 2x+1$,, $24,5<1-x$

ب- حل المتراجحة :

مثال

لدينا : 2x + 7 > 15

يعني : 2x + 7 + (-7) > 15 + (-7)

أي : $2x > 8$

نضرب طرفي المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{2}$ أي $2x \times \frac{1}{2} \succ 8 \times \frac{1}{2}$

إذن $x > 4$

حلول المتراجحة هي الأعداد الأكبر قطعا من 4

6- مراحل حل المسالة

لحل المسالة نتبع المراحل الآتية:

- **قراءة المسالة بتمعن.**
- **اختيار المجهول.**
- **صياغة المعادلة.**
- **حل المعادلة.**
- **التحقق من صحة الحل المحصل عليه.**
- **كتابة الحل باستعمال العبارة: "حل المسالة هو:"**

مثال

اشترى احمد كتاب و محفظة بما قدره 140 درهم ادا علمت أن ثمن الكتاب يمثل ربع ثمن المحفظة فما هو ادن ثمن كل من الكتاب و المحفظة.

- اختيار المجهول: ليكن x ثمن المحفظة

ادن $x/4$ هو ثمن الكتاب.

- صياغة المعادلة: بما أن المبلغ الذي دفعه احمد هو 140 درهم

فان: $x + x/4 = 140$

- حل المعادلة: لدينا $x + x/4 = 140$

ادن: $x (1 + ¼) = 140$

ادن: $x \times 5/4 = 140$

ادن: $x = 140 \div 5/4$

الدالة الخطية – الدالة التالفية

1- الدالة الخطية

أ- تعريف

a عدد معلوم **العلاقة التي تربط العدد x بالعدد ax تسمى دالة خطية معاملها هو a** **العدد ax يسمى صورة x بالدالة الخطية التي نرمز لها بالرمز: f** **ونكتب:** f(x) = ax (f(x) هي صورة بالدالة الخطية)

مثال

$f(x) = -2x$ دالة خطية معاملها هو -2

خاصية

f دالة خطية معاملها a **إذا كان x و x' عددين معلومين غير منعدمين فان :** $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x')}{x'} = a$

مثال

f دالة خطية بحيث : $f(-5) = \frac{2}{3}$

لنحدد معامل الدالة f ثم حدد $f(x)$.

f دالة خطية إذن : $f(x) = a.x$ ومعاملها هو العدد الحقيقي :

$$a = \frac{f(-5)}{-5} = \frac{\frac{2}{3}}{-5} = \frac{2}{3} \times \frac{-5}{1} = \frac{-10}{3} .$$

و منه فإن : $f(x) = \frac{-10}{3}x$.

ب- التمثيل المبياني للدالة الخطية

تعريف

$(O;I;J)$ معلم متعامد في المستوى تمثيل المبياني لدالة خطية هو مستقيم يمر من أصل المعلم O

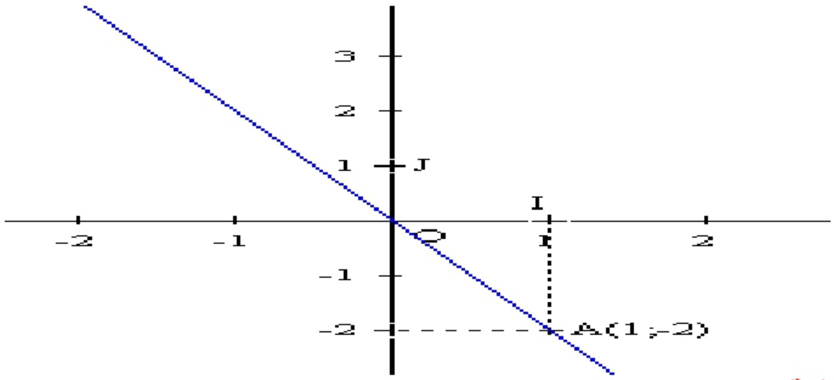
مثال

$f(x) = -2x$ دالة خطية معاملها هو -2

لننشئ التمثيل المبياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

x	1
$f(x)$	-2

إذن التمثيل المبياني للدالة هو المستقيم من O و من النقطة $A(1;-2)$.



2-الدالة التالفية

أ- تعريف

عددان حقيقيان معلومان b و a .   العلاقة f التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد ax+b تسمى دالة تآلفية معاملها a و نكتب :   f(x) = ax+b   العدد ax+b هو صورة x بالدالة f

مثال

$f(x) = -3x+11$. f دالة تآلفية معاملها -3

ب- التمثيل المبيانى للدالة التالفية

خاصية

في معلم (O؛I؛J) ، التمثيل المبياني لدالة تآلفية f هو مستقيم يمر من النقط M(x ;f(x))

مثال

لننشئ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$ الدالة التآلفية f

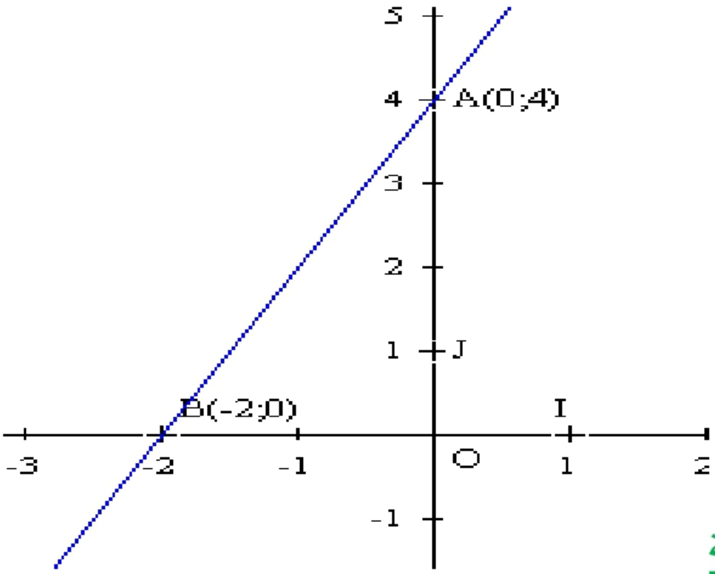
بحيث : $f(x) = 2x+4$

لدينا :

x	0	-2
$f(x)$	4	0

إذن التمثيل المبياني للدالة هو المستقيم (AB) بحيث :

$A(0;4)$ و $B(-2;0)$



ج - خاصية

a و b عددان حقيقيان.

لتكن f دالة تآلفية $f(x) = ax+b$

إذا كان x_1 و x_2 عددين معلومين $(x_1 \neq x_2)$ فإن:

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

مثال

f دالة تآلفية بحيث : $f(1) = -3$ و $f(3) = 2$

حدد معامل الدالة f ثم حدد $f(x)$

لدينا دالة تآلفية إذن : $f(x) = a.x + b$ و معاملها هو العدد الحقيقي :

$$a = \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{2-(-3)}{3-1} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

ومنه فإن : $f(x) = \frac{5}{2}.x + b$

لنحسب العدد الحقيقي b

لدينا : $f(1) = -3$ يعني أن

$$\frac{5}{2} \times 1 + b = -3$$

$$\frac{5}{2} + b = -6$$

$$5 + 2b = -6$$

$$2b = -6 - 5$$

$$b = \frac{-11}{2}$$

وبالتالي فإن : $f(x) = \frac{5}{2}.x - \frac{11}{2}$

النظمات

1- نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تعريف

الكتابة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ تسمى نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين , و حلها هو تحديد الأزواج (x,y) التي تحقق المتساويتان معا .

أمثلة

$$\begin{cases} 3x-4y=7 \\ -2x+4y=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{5}x+\frac{2}{3}y=23 \\ -x+\sqrt{2}y=\frac{3}{-5} \end{cases}$$

2- الحل الجبري لنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

أ- طريقة التعويض

لنحـل النظمة : $(E) : \begin{cases} 2x+y=11 & (1) \\ x+3y=18 & (2) \end{cases}$

في المعادلة (1) نحسب x بدلالة y إذن : $y=11-2x$

في المعادلة (2) نعوض y بالقيمة $11-2x$ ثم نحسب x

$$x+3(11-2x)=18$$
$$x+33-6x=18$$
$$x-6x=18-33$$
$$-5x=-15$$
$$x=\frac{-15}{-5}$$
$$x=3$$

و منه فإن :

$$y=11-2\times3$$
$$y=11-6$$
$$y=5$$

و بالتالي الزوج $(3;5)$ هو حـل هذه النظمة (E)

ب - طريقة التالفية الخطية

نعتبر النظمة: $\begin{cases} x+4y=10 \\ 3x+7y=25 \end{cases}$

نضرب طرفي المعادلة الأولى في -3 وطرفي المعادلة الثانية في 1 :

$$\begin{cases} x+4y=10 \\ 3x+7y=25 \end{cases}$$

فنحصل على : $\begin{cases} -3x-12y=-30 \\ 3x+7y=25 \end{cases}$

ثم نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرفا بطرف فنحصل على:

$$\begin{cases} x+4y=10 \\ -3x-12y+3x+7y=-30+25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4y=10 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4\times1=10 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$$

نقول أن النظمة تقبل حلا وحيدا هو الزوج (6،1)

3- الحل المبياني

تعريف

تعتمد هذه الطريقة على ربط كل من معادلتي النظمة بمستقيم ، ثم تحديد زوج إحداثيتي نقطة تقاطعهما (في حالة تقاطعهما) مبيانيا ، وذلك بإنشاء هذين المستقيمين في م.م.م،حينئذ يكون هذا الزوج هو حل هذه النظمة.

مثال

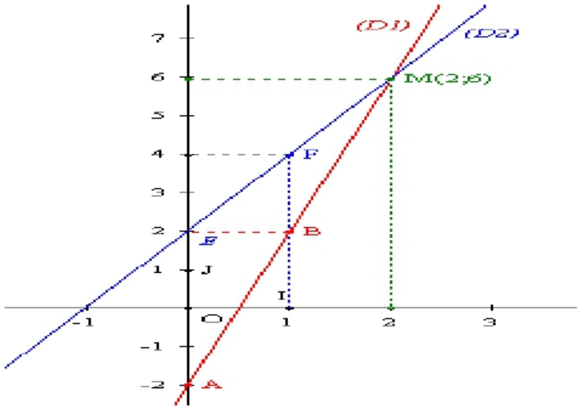
لنحـل النظمة : $(S):\begin{cases} 4x-y-2=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$

لنحدد المعادلة المختصر لكل من المستقيمين (D_2) و (D_1)

لدينا : $\begin{cases} (D_1): y=4x-2 \\ (D_2): y=2x+2 \end{cases}$

نلاحظ أن المستقيمين (D_2) و (D_1) ليس لهما نفس الميل ، إذن فهما مستقيمان متقاطعان

لننشئ المستقيمين (D_2) و (D_1)



نلاحظ من خلال المبيان أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة $M\,(2;6)$

و بالتالي الزوج $(2;6)$ هو حـل النظمة (S)

4- حل المسائل

مراحل حل مسألة :

- قراءة نص المسألة جيدا و فهمها.
- اختيار المجهولين الملائمين.
- ترجمة نص المسألة إلى نظمة.
- حل النظمة المحصل عليها.
- الرجوع إلى المسألة.
- التأكد من صحة الحل.

مثال :

نريد موازنة هذه المعادلة الكيميائية التي تمثل احتراق الميثان في الأكسجين :

$$\ldots CH_4 + \ldots O_2 \longrightarrow \ldots CO_2 + \ldots H_2O$$

$$aCH_4 + bO_2 \longrightarrow cCO_2 + dH_2O$$

$$\begin{cases} a \times 1 = c \times 1 \\ a \times 4 = d \times 2 \\ b \times 2 = c \times 2 + d \times 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = c \\ d = 2a \\ 2b = 2c + d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = c = 1 \\ d = 2 \\ 2b = 2 + 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = c = 1 \\ d = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$1CH_4 + 2O_2 \longrightarrow 1CO_2 + 2H_2O$$

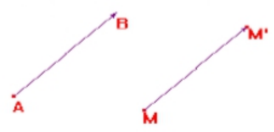
الإزاحة والمتجهات

1-الازاحة

تعريف

A وB و M نقط مختلفة من المستوى .
نقول إن النقطة N هي صورة النقطة M بالإزاحة التي تحول A إلىB
إذا كان:
- للمستقيمين (AB) و (MN) نفس الاتجاه.
- المنحى من M نحو N هو المنحى منA نحوB .
- المسافتان MN و AB متساويتان.

مثال



النقطة M' هي صورة M بالإزاحة Tالتي تحول A إلى B يعني أن :
- (AB) و (MM') مستقيمان لهما نفس الإتجاه
- المنحى من M نحو M' هو النحى من A إلى B
- $MM' = AB$

خاصية

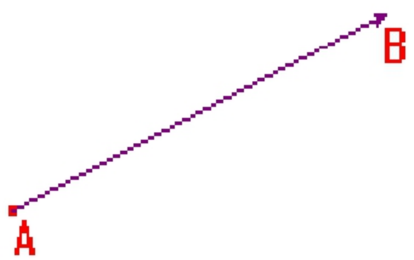
A' و B' صورتا A و B على التوالي بإزاحة يعني أن AA'B'B متوازي أضلاع.

2-المتجهة

أ- تعريف

كل نقطتين مختلفتين A و B في المستوى تحددان متجهة نرمز لها
بالرمز : $\overrightarrow{AB}$ حيث أصلها A وطرفها B وحاملها المستقيم(AB) .

مثال



المتجهة $\overrightarrow{AB}$

ب- خصائص متجهة

نعتبر A و B نقطتين مختلفتين. للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ اتجاه ولها منحى ولها معيار(أو منظم) :
- اتجاه المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو اتجاه المستقيم (AB).
- ومنحى المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو من A إلى B.
- ومعيار (يعني منظم) المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو طول القطعة [AB] يعني المسافة AB

3- تساوي متجهتين

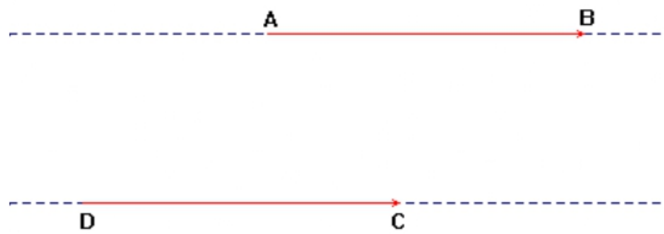
خاصية

نقول إن متجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متساويتان إذا كانت B و D هما على التوالي صورتي A و C بنفس الإزاحة.

ونكتب: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

نقول أن $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما :
-- نفس الاتجاه .
-- نفس المنحى .
-- نفس المعيار (أي المنظم) .

مثال



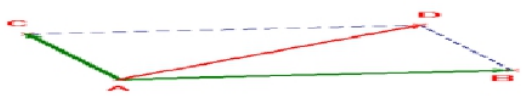
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$$

3-مجموع متجهتين

خاصية

إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع فإن : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

مثال



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$$

خاصية(علاقة شال)

إذا كانت C ثلاث نقط B و A و من المستوى فإن :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

مثال

خاصية

مقابل متجهة $\overrightarrow{AB}$ هو المتجهة $\overrightarrow{BA}$ و يكتب $-\overrightarrow{AB}$

إذن : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

4- ضرب متجهة في عدد حقيقي

تعريف

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و α عدد حقيقي

نقول إن المتجهة $\overrightarrow{AC}$ هي جداء المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في العدد الحقيقي α إذا كانت C هي نقطة من (AB) ونكتب

- ويكون لـ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نفس المنحى في حالة $\alpha > 0$ و لدينا $AC = \alpha AB$

- يكون لـ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ منحيان متعاكسان في حالة $\alpha < 0$ ولدينا $AC = -\alpha AB$

- تكون C منطبقة مع A في حالة $\alpha = 0$.

مثال

$[AB]$ قطعة و M منتصفها لدينا :

✓ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ والمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ لهما نفس المنحى و $AB = 2AM$

$\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ والمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ لهما منحيان متعاكستان

و $AN = -\left(-\frac{1}{2}\right)AB$

خاصية

C و B و A من المستوى

- تكون النقط C و B و A مستقيمية إذا وفقط إذا كانت $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ بحيث k عدد حقيقي غير منعدم

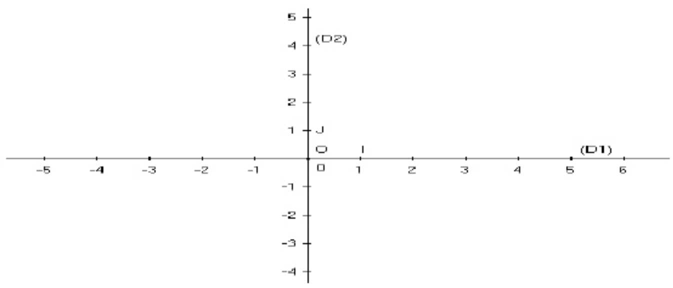
- إذاكان $\overrightarrow{CD} = K\overrightarrow{AB}$ فإن $(AB) \| (CD)$

إحداثيتا نقطة – إحداثيتا متجهة

1- احداثيتا نقطة

ا-مثال

(D1) و (D2) مستقيمين مدرجين متعامدين في النقطة O



ملاحظة

إذا كان OJ = OI نقول أن المستوى منسوب إلى معـلـم ممنظم و متعامد

-- نسمي المستقيم(OI): محــور الأفاصيل

-- نسمي المستقيم(OJ) : محــور الأراتيب .

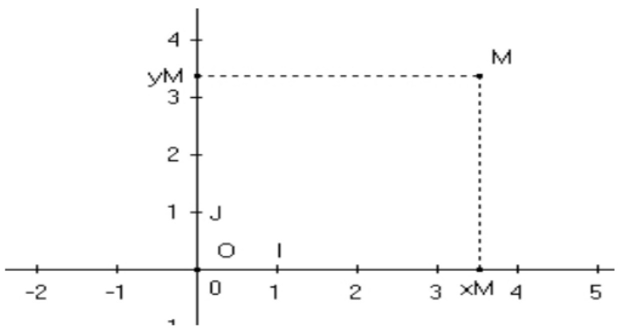
-- نرمز لمعلم في المستوى بالرمــز: (O ; I ; J)

ب-احداثيتا نقطة

تعريف

كل نقطة من المستوى M مرتبطة بعددين عشريين نسبيين y_M و x_M يسميان إحداثيتي النقطة M و نكتب : $M(x_M ; y_M)$ x_M يسمى الأفصول y_M يسمى الأرتوب

مثال



2- احداثيتا متجهة

تعاريف

إذا كانت $B\left(x_B;y_B\right)$ و $A\left(x_A;y_A\right)$ فإن: $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)$

مثال

$B(1;-5)$ و $A(-2;3)$ نقطتان من المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I;J)$

لنحسب إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$

لدينا : $x_B-x_A=1-(-2)=1+2=3$ و $y_B-y_A=-5-3=-8$

إذن : $\overrightarrow{AB}(3;-8)$

خاصية

$(O;I;J)$ معلم متعامد للمستوى
$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان غير منعدمتين
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ يعني أن : $y_B-y_A=y_D-y_C$ و $x_B-x_A=x_D-x_C$

مثال

$C(-2;-2)$ و $B(1;-4)$ و$A(3;3)$ نقط من المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I;J)$.

لنحدد إحداثيتي النقطة D لكي يكون ABCD متوازي الأضلاع

ABCD متوازي الأضلاع يعني أن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

أي $y_B-y_A=y_C-y_D$ و $x_B-x_A=x_C-x_D$

ومنه فان $-4-3=-2-y_D$ و $1-3=-2-x_D$

أي $y_D=-2+4+3$ و $x_D=-2-1+3$

إذن : $y_D=5$ $x_D=0$

وبالتالي فإن : $D(0;5)$

3- احداثيتا مجموع متجهتين

خاصية

إذا كان $\overrightarrow{AB}=(a;b)$ و $\overrightarrow{CD}=(c;d)$ فإن $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(a+c;b+d)$

مثال

لنعتبر المتجهتين : $\vec{v}(2;-4)$ و $\vec{u}(-2;3)$

لنحسب : $\vec{u}+\vec{v}$

لدينا : $\vec{u}+\vec{v}(-2+2\,;3-4)$ أي : $\vec{u}+\vec{v}(0\,;-1)$

4- احاثيتا منتصف قطعة

خاصية

لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

إذا كانت النقطة M منتصف $[AB]$ فإن : $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$ و $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$

مثال

لنحدد إحداثيتي النقطةE منتصف القطعة [AB] بحيث: $B(-2;1)$ و $A(2;3)$

لدينا : $x_E=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+(-2)}{2}=\frac{0}{2}=0$

و $y_E=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$ إذن : $E(0;2)$

5- المسافة بين نقطتين

خاصية

لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

مثال

لتكن : $B(3,2)$ و $A(-1;3)$

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}\\&=\sqrt{(3+1)^2+(2-3)^2}\\&=\sqrt{4^2+(-1)^2}\\&=\sqrt{16+1}\\&=\sqrt{17}\end{aligned}$$

معادلة مستقيم

1-المعادلة المختصرة لمستقيم غير مواز لمحور الأراتيب

تعريف

العلاقة y=ax+b التي تميز نقط المستقيم (AB) تسمى معادلة المستقيم (AB)
ليكن معلما متعامدا ممنظما
المعادلة المختصرة لمستقيم (D) غير مواز لمحور الأراتيب هي :y=ax+b
العدد a يسمى المعامل الموجه أو ميل المستقيم(D)
العدد b يسمى الأرتوب عند الأصل

مثال

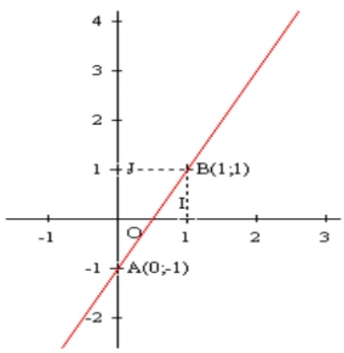
نعتبر (D) مستقيم معادلته المختصرة هي : $(D): y=2x-1$

ميل المستقيم (D) هو العدد 2 ميل المستقيم

الأرتوب عند الأصـل هو العدد 1 -

لننشئ المستقيم (L) الذي معادلته المختصرة هي : $(L): y=2x-1$

x	0	1
y	-1	1
$M(x;y)$	$A(0;-1)$	$B(1;1)$



خاصية

إذا كان المستقيم (D) الذي معادلته y=ax+b , يمر من نقطتين مختلفتين A(x_A ;y_A) و B(x_B ;y_B)
فإن المعامل الموجه يساوي: a=$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ مع $x_B \neq x_A$

مثال

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) بحيث : $B(-2;3)$ و $A(1;-2)$

لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) على شكل : $(AB): y = mx + p$

لنحدد m :

لدينا : $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-3}{1+2} = \frac{-5}{3}$

إذن : $(AB): y = \frac{-5}{3}x + p$

لنحدد p

بما أن النقطة $A(1;-2)$ تنتمي إلى المستقيم (AB) فإن

$$-2 = \frac{-5}{3} \times 1 + p$$

$$-2 = \frac{-5}{3} + p$$

$$p = -2 + \frac{5}{3}$$

$$p = \frac{-6+5}{3}$$

$$p = \frac{-1}{3}$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي : $(AB): y = \frac{-5}{3}x - \frac{1}{3}$

2- شرط توازي مستقيمين

خاصية

ليكن (D) و(D’) مستقيمين بحيث:

(D) :=ax+b و (D’) :=a’x+b’

إذا كان a=a’ فإن (D’)//(D)

إذا كان (D’)//(D) فإن a=a’

مثال

لدينا المستقيمين (D) و (D’) متوازيان بحيث (D) معرف بالمعادلة $y=\frac{1}{2}x+3$ و (D’) يمر من النقطة A(2 ;-1)

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D’)

لدينا (D)//(D’) إذن $a=a'=\frac{1}{2}$ وبالتالي فإن معادلة المستقيم $y=\frac{1}{2}x+b'$

و بما أن المستقيم يمر من A فإن $y_A=\frac{1}{2}x_A+b'$

إذن المعادلة المختصرة ل(D’) $y=\frac{1}{2}x-2$

3- شرط تعامد مستقيمين

خاصية

ليكن (D) و (D’) مستقيمان بحيث:

(D) :=ax+b و (D’) :=a’x+b’

إذا كان $a\times a'=-1$ فإن (D)⊥ (D')

إذا كان (D’) ⊥ (D) فإن $a\times a'=-1$

مثال

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستقيم (D) معادلته المختصرة هي :

$(D): y=2x-1$

لنحدد معادلة المستقيم (Δ) المار من النقطة $A(-1;2)$ و الموازي للمستقيم (D)

لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta): y=mx+p$

بما أن $(\Delta)\perp(D)$ فإن :

$$m\times 2=-1$$

$$m=\frac{-1}{2}$$

إذن : $(\Delta): y=\frac{-1}{2}x+p$

بما أن $A\in(\Delta)$ فإن :

$$2=\frac{-1}{2}\times(-1)+p$$

$$2=\frac{1}{2}+p$$

$$p=2-\frac{1}{2}$$

$$p=\frac{3}{2}$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta): y=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}$

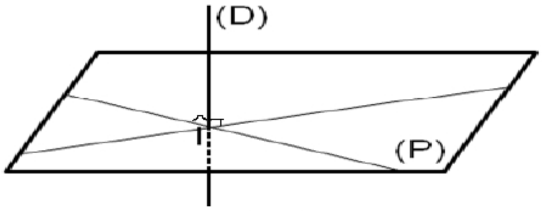
الهندسة الفضائية

1- تعامد مستقيم ومستوى

خاصية 1

يكون مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) في النقطة I. إذا كان عموديا في النقطة I على مستقيمين من (P) متقاطعين في I

مثال

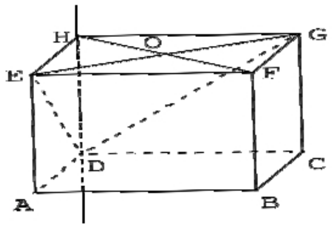


المستقيم (D) عمودي على المستوى (P)

خاصية 2

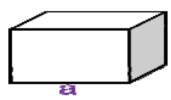
إذا كان (D) مستقيم عموديا على مستوى (P)، فإن (D) يكون عموديا على جميع المستقيمات الموجودة ضمن (P) .

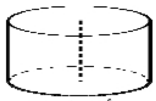
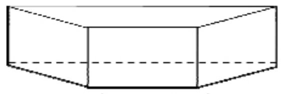
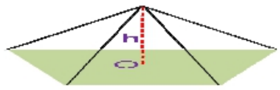
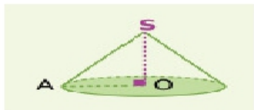
مثال 2



المستقيم (HD) عمودي على (EHG) في H اذن عمودي على جميع المستقيمات المارة من H التي تنتمي للمستوى (EHG)

2- الحجوم

المجسم	الحجم
 متوازي المستطيلات	$V = L \times l \times h$
	$V = a^3$

	المكعب
$V=\pi\times R^2\times h$	 الأسطوانة
$V = B \times h$ B: مساحة القاعدة h: الارتفاع	 الموشور القائم
B: مساحة القاعدة h: الارتفاع $V=\frac{1}{3}\times B\times h$	 الهرم المنتظم
$V=\frac{\pi\times OA^2\times SO}{3}$	 المخروط الدوراني

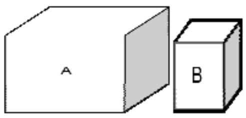
3- التكبير والتصغير

خاصية

عند تكبير أو تصغير مجسم في الفضاء إذا ضربنا الأطوال في عدد موجب K فإن :

- المساحات تضرب في k^2.
- الحجم يضرب في K^3 .

مثال



المكعب A طول حرفه هو 8cm والمكعب B هو تصغير للمكعب A بنسبة $\frac{1}{4}$

$$v_B=\frac{1}{64}v_A$$

$$v_B=\left(\frac{1}{4}\right)^3 v_A$$

لدينا : $v_A=8\times8\times8=512cm^3$ إذن : $v_B=\frac{512}{64}=8cm^3$

الإحصاء

1- تذكير

تعاريف

الساكنة الإحصائية هي المجموعة التي تخضع لعملية الإحصاء و كل عنصر منها يسمى فردا أو وحدة إحصائية
الميزة هي الظاهرة المدروسة
الحصيص هو عدد الوحدات التي تأخذها كل قيمة من قيم الميزة
الحصيص المتراكم لقيمة من قيم الميزة هو مجموعة حصيصات القيم التي تصغر أو تساوي هذه القيمة
التردد المتراكم الموافق لقيمة من قيم الميزة هو نسبة الحصيص المتراكمالموافق لهذه القيمة و الحصيص الإجمالي .
المعدل الحسابي (أو القيمة المتوسطة) لمتسلسلة إحصائية هي : خارج مجموع جداءات قيم الميزة (أو مراكز الأصناف) في الحصيصات الموافقة لهاعلى الحصيص الإجماليو يرمز له بالرمز m

مثال

النقطة على 20 (الميزة)	5	8	10	12	15
عدد التلاميذ (الحصيص)	3	7	7	2	1
الحصيص المتراكم	3	10	17	19	20
التردد	0,15	0,35	0,35	0,1	0,05
التردد المتراكم	0,15	0,50	0,85	0,95	1

المعدل الحسابي :

$$m = \frac{5\times 3 + 8\times 7 + 10\times 7 + 12\times 2 + 15\times 1}{20}$$

$$m = \frac{15 + 56 + 70 + 24 + 15}{20}$$

$$m = \frac{180}{20}$$

$$m = 9$$

إذن المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإصحائية هو: 9

2- القيمة الوسطية

تعريف

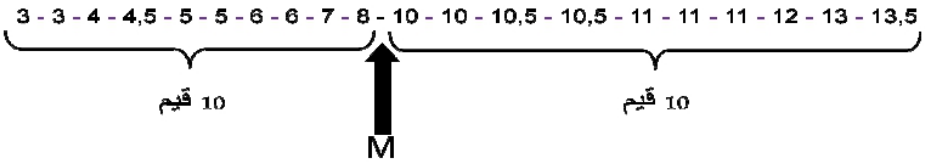
نقول إن عددا حقيقيا M قيمة وسطية لمتسلسلة إحصائية S يعني أن: نصف وحدات الساكنة على الأقل تأخذ فيها الميزة قيما أصغر أو تساوي M و نصف وحدات الساكنة على الأقل تأخذ فيها الميزة قيما أكبر أو تساوي M .

مثال1

نعتبر الكشف التالي هو جرد لنقط تلاميذ قسم من الأقسام في مادة الرياضيات:

3 - 3 - 4 - 4,5 - 5 - 5 - 6 - 6 - 7 - 8

10 - 10 - 10,5 - 10,5 - 11 - 11 - 11 - 12 - 13 - 13,5



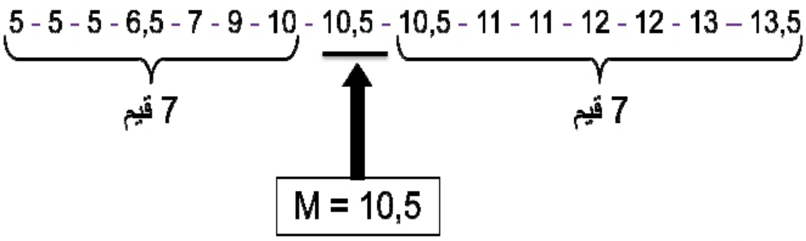
$M = (8 + 10) : 2 = 9$

M هي القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة

مثال2

نعتبر الكشف التالي هو جرد لنقط تلاميذ قسم من الأقسام في مادة الرياضيات:

5 - 5 - 5 - 6,5 - 7 - 9 - 10 - 10,5 - 10,5 - 11 - 11 - 12 - 12 - 13 – 13,5



3- المنوال

تعريف

منوال متسلسلة إحصائية هو كل قيمة (أو صنف) للميزة لها أكبر حصيص

مثال

قيم الميزة	4	5	7	10
الحصيص	5	2	10	3

منوال هذه المتسلسلة الإحصائية هو الميزة 7 لأن لها أكبر حصيص هو 10

4- التشتت

تعريف

نعتبر متسلسلتين الإحصائيتين S1 و S2 لهما نفس المعدل الحسابي m . نقول إن S1 أقل تشتتا من S2 يعني أن قيم ميزة S1 أقرب إلى m من قيم ميزة S2 .

مثال

في الجدول التالي نقط كل من أحمد وخالد في اربعة فروض

نقط احمد	10.5	10	12	11.5
نقط خالد	7	15	17	5

المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية الأولى :

$$\frac{10,5+10+12+11,5}{4} = 11$$

المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية الثانية :

$$\frac{7+15+17+5}{4} = 11$$

المتسلسلتان لهما نفس المعدل الحسابي 11 و نقط أحمد قريبة من المعدل الحسابي، نقول أن نقط أحمد أقل تشتتا حول المعدل الحسابي من نقط خالد.